

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
AERONAVES ROBOTIZADAS

---

**Estimation of Motion Variables of the Parrot  
AR.Drone**  
2º Trabalho de Laboratório

---

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Luís Ferreira, 86655  
Renato Loureiro, 89708  
Tiago Neto, 89716

2020/21

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelação e caracterização dos sensores</b>	<b>2</b>
2.1	Caracterização dos sensores para cada experiência . . . . .	2
2.1.1	Experiência A . . . . .	2
2.1.2	Experiência B . . . . .	3
2.1.3	Experiência C . . . . .	3
2.1.4	Correção da altitude . . . . .	4
2.2	Cálculo de $\phi_{raw}$ e $\theta_{raw}$ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Filtro de Kalman</b>	<b>9</b>
3.1	Ângulo de picada . . . . .	10
3.1.1	Parâmetros Q e R . . . . .	10
3.1.2	Design do filtro de Kalman . . . . .	11
3.1.3	Validação do filtro de Kalman . . . . .	11
3.2	Ângulo de rolamento . . . . .	13
3.2.1	Parâmetros Q e R . . . . .	13
3.2.2	Design do filtro de Kalman . . . . .	13
3.2.3	Validação do filtro de Kalman . . . . .	14
3.3	Altitude . . . . .	15
3.3.1	Parâmetros Q e R . . . . .	15
3.3.2	Design do filtro de Kalman . . . . .	16
3.3.3	Validação do filtro de Kalman . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Verificação de filtros complementares</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Filtro de Kalman com integração do bias</b>	<b>21</b>
5.1	Ângulo de picada . . . . .	21
5.1.1	Parâmetros Q e R . . . . .	22
5.1.2	Design do filtro de Kalman . . . . .	23
5.1.3	Filtros Complementares . . . . .	23
5.2	Ângulo de rolamento . . . . .	24
5.2.1	Parâmetros Q e R . . . . .	24
5.2.2	Design do filtro de Kalman . . . . .	24
5.2.3	Filtros Complementares . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Estimação parcial da atitude e do bias</b>	<b>26</b>
6.1	Análise teórica do estimador . . . . .	26
6.2	Design e implementação do filtro . . . . .	28
6.3	Resultados e validação . . . . .	29

## **7 Conclusão**

**33**

# 1 Introdução

No seguimento da atividade laboratorial anterior, onde foi desenvolvido um sistema de controlo em anéis interno/externo, é necessário agora obter medições dos diferentes estados necessários para permitir esse *feedback*. No entanto, em drones modernos, essas variáveis nem sempre são possíveis de serem medidas (nomeadamente, ângulos de Euler e velocidades lineares) e, como tal, é necessário uma estratégia alternativa. O presente relatório tem assim como objetivo o design, implementação e análise de várias soluções para a estimativa do ângulo de picada, rolamento e da altitude, abordando-se principalmente estimadores lineares, i.e. filtro de Kalman, embora no final deste relatório descreve-se uma abordagem diferente das expostas anteriormente, onde se considera a dinâmica do sistema variante no tempo, o que obriga a desenvolver um estimador não linear - esta última abordagem é inspirada no artigo "Partial Attitude and Rate Gyro Bias Estimation: Observability, Filter Design and Performance Evaluation" de autoria de Pedro Batista, Carlos Silvestre e Paulo Oliveira.

Numa fase inicial, antes da criação dos estimadores, modela-se e caracteriza-se os sensores utilizados, obtendo-se o bias e a covariância dos mesmos. Os sensores referidos anteriormente são o giroscópio, acelerómetro e altímetro.

Na implementação do filtro de Kalman considerou-se dois modelos, um onde o vetor de estado estimado tem integrado o bias e outro onde não. Para verificar a eficácia de cada um gerou-se dados simulados de modo a verificar a robustez de cada um à existência de bias nos sensores.

Outro tópico que este relatório aborda é o estudo de filtros complementares, pois verifica-se se os filtros utilizados para cada um dos outputs dos sensores são complementares - na secção respetiva justifica-se a importância desta propriedade.

## 2 Modelação e caracterização dos sensores

Nesta secção do relatório irão ser analisados os diversos sensores presentes no drone através de três experiências:

1. Experiência A: Drone em repouso com os motores desligados;
2. Experiência B: Drone em repouso no chão mas com os motores ligados;
3. Experiência C: Drone a pairar a uma altitude de  $1m$  durante um certo período de tempo e depois aterra.

Iráo também ser analisados os ruídos associados aos sensores e outras perturbações que possam existir nas medições do sensor de movimento.

### 2.1 Caracterização dos sensores para cada experiência

#### 2.1.1 Experiência A

Como foi dito anteriormente, para esta experiência o drone está assente no chão com os motores desligados logo, à partida, não existem vibrações ou deslocações de ar significativas que possam afetar os valores medidos pelos sensores. Estes dados foram obtidos durante 30s com uma frequência de  $200Hz$ . É importante referir que as primeiras 10 amostras de todos os sensores são nulas: isto pode dever-se ao facto de os sensores estarem a iniciar ou então a existência de um atraso no MATLAB, de forma que estas amostras foram eliminados e a análise presente abaixo fez-se sem esses dados.

Começando pelo estudo dos acelerómetros, era esperado que tanto a aceleração em  $x$  como a aceleração em  $y$  fossem iguais a 0 e que a aceleração em  $z$  (aceleração vertical) fosse igual à aceleração gravítica. Os valores médios e a covariância podem ser vistos na tabela abaixo. Os valores presentes na tabela para a aceleração encontram-se em  $m/s^2$ . Os valores de aceleração tanto para o  $x$  como para o  $y$  coincidem com os valores esperados, não são iguais a zero mas o desvio apresentado não é significativo e pode ter haver com ligeiras inclinações presentes no chão ou no drone.

As velocidades angulares presentes na tabela estão em  $rad/s$  e como se poderia esperar estes estão muito próximos de zero sendo que o drone encontra-se parado.

Relativamente ao sensor da altura este apenas consegue medir alturas a partir de um determinado valor, quando se encontra em repouso este indica uma altura padrão de  $3.3469 \times 10^{-43}m$ . A sua variância é em termos práticos igual a zero visto que é um valor constante.

Os valores de variância presentes na tabela para os valores tanto de aceleração como de altura e velocidade angular representam as perturbações e o ruído nos sensores.

Tabela 1: Valores médias e variâncias para a experiência A

Exp A	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$w_x$	$w_y$	$w_z$	Altura
$\mu$	-0.103	-0.279	-10.003	$-6.17 \times 10^{-4}$	$-6.79 \times 10^{-4}$	0.0014	$3.35 \times 10^{-43}$
$\sigma^2$	0.0072	$9.46 \times 10^{-4}$	0.0019	$6.25 \times 10^{-7}$	$5.012 \times 10^{-7}$	0.0020	$7.49 \times 10^{-89}$

### 2.1.2 Experiência B

Para a segunda experiência realizada o drone encontra-se no chão com os motores ligados enquanto é aplicada uma força sobre o drone para este se manter no chão. Vai ser possível através desta experiência verificar se o facto de os motores estarem ligados cria perturbações e afeta os valores medidos pelos sensores. A média e a covariância dos valores obtidos podem ser conferidos na tabela que se encontra abaixo.

A altitude para esta experiência possui alguns valores inválidos (Nan) mas grande parte dos valores eram na ordem dos  $10^{-43}$  o que indica que o valor dado pelo sensor é o valor padrão de altitude  $3.3469 \times 10^{-43}m$  e que o nosso drone se encontra no chão. A sua variância devido a ser um valor constante é também neste caso igual a zero.

Os dados relativos às acelerações são muito próximos dos dados obtidos para a experiência A mas como se pode ver a partir da tabela o valor das covariâncias encontra-se maior.

Em relação às velocidades angulares verifica-se o mesmo que se verificou para as acelerações, os valores médio são parecidos mas as covariâncias para a experiência B são maiores.

Sendo que os valores de covariância representam o ruído e as interferências nos sensores, era de esperar que os valores fossem maiores para a experiência B visto que existem mais vibrações e ruídos causados pelo motores do drone.

Tabela 2: Valores médias e variâncias para a experiência B

Exp B	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$w_x$	$w_y$	$w_z$	Altura
$\mu$	-0.24	-0.32	-9.94	$2.89 \times 10^{-4}$	$-6.12 \times 10^{-4}$	0.0021	$3.35 \times 10^{-43}$
$\sigma^2$	0.051	0.023	0.0118	0.0015	$8.74 \times 10^{-4}$	0.0052	0

### 2.1.3 Experiência C

Para a experiência C o drone encontra-se a pairar a um metro de altitude e depois aterra passado um certo período de tempo. Vamos ter influências aerodinâmicas e, tal e qual como na experiência B, vibrações e ruídos originários dos motores. A média e a covariância dos valores dados pelos sensores encontram-se na tabela abaixo.

Tanto os valores médios de aceleração como os valores médios das velocidades angulares encontram-se parecidos com os da experiência B o que já era esperado excepto o valor da velocidade angular no eixo dos Z que é menor na experiência C. Em relação à covariância a maior parte dos valores obtidos têm uma ordem de grandeza diferente relativamente à experiência B.

Tabela 3: Valores médias e variâncias para a experiência C

Exp C	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$w_x$	$w_y$	$w_z$	Altura
$\mu$	0.125	-0.292	-10.098	$5.43 \times 10^{-4}$	$-9.17 \times 10^{-4}$	$4.27 \times 10^{-4}$	$7.64 \times 10^{-43}$
$\sigma^2$	0.0125	0.031	0.697	0.0098	0.0081	$8.482 \times 10^{-4}$	$1.62 \times 10^{-85}$

### 2.1.4 Correção da altitude

Na figura abaixo encontra-se o gráfico para a altura não corrigida para a experiência C.

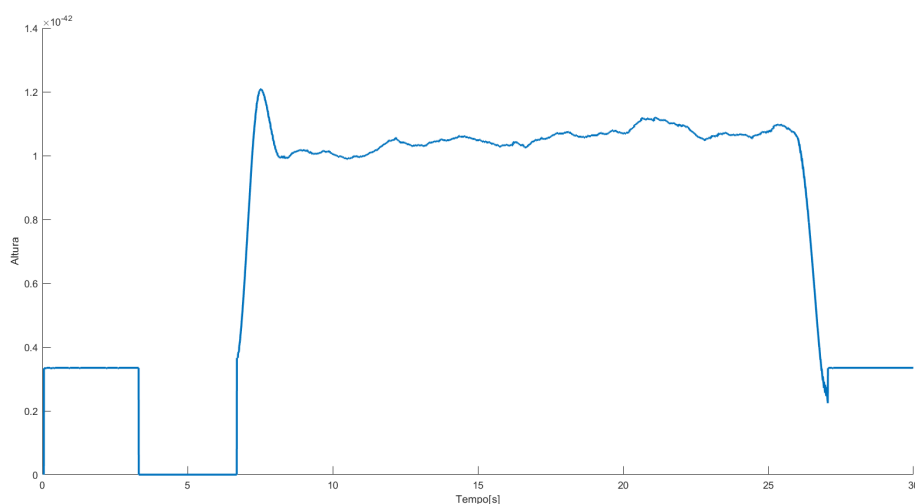


Figura 1: Altura não corrigida experiência C

Como se pode ver pelo gráfico existe um problema de calibração no sensor. Para corrigir este problema começou-se por multiplicar a altura por um fator de  $10^{42}$ . De seguida subtraímos 0.334 à altura visto que a altura inicial e final (alturas estas que são iguais a 0) estavam com um offset de 0.334. Finalmente, de forma ao drone oscilar por volta de 1m multiplicou-se a altura por 1.4 e foi obtido o gráfico abaixo.

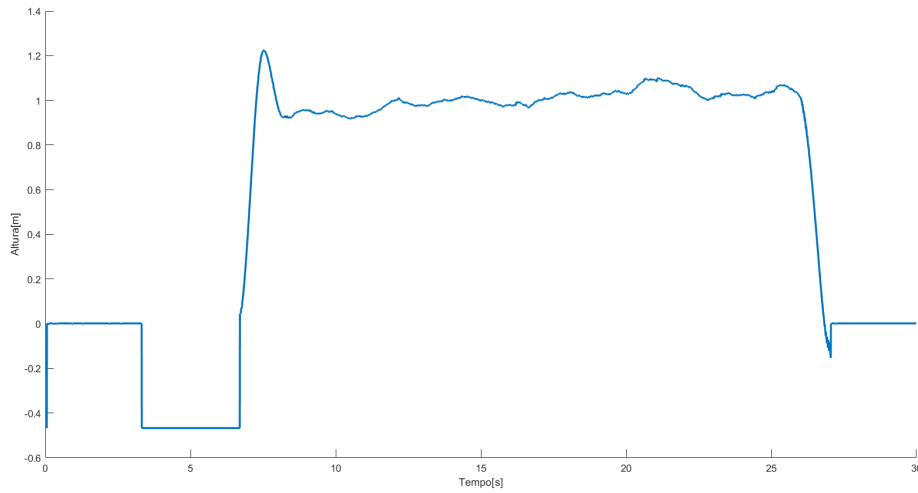


Figura 2: Altura Corrigida experiência C

Com esta correção podemos obter valores novos para a média e para a covariância da altura, estes valores podem ser encontrados abaixo.

Tabela 4: Comparação entre altura corrigida e não corrigida

Altura	$\mu$	$\sigma^2$
Corrigida	0.6026	0.3180
Não corrigida	$7.64 \times 10^{-43}$	$1.62 \times 10^{-85}$

## 2.2 Cálculo de $\phi_{raw}$ e $\theta_{raw}$

Em aeronaves, três acelerómetros são normalmente usados. Os acelerómetros são montados perto do centro do massa, com o eixo de medição alinhado com cada um dos eixos do referencial  $\{B\}$ , e medem a diferença entre a aceleração da aeronave e a aceleração gravítica. Matematicamente, tem-se:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} + qw - rv + g\sin(\theta) + \eta_{a,x} \\ a_y &= \dot{v} + ru - pw - g\cos(\theta)\sin(\phi) + \eta_{a,y} \\ a_z &= \dot{w} + pv - qu - g\cos(\theta)\cos(\phi) + \eta_{a,z} \end{aligned}$$

onde  $\eta_{a,x}$ ,  $\eta_{a,y}$ ,  $\eta_{a,z}$  representam um possível modelo matemático do ruído dos sensores: ruído branco Gaussiano aditivo, de média nula e com uma variância diferente associada a cada um.



Olhando para as equações acima, é então possível usar os acelerómetros como inclinómetros e obter uma aproximação dos ângulos de picada e de rolamento, assumindo um ponto de funcionamento do drone perto do ponto de equilíbrio (sem aceleração), onde se pode assumir que  $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = p = q = r = 0$ , obtendo assim as seguintes equações:

$$\begin{aligned}a_x &= g \sin(\theta) + \eta_{a,x} \\a_y &= -g \cos(\theta) \sin(\phi) + \eta_{a,y} \\a_z &= -g \cos(\theta) \cos(\phi) + \eta_{a,z}\end{aligned}$$

Ignorando para já o ruído associado a cada uma das medições, dividindo o simétrico da 2ª equação pelo simétrico da 3ª, obtém-se então uma expressão para o ângulo de rolamento  $\phi$ :

$$\phi_{raw} = \text{atan2}(-a_y, -a_z)$$

Existem então duas possíveis aproximações para o ângulo de picada  $\theta$ . A primeira consiste em usar apenas a primeira equação, obtendo-se:

$$\theta_{raw} = \text{asin}\left(\frac{a_x}{g}\right)$$

A segunda consiste então em usar todas as medições dos acelerómetros, ao dividir a primeira equação pela norma do vetor  $(a_y, a_z)$ :

$$\theta_{raw} = \text{atan2}\left(a_x, \sqrt{a_y^2 + a_z^2}\right)$$

Usando as medições da experiência D, que apresentarão mais variação do ângulo de picada, pode-se então comparar o que é obtido com cada uma das expressões:

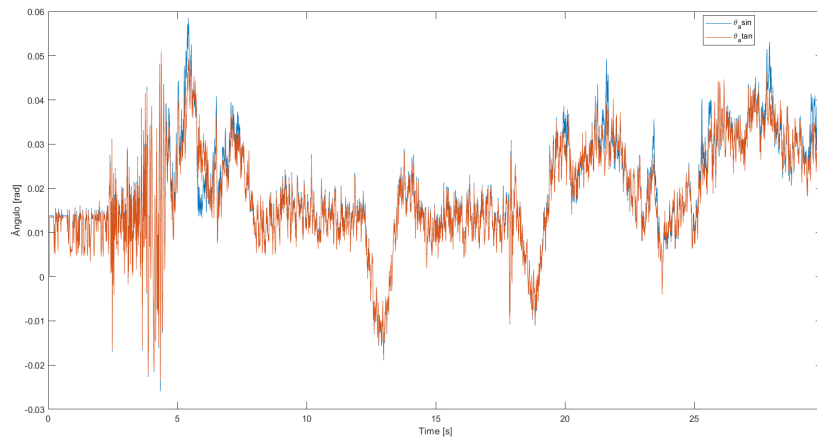


Figura 3: Comparação entre as duas expressões para  $\theta_{raw}$

Os valores obtidos com ambas as expressões são muito semelhantes, podendo-se argumentar que numa situação hipotética de completa ausência de ruído, estes seriam exatamente iguais. Tal como discutido no laboratório anterior, é esperado que esta igualdade ocorra dado o facto de o drone ser um sistema subatuado e, como tal, existirá um acoplamento de movimentos que se traduz numa relação direta entre as diferentes variáveis da cinemática/-dinâmica. No entanto, de forma a utilizar o maior número de variáveis numa tentativa de diminuir o erro, utilizar-se-á ao longo da atividade laboratorial a segunda expressão para o ângulo de picada.

Abaixo podem ser vistos os gráficos para os ângulos de picada e de rolamento para a experiência C e para a experiência D respetivamente.

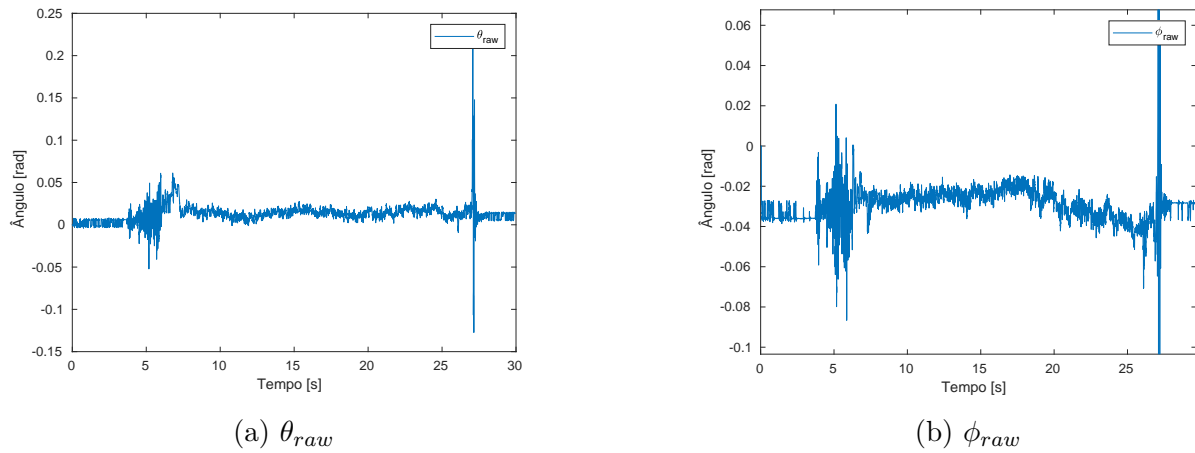


Figura 4: Experiência C

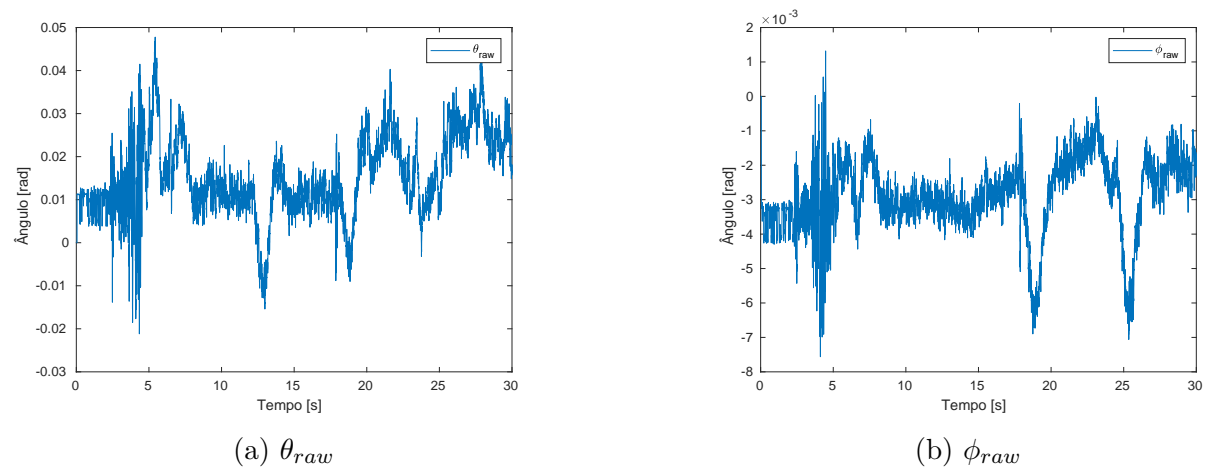


Figura 5: Experiência D

Os dados relativos à experiência D podem ser entendidos se analisarmos o que aconteceu (ou o que era suposto ter acontecido) durante a sua realização. Olhando para os *waypoints*

waypoints						
5x10 double						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0.5000	0.5000	0	0	0
2	0	0	0.5000	0.5000	0	0
3	1	1	1	1	1	0
4	0	0	1.5708	1.5708	0	0
5	5	5	5	5	5	5

Figura 6: *Waypoints* definidos para a experiência D. Cada coluna representa um *input* específico, onde as entradas estão organizadas por linhas, de forma ordenada:  $x_I$ ,  $y_I$ , altura, *heading* e tempo de espera

mostrados na figura seguinte (instantes temporais para os quais o *flat* input está completamente definido) percebe-se originalmente comandou-se ao drone realizar uma trajetória semelhante a um quadrado (após descolar na vertical e depois da qual aterriza novamente na vertical):

Conclui-se então que o drone terá de realizar uma miríade de movimentos num plano horizontal: translação linear provocada apenas por variação do ângulo de picada, translação linear provocada apenas por variação do ângulo de rolamento e, finalmente, uma mistura dos dois. Estes movimentos podem ser observados ao olhar para a figura 5b e tomar alguns instantes como exemplo: entre o instante 10s e o 15s, verifica-se que o drone apresenta apenas um ângulo de picada não nulo, que corresponde então a um dos movimentos que o drone faz de translação. O traçado efetivamente percorrido pelo drone pode então ser recolhido dos estados devolvidos pelo *Simulink*:

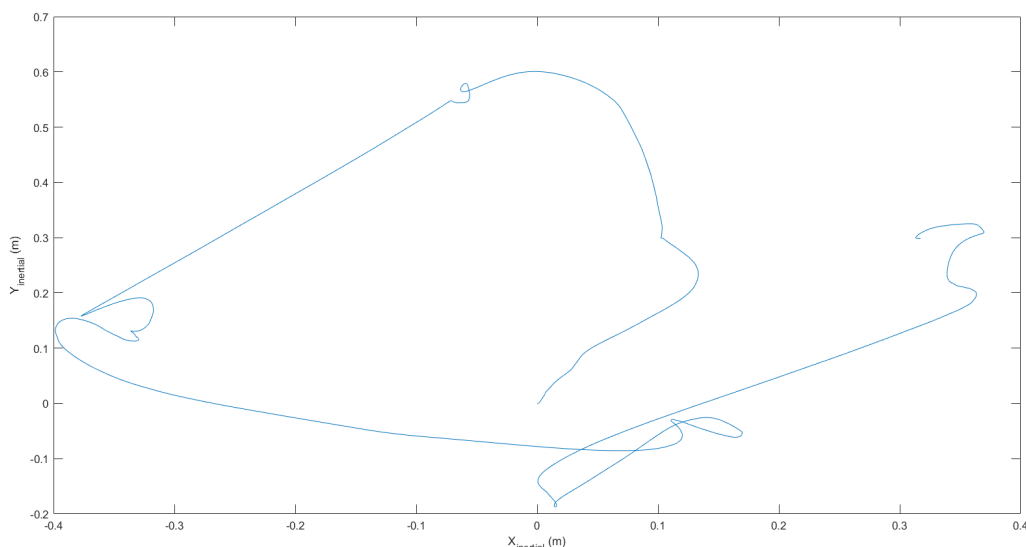


Figura 7: Caminho percorrido pelo drone no plano horizontal

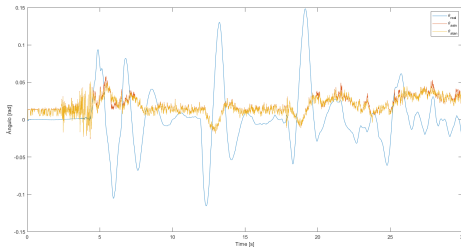
Vê-se na imagem que o drone não segue fielmente os pontos disponibilizados, mas que

aproximadamente se consegue ver o quadrado inicialmente pretendido (rodado um dado ângulo dado pela relação entre o referencial inercial  $\{I\}$  e o referencial NED terrestre). No entanto, para a atividade laboratorial em vigor, não estamos preocupados com um seguimento preciso da trajetória mas sim com a estimativa dos ângulos de Euler, que esta experiência fornece de qualquer das formas.

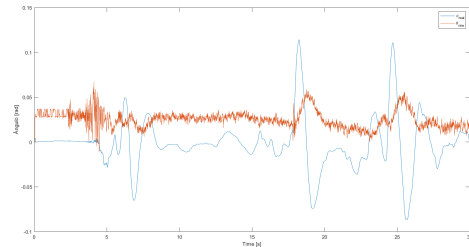
### 3 Filtro de Kalman

Nesta secção aborda-se o desenvolvimento e implementação de filtros de Kalman que permitem estimar o ângulo de picada, rolamento e a altitude do quadri-rotor. Na validação da implementação recorre-se aos dados reais de sensores e dos dados reais do estado do quadri-rotor, mas também recorre-se a dados simulados de modo a identificar mais facilmente possíveis erros de implementação e desvantagens do próprio estimador.

Os controladores normalmente desenvolvidos assumem que estados do sistema como os ângulos de rolamento e de picada estão disponíveis para *feedback*. No entanto, um dos desafios de *design* dos drones modernos é que não estão disponíveis sensores que medem estas variáveis diretamente. Mesmo usando os dados obtidos dos acelerómetros aliados a algumas aproximações matemáticas/físicas, verifica-se nas figuras seguintes que o erro de estimação durante voo acelerado é demasiado grande para não ser ignorado:



(a) Ângulo de Picada



(b) Ângulo de Rolamento

Figura 8: Comparação entre os ângulos de Euler reais e medidos

Assim, torna-se necessário obter estimativas mais exatas destes estados para um *feedback* útil e, daí, a implementação de um filtro de Kalman. Este sistema também é bastante importante na estimação de estados na presença de medidas ruidosas

A estimativa do vetor de estado por aplicação do filtro de Kalman é dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t) - D(t)u(t)) \quad (1)$$

onde a segunda parcela representa um algoritmo de correção devido a erros de medição, em que o ganho do observador (estimador de estados)  $K(t)$  é designando como ganho de Kalman e é dado por:

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1} \quad (2)$$

A matriz  $P$  presente na equação anterior é designada por matriz de covariância do erro e é calculada ao determinar a solução da *Algebraic Riccati Equation* (ARE), equação (3):

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + Q - K(t)RK^T(t) \quad (3)$$

Nas presentes implementações considerar-se-á um modelo linearizado, ou seja a matrix da dinâmica do sistema é uma constante que não dependerá do tempo, i.e.  $A(t) = A$ , mas também considera-se que  $B(t) = B$ ,  $C(t) = C$  e  $D(t) = D$ .

Com as anteriores simplificações é apenas necessário para cada caso determinar a priori o ganho de Kalman.

### 3.1 Ângulo de picada

A representação em espaço de estados considerada tem como entrada a medida do giroscópio e o ângulo de picada como saída - na equação (4) apresenta-se o modelo de espaço de estados.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $x = \theta$ ,  $u = \omega_{ym}$  e  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  e  $D = 0$ , onde se assumiu que:

$$\omega_y = \dot{\theta} + \eta_{\omega,y} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \omega_y - \eta_{\omega,y} \quad (5)$$

Como foi dito anteriormente obtém-se o valor do ângulo de picada através dos acelerómetros enquanto que  $\dot{\theta}$  vem dos giroscópios mas as medições obtidas são obtidos no referencial local {B}, sendo preciso efetuar uma mudança de referencial através da matriz rotação. Como estamos na presença de ângulos pequenos e as perturbações existentes são de ordem baixa podemos dizer que a razão angular medida pelo giroscópio é igual à razão angular do referencial inercial {I}.

#### 3.1.1 Parâmetros Q e R

O desempenho do filtro de Kalman depende do ajuste feito às matrizes Q e R e, como tal, a escolha dos valores para estas matrizes é de extrema importância. Começou-se por assumir, tal como é suposto, que estas matrizes eram iguais às covariâncias dos ruídos do sistema, já que, por definição, a matriz Q representa a covariância do erro das variáveis de estado do processo (medições dos giroscópios) e a matriz R a covariância do erro da saída (medições dos acelerómetros).

Tanto a matriz Q como a matriz R afetam a otimização da função de custo, i.e. o desempenho do filtro de Kalman, sendo que um aumento dos valores da matriz R faz com que se dê menos importância aos valores obtidos através do inclinómetro e um aumento da matriz Q faz com que as medições provenientes do giroscópio sejam menos importantes.

Nas simulações efetuadas, fixou-se o valor de  $Q$  como o valor da maior variância do erro encontrado nas medições do giroscópio na direção  $y$  ( $Q = 0.0081$ ) e, tal como feito habitualmente, o valor de  $R$  é definido iterando vários valores, normalmente múltiplos de  $Q$ , tendo-se chegado a, por exemplo,  $R = 0.0405$  ( $R = 5 \cdot Q$ ). Verificou-se que esta era uma das combinações que apresentava o melhor resultado das estimativas.

### 3.1.2 Design do filtro de Kalman

Tendo em conta os resultados previamente obtidos, foi implementado o filtro de Kalman no *Simulink*, descrevendo o seguinte modelo,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (6)$$

É possível obter diretamente a função transferência escrita abaixo a partir do modelo do filtro de Kalman apresentado anteriormente,

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{s + K} \cdot \omega_{ym} + \frac{K}{s + K} \cdot \theta_m \quad (7)$$

com  $K = 0.4472$ .

### 3.1.3 Validação do filtro de Kalman

Para avaliar o filtro proposto realizou-se simulações com dados de simulação de modo a verificar mais facilmente certos aspetos do filtro implementado, i.e. observou-se a robustez do filtro e do efeito na estimação quando existe bias nos sensores.

Apresenta-se na figura 9 o modelo em *Simulink* utilizado para a realização de testes do filtro de Kalman.

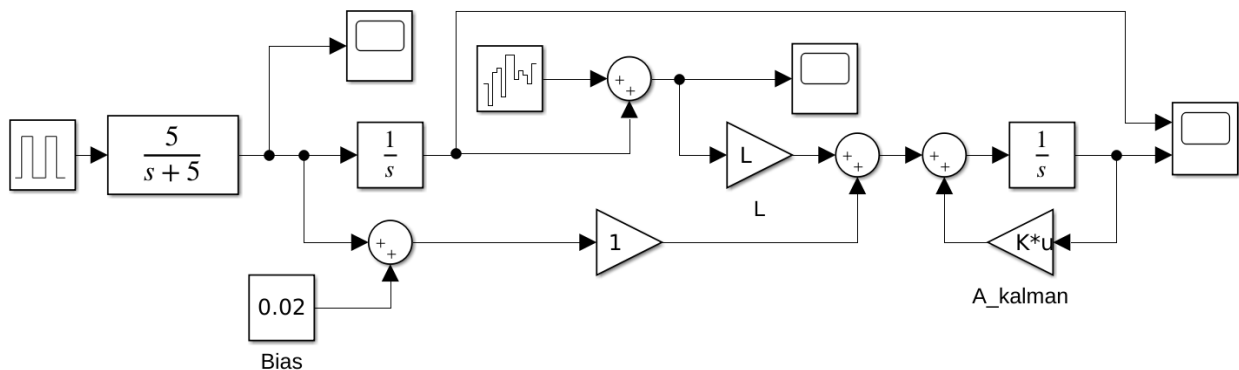
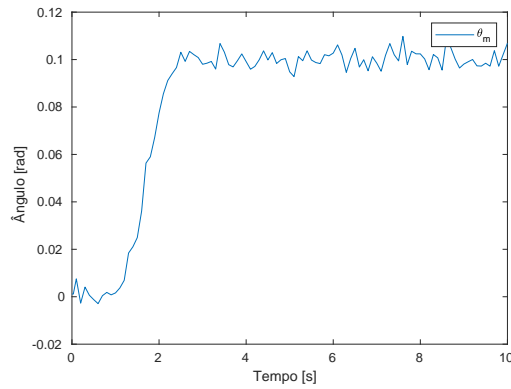
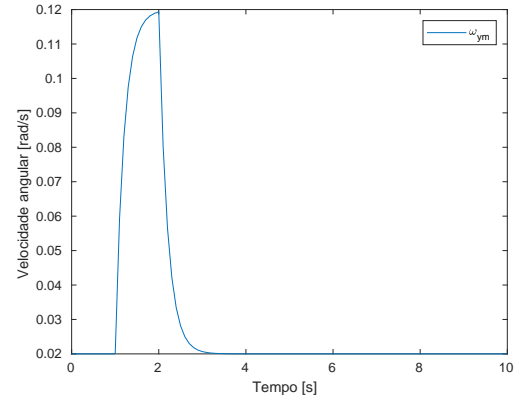
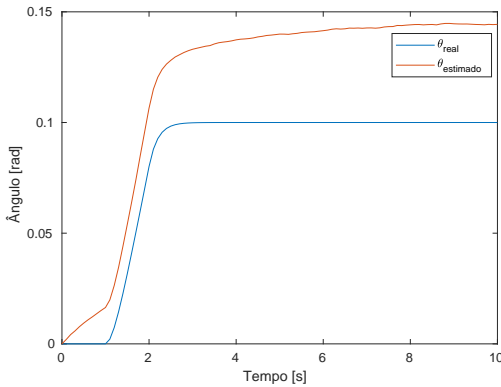


Figura 9: Bancada de teste dos filtros

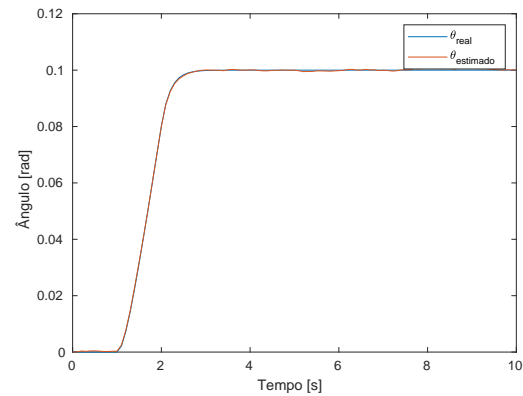
Os resultados seguintes pressupõem a existência de um bias no giroscópio de 0.02 e também existência de ruído na medição do ângulo de picada. Na figura 10 apresenta-se as entradas utilizadas ao nosso sistema, verificando-se que impôs-se ruído no  $\theta_m$  e um bias de 0.02 no  $\omega_{ym}$ .

(a) Dados gerados de  $\theta_m$ (b) Dados gerados de  $\omega_m$ Figura 10: Dados de input gerados de  $\theta_m$  e  $\omega_{ym}$ 

Os resultados da estimação realizada pelo filtro estão apresentados na figura 11, onde se observa que a existência de ruído não afeta de forma significativa a estimação, mas pelo contrário, a ocorrência do bias no giroscópio, afeta o resultado obtido da estimação - pode-se concluir que esta implementação não é robusta quando a existência de bias nos sensores.



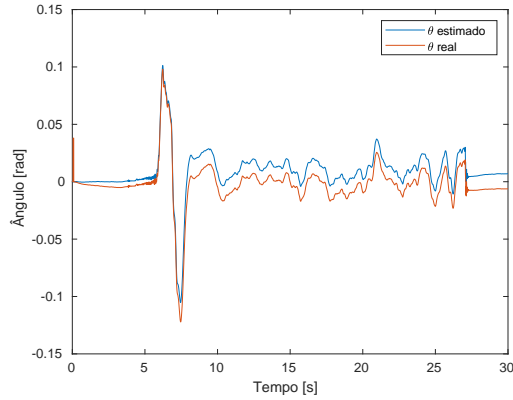
(a) Resultado obtido com os inputs descritos anteriormente



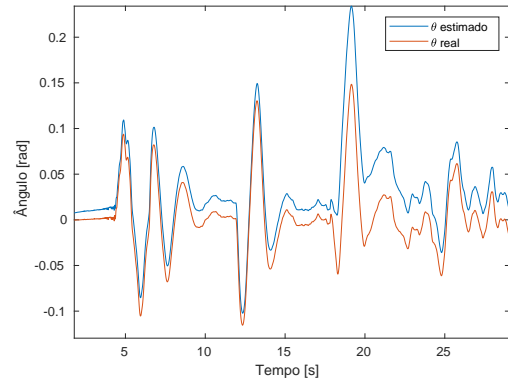
(b) Resultado obtido retirando o bias artificial de 0.02

Figura 11

Apresenta-se de seguida os resultados obtidos pelo filtro descrito, para caso da experiência C e D.



(a) Resultados obtidos a partir da experiência C



(b) Resultados obtidos a partir da experiência D

Figura 12

Tal como já enunciado na análise do filtro com dados gerados por simulação, este estimador não é capaz de anular o bias existente, mas é capaz de apresentar uma dinâmica idêntica ao valor real, i.e. os dois sinais apenas se diferenciam por um offset.

## 3.2 Ângulo de rolamento

O modelo adotado para o rolamento é análogo ao apresentado para a picada, sendo que apenas se diferenciam pelas entradas e saídas do sistema, i.e.

$$u = \omega_{xm}, \quad y = \phi_m \quad (8)$$

Tal como apresentado para a picada, assume-se a aproximação de pequenos ângulos, o que resulta na hipótese de  $\omega_{xm} = \dot{\phi}$ .

### 3.2.1 Parâmetros Q e R

O processo adotado na escolha das matrizes Q e R foi análogo ao anteriormente especificado no caso da picada, tendo-se obtido por iteração, os seguintes valores de Q e R que resultam nos melhores resultados da estimação,

$$Q = 0.0098, \quad R = 0.0059$$

### 3.2.2 Design do filtro de Kalman

Tal como foi feito para o ângulo de picada, implementou-se o filtro de Kalman em *Simulink* e obteve-se a seguinte função transferência referente ao ângulo de rolamento,

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{s + K} \cdot \omega_{xm} + \frac{K}{s + K} \cdot \phi_m \quad (9)$$

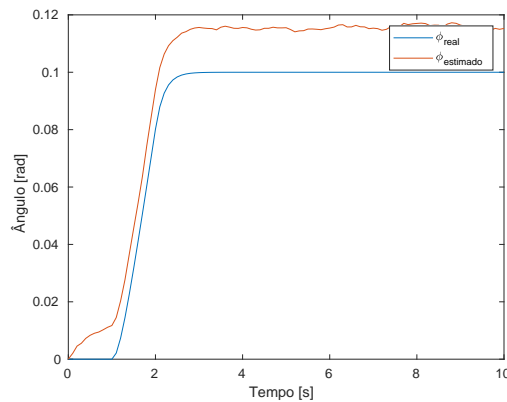


com  $K = 1.2910$ .

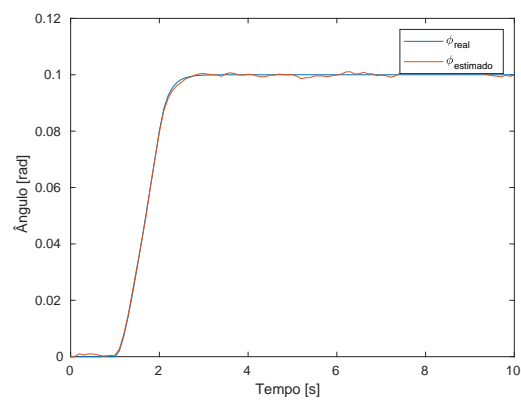
### 3.2.3 Validação do filtro de Kalman

De forma análoga à validação do filtro de Kalman para o ângulo de picada, foi avaliado o filtro através da análise de simulações para se observar a robustez do filtro e os efeitos na estimação quando existe bias nos sensores.

Mais uma vez os resultados foram obtidos para um bias de 0.02. Foram obtidas conclusões semelhantes às obtidas anteriormente, a implementação utilizada não é robusta o suficiente em relação à existência de bias nos sensores mas, em contrapartida, a existência de ruído não afetou de forma relevante as estimações obtidas.



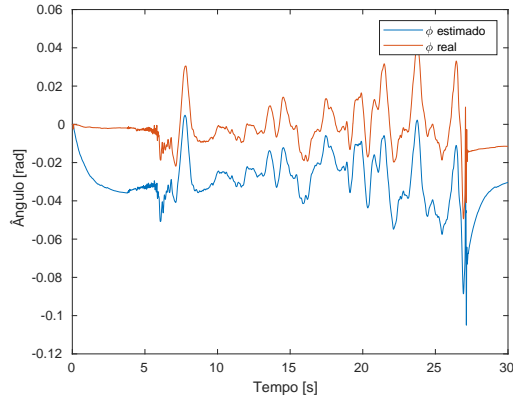
(a) Resultado obtido com os inputs descritos anteriormente



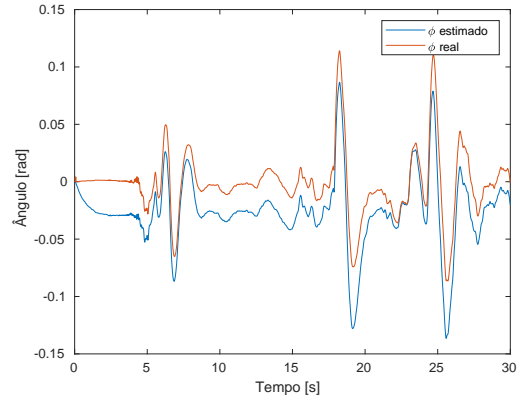
(b) Resultado obtido retirando o bias artificial de 0.02

Figura 13

Para a experiência C e D pode ser isto abaixo o gráfico que mostra os resultados obtidos para o filtro.



(a) Resultados obtidos da estimação de  $\phi$  com os dados dos sensores da experiência C



(b) Resultados obtidos da estimação de  $\phi$  com os dados dos sensores da experiência D

Figura 14

Comprovamos mais uma vez aquilo que foi dito acima, este filtro é capaz de apresentar uma dinâmica parecida ao valor real não sendo capaz de anular o bias existente. Os dois sinais estão separados por um offset.

### 3.3 Altitude

A representação em espaço de estados considerada para o modelo da altitude assumindo como medidas dos sensores a segunda derivada da altitude e a altitude, sendo este obtidos pelo acelerómetro e pelo altímetro, é dada por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x &= [h \ \dot{h}]^T \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (10)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0 \quad (11)$$

e o modelo tem como entrada e saída,

$$u = \ddot{h}_m, \quad y = h_m \quad (12)$$

#### 3.3.1 Parâmetros Q e R

A partir das covariâncias dos sensores obtidos nas experiências A, B e C, e após um processo iterativo, definiu-se as matrizes Q e R da seguinte forma,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}, \quad R = 7.69 \cdot 10^{-6} \quad (13)$$

### 3.3.2 Design do filtro de Kalman

A dinâmica do estimador de Kalman pode ser representado para este caso em concreto da estimação da altitude como a seguinte função de transferência,

$$\hat{x}(s) = [Is - A + KC]^{-1}B\ddot{h}_m + [Is - A + KC]^{-1}Kh_m, \quad \hat{x}(s) = \begin{bmatrix} \hat{h}(s) \\ \dot{\hat{h}}(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

com

$$K = \begin{bmatrix} 7.4 \\ 27.38 \end{bmatrix}$$

Concretizando e substituindo todos os valores da dinâmica, conclui-se com as seguintes funções de transferência que relacionam a estimação da altitude com a aceleração vertical medida,  $\ddot{h}_m$ , e com a altitude medida,  $h_m$ .

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{s^2 + 7.401s + 27.39}\ddot{h}_m + \frac{7.4s + 27.386}{s^2 + 7.401s + 27.39}h_m$$

Também se apresenta as mesmas funções de transferência mas para o caso da estimação da velocidade vertical  $\dot{h}_m$ ,

$$\dot{\hat{h}}(s) = \frac{s + 7.4}{s^2 + 7.401s + 27.39}\ddot{h}_m + \frac{27.386s}{s^2 + 7.401s + 27.39}h_m$$

### 3.3.3 Validação do filtro de Kalman

Para verificar as vantagens e desvantagens do estimador proposto, realizou-se simulações com dados de teste antes de se utilizar dados reais das experiências C e D - o modelo de *Simulink* utilizado para estes testes foi o seguinte,

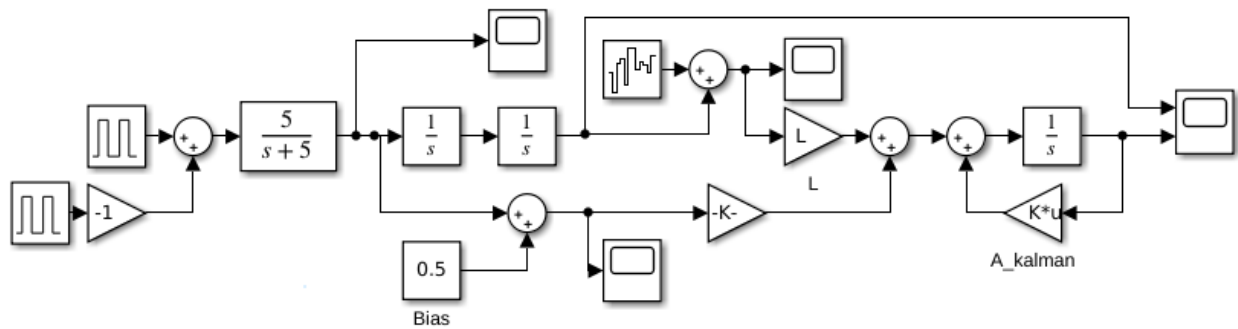


Figura 15: Bancada de teste em *Simulink* para testagem do filtro de Kalman

Obteve-se os seguintes resultados da estimação da altitude, tendo em consideração que foi colocado no acelerómetro um bias de 0.5 e ruído gaussiano no altímetro.

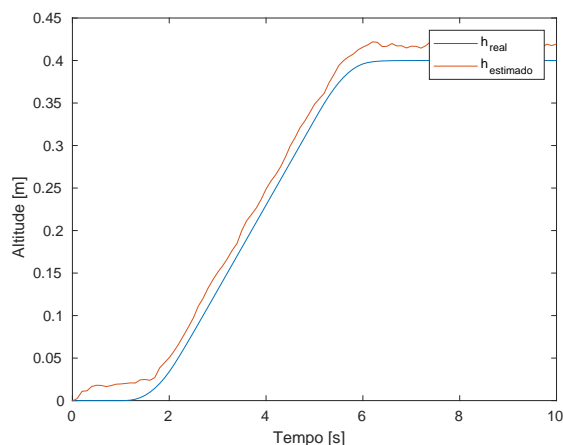
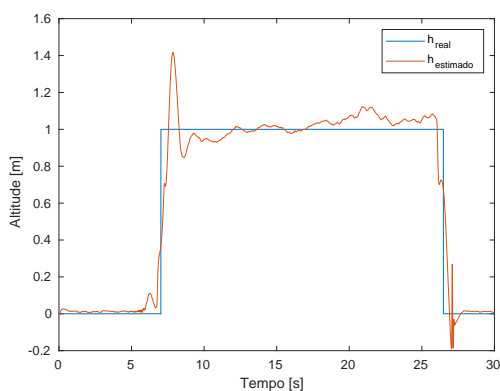


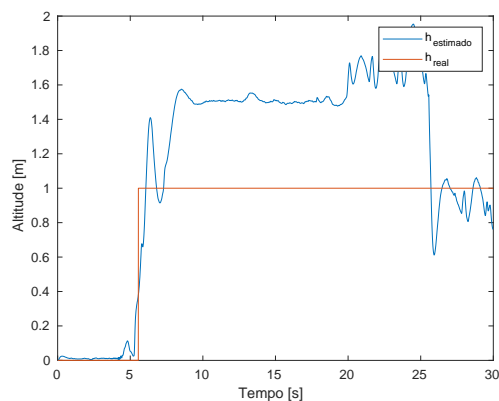
Figura 16: Resultados da estimativa da altitude no ambiente de testagem

Observa-se que o estimador não é capaz de remover o bias implementado no filtro, mas é capaz de ser robusto contra o ruído existente no altímetro, observando-se nesse aspeto bons resultados.

Ao utilizar os dados de sensores das experiências C e D obteve-se os seguintes resultados nos gráficos expostos a baixo, onde se observa que na experiência C o estimador consegue de forma correta estimar o valor de  $h$ , mas na experiência D ocorre uma diferença muito maior nos valores da estimação, assume-se na verdade que isto talvez de deva a algum erro nos sensores e que provocou a existência deste bias enorme durante o período de tempo exposto.



(a) Resultados obtidos da estimação de  $h$  com os dados dos sensores da experiência C



(b) Resultados obtidos da estimação de  $h$  com os dados dos sensores da experiência D

Figura 17

## 4 Verificação de filtros complementares

Nesta secção avalia-se se os filtros anteriormente apresentados para cada caso são complementares. Esta condição é essencial no design dos estimadores dado que estamos a considerar medidas provenientes de pelo menos dois sensores distintos, i.e. giroscópio e acelerómetro.

De modo a compreender a intuição da necessidade de implementar filtros complementares apresenta-se alguns aspetos a ter em consideração relativamente aos sensores.

No giroscópio a integração da sua medida permite obter um valor estimado do ângulo, mas este desvia-se ao valor real ao longo do tempo, e assim é notório a necessidade de implementar um filtro passa-alto.

Relativamente ao dados obtidos pelo acelerómetro, estes são afetados por pequenas perturbações, e assim é perceptível a aplicação de um filtro passa-baixo que permite atenuar estas mesmas perturbações.

A condição necessária para que dois filtros sejam complementares é dada por,

$$H_1(s) + H_2(s) = 1 \quad (15)$$

sendo que cada função de transferência anterior corresponde à relação entre o valor estimado e o output do sensor.

Obteve-se no estimador do ângulo de picada as seguintes relações,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{s + 0.4472} \cdot \omega_{ym} + \frac{0.4472}{s + 0.4472} \cdot \theta_m \quad (16)$$

i.e.

$$\frac{\hat{\theta}}{\omega_{ym}} = \frac{1}{s + 0.4472} \quad , \quad \frac{\hat{\theta}}{\theta_m} = \frac{0.4472}{s + 0.4472} \quad (17)$$

Considerando que  $\theta_{inclinómetro} = \frac{\omega_{my}}{s}$ , verifica-se que,

$$\frac{\hat{\theta}}{\omega_{ym}} \cdot s + \frac{\hat{\theta}}{\theta_m} = \frac{s}{s + 0.4472} + \frac{0.4472}{s + 0.4472} = 1 \quad (18)$$

Assim verifica-se que o estimador implementado garante que os filtros são complementares.

Para complementar os resultados anteriores apresenta-se o diagrama de bode da magnitude para cada um dos filtros.

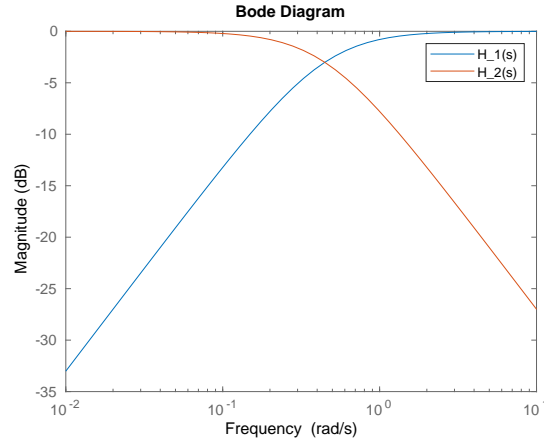


Figura 18: Diagrama de Bode da magnitude,  $H_1(s) = s \cdot \frac{\hat{\theta}}{\omega_{ym}}$  e  $H_2(s) = \frac{\hat{\theta}}{\theta_m}$

No caso do ângulo de rolamento, os resultados são análogos e apresenta-se-os a seguir de forma sintética,

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{s + 1.2910} \cdot \omega_{xm} + \frac{1.2910}{s + 1.2910} \cdot \phi_m \quad (19)$$

i.e.

$$\frac{\hat{\phi}}{\omega_{xm}}(s) = \frac{1}{s + 1.2910}$$

$$\frac{\hat{\phi}}{\phi_m}(s) = \frac{1.2910}{s + 1.2910}$$

Considerando que  $\omega_{xm} = s \cdot \phi$ , verifica-se a condição de complementaridade dos filtros,

$$\frac{\hat{\phi}}{\omega_{xm}} \cdot s + \frac{\hat{\phi}}{\phi_m} = \frac{1}{s + 1.2910} \cdot s + \frac{1.2910}{s + 1.2910} = 1$$

Para complementar a anterior afirmação, apresenta-se os respetivos diagramas de bode de magnitude dos filtros,

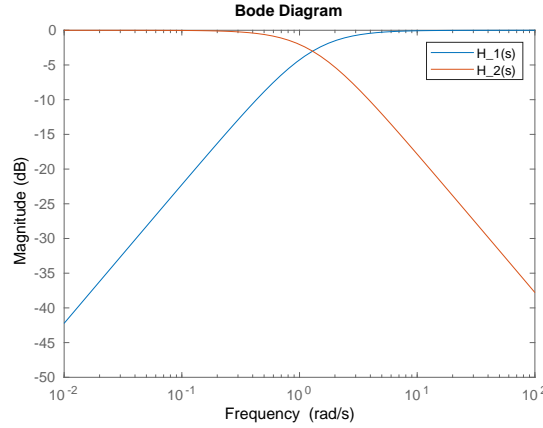


Figura 19: Diagrama de Bode da magnitude,  $H_1(s) = s \cdot \frac{\hat{\phi}}{\omega_{xm}}$  e  $H_2(s) = \frac{\hat{\phi}}{\phi_m}$

No caso da estimação da altitude, os resultados são semelhantes embora a diferença seja que se está a trabalhar com um modelo de segunda ordem ao contrário do modelo de primeira ordem observado na picada e rolamento. Apresenta-se de seguida as funções de transferência entre a estimação da altitude e a altitude medida pelo altímetro e a altitude calculada a partir do acelerómetro:

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{s^2 + 7.401s + 27.39} \ddot{h}_m + \frac{7.4s + 27.386}{s^2 + 7.401s + 27.39} h_m \quad (20)$$

Considerando  $\ddot{h}_m = s^2 h_{m1}$ , pode-se reescrever a função de transferência da seguinte forma,

$$\hat{h}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 7.401s + 27.39} h_{m1} + \frac{7.4s + 27.386}{s^2 + 7.401s + 27.39} h_m \quad (21)$$

Novamente é verificável a condição que garante que os filtros são complementares,

$$\frac{\hat{h}}{h_{m1}} + \frac{\hat{h}}{h_m} = \frac{s^2}{s^2 + 7.401s + 27.39} + \frac{7.4s + 27.386}{s^2 + 7.401s + 27.39} = 1$$

Para complementar os resultados anteriores, apresenta-se os diagramas de bode de magnitude de cada filtro:

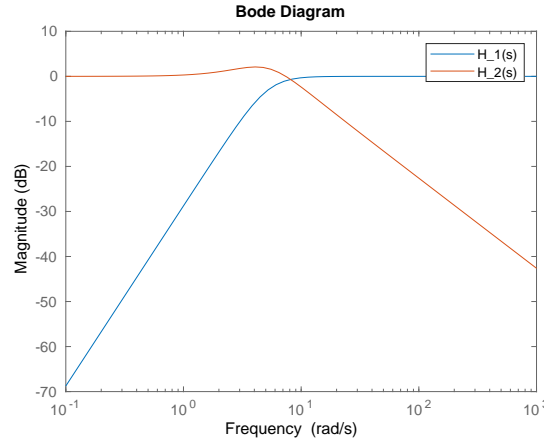


Figura 20: Diagrama de Bode da magnitude,  $H_1(s) = \frac{\hat{h}}{h_{m1}}$  e  $H_2(s) = \frac{\hat{h}}{h_m}$

## 5 Filtro de Kalman com integração do bias

Em drones modernos, equipados com acelerómetros e giroscópios que medem, respetivamente, as acelerações e velocidades angulares no referencial solidário com o corpo  $\{B\}$  (não necessariamente colineares), é impossível medir todos os doze estados introduzidos na atividade laboratorial anterior. No entanto, continua a ser possível estimar alguma informação dos estados não englobados pelo sensor e ainda, sendo o foco desta secção, estimar o *bias* que afeta a exatidão dos sensores. Estimar este *offset* torna-se particularmente importante para evitar a divergência do erro de integração em cadeia aberta dos sensores. Ao estimar parcialmente a atitude e o *bias* dos giroscópios, é possível melhorar os sistemas de navegação, ao eliminar este efeito negativo.

Nesta secção, analisar-se-á este método para os ângulos de picada e rolamento (importantes na estabilização de um drone, ao contrário do ângulo de guinada).

### 5.1 Ângulo de picada

Retornando à equação (5), este termo de *bias* que se considera constante é facilmente introduzido fazendo:

$$\omega_y = \dot{\theta} + b_y + \eta_{\omega,y} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \omega_y - b_y - \eta_{\omega,y} \quad (22)$$

Introduzindo agora um novo vetor de estados  $x = [\theta \quad b_y]^T$ , mantendo a mesma entrada  $u = \omega_y$  e pretendendo-se ainda a mesma saída (o ângulo de picada,  $y = \theta$ ), obtém-se a nova dinâmica de espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (23)$$



### 5.1.1 Parâmetros Q e R

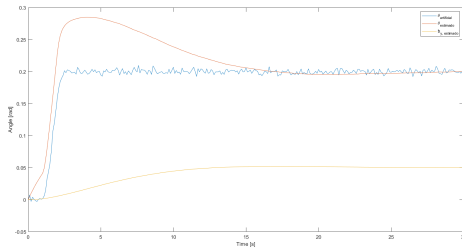
Tal como anteriormente, apesar de teoricamente as matrizes Q e R representarem a variância das medições associadas, respetivamente, ao processo (entradas) e às saídas, na realidade vai-se assumir estes valores apenas como condições iniciais de iteração, de forma a encontrar valores que produzam razoáveis.

No entanto, dado a introdução de um novo estado, a matriz Q deixa de ser um único a escalar para passar a ser uma matriz quadrada de dimensão igual a 2 de forma a conter todas as combinações possíveis de variância e covariância entre os dois estados (é também uma matriz diagonal já que se irá considerar que as medições/estimativas dos dois estados são independentes e, como tal, a sua covariância é nula)

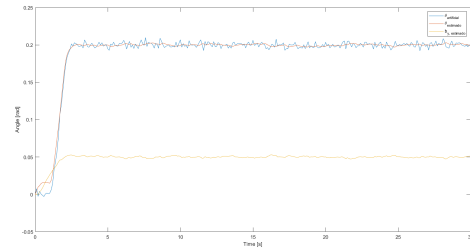
Apesar de se ter definido que o valor do *bias* é constante, a sua estimativa não o será e, como tal, é preciso definir uma variância razoável de forma a controlar a gama de valores possíveis para esta estimativa. Assim se chegou aos valores abaixo apresentados, em Q (nomeadamente a segunda entrada da diagonal) foi escolhido de forma a apresentar uma dinâmica aceitável na estimativa do *bias* numa plataforma de teste com um *offset* artificial e R para que haja uma convergência do valor da saída estimado ao real:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_q^2 & 0 \\ 0 & 20 \cdot \sigma_q^2 \end{bmatrix}, \quad R = 200 \cdot \sigma_q^2, \quad \sigma_q^2 = 0.0081(rad/s)^2$$

onde  $\sigma_q^2$  representa a variância do erro associado às medições do giroscópio para a razão angular de picada.



(a)  $Q_{22} = \sigma_q^2$



(b)  $Q_{22} = 1000 \cdot \sigma_q^2$

Figura 21: Dinâmica da estimativa do valor do bias, para valores diferentes da variância

Estes ensaios foram realizados com recurso à bancada de testes da figura 9. Verifica-se que um aumento do valor da matriz Q aumenta a velocidade da dinâmica do sistema em resposta a um bias artificial. No entanto, o sistema torna-se mais facilmente excitável, não estabilizando completamente no valor introduzido, mas sim oscilado em torno dele. O valor de Q foi então escolhido entre os dois valores mencionados de forma a balançar velocidade de resposta e "nervosismo".

### 5.1.2 Design do filtro de Kalman

Recorrendo novamente à equação (15), é possível então calcular as várias funções de transferência envolvidas no sistema:

$$\frac{\hat{\theta}}{\omega_{ym}}(s) = \frac{s}{s^2 + 0.7984s + 0.3162} \quad \frac{\hat{b}_y}{\omega_{ym}}(s) = \frac{0.3162}{s^2 + 0.7984s + 0.3162} \quad (24)$$

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta_m}(s) = \frac{0.7984s + 0.3162}{s^2 + 0.7984s + 0.3162} \quad \frac{\hat{b}_y}{\theta_m}(s) = \frac{-0.3162s}{s^2 + 0.7984s + 0.3162} \quad (25)$$

A dinâmica associada a estas funções de transferência podem ser encontradas na evolução temporal das variáveis em estudo. Usando novamente os resultados da experiência D, que são os que mais se assemelham a uma situação real normal, de seguida apresenta-se a comparação entre as duas estimativas para o ângulo de picada (com e sem a estimativa do *bias*) e o real:

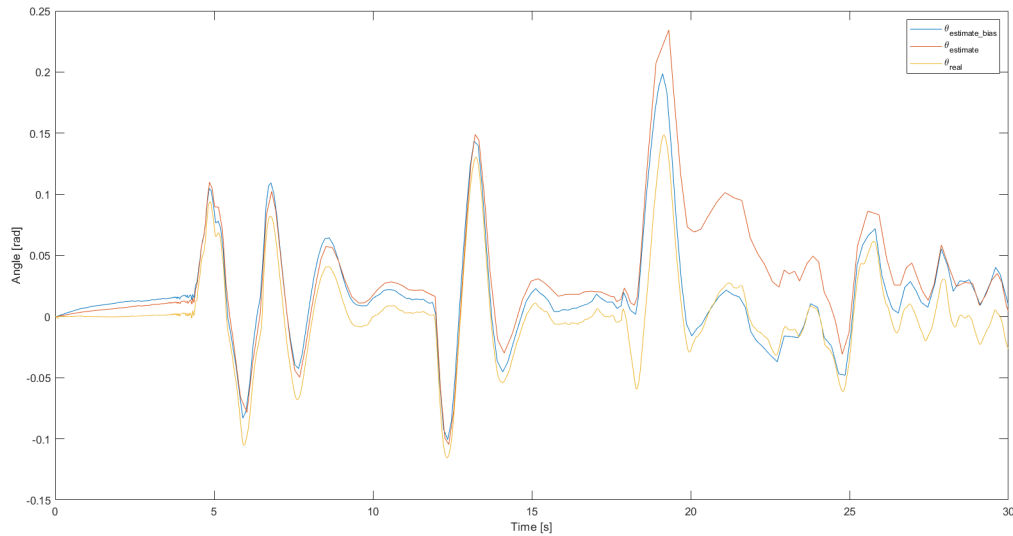


Figura 22: Comparação entre as estimativas do ângulo de picada e o real

Agora com a inclusão da estimativa do *bias*, a estimativa do ângulo de picada aproxima-se muito mais do real que o anterior, verificando-se então a premissa teórica de como a inclusão desta variável nos vetores de estado resulta num melhor desempenho dos sistemas de navegação.

### 5.1.3 Filtros Complementares

Olhando para as equações (25) e (27) verifica-se novamente que o filtro de Kalman para a estimativa de  $\theta$  usando informação obtida relativa ao seu valor e sua derivada continua a produzir uma combinação de filtros complementares, ou seja, continuamos a estar numa

situação em que combinamos as vantagens dos dois sensores: para frequências altas, o giroscópio é muito preciso e não está susceptível a forças externas. Para frequências baixas, o acelerómetro tem um melhor seguimento estático.

Como seria de esperar, o mesmo não se aplica à estimativa obtida do bias. No entanto, olhando para as equações de transferência associadas a essa variável, verifica-se que, em módulo:

$$\left| \frac{\hat{b}_y}{\omega_{ym}}(s) \right| = s \cdot \left| \frac{\hat{b}_y}{\theta_m}(s) \right|,$$

o que não é surpreendente, dado a relação entre  $\theta$  e  $\omega_y$  perto do ponto de equilíbrio ( $\frac{d\theta}{dt} = \omega_y$ ) e dado que as únicas fontes de informação estão relacionados com o ângulo e não com o bias; logo, apresentarão a mesma estimativa em relação ao bias.

## 5.2 Ângulo de rolamento

Dada as simplificações tomadas, nomeadamente a proximidade do ponto de equilíbrio, o espaço de estados representativo da dinâmica do ângulo de rolamento é semelhante à do ângulo de picada, dada por (23).

### 5.2.1 Parâmetros Q e R

Tal como dito anteriormente, dada a igualdade da dinâmica entre o ângulo de rolamento e picada perto do ponto de equilíbrio, não só se obteve matrizes Q e R com a mesma dimensão e características, como também a escolha precisa dos seus valores foi feita de igual forma, tendo-se obtido:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2/10 \end{bmatrix}, \quad R = \sigma_p^2/5, \quad \sigma_p^2 = 0.0098(rad/s)^2$$

### 5.2.2 Design do filtro de Kalman

As funções de transferência obtidas serão então semelhantes às obtidas para o ângulo de picada, ainda que com uma dinâmica diferente (coeficientes diferentes):

$$\frac{\hat{\phi}}{\omega_{xm}}(s) = \frac{s}{s^2 + 2.533s + 0.7071}, \quad \frac{\hat{b}_x}{\omega_{xm}}(s) = \frac{0.7071}{s^2 + 2.533s + 0.7071} \quad (26)$$

$$\frac{\hat{\phi}}{\phi_m}(s) = \frac{2.533s + 0.7071}{s^2 + 2.533s + 0.7071}, \quad \frac{\hat{b}_x}{\phi_m}(s) = \frac{-0.7071s}{s^2 + 2.533s + 0.7071} \quad (27)$$

Validando os filtros de Kalman obtidos com a resposta temporal do sistema durante a experiência D:

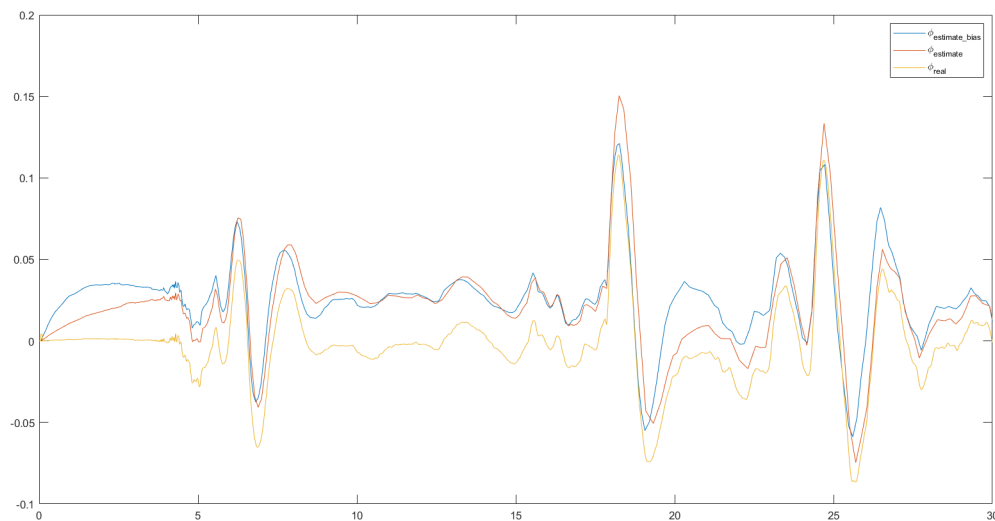


Figura 23: Comparação entre as estimativas do ângulo de rolamento e o real

Verifica-se que mesmo com a introdução do *bias* do giroscópio nos estados que a estimativa do ângulo de rolamento não melhora, apesar de as matrizes  $Q$  e  $R$  terem sido escolhidas de forma ter bons resultados de aproximação, quer do *bias*, quer do valor do ângulo em si. Possivelmente, apesar de a dinâmica dos dois ângulos ser igual nesta situação, as não linearidades envolvidas antes das aproximações são mais influentes para este ângulo do que para o de picada, levando então a este resultado contra-intuitivo (na medida em que a introdução do *bias* devia melhorar a estimativa, e não ser indiferente).

### 5.2.3 Filtros Complementares

As funções de transferência são em muitos semelhantes às obtidas para o ângulo de picada e, como tal, as conclusões mantêm-se.

## 6 Estimação parcial da atitude e do bias

Nesta secção realiza-se uma abordagem diferente na estimação da atitude do quadri-rotor comparativamente ao descrito nas secções anteriores onde se aplicou um filtro de Kalman a um modelo linear. A base do filtro implementado nesta secção está descrito no artigo "Partial Attitude and Rate Gyro Bias Estimation: Observability Analysis, Filter Design and Performance Evaluation" de autoria de Pedro Batista, Carlos Silvestre e Paulo Oliveira.

Nesta abordagem a dinâmica do sistema é caracterizada por ser linear e variante no tempo, i.e. a matriz  $A$  dependerá dos dados observados - embora na verdade o sistema é não linear.

Na secção seguinte explora-se de forma sintética a base teórica do estimador exposta no artigo citado anteriormente.

### 6.1 Análise teórica do estimador

A cinemática da atitude é dada por:

$$\dot{R}(t) = RS[w(t)] \quad (28)$$

onde

$$w(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

sendo a velocidade angular segundo cada um dos eixos do referencial do corpo  $X_b$ ,  $Y_b$  e  $Z_b$  e  $R(t)$  a matriz de rotação do referencial do corpo para o referencial inercial,  $X_I$ ,  $Y_I$  e  $Z_I$ .

Como apresentado em secções anteriores os ângulos de rolamento e de picada podem ser obtidos a partir de medições dos acelerómetros:

$$\phi_{raw} = \tan^{-1} \left( \frac{a_{Y_b}}{a_{Z_b}} \right)$$

$$\theta_{raw} = \sin^{-1} \left( \frac{a_{X_b}}{g} \right)$$

O output de cada giróscopio de razão é dado por:

$$\begin{aligned} \omega_{m_x}(t) &= \omega_x(t) + b_{\omega_x}(t) + \eta_x(t) \\ \omega_{m_y}(t) &= \omega_y(t) + b_{\omega_y}(t) + \eta_y(t) \\ \omega_{m_z}(t) &= \omega_z(t) + b_{\omega_z}(t) + \eta_z(t) \end{aligned}$$

Nesta abordagem de desenvolvimento de um estimador não linear recorre-se à representação em espaço de estados onde se considera a matriz da dinâmica variante no tempo, em

especifico a matriz da dinâmica depende dos dados obtidos nos sensores, i.e. giroscópios e acelerómetros.

O vetor de estados considerado é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(t) = \begin{bmatrix} y_{a_x}(t) \\ y_{a_y}(t) \\ y_{a_z}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} b_{\omega_x}(t) \\ b_{\omega_y}(t) \\ b_{\omega_z}(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

A dinâmica do sistema é dado pela seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -S[\omega_m(t)]x_1(t) - S[y(t)]x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

A partir das equações expostas anteriormente pode-se definir a matriz A como:

$$A(y(t), \omega_m(t)) = \begin{bmatrix} -S[\omega_m(t)] & -S[y(t)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

com

$$\begin{aligned} S[\omega_m(t)] &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} \\ S[y(t)] &= \begin{bmatrix} 0 & -y_{a_z}(t) & y_{a_y}(t) \\ y_{a_z}(t) & 0 & -y_{a_x}(t) \\ -y_{a_y}(t) & y_{a_x}(t) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz de saída do sistema é apenas as acelerações segundo cada um dos eixos do corpo,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O filtro de Kalman proposto é essencialmente um filtro de kalman que sofre updates a cada iteração, dado que como anteriormente observado a matrix da dinâmica do sistema é variante no tempo. Assim, na implementação do filtro modela-se a dinâmica da covariância do erro da seguinte forma,

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + Q - K(t)RK^T(t)$$

com

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1}$$

Verifica-se que tal como no filtro de Kalman implementado nos casos anteriores é necessário escolher as matrizes Q e R, assim sendo após inspeção das covariancias dos sensores e por um método iterativo, definiu-se as seguintes matrizes,

$$Q = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 0.3046 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3046 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0338 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0338 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0338 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0050 \end{bmatrix}$$

A equação que caracteriza a dinâmica do estimador para este caso é semelhante ao já exposto, apenas diferencia-se na questão da matriz da dinâmica varia no tempo e o ganho de Kalman  $K$  é recalculada a cada iteração,

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

## 6.2 Design e implementação do filtro

Apresenta-se de seguida a implementação realizada em *Simulink*,

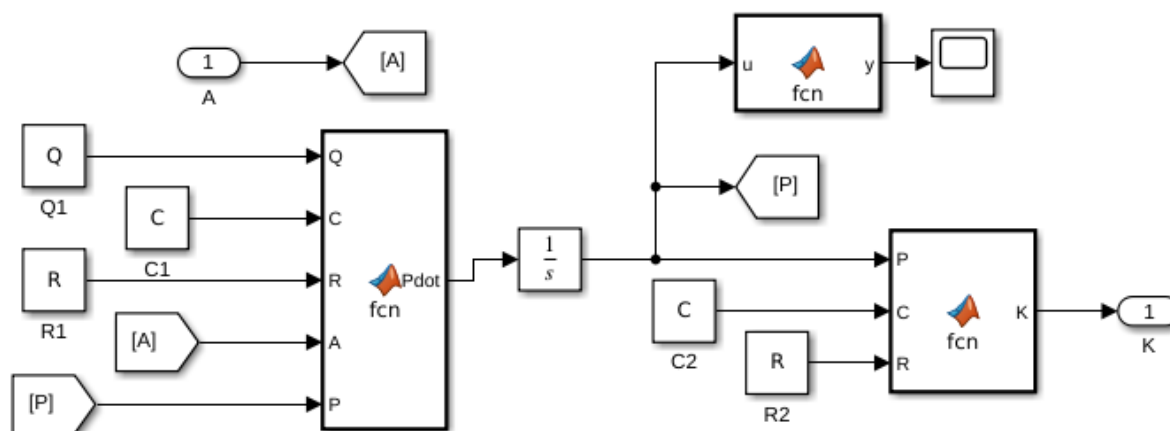


Figura 24: Esquema de *Simulink* utilizado para a implementação do filtro não linear - Parte 1

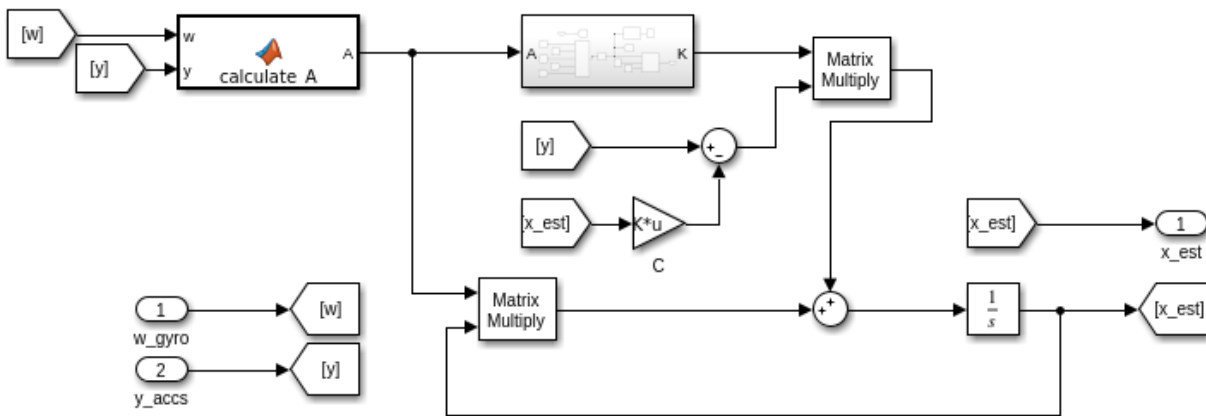


Figura 25: Esquema do *Simulink* utilizado para a implementação do filtro não linear - Parte 2

A função de calculo iterativo da matriz da dinâmica está apresentada em baixo,

```

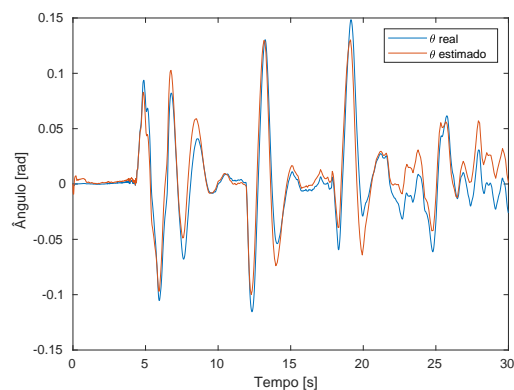
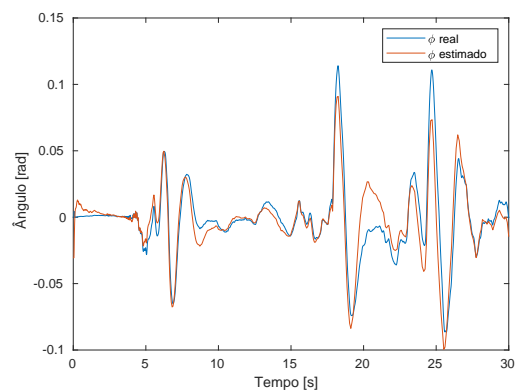
1 function A = calculate_A(w, y)
2     aux1 = -[0, -w(3), w(2);
3             w(3), 0, -w(1);
4             -w(2), w(1), 0];
5     aux2 = -[0, -y(3), y(2);
6             y(3), 0, -y(1);
7             -y(2), y(1), 0];
8
9     A = [aux1 , aux2; zeros(3), zeros(3)];

```

### 6.3 Resultados e validação

Para verificar a eficácia do estimador proposto, recorreu-se aos dados da experiência D e obteve-se os seguintes resultados,



(a) Resultados do  $\theta$  estimado(b) Resultados do  $\phi$  estimadoFigura 26: Resultados da estimação do  $\theta$  e  $\phi$  e respetivos valores reais

Verifica-se que este estimador não linear é capaz de estimar a picada e o rolamento de forma aceitável embora verifica-se ainda alguns problemas relativamente ao bias existente em algumas zonas da dinâmica.

Apresenta-se a seguir a variação dos valores estimados do bias,  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$ .

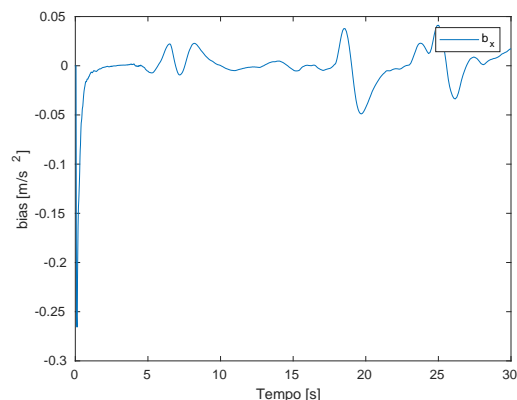
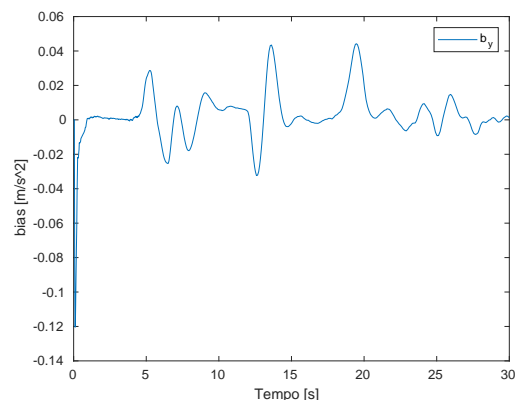
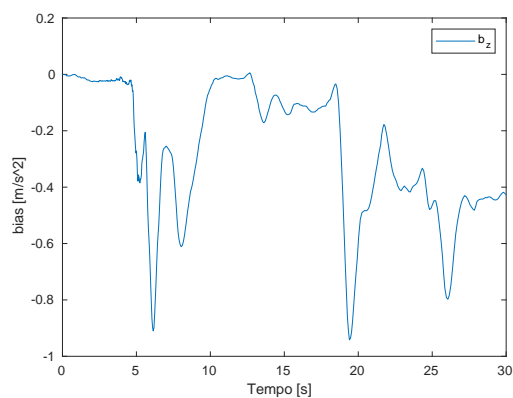
(a) Resultados do bias  $b_x$ (b) Resultados do bias  $b_y$ (c) Resultados do bias  $b_z$ 

Figura 27: Resultados obtidos dos bias com os dados da experiência D

É notório uma variação rápida logo nos primeiros segundos, isto deve-se a valores errados do acelerómetro nas primeiras amostras. Mas pode-se afirmar que consegue de forma correta o bias dos sensores.

No gráfico seguinte apresenta-se o traço da matriz  $P$ , pois é de esperar que esta converja para um valor constante caso o estimador esteja bem implementado. E assim verifica-se que para a simulação apresentada esta realmente converge, validando o bom funcionamento do filtro de Kalman.

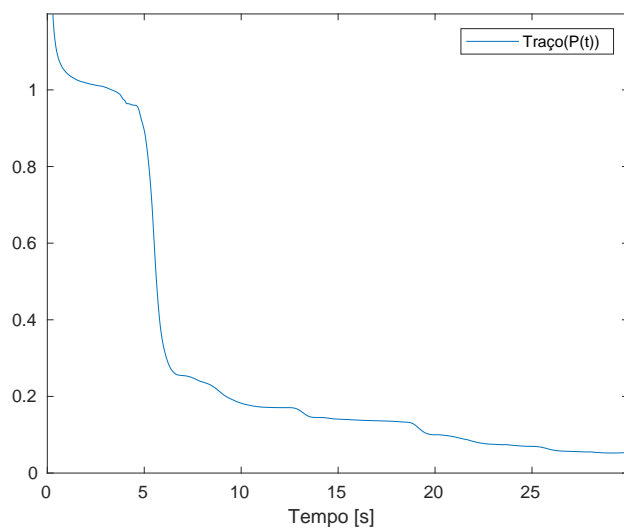


Figura 28: Evolução do valor do traço da matriz da covariância  $P$  ao longo da simulação com os dados da experiência D

## 7 Conclusão

Neste trabalho laboratorial começou-se por estudar e caracterizar os sensores de movimento que foram utilizadas no controlo e na orientação do drone. Estudou-se o comportamento dos sensores quando o drone estava parado no chão com os motores desligados, quando o drone estava no chão com os motores ligados e quando o drone se encontrava a pairar a 1 metro de altura. Verificou-se através da covariância que os sensores tinham mais ruído quando os motores se encontravam ligados e que o sensor responsável pela medição da altura encontrava-se mal calibrado. Com o uso dos acelerómetros foi possível obter valores e construir gráficos para o  $\theta_{raw}$  e para o  $\phi_{raw}$ .

Depois da análise dos sensores seguiu-se a implementação de um filtro de Kalman simplificado com o objetivo de obtermos estimações para os ângulos de rolamento, picada e para a altitude do drone. Inicialmente, o filtro de Kalman foi realizado sem a correção do bias dos sensores. O filtro de Kalman revelou-se um bom filtro para as estimações visto que, este contabiliza o ruído que se encontra presente nas medições e tenta corrigi-lo. Os valores das matrizes Q e R revelaram-se de extrema importância para a compensação do ruído existente nos sensores. Para primeiros valores da matriz Q e R foram utilizadas as covariâncias obtidas anteriormente e a partir daí foram obtidos os valores finais demonstrados no relatório. Os resultados obtidos para as estimações dos ângulos e da altitude foram satisfatórios, o filtro de kalman foi capaz de anular os efeitos do ruído, mas não o efeito do bias presente nos sensores e isto era visível pelo offset que existe no gráficos apresentados.

Para o filtro de Kalman com integração do bias verificou-se que o filtro melhorou a estimativa do ângulo de picada, mas relativamente ao ângulo de rolamento o resultado foi muito parecido com o resultado obtido anteriormente. Observou-se que os filtros utilizados eram complementares e que isso contribuiu positivamente os resultados obtidos.

No final testou-se uma solução proposta no artigo referido no guia do laboratório, sendo que a solução obtida apresentou um desempenho aceitável para a estimativa dos ângulos e da altitude.