

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
AERONAVES ROBOTIZADAS

Motion Control of the Parrot AR.Drone
3º Trabalho de Laboratório

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Luís Ferreira, 86655
Renato Loureiro, 89708
Tiago Neto, 89716

2020/21

Índice

Referências	1
1 Introdução	1
2 Componente Teórica	2
2.1	2
2.2	3
2.3	4
2.4	5
2.5	5
2.6	6
2.7	7
2.8	7
3 Componente Laboratorial	9
3.1 Implementation and simulation	9
3.2 Trajetória retilínea	9
3.3 Resultados da trajetória retilínea	10
3.4 Trajetória Circular	11
3.5 Resultados da trajetória Circular	11
3.6 Trajetória circular com drone a apontar para o centro	12
4 Conclusão	14

1 Introdução

Neste trabalho laboratorial, pretende-se abordar os algoritmos necessários para um seguimento autónomo de uma trajetória predefinida. Para tal, começamos por determinar o modelo que rege o movimento do drone, recorrendo às equações da dinâmica/cinemática associadas a um corpo rígido, e analisar a sua estabilidade com o Segundo Método de Lyapunov para a Estabilidade, já que o modelo obtido é não-linear.

Obviamente que no desenho de trajetória é útil termos a liberdade de estabelecermos um caminho sem qualquer tipo de restrições geométricos e ter um controlador que o consiga acompanhar (será sempre necessário ter em consideração que o drone é um sistema subatuado onde terá de haver forçosamente acoplamento de alguns movimentos). No entanto, no limite, podemos sempre decompor qualquer movimento como uma sequência de linhas retas e/ou arcos de circunferência tangentes no ponto de transição, e serão precisamente estes dois movimentos que serão estudados. No entanto, o principal desafio no seguimento deste tipo de trajetórias é o vento, que estará sempre presente num ambiente de funcionamento ao ar livre. Assim, estratégias de seguimento de trajetória têm que ser eficazes no anulamento desta perturbação, estratégias que tentaremos também aplicar.

2 Componente Teórica

2.1

Fazendo uma comparação entre as equações (1) e (2) do enunciado da atividade laboratorial obtém-se:

$$\begin{cases} \ddot{p} = ge_3 - \frac{T}{m}Re_3 & (1) \\ \ddot{p} = ge_3 - R_z(\psi)u^* & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{T}{m}Re_3 = R_z(\psi)u^* \Leftrightarrow \frac{T}{m}R_z(\psi)R_y(\phi_r)R_x(\theta_r)e_3 = R_z(\psi)u^*$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por $R_z(\psi)^{-1} = R_z(-\psi)$, obtém-se uma expressão direta para a entrada virtual u^* :

$$u^* = \frac{T}{m}R_y(\phi_r)R_x(\theta_r)e_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \\ u_z^* \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} \cos(\phi_r)\sin(\theta_r) \\ -\sin(\phi_r) \\ \cos(\phi_r)\cos(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dado que a transformação linear de rotação não altera a dimensão do vetor a que é aplicada, a expressão para intensidade do *thrust* pode ser determinada igualando as normas dos vetores nos dois lados da equação (1):

$$\left(\frac{T}{m}\right)^2 = (u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2 \Leftrightarrow T = m\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2} \quad (2)$$

Tendo obtido a expressão para o *thrust*, é agora possível determinar *phi* e *theta* em função da entrada virtual. θ_r pode ser obtido dividindo a primeira componente pela terceira de (1), tendo:

$$\frac{\sin(\theta_r)}{\cos(\theta_r)} = \frac{u_x^*}{u_z^*} \Leftrightarrow \theta_r = \arctan\left(\frac{u_x^*}{u_z^*}\right) \quad (3)$$

Analisando (1), vê-se que é possível arranjar duas expressões para ϕ_r que, dado o acoplamento de movimentos neste sistema subatuado, se espere que sejam equivalentes: a primeira vem diretamente da segunda componente de (1), utilizando a expressão para o *thrust* obtida em (2):

$$-\frac{T}{m}\sin(\phi_r) = u_y^* \Leftrightarrow \phi_r = \arcsin\left(-\frac{m}{T}u_y^*\right) = \arcsin\left(-\frac{u_y^*}{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2}}\right) \quad (4)$$

A segunda expressão para ϕ_r vem de somar o quadrado da primeira e terceira componentes de (1) (de forma a aplicar a identidade trigonométrica $\sin^2(\theta_r) + \cos^2(\theta_r) = 1$) e novamente utilizando a expressão para o *thrust* obtida em (2):

$$\left(\frac{T}{m}\right)^2 \cos^2(\phi_r) = (u_x^*)^2 + (u_z^*)^2 \Leftrightarrow \phi_r = \arccos\left(\frac{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_z^*)^2}}{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2}}\right) \quad (5)$$

Com as expressões (3) e (4)/(5) obtém-se então os ângulos de Euler de referência a usar no anel interior de controlo da atitude a partir de uma entrada virtual (uma aceleração) expressa num referencial $\{B_2\}$, com o eixo vertical colinear com o referencial $\{I\}$ e com um desfasamento entre eles igual ao ângulo de guinada do quadrotor.

2.2

Para facilitar a obtenção da dinâmica do erro do sistema, podemos primeiro simplificar a expressão do vetor de estados \tilde{x} :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}$$

Assim, as matrizes A e B da representação em espaço de estados da dinâmica do erro é obtida de uma forma muito mais direta:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \ddot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \cdot u \quad (6)$$

onde o subscripto indica a dimensão das matrizes quadradas e em que se definiu u como sendo

$$u = \ddot{\tilde{p}} = \ddot{p} - \ddot{p}_d = ge_3 - R_z(\psi)u^*$$

A partir desta expressão é possível então obter

$$u^* = R_z(-\psi)(ge_3 - \ddot{p}_d - u)$$

Fazendo a ligação com a secção anterior, torna-se então claro que através de uma sequência de transformações é possível obter os ângulos de Euler de referência θ_r e ϕ_r a partir da entrada $u = -K\tilde{x}$ a utilizar na lei de controlo de retroalimentação de estados.

Pretendo-se obter uma matriz K que seja solução do problema de otimização LQR, é preciso primeiro obter a matriz P, resolvendo a equação algébrica de Riccati $A^T P + P A + Q - \frac{1}{\rho} P B B^T P = 0$ e, então, obter K através da expressão $K = \frac{1}{\rho} B^T P$.

Com o controlador LQR implementado, é então finalmente possível obter:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu = A\tilde{x} - BK\tilde{x} = (A - BK)\tilde{x}$$

2.3

Relembrando a representação em espaço de estados do sistema,

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu, \text{ com } \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}$$

Com o método de controlo proposto anteriormente, realiza-se a seguinte realimentação de estados, onde K é obtido por resolução da equação algébrica de Riccati.

$$u = -K\tilde{x}$$

Assim sendo, substituindo a variável de controlo u pela realimentação de estados anterior, obtem-se a seguinte representação em espaço de estados do sistema,

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BK)\tilde{x} \quad (7)$$

Para verificar a estabilidade deste novo sistema, utiliza-se o método de Lyapunov de verificação de estabilidade de sistemas não-lineares, considerando a função quadrática como a função de Lyapunov candidata,

$$V_1 = \tilde{x}^T P \tilde{x} > 0, \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^6 \quad (8)$$

onde a matrix P é uma matrix simétrica definida positiva.

Derivando a função V_1 em ordem ao tempo obtem-se,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{V}_1 &= [(A - BK)\tilde{x}]^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P (A - BK)\tilde{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{V}_1 &= \tilde{x}^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]\tilde{x} \end{aligned} \quad (9)$$

A função \dot{V}_1 obtida pode ser escrita da seguinte forma,

$$\dot{V}_1 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} \quad (10)$$

Substituindo a matrix K na expressão de Q^* pela definição de K , proveniente da resolução da equação de Riccati ($K = R^{-1}B^T P$), obtem-se,

$$Q^* = -[A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - (R^{-1}B^T P)^T B^T P] \quad (11)$$

Aplicando a equação de Riccati em regime estacionário, observa-se que Q^* pode ser escrito como sendo,

$$Q^* = Q + (R^{-1}B^T P)^T B^T P \Leftrightarrow Q^* = Q + \frac{1}{\rho} P^T B B^T P \quad (12)$$

Como a matrix Q e P são ambas matrizes definidas positivas, então Q^* é também uma matrix definida positiva, podendo-se afirmar que,

$$\dot{V}_1 < 0, \forall \tilde{x} \neq 0 \quad (13)$$

Conclui-se assim que o sistema é assintoticamente estável junto do ponto de equilíbrio dado por $\tilde{x} = 0$.

2.4

Como visto na equação (3) do enunciado, vemos que a perturbação w é modelada como uma aceleração pura e que, na impossibilidade de saber o seu valor específico, uma sua estimativa afetará assim a entrada virtual u definida anteriormente. Ainda considerando que esta perturbação é constante, é possível até "esconder" o seu efeito numa possível transformação de coordenadas, evidenciando então que esta perturbação atuará na dinâmica do sistema como uma entrada (logo, estando afetada apenas pela matriz das entradas, B).

Mostrando algebricamente o explicado, tem-se então:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \ddot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ ge_3 - R_z(\psi)u^* + w - \ddot{p}_d \end{bmatrix}$$

Usando a equação (4) do enunciado para a entrada virtual u^* na expressão acima:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ ge_3 - R_z(\psi)(R_z(-\psi)(K\tilde{x} + ge_3 + \hat{w} - \ddot{p}_d)) + w - \ddot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ -K\tilde{x} + \tilde{w} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K\tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{w} = A\tilde{x} - BK\tilde{x} + B\tilde{w} = (A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w} \end{aligned}$$

, obtendo-se então o resultado esperado.

2.5

Para verificar a estabilidade do sistema na presença de perturbações, recorre-se novamente à teoria de estabilidade de Lyapunov, considerando a seguinte função de Lyapunov,

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \quad (14)$$

onde $k_\omega > 0$, $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$ e assumindo que ω é constante.

Derivando a função de Lyapunov V_2 obtem-se,

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{k_\omega} \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) \quad (15)$$

Desenvolvendo \dot{V}_1 considerando a dinâmica com a presença de perturbações, obtem-se,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \\ &= ((A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w})^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P((A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w}) \\ &= \tilde{x}^T [(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK)] \tilde{x} + \tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P B \tilde{\omega} \\ &= -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} \end{aligned} \quad (16)$$

Juntado a equação (16) e (15), obtem-se,

$$\dot{V}_2 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} + \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\tilde{\omega}} \quad (17)$$

Sabendo que $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$ e que se considera ω constante, obtem-se,

$$\dot{V}_2 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} - \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\hat{\omega}} \quad (18)$$

Para garantir que $\dot{V}_2 < 0$ procede-se a igualar os dois últimos membros a zero, obtendo-se,

$$\begin{aligned} 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} - \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\hat{\omega}} &= 0 \\ 2\tilde{\omega}^T (B^T P \tilde{x} - \frac{1}{k_\omega} \dot{\hat{\omega}}) &= 0 \\ B^T P \tilde{x} - \frac{1}{k_\omega} \dot{\hat{\omega}} &= 0 \\ \dot{\hat{\omega}} &= k_\omega B^T P \tilde{x} \end{aligned} \quad (19)$$

A lei de adaptação obtida anteriormente, permite garantir que o sistema é estável em torno do ponto de equilíbrio $\tilde{x} = 0$.

2.6

Considerando agora o sistema tem como vetor de estado $X = [\tilde{x} \ \tilde{\omega}]^T$ e utilizando a lei de adaptação proposta na secção anterior $\dot{\hat{\omega}} = k_\omega B^T P \tilde{x}$, as equações em espaço de estados podem-se escrever como sendo,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & B \\ -k_\omega B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Verifica-se facilmente que o ponto de estabilidade deste sistema aumentado é $X = 0$. Na secção anterior, verificou-se que a lei de adaptação permite garantir que $\dot{V}_2 < 0$, concluindo-se que o sistema é estável perto do ponto de equilíbrio. Para afirmar que o sistema é globalmente assintoticamente estável na origem do sistema, recorre-se ao teorema de Krazovskii-LaSalle:

$$\Omega = \{X : \dot{V}_2(X) = 0\} \quad (21)$$

O maior *invariant set* contido em Ω é a origem, concluindo-se que o sistema proposto é globalmente assintoticamente estável.

2.7

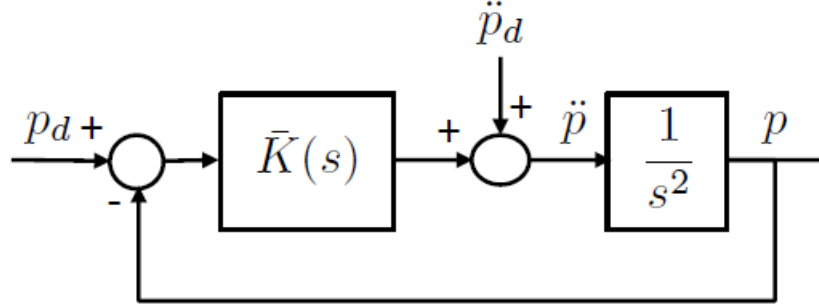


Figura 1: Diagrama de Blocos correspondente à lei de controlo proposta

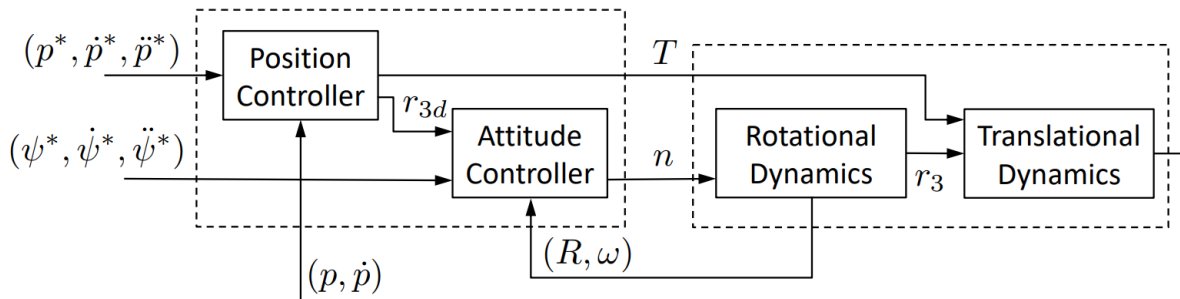
A lei de controlo $\tilde{u} = \ddot{p} - \ddot{p}_d = K \cdot \tilde{x}$ proposta como resolução ao problema de otimização LQR pode então ser expandida, aplicando a transformada de Laplace:

$$\tilde{u} = K\tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{U} = K(s)\tilde{X}(s) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) - P_d(s) \\ s(P(s) - P_d(s)) \end{bmatrix} = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) \Leftrightarrow$$

$$U(s) - s^2P_d(s) = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) \Leftrightarrow U(s) = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) + s^2P_d(s)$$

Da expressão acima e comparando com o diagrama de blocos da figura 1, retira-se então que $\bar{K}(s) = K_1 + K_2s$ e, comparando com a estrutura típica de um controlador PID, conclui-se que os elementos da matriz K_1 representam o termo proporcional ao erro $p_d - p$ da respetiva dimensão e K_2 o termo derivativo. Ainda se acrescenta que a lei de controlo solução do problema LQR não só fornece ferramentas de seguimento de uma referência como também um termo dissipativo que diminui a energia do sistema, obrigando a convergir num valor, ao contrário do que sucederia em sistemas marginalmente estáveis.

2.8

Figura 2: Controlo hierárquico usado no *quadrotor*

Dado o controlo hierárquico que foi desenvolvido nas aulas teóricas, explicitado na figura acima, onde foi implementado uma dinâmica de anel interior de controlo de atitude e um anel externo de controlo de posição, torna-se possível fazer o seguimento independente da posição e do ângulo de guinada desejado (tal como seria de esperar, já que são estas quatro variáveis - três dimensões físicas da dimensão e ângulo de guinada - que constituem o *flat input*, analisado no primeiro laboratório). Assim, assumindo que as constantes de tempo associado a cada anel são diferentes o suficiente para os considerar desacoplados, é então possível desenvolver o controlador linear pedido, usando a variável em si e a sua primeira derivada:

$$\Psi(s) = \frac{\psi}{\dot{\psi}} = \frac{k}{s + a}$$

Assim, pretendendo-se um mecanismo de controlo de *feedback* com seguimento de referência, pode-se então usar um tradicional controlador PID:

- O termo proporcional ao erro entre a referência e saída obtida permite assim garantir um seguimento da referência;
- O termo integral contabiliza os valores anteriores do erro. Assim, se existir um erro residual após a aplicação do termo proporcional, garantido assim um seguimento com erro estático;
- Não havendo requisitos para a velocidade de aproximação da saída da referência, não há então necessidade de um termo derivativo.

O controlador PI será então da forma:

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

Com as funções de transferência associadas ao modelo e ao controlador, e assumindo uma retroalimentação negativa, obtém-se a função de transferência associada à cadeia fechada:

$$\frac{\psi}{\psi_r}(s) = \frac{K(s)\Psi(s)}{1 + K(s)\Psi(s)} = \frac{K_p k s + K_i k}{s^2 + (K_p k + a)s + K_i k}$$

3 Componente Laboratorial

3.1 Implementation and simulation

De forma a implementar o controlador e adaptá-lo às variáveis de entrada foram mantidas as expressões para os ângulos de rolamento, picada e guinada. De forma a simplificar o design foi pressuposto que todas as trajetórias encontravam-se no plano horizontal e que tanto o ângulo de rolamento como os ângulos de picada e guinada são muito pequenos. Foi assumido também que a implementação do controlador é dada por

$$w_r = -k_w(z - z_d) \quad (22)$$

com $k_w=1$.

3.2 Trajetória retilínea

O movimento retilíneo descrito pelo drone foi efetuado a velocidade, altitude e guinada constante. É de esperar que o drone faça uma trajetória que seja uma reta ao longo do eixo horizontal. No bloco *Desired Trajectory* foi descrito o movimento a partir das equações de movimento apresentados abaixo.

$$\begin{aligned} p_d &= \begin{pmatrix} 0.1dt \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{p}_d &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \ddot{p}_d &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

As equações em cima foram implementadas pelo seguinte bloco de código MATLAB.

```
1 pd=[0.1*t;0;1];
2 dot_pd = [0.1;0;0];
3 ddot_pd = [0;0;0];
4 psi_d = 0;
```

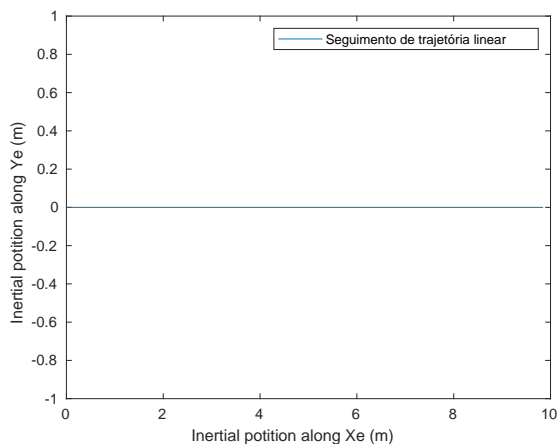
Os ganhos utilizados no controlador foram os seguintes:

$$k_1 = -2.2361$$

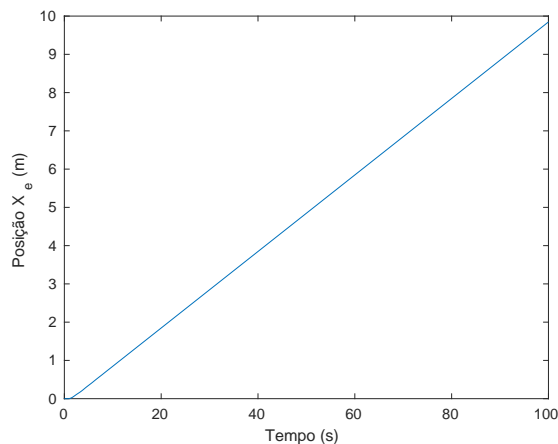
$$k_2 = -3.0777$$

3.3 Resultados da trajetória retilínea

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória retilínea.

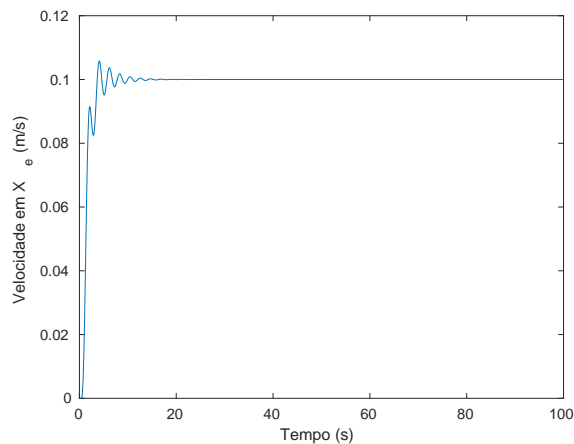


(a) Trajetória percorrida

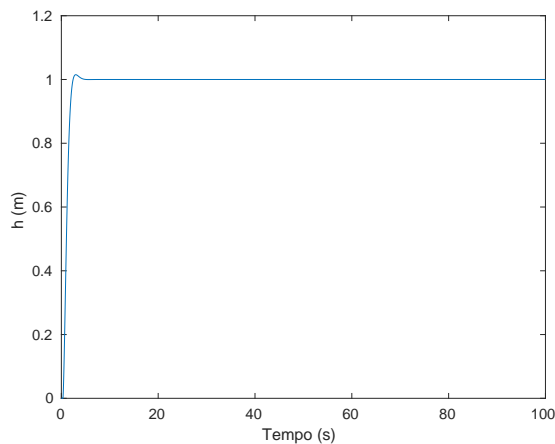


(b) $X_e(t)$

Figura 3: Resultados relativos à posição para uma trajetória retilínea



(a) $V_e(t)$



(b) Variação de $h(t)$

Figura 4: Resultados relativos à velocidade e altura para uma trajetória retilínea

Observa-se através dos gráficos acima que, relativamente à posição, temos um bom seguimento da trajetória, o drone descreve a trajetória proposta de uma forma satisfatória. Relativamente ao gráfico da altitude verifica-se que existe sobre-elevação e que logo a seguir o drone fica com uma altura constante de 1m tal como era esperado. A sobre-elevação existente é pequena. Através do gráfico da velocidade podemos ver que o sistema é oscilatório nos primeiros instantes, mas passado cerca de 15 segundos a velocidade torna-se constante.

Resumindo, o sistema apresenta uma boa resposta e o controlador projetado é satisfatório para uma trajetória retilínea.

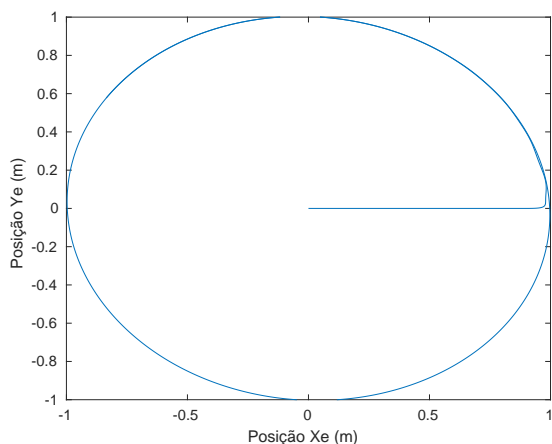
3.4 Trajetória Circular

De seguida pretende-se definir uma trajetória circular num plano horizontal. A trajetória tem um raio de 1 m e é efetuada com uma velocidade angular de 0.1 rad/s e um ângulo de guinada constante. No bloco *Desired Trajectory* foi descrito o movimento a partir do seguinte código MATLAB:

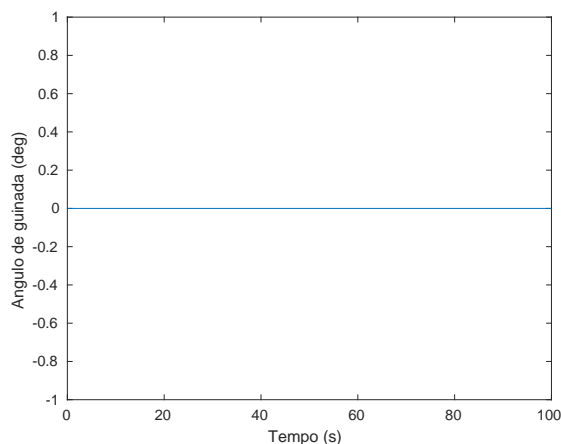
```
1 r=1;
2 omega=0.1;
3 pd=[r*cos(omega*(t-10));r*sin(omega*(t-10));1];
4 dot_pd=[-r*sin(omega*(t-10))*omega; r*omega*cos(omega*(t-10));0];
5 ddot_pd=[-r*(omega^2)*cos(omega*(t-10)); -r*(omega^2)*sin(omega*(t-10));0];
6 psi_d=0;
```

3.5 Resultados da trajetória Circular

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória circular.



(a) Trajetória percorrida



(b) $\psi(t)$

Figura 5: Resultados para uma trajetória circular

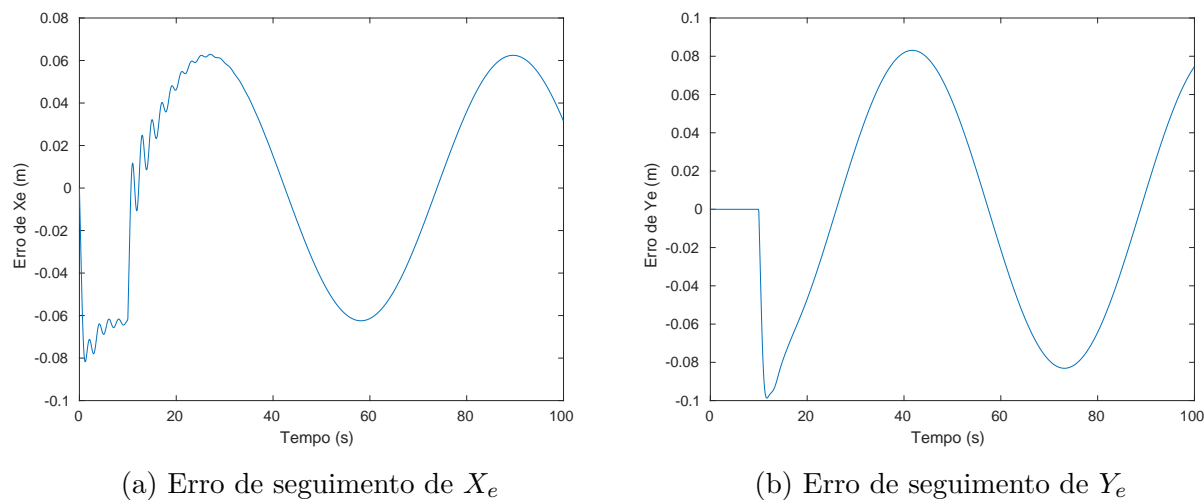


Figura 6: Resultados para uma trajetória circular

Como se pode ver pelo gráfico da figura 5.a o drone começa o seu percurso no centro do referencial e faz uma circunferência de raio 1 com centro na origem. Tanto o erro de seguimento em X como o erro de seguimento em Y possuem um carácter oscilatório porém com uma amplitude relativamente baixa. Nos primeiros segundos pode-se ver que ambos os erros possuem um comportamento peculiar, isto pode-se dever ao facto o drone começar a sua trajetória na origem do referencial. O erro de seguimento em X oscila por entre -0.06 e 0.06 metros e o erro de seguimento em y oscila entre os -0.08 e 0.08. Relativamente ao ângulo de picada, como se pode verificar na figura 5.b este é constante, tal já era esperado.

3.6 Trajetória circular com drone a apontar para o centro

Pretende-se efetuar a mesma trajetória circular que foi descrita anteriormente, mas desta com um ângulo de guinada tal que o drone aponte sempre para o centro da circunferência. Isto é obtido implementado o seguinte código MATLAB no bloco *Desired Trajectory*.

```

1 r=1;
2 omega=0.1;
3 pd=[r*cos(omega*(t));r*sin(omega*(t));1];
4 dot_pd=[-r*sin(omega*(t))*omega; r*omega*cos(omega*(t));0];
5 ddot_pd=[-r*(omega^2)*cos(omega*(t)); -r*(omega^2)*sin(omega*(t));0];
6 psi_d=omega*(t);

```

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória circular com o drone a apontar para o centro da circunferência descrita.

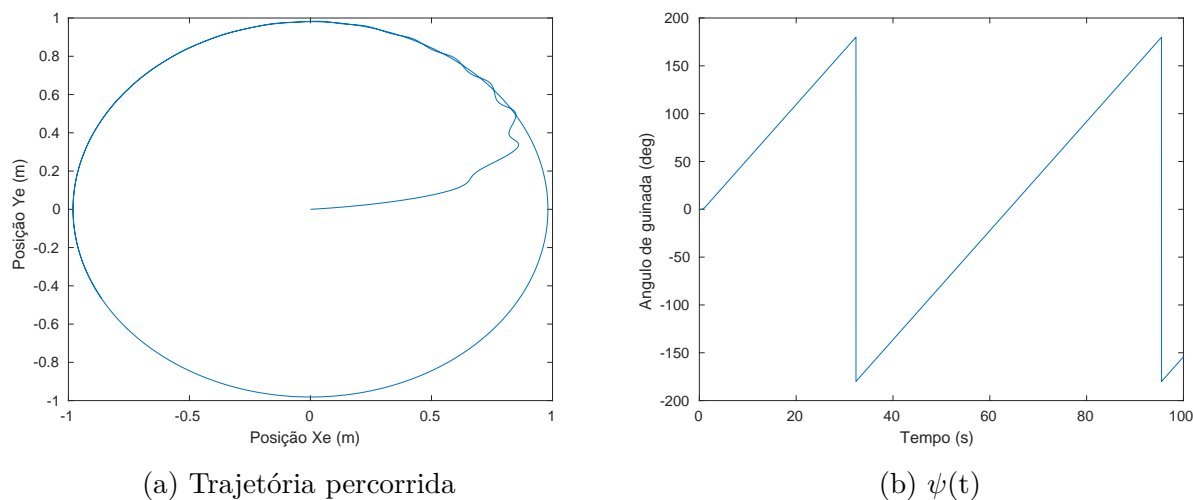


Figura 7: Resultados para uma trajetória circular com o drone virado para o centro

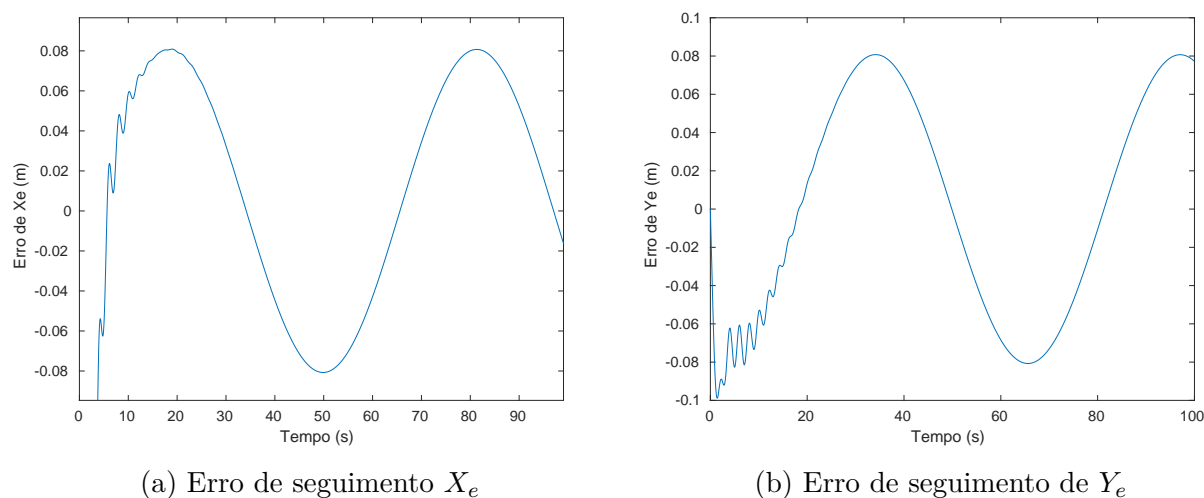


Figura 8: Resultados para uma trajetória circular com o drone virado para o centro

A trajetória efetuada é igual à anterior, uma circunferência de raio centrado na origem do referencial, mas desta vez o ângulo de guinada não é constante pois o drone tem de estar a apontar para o centro da circunferência. Pode-se ver mais uma vez que a trajetória seguida pelo drone coincide com a trajetória pedida e que os erros de seguimento continuam a apresentar um carácter oscilatório à volta dos valores ditos anteriormente. Na figura 8.b pode-se ver o ângulo da guinada em função do tempo, e confirma-se através deste gráfico que o drone está constantemente virado para o centro da circunferência.

4 Conclusão

No relatório presente está apresentado um controlador de seguimento de trajetória para o Parrot AR.Drone onde se baseou nas equações de cinemática/dinâmica simplificadas utilizando um termo de input virtual. Estudou-se uma lei de controlo baseada na solução de controlo ótimo do LQR, sendo que a estabilidade do sistema foi provada com base na Teoria de Lyapunov. Também estudou-se a estabilidade do sistema na presença de perturbações e de um estimador adaptativo das mesmas, onde se verificou que pela teoria de Lyapunov o novo sistema é globalmente assintoticamente estável.

Realizou-se simulações com o controlador proposto para três situações distintas, trajetória em linha reta com velocidade constante e guinada constante, trajetória circular com velocidade angular constante e guinada constante e por ultimo trajetória circular com velocidade angular constante e ângulo de guinada a variar de modo a que o drone esteja sempre orientado para o centro da circunferência descrita por este.

Os resultados obtidos para cada uma das simulações descritas mostraram-se aceitáveis em termos de estabilidade, de seguimento de referencia, com um erro de seguimento desprezável e reduzidas oscilações.