Instituto Superior Técnico

M.Sc. in Aerospace Engineering

Unmanned Aerial Vehicles

2020/2021 – Second Semester

Laboratory 1

Group 3

1 **N.º: 89708 Name: Renato Loureiro Signature:**

2 **N.º: 86655 Name: Luís Ferreira Signature:**

3 **N.º: 89716 Name: Tiago Neto Signature:**

Instructor: Rita Cunha e José Azinheira

Índice

1 Introdução

O presente trabalho laboratorial tem como objetivo modelar a dinâmica e a cinemática de um corpo rígido, no caso em estudo especifico, consiste na identificação da dinâmica e cinemática de um quadri-rotor, Parrot AR.Drone, e gerar um modelo linearizado do mesmo.

Este trabalho está dividido em duas partes distintas, uma que consiste numa análise teórica do quadri-rotor, onde é descrito as equações que descrevem a dinâmica e a cinemática dele, mas também certos aspetos especificos, como por exemplo, a identificação deste sistema como um sistema plano ("flat system"). Posteriormente, e dentro da mesma secção, gera-se um modelo linear do sistema, i.e. cria-se o espaço de estados que descreve o quadri-rotor.

A segunda parte do trabalho consiste na componente laboratorial deste, onde se observa resultados reais e de simulação relativos a diferentes ganhos proporcionais no controlo de altitude e compara-se-os com o modelo teórico de referência. No final discute-se a semelhança entre os resultados reais e de simulação, de modo a concluir se o modelo em *Simulink* descreve o sistema real de forma correta - neste caso é apenas referente à dinâmica da altitude.

2 Componente Teórica

2.1

As equações da cinemática e dinâmica expressas no sistema de equações (1)[1] estão escritas em relação ao referencial {B}. Assim sendo, é necessário escrever as forças aplicadas no drone que serão consideradas (força gravítica e propulsões individuais) nesse mesmo referencial:

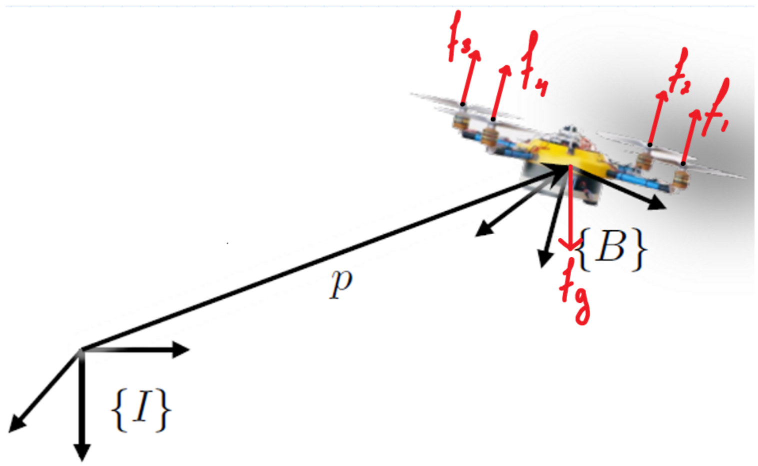


Figura 1: Forças aplicadas no quadrotor

- a força gravítica é sempre colinear com o eixo vertical do referencial inercial {I}: ${}^{I}f_g = mge_3$, em que e_3 é o vetor unitário representativo do eixo z. Logo, é necessário fazer uma rotação deste versor de {I} para {B}, recorrendo à matriz inversa (transposta) de R(λ), resultando então em $M =^B_I R = (^I_B R)^{-1} = (^I_B R)^T$;
- os impulsos de cada um dos rotores são sempre anti-paralelos com o eixo z_B do referencial solidário com o drone {B}, sendo a matriz N dada simplesmente por:

$$N = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Analisando a figura 2, os momentos ao longo dos eixos x_B e y_B provocados por cada um dos impulsos podem ser determinados, pela definição de torque $\tau = S(r)F$, sabendo a distância b do centro de massa ao eixo de rotação de cada um dos rotores:

$$\begin{aligned} n_x &= b.f_2 - b.f_4 \\ n_y &= b.f_1 - b.f_3 \end{aligned} \tag{2}$$

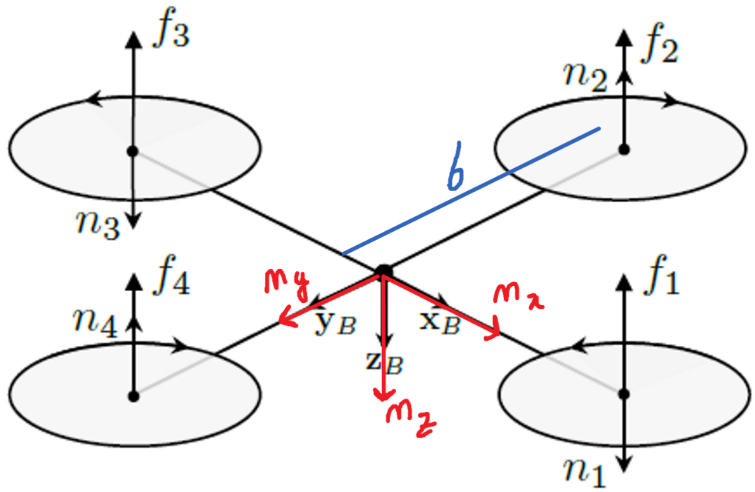


Figura 2: Momentos provocados pelas propulsões individuais

Finalmente, o momento em torno do eixo z_B é uma consequência da terceira Lei de Newton (par ação/reação), em que se assume que a influência de cada um dos impulsos é igual e proporcional à sua intensidade (em que a constante de proporcionalidade é determinada experimentalmente):

$$\begin{aligned} n_z &= -n_1 + n_2 - n_3 + n_4 \\ &= -c.f_1 + c.f_2 - c.f_3 + c.f_4 \end{aligned} \tag{3}$$

Reunindo a informação recolhida das equações (2) e (3), obtém-se a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2

Um ângulo de 45º entre os braços do drone e os eixos x_B e y_B do referencial {B} não provoca nenhuma alteração na expressão deduzida para **f**: os impulsos continuam a ser perpendiculares ao plano Ox_By_B e a representação da força gravítica neste referencial depende apenas da matriz de rotação, que é inalterada por esta configuração. O mesmo raciocínio se pode aplicar à componente vertical do momento.

As previamente calculadas componentes do momento no plano Ox_By_B de {B} continuam alinhadas com os braços dos impulsos em relação ao centro de massa, que agora estão desfasadas 45º com os eixos x_B e y_B. Assim, para se obter as novas componentes ao longo destes eixos, é necessário aplicar uma transformação linear correspondente a uma rotação de 45º ao longo do eixo z_B, e a nova matriz P é então dada por:

$$P_{nova} = \begin{bmatrix} cos(45°) & -sin(45°) & 0 \\ sin(45°) & cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.3

O agrupamento da força total T com os momentos ao longo dos três eixos de {B} permite criar uma nova variável de controlo diretamente aplicável nas equações mais genéricas da cinemática e da dinâmica, permitindo esconder como é que o drone gera especificamente estas variáveis. A transformação linear L dos quatro impulsos disponíveis para as variáveis da dinâmica é então dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(45°) & -sin(45°) & 0 \\ 0 & sin(45°) & cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{b\sqrt{2}}{2} & \frac{b\sqrt{2}}{2} & \frac{b\sqrt{2}}{2} & -\frac{b\sqrt{2}}{2} \\ \frac{b\sqrt{2}}{2} & \frac{b\sqrt{2}}{2} & -\frac{b\sqrt{2}}{2} & -\frac{b\sqrt{2}}{2} \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (6)$$

A transformação inversa permite então recuperar os impulsos necessários para executar o movimento pretendido, após terem sido calculados as forças e momentos necessários para executar um dado movimento:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4b} & \frac{\sqrt{2}}{4b} & \frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4b} & \frac{\sqrt{2}}{4b} & -\frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4b} & -\frac{\sqrt{2}}{4b} & \frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4b} & -\frac{\sqrt{2}}{4b} & -\frac{1}{4c} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.4

As diferentes componentes dos dois vetores de estado $x = [^Bp^T \ v^T \ \lambda^T \ \omega^T]^T$ e $x_1 = [p^T \ \dot{p}^T \ \lambda^T \ \omega^T]^T$ podem ser individualmente determinadas aplicando as equações da cinemática (segunda Lei de Newton aplicada aos movimentos translacional e rotacional) e as equações da dinâmica (relações matemáticas entre posição, velocidade e aceleração, e propriedades da relação entre referenciais em movimento relativo), demonstrações essas que se apresentam nas secções seguintes.

Os vetores de estado x e x_1 são então dados por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -S(\omega)^Bp + v \\ -S(\omega)v - \frac{T}{m}e_3 + gR^Te_3 \\ Q(\lambda)\omega \\ -J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^By.r -^B z.q + u \\ -^Bx.r +^B z.p + v \\ ^Bx.q -^B y.p + w \\ v.r - w.q - g.sin(\theta) \\ -u.r + w.p + g.sin(\phi).cos(\theta) \\ u.q - v.p - \frac{T}{m} + g.cos(\phi).sin(\theta) \\ p + q.sin(\phi).tan(\theta) + r.cos(\phi).tan(\theta) \\ q.cos(\phi) - r.sin(\phi) \\ q.\frac{sin(\phi)}{cos(\theta)} + r.\frac{cos(\phi)}{cos(\theta)} \\ \frac{r.q.(I_{yy}-I_{zz})+n_x}{I_{xx}} \\ \frac{r.p.(I_{zz}-I_{xx})+n_y}{I_{yy}} \\ \frac{p.q.(I_{xx}-I_{yy})+n_z}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ ge_3 - \frac{T}{m}Re_3 \\ Q(\lambda)\omega \\ -J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\frac{T}{m}(cos(\phi)sin(\theta)cos(\psi) + sin(\phi)sin(\psi)) \\ -\frac{T}{m}(cos(\phi)sin(\theta)sin(\psi) - sin(\phi)cos(\psi)) \\ g - \frac{T}{m}cos(\phi)cos(\theta) \\ p + q.sin(\phi).tan(\theta) + r.cos(\phi).tan(\theta) \\ q.cos(\phi) - r.sin(\phi) \\ q.\frac{sin(\phi)}{cos(\theta)} + r.\frac{cos(\phi)}{cos(\theta)} \\ \frac{r.q.(I_y - I_z) + n_x}{I_x} \\ \frac{r.p.(I_z - I_x) + n_y}{I_y} \\ \frac{p.q.(I_x - I_y) + n_z}{I_z} \end{bmatrix} \tag{9}$$

- $\mathbf{{}^B\dot{p}}$

A expressão para ${}^B\dot{p}$ pode ser obtida derivando em ordem ao tempo a definição ${}^Bp = R^Tp$ e simplificando-a com as expressões da cinemática que retratam a variação temporal dos movimentos translacional e rotacional, respetivamente, $\dot{p} = Rv$ e $\dot{R} = RS(\omega)$. Algebricamente, é ainda preciso considerar algumas propriedades de matrizes, como a transposição do produto, a transporta/inversa de uma matriz antissimétrica, e a definição de matriz de rotação (nomeadamente, $R^T = R^{-1}$):

$$\begin{aligned} {}^B\dot{p} &= \dot{R}^Tp + R^T\dot{p} = (RS(\omega))^Tp + R^TRv = S(\omega)^TR^Tp + v = -S(\omega)^Bp + v = \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^Bx \\ {}^By \\ {}^Bz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^By.r -{}^B z.q + u \\ -{}^Bx.r +{}^B z.p + v \\ {}^Bx.q -{}^B y.p + w \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

- $\mathbf{\dot{v}}$

Manipulando a segunda Lei de Newton para o movimento translacional, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -S(\omega)v + \frac{1}{m}f = -S(\omega)v - \frac{T}{m}e_3 + gR^Te_3 = \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \frac{T}{m}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + g\begin{bmatrix} {}^Bx_I & {}^By_I & {}^Bz_I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} v.r - w.q - gsin(\theta) \\ -u.r + w.p + gsin(\phi)cos(\theta) \\ u.q - v.p - \frac{T}{m} + gcos(\phi)cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

- $\dot{\lambda}$

A variação dos ângulos de Euler necessários para a rotação de {B} para {I} é uma das formas de representar a atitude da dinâmica rotacional do drone, variação essa que pode ser obtida fazendo as sucessivas transformações de $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ dos referenciais em que são expressos para {B}:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} = Q(\lambda)\omega &= \begin{bmatrix}1 & sin(\phi)tan(\theta) & cos(\phi)tan(\theta) \\ 0 & cos(\phi) & -sin(\phi) \\ 0 & \frac{sin(\phi)}{cos(\theta)} & \frac{cos(\phi)}{cos(\theta)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p \\ q \\ r\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}p + qsin(\phi)tan(\theta) + rcos(\phi)tan(\theta) \\ qcos(\phi) - rsin(\phi) \\ q\frac{sin(\phi)}{cos(\theta)} + r\frac{cos(\phi)}{cos(\theta)}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

- $\dot{\omega}$

Tal como se fez para a variação temporal de v, $\dot{\omega}$ é obtido através da manipulação da segunda Lei de Newton para o movimento rotacional:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}n = \\ &= -\begin{bmatrix}\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x \\ n_y \\ n_z\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\frac{r.q(I_y - I_z) + n_x}{I_x} \\ \frac{r.p(I_z - I_x) + n_y}{I_y} \\ \frac{p.q(I_x - I_y) + n_z}{I_z}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

- $\dot{\mathbf{p}}$

A variação temporal de p é um dos estados do vetor x_1 e, como tal, é obtido diretamente deste vetor.

- $\ddot{\mathbf{p}}$

$\ddot{p}$ pode-se obter diretamente da definição da segunda Lei de Newton no referencial inercial {I}:

$$\begin{aligned}\ddot{p} = \frac{1}{m}{}^{I}f &= \frac{1}{m}(mge_3 - TRe_3) = ge_3 - \frac{T}{m}Re_e = \\ &= g\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} - \frac{T}{m}\begin{bmatrix}{}^{I}x_B & {}^{I}y_B & {}^{I}z_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}-\frac{T}{m}(cos(\phi)sin(\theta)cos(\psi) + sin(\phi)sin(\psi)) \\ -\frac{T}{m}(cos(\phi)sin(\theta)sin(\psi) + sin(\phi)cos(\psi)) \\ g - \frac{T}{m}cos(\phi)cos(\theta)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

2.5

As únicas forças a serem aplicadas no drone resultam da propulsão gerada pelo coletivo dos rotores e pela existência da força gravitacional. Assim sendo, são as únicas fontes de momento linear (e, sendo a massa constante, pode-se especificar que são as únicas fontes de aceleração), facto esse que é expresso pela segunda Lei de Newton que, quando escrita em relação ao referencial inercial {I}, permite explicitar a relação entre as forças e as variáveis da saída y:

$$\begin{gathered} m\ddot{p} = -TRe_3 + mge_3 \Leftrightarrow TRe_3 = m(ge_3 - \ddot{p}) \Leftrightarrow \\ T\begin{bmatrix} cos(\phi)sin(\theta)cos(\psi) + sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\phi)sin(\theta)sin(\psi) - sin(\phi)cos(\psi) \\ cos(\phi)cos(\theta) \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} -\ddot{x} \\ -\ddot{y} \\ g-\ddot{z} \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{15}$$

Pode-se então de imediato escrever a dependência de u_1 (T) em função das variáveis de y, atendendo a uma das propriedades da transformação linear R: que não altera a norma dos vetores que sofrem a rotação. Assim sendo, conclui-se que a norma do vetor do lado esquerdo da igualdade (15) (que representa simplesmente o vetor propulsão escrito no referencial inercial) é então igual ao que era previamente à rotação, ou seja, T. Por igualdade dos dois lado, resulta então:

$$T = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (g-\ddot{z})^2} \tag{16}$$

Essa demonstração também pode ser feita algebricamente, calculando o quadrado da norma dos vetores nos dois lados da igualdade (15), obtendo:

$$\begin{aligned} &T^2(cos^2(\phi)sin^2(\theta)cos^2(\psi) + 2cos(\phi)sin(\phi)sin(\theta)cos(\psi)sin(\psi) + sin^2(\phi)sin^2(\psi) + \\ &\quad cos^2(\phi)sin^2(\theta)sin^2(\psi) - 2cos(\phi)sin(\phi)sin(\theta)cos(\psi)sin(\psi) + sin^2(\phi)cos^2(\psi) + \\ &\quad cos^2(\phi)cos^2(\theta)) = \\ &T^2(cos^2(\phi)sin^2(\theta) + sin^2(\phi) + \\ &\quad cos^2(\phi)cos^2(\theta)) = \\ &T^2(cos^2(\phi) + sin^2(\phi)) = T^2 = m^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (g-\ddot{z}^2)) \end{aligned}$$

que é, então, o que foi observado na equação (16).

Observando as figuras 3 e 4, pode-se verificar a relação entre as diferentes componentes da aceleração no referencial inercial (e suas projeções nos eixos dos referenciais temporários das rotações pelos ângulos de Euler) e os ângulos de Euler, dada então por:

$$tan(\theta) = \frac{\ddot{x}_{B_2}}{\ddot{z}-g} = \frac{\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi)}{\ddot{z}-g} \Leftrightarrow \theta = arctan\left(\frac{\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi)}{\ddot{z}-g}\right) \tag{17}$$

$$sin(\phi) = \frac{\ddot{y}_{B_2}}{T/m} = \frac{\ddot{y}cos(\psi) - \ddot{x}sin(\psi)}{\sqrt{\ddot{x}+\ddot{y}+(g-\ddot{z})^2}} \Leftrightarrow \phi = arcsin\left(\frac{\ddot{y}cos(\psi) - \ddot{x}sin(\psi)}{\sqrt{\ddot{x}+\ddot{y}+(g-\ddot{z})^2}}\right) \tag{18}$$

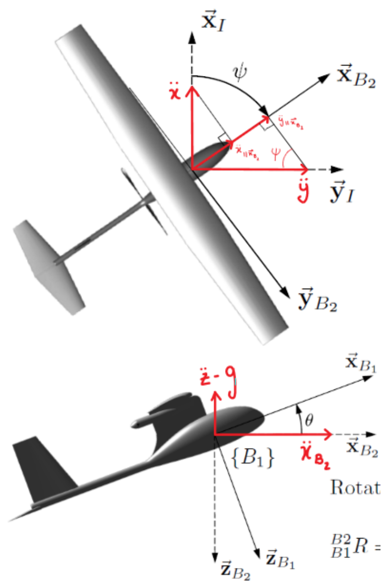


Figura 3: Representação dos ângulos de Euler ψ e θ

Estas duas relações podem ser demonstradas matematicamente, usando as componentes geradas nos dois lados da igualdade (15). Para o ângulo de picada θ, pode-se então expandir a equação (17) usando as componentes segundo x e y encontradas (15):

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi)) &= T(cos(\phi)sin(\theta)cos^2(\psi) + sin(\phi)sin(\psi)cos(\psi) + \\ &\quad cos(\phi)sin(\theta)sin^2(\psi) - sin(\phi)sin(\psi)cos(\psi)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m(\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi)) &= Tcos(\phi)sin(\theta) \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade pelo simétrico da componente segundo z de (15) obtém-se finalmente:

$$\frac{m(\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi))}{m(\ddot{z} - g)} = \frac{Tcos(\phi)sin(\theta)}{Tcos(\phi)cos(\theta)} \Leftrightarrow tan(\theta) = \frac{\ddot{x}cos(\psi) + \ddot{y}sin(\psi)}{\ddot{z} - g}$$

que é então o início da equação (17).

O ângulo de rolamento ϕ pode-se obter por um processo idêntico, embora mais rápido, através de:

$$\begin{aligned} m(\ddot{y}cos(\psi) - \ddot{x}sin(\psi)) &= T(sin(\phi)cos^2(\psi) - cos(\phi)sin(\theta)sin(\psi)cos(\psi) \\ &\quad sin(\phi)sin^2(\psi) + cos(\phi)sin(\theta)sin(\psi)cos(\psi)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m(\ddot{y}cos(\psi) - \ddot{x}sin(\psi)) &= m\sqrt{\ddot{x} + \ddot{y} + (g - \ddot{z})^2}sin(\phi) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow sin(\phi) &= \frac{\ddot{y}cos(\psi) - \ddot{x}sin(\psi)}{\sqrt{\ddot{x} + \ddot{y} + (g - \ddot{z})^2}} \end{aligned}$$

que é, como seria de esperar, o início da equação (18).

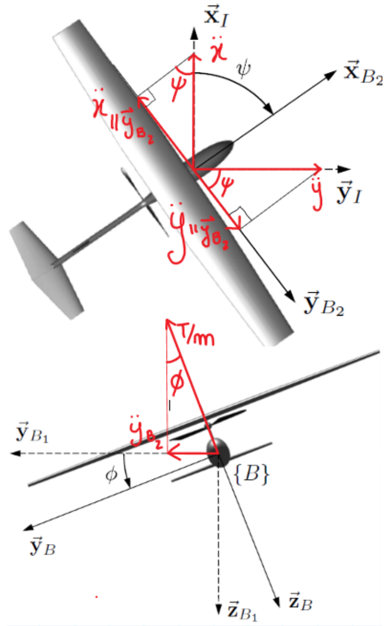


Figura 4: Representação dos ângulos de Euler ψ e ϕ

2.6

Para um sistema dinâmico caracterizado da forma $\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, define-se o ponto de equilíbrio (x_0, u_0) como a solução da equação $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$, em que todas as variáveis de estado, de entrada e de saída se mantém constantes. Dada a situação, espera-se que uma das situações de equilíbrio seja a condição de *hovering*, ou pairar, em que o drone permanece parado no ar a altura constante numa posição qualquer e a propulsão iguala o peso. O quadrotor não apresenta nem velocidade rotacional ($\mathbf{w} = 0$) nem velocidade translacional ($\mathbf{u} = 0$) (e, assim, dado o acoplamento obrigatório entre ângulos de rolamento e picada e velocidades no plano horizontal do drone, esses ângulos de Euler também serão nulos, ou seja, $\phi = 0 = \theta$). O ângulo de guinada ψ pode ser um qualquer.

Demonstrando, a partir dos resultados (16), (17) e (18) deduzidos na secção anterior e aplicando uma das condições de equilíbrio ($\ddot{x} = 0 = \ddot{y} = \ddot{z}$), obtém-se que T = mg, $\theta = 0$ e $\phi = 0$.

Resumindo, tem-se então

$$\begin{aligned} {}^b x_0 &= [{}^B x_0 \quad {}^B y_0 \quad {}^B z_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \psi_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ u_0 &= [mg \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{19}$$

2.7

Neste sistema complexo, as não-linearidades não podem ser ignoradas, especialmente se tivermos preocupados com o seu comportamento global. No entanto, se nos interessarmos apenas no que acontece em torno do ponto de equilíbrio descrito anteriormente, é suficiente aproximar a sua dinâmica não linear com uma linearização local, tornando a utilização subsequente deste modelo mais fácil.

Para estudar o comportamento local do sistema em torno do ponto de equilíbrio (x_0, u_0), assume-se que δx e δu são ambos pequenos valores, de tal forma que as perturbações não lineares em torno deste ponto podem ser ignoradas quando comparadas com os termos lineares. Ou seja, desenvolvendo a respetiva série de Taylor em torno deste ponto, pode-se ignorar os termos de ordem superior a 1 (não lineares). Formalmente, a este processo designa-se por linearização Jacobiana e é dado por:

$$\begin{aligned} &\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{12} \frac{\partial g}{\partial x_j}\bigg|_{(x_0,u_0)} + \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial g}{\partial u_k}\bigg|_{(x_0,u_0)}, \qquad i = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \iff \\ &\iff \delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \end{aligned} \tag{20}$$

Como cada uma das doze variáveis de estado depende das derivadas parciais da função g em ordem a todas essas variáveis e ainda das quatro de entrada, as matrizes A e B terão, respetivamente, uma dimensão de $[12 \times 12]$ e $[12 \times 4]$. Dadas a configuração da função g, todas estas derivadas em torno do ponto de equilíbrio são triviais, apresentando-se a seguir apenas o resultado final:

$$\begin{bmatrix} \delta^B\dot{x} \\ \delta^B\dot{y} \\ \delta^B\dot{z} \\ \delta\dot{u} \\ \delta\dot{v} \\ \delta\dot{w} \\ \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\psi} \\ \delta\dot{p} \\ \delta\dot{q} \\ \delta\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{[3\times3]} & I_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} \\ 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & G_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} \\ 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & I_{[3\times3]} \\ 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} & 0_{[3\times3]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta^B x \\ \delta^B y \\ \delta^B z \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \\ \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{[3\times3]} \\ M_{[3\times4]} \\ 0_{[3\times4]} \\ (1/I)_{ii[3\times4]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta T \\ \delta n_x \\ \delta n_y \\ \delta n_z \end{bmatrix}, \tag{21}$$

onde $0_{[a\times b]}$ é uma matriz de zeros com a dimensão indicada, I representa a matriz identidade e:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 1/I_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

Nota: Apesar de ser possível determinar a linearização de ${}^B p$ através do método anterior, é muito mais fácil considerar a seguinte demonstração, se definirmos uma nova variável $\delta^I p =^I p -^I p_0$ e considerarmos que, no ponto de equilíbrio, $\omega_0 = 0$ e, como tal, $S(\omega_0) = 0_{[3\times3]}$:

$$\begin{aligned}
\delta^B p &= R^T({}^I p - {}^I p_0) = R^T \delta^I p \\
\delta^B \dot{p} &= (\dot{R^T \delta^I p}) = \dot{R}^T \delta^I p + R^T \delta^I \dot{p} = (RS(\omega_0))^T \delta^I p + R^T R \delta v = \\
&= \delta v
\end{aligned}$$

2.8

Para o cálculo das funções transferências é importante realçar a seguinte propriedade das Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0^-) \tag{22}$$

Considerando que estamos a retratar a variação em torno do ponto de equilíbrio, pode-se assumir que inicialmente o drone não apresenta desvios em relação a este ponto ($f(0^-) = 0$). Posto isto, é possível obter as funções transferências pedidas, recuperando as expressões necessárias da definição (21):

- $G_\phi(s)$

$$\begin{cases} \delta\dot{\phi} = \delta p \\ \delta\dot{p} = \frac{\delta n_x}{I_{xx}} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s\Phi(s) = P(s) \\ sP(s) = \frac{N_x(s)}{I_{xx}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s\Phi(s) = \frac{N_x(s)}{sI_{xx}} \\ P(s) = \frac{N_x(s)}{sI_{xx}} \end{cases}$$

$$G_\phi(s) = \frac{\Phi(s)}{N_x(s)} = \frac{1}{I_{xx}s^2} \tag{23}$$

- $G_\theta(s)$

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \delta q \\ \delta\dot{q} = \frac{\delta n_y}{I_{yy}} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s\Theta(s) = Q(s) \\ sQ(s) = \frac{N_y(s)}{I_{yy}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s\Theta(s) = \frac{N_y(s)}{sI_{yy}} \\ Q(s) = \frac{N_y(s)}{sI_{yy}} \end{cases}$$

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{N_y(s)} = \frac{1}{I_{yy}s^2} \tag{24}$$

- $G_\psi(s)$

$$\begin{cases} \delta\dot{\psi} = \delta r \\ \delta\dot{r} = \frac{\delta n_z}{I_{zz}} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s\Psi(s) = R(s) \\ sR(s) = \frac{N_z(s)}{I_{zz}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s\Psi(s) = \frac{N_z(s)}{sI_{zz}} \\ R(s) = \frac{N_z(s)}{sI_{zz}} \end{cases}$$

$$G_\psi(s) = \frac{\Psi(s)}{N_z(s)} = \frac{1}{I_{zz}s^2} \tag{25}$$

- $G_x(s)$

$$\begin{cases} \delta^B\dot{x} = \delta u \\ \delta\dot{u} = -g\delta\theta \\ \delta\dot{\theta} = \delta q \\ \delta\dot{q} = \frac{\delta n_y}{I_{yy}} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} sX(s) = U(s) \\ sU(s) = -g\Theta(s) \\ s\Theta(s) = Q(s) \\ sQ(s) = \frac{N_y(s)}{I_{yy}} \end{cases}$$

$$G_x(s) = \frac{X(s)}{N_y(s)} = -\frac{g}{I_{yy}s^4} \tag{26}$$

- $G_y(s)$

$$\begin{cases} \delta^B\dot{y} = \delta v \\ \delta\dot{v} = g\delta\phi \\ \delta\dot{\phi} = \delta p \\ \delta\dot{p} = \frac{\delta n_x}{I_{xx}} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} sY(s) = V(s) \\ sV(s) = -g\Phi(s) \\ s\Phi(s) = P(s) \\ sP(s) = \frac{N_x(s)}{I_{xx}} \end{cases}$$

$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{N_x(s)} = \frac{g}{I_{xx}s^4} \tag{27}$$

- $G_z(s)$

$$\begin{cases} \delta\dot{z} = \delta w \\ \delta\dot{w} = -\frac{\delta T}{m} \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} sZ(s) = W(s) \\ sW(s) = -\frac{T(s)}{m} \end{cases}$$

$$G_z(s) = \frac{Z(s)}{T(s)} = -\frac{1}{ms^2} \tag{28}$$

2.9

É de notar a existência de um integrador duplo nas funções transferência que relacionam os ângulos de Euler e os momentos ao longo dos respetivos eixos. Esta relação já era esperada devido à natureza da segunda Lei de Newton para o movimento rotacional:

$$\ddot{\alpha}_i = I_{ii}n_i, \tag{29}$$

Nesta posição de equilíbrio os momentos e os eixos de rotação dos ângulos de Euler encontram-se alinhados, tal como se pode observar na figura abaixo:

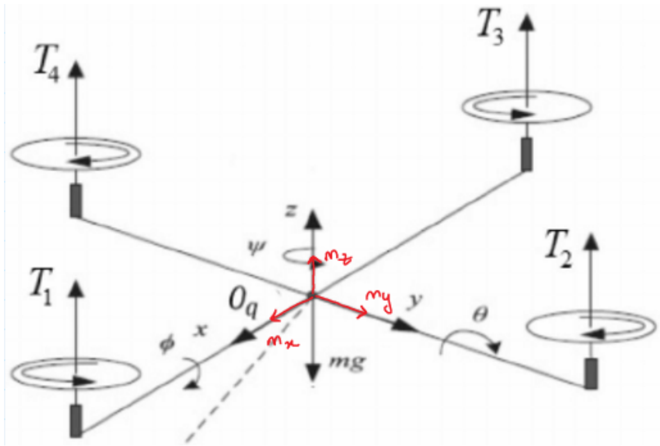


Figura 5: Drone em posição de equilíbrio

Considerando que o drone apresenta apenas 4 impulsos (e dada a natureza sempre vertical destes no referencial {B}) e para 6 graus de liberdade permitidos no movimento em três dimensões, rapidamente se conclui que o quadrotor é um sistema subatuado, o que forçosamente obriga que nem todas as combinações possíveis de manobras possam ser realizadas, havendo acoplamento de certos movimentos.

Um exemplo marcante do que foi descrito é o movimento do drone em duas dimensões no plano horizontal do drone (para uma altura constante): qualquer deslocação em x_B e em y_B (ou uma combinação destes dois), implica que haja uma componente da força alinhada com a projeção dessas direções no plano horizontal. Como as propulsões do rotor são sempre verticais no referencial {B}, o drone tem de rodar, havendo um ângulo de picada e de rolamento respetivamente, para que o quadrotor se possa deslocar para a frente/trás ou para a esquerda/direita, rotação essa que é provocada pelas componentes do momento em torno desse eixo. No referencial {B} solidário com o drone, estas relações são independentes do ângulo de guinada, já que um momento em torno do eixo y_B vai sempre provocar um movimento no eixo perpendicular a este no plano horizontal, ou seja, x_B, e o mesmo ocorrerá com momentos em torno de x_B.

Em relação ao ponto de equilíbrio, um aumento ou diminuição da propulsão provoca, respetivamente, uma subida/descida do drone, exemplificado na equação (28) (não esquecendo que, estando o vetor unitário e_3 a apontar para baixo, uma subida corresponde a uma variação negativa de z).

2.10

Na figura seguinte encontram-se os diagramas de blocos relativos a dois esquemas alternativos de controlo da altitude do drone.

Para o esquema 1, começou-se por calcular a função de transferência do anel interior, simbolizado na figura 6 pelo tracejado:

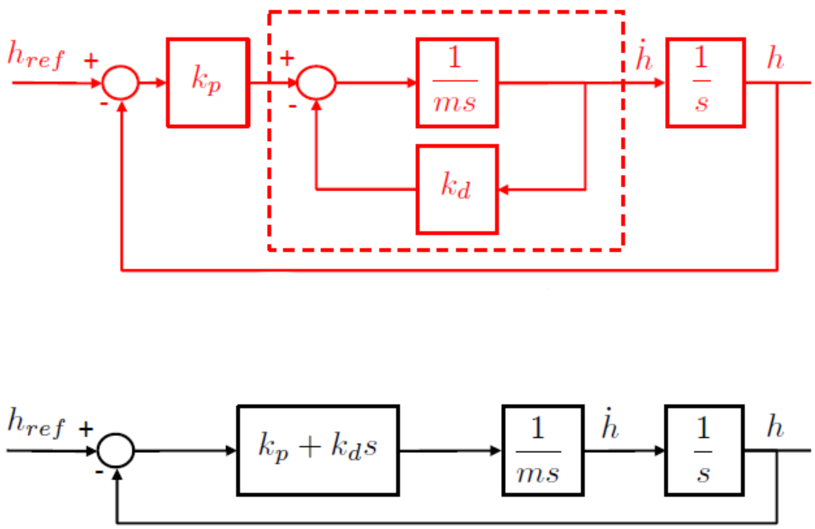


Figura 6: Esquemas 1 e 2 de controlo de altitude

$$AI(s) = \frac{\frac{1}{ms}}{1 + \frac{k_d}{ms}} = \frac{1}{ms + k_d}$$

Assim, e após obter a função de transferência de cadeia aberta CA(s), torna-se mais fácil obter a função com a introdução de *feedback*:

$$CA(s) = k_p \frac{1}{ms + k_d} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_p}{ms^2 + k_d s}$$

$$\iff G_1(s) = \frac{CA(s)}{1 + CA(s)} = \frac{\frac{k_p}{ms^2 + k_d s}}{1 + \frac{k_p}{ms^2 + k_d s}} = \frac{k_p}{ms^2 + k_d s + k_p} = \frac{\frac{k_p}{m}}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} \tag{30}$$

Finalmente, foi calculada a função transferência para o esquema 2:

$$G_2(s) = \frac{H(s)}{H_{ref}(s)} = \frac{(k_p + k_d s)\frac{1}{ms} \cdot \frac{1}{s}}{1 + (k_p + k_d s)\frac{1}{ms} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{\frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} \tag{31}$$

O segundo modelo de controlo apresenta um zero no SPCE (quando $k_p > 0$ e $k_d > 0$), dado por $\frac{k_d}{m} z + \frac{k_p}{m} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{k_p}{k_d}$. O efeito deste zero pode ser analisado manipulando a equação (31):

$$G_2(s) = \frac{\frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} = \frac{\frac{k_d}{m}(s + \frac{k_p}{k_d})}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} = \frac{\frac{k_p/m}{k_p/k_d}(s + \frac{k_p}{k_d})}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} = \frac{\frac{\omega_n^2}{|z|}(s + |z|)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Conseguimos então ver que a função de transferência $G_1(s)$ corresponde ao caso específico em que o valor absoluto do zero de $G_2(s)$ tende para $+\infty$. Assim, o efeito do zero pode ser visto analisando a resposta temporal de $G_2(s)$ a um escalão unitário:

$$H(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{|z|}(s+|z|)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} + \frac{\frac{\omega_n^2}{|z|}s}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$h(t) = h_{segunda\,ordem}(t) + \frac{\omega_n^2}{|z|}\frac{dh_{segunda\,ordem}(t)}{dt}$$

A função $h_{segunda\,ordem}(t)$ e algumas das suas propriedades mais importantes encontram-se representadas na secção seguinte. No entanto, pode-se já verificar que acelera os transientes (segunda parcela da expressão acima), tornando as subidas e descidas mais acentuadas. Valores mais pequenos de |z| (zero mais próximo da origem) tornam este efeito mais proeminente. Consequentemente, um zero no SPCE torna o sistema mais rápido e mais oscilatório.

Também, e fazendo referência à figura 9 da secção seguinte, conclui-se então que à medida que o zero se move ao longo do eixo real negativo em direção à origem, o tempo de subida diminui, acompanhado por um aumento da sobre-elevação máxima. Também, o sistema demora mais tempo a atingir o valor final da resposta (aumento do tempo de estabelecimento).

2.11

Os coeficientes da função de transferência em (30) podem ser substituídos (como foi anteriormente) pelos seus conceitos mais gerais:

$$G_1(s) = \frac{\frac{k_p}{m}}{s^2+\frac{k_d}{m}s+\frac{k_p}{m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

onde ζ representa o fator de amortecimento e ω_n a frequência natural (não amortecida) do sistema. Estas duas variáveis podem ser escritas em função das constantes do sistema examinando a igualdade anterior:

$$\begin{cases}\omega_n^2 = \frac{k_p}{m}\\ 2\zeta\omega_n = \frac{k_d}{m}\end{cases} \iff \begin{cases}\omega_n = \sqrt{\frac{k_p}{m}}\\ \zeta = \frac{k_d}{2}\sqrt{\frac{1}{mk_p}}\end{cases} \tag{32}$$

Continuando, a função de transferência (30) tem os polos localizados em

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}$$

Este polos são reais ou complexos conjugados dependendo do valor de ζ:

- $\zeta > 1 \iff k_p < \frac{k_d^2}{4m} \iff k_d > \sqrt{4mk_p}$: o sistema tem dois polos no eixo real negativo e a reposta temporal a um escalão é determinada em grande medida pelo polo dominante, ou seja, pelo polo mais próximo da origem (este domínio é tanto maior quanto mais separados estiverem os dois polos). O sistema apresenta um regime sobreamortecido e aproxima-se assintoticamente para o valor do escalão.

- $\zeta = 1 \iff k_p = \frac{k_d^2}{4m} \iff k_d = \sqrt{4mk_p}$: o sistema tem um polo de multiplicidade dois em

$$s = -\zeta\omega_n = -\frac{k_d}{2m}$$

apresenta um regime criticamente amortecido, e aproxima-se do valor final ainda mais rapidamente do que no regime anterior.

- $0 < \zeta < 1 \iff k_p > \frac{k_d^2}{4m} \iff k_d < \sqrt{4mk_p}$: os polos são complexos conjugados e estão localizados no SPCE:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Ao longo da lista, anterior foi evidenciado como é que a transição entre regimes depende do parâmetro k_p, para valores fixos de k_d e m. Para tornar esta variação mais evidente, recorreu-se a uma análise gráfica por *root locus*, que permite examinar como é que os polos do sistema variam com o parâmetro k_p, e que corroboram o que foi dito anteriormente:

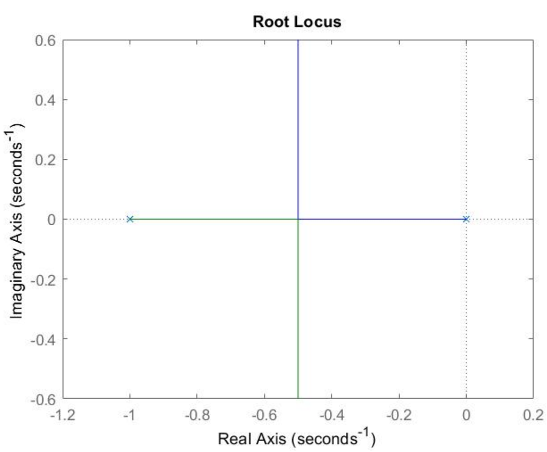


Figura 7: *Root locus* do sistema em função de k_p

Também é possível observar na lista anterior que a variação de regimes de funcionamento do sistema também pode ser uma função de k_d (para m e k_p fixos), verificando-se que é à contrária às transições causadas por k_p, ou seja, um gradual aumento de k_d obriga o sistema a transitar de um regime oscilatório para amortecido.

Retornando à análise do do sistema num regime subamortecido/oscilatório, verifica-se que a localização dos polos é também uma função do fator de amortecimento e da frequência natural, indicada na figura seguinte:

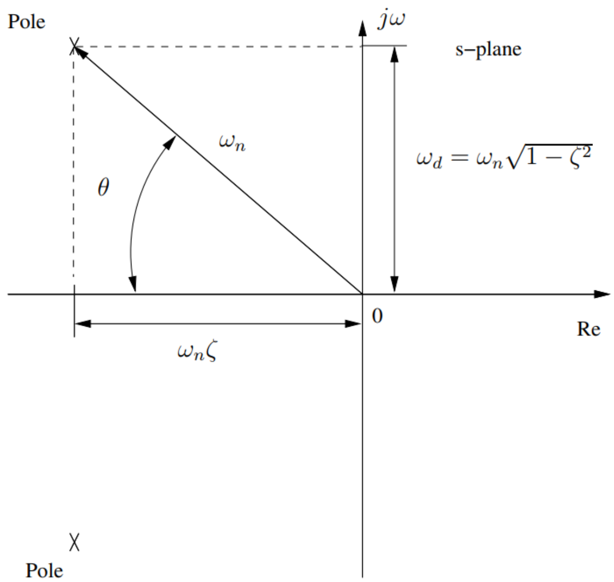


Figura 8: Localização dos polos em função de ζ e ω_n

Analisando a resposta temporal de um sistema deste género a um escalão obtém-se a seguinte resposta temporal:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + arcos(\zeta))$$

que pode ser observada (assim como algumas das suas propriedades mais importantes) na figura seguinte:

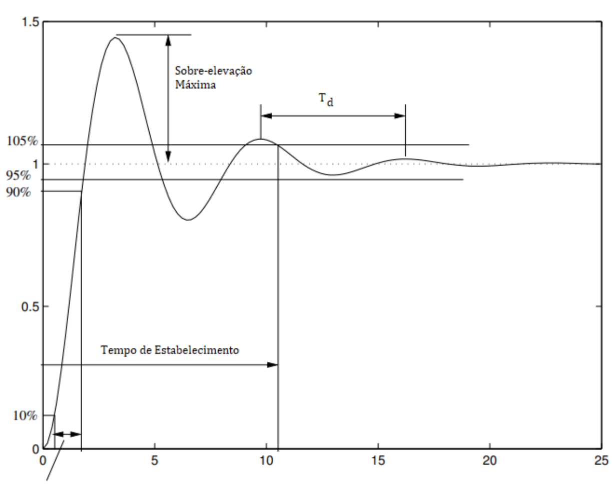


Figura 9: Resposta temporal de um sistema de 2ª ordem a um escalão unitário

O valor $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a verdadeira frequência das oscilações, relacionada com o período das oscilações através de $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$.

Finalmente, podemos então analisar os efeitos da variação de ζ e ω_n, ambos controlados pelo valor de k_p:

- Há um aumento da sobre-elevação com o decréscimo do fator de amortecimento ζ (aumento de k_p/diminuição de k_d). No entanto, este aumento é acompanhada por um tempo de subida mais baixo. Enquanto a resposta inicial se torna mais rápida, o tempo de estabelecimento é maior;

- Variando a frequência natural leva a um escalamento do eixo temporal, ou seja, não afeta a sobre-elevação. Um aumento de ω_n (aumento de k_p/independente de k_d) diminui o período das oscilações, o tempo de subida e de estabelecimento.

Existe uma aparente incongruência nos postulados anteriores: o aumento de k_p leva simultaneamente a uma diminuição e a um aumento do tempo de estabelecimento. No entanto, para um intervalo de $\pm5\%$, o tempo de estabelecimento pode ser dado aproximadamente por $t_{estabelecimento} = \frac{3}{\omega_n \zeta}$. Substituindo nesta expressão as definições (32) chega-se à conclusão que o k_p não tem influência no tempo de estabelecimento:

$$t_{estabelecimento} = \frac{3}{\omega_n \zeta} = \frac{3}{\sqrt{\frac{k_p}{m}} \frac{k_d}{2} \sqrt{\frac{1}{m k_p}}} = \frac{3}{\frac{k_d}{2} \sqrt{\frac{1}{m^2}}} = \frac{6m}{k_d}$$

3 Componente Laboratorial

3.1 Obtenção da resposta a um escalão do modelo em simulação

Nesta secção inicial da análise laboratorial, procedeu-se à determinação da resposta a um step do modelo implementado em *Simulink* com o objetivo de identificar experimentalmente a dinâmica de altitude em cadeia fechada e posteriormente comparar com a resposta real do sistema.

Para efetuar a obtenção de dados do modelo de Simulink realizou-se modificações a este, tal como está descrito na figura 10 e 11.

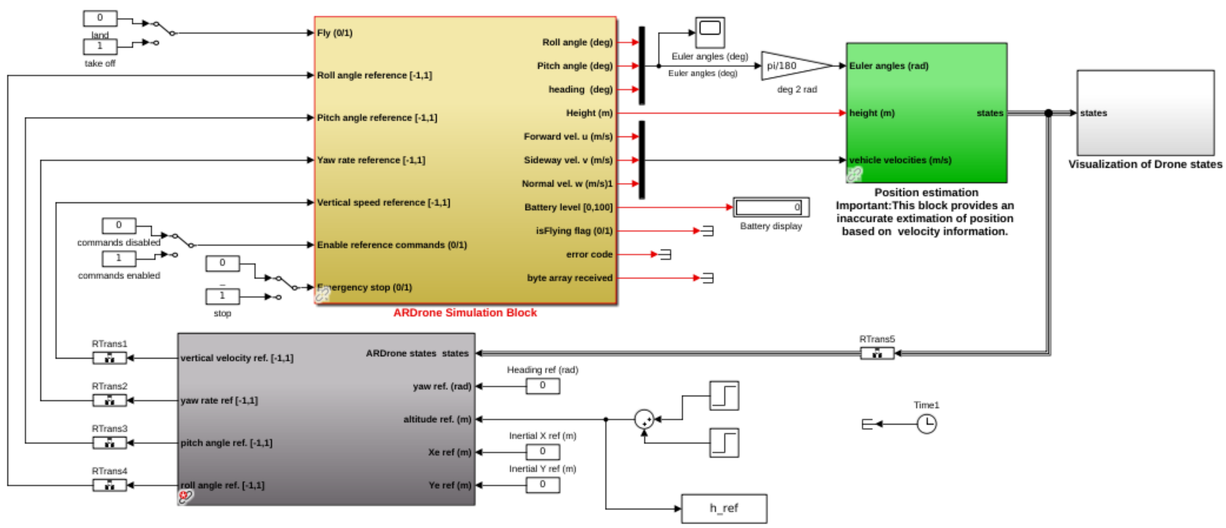


Figura 10

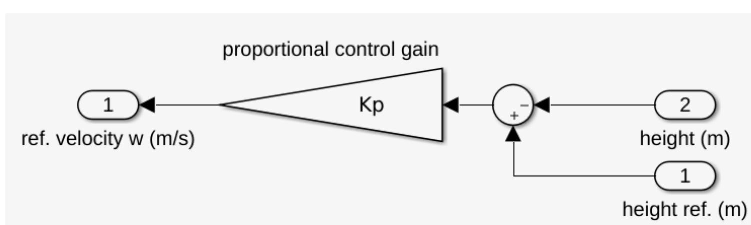


Figura 11

Testou-se 4 entradas diferentes de ganho e de altura de referência tal como está indicado na tabela 1.

	Ganho	Step em t=5s	Step cumulativo em t=15s
A	0.5	1.0 m	1.0 m
B	1.0	1.0 m	0.5 m
C	2.4	1.0 m	0.25 m
D	3.2	1.0 m	0.2 m

Tabela 1: Parâmetros de input de referência de alturas

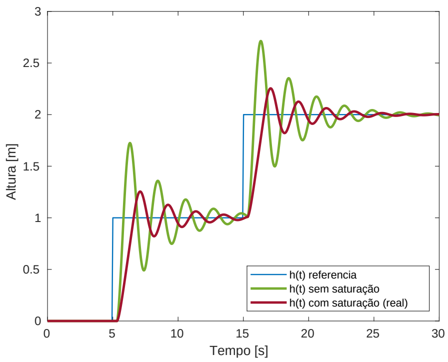
O procedimento realizado para cada um dos casos descritos na tabela anterior, foi proceder a uma manobra inicial de take-off e estabilizá-lo a uma altura de $1.0m$, e posteriormente aplicar o step comulativo desejado para cada ganho especificado.

É verificado na tabela anterior que para ganhos maiores corresponde uma referência de altitude menor, isto deve-se ao facto de o controlador implementado apresenta saturação da entrada, tal como se pode observar no modelo de Simulink na figura 12.

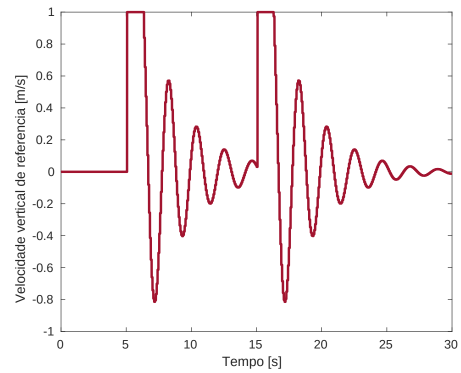
Figura 12: Bloco que simula a saturação do controlador relativo ao input de referência de velocidade vertical.

Como os métodos utilizados de controlo de altitude neste relatório baseiam-se em métodos lineares, a existência de saturação implicaria uma dinâmica do quadrirotor não expectável para o esquema de controlo implementado, e assim as previsões teóricas não corresponderiam à realidade.

Para exemplificar, apresenta-se um exemplo onde foi aplicado um ganho de 3.2 e uma referência cumulativa de $1.0m$, onde se verifica as consequências da saturação:



(a) Resposta no tempo do sistema para o caso onde existe saturação do controlador e outra onde esta é inexistente.

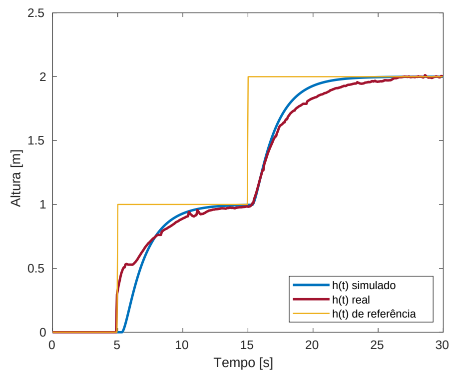


(b) Variação no tempo do output do controlador, verificando-se saturação deste.

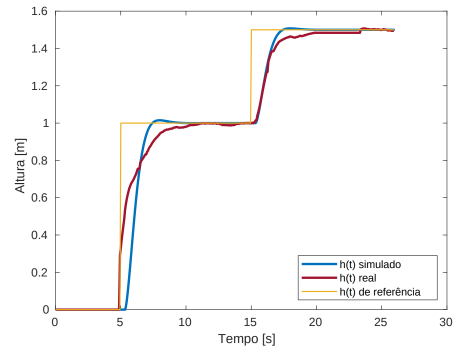
Figura 13: Exemplo de ocorrência de saturação quando se aplicou um ganho de 3.2 e um step de referencia acumulativo de $1.0m$.

Observa-se na figura 13a que para o caso especificado, a existência de saturação implica uma resposta diferente do sistema, quer no sobre-impulso, quer no amortecimento e frequência do sinal de resposta. Na figura 13b relativa à simulação com saturação, verifica-se a saturação do controlador logo após a aplicação das duas referencias, aos $5s$ e $15s$.

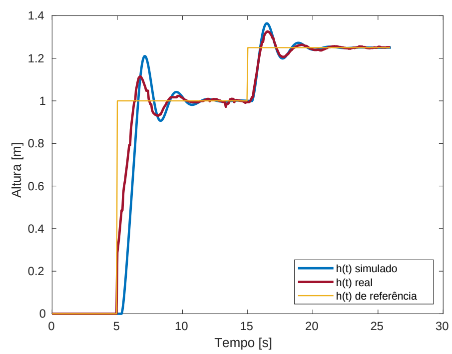
Os resultados obtidos da simulação e da comparação com os dados reais fornecidos estão apresentados na figura 14, para cada um dos casos especificados na tabela 1.



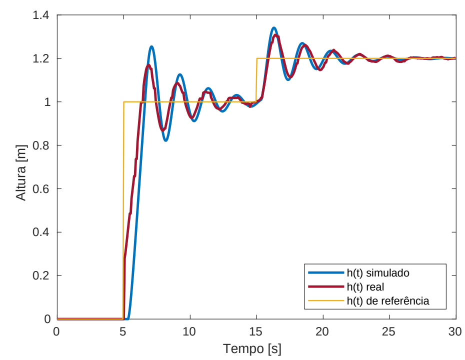
(a) $K_p = 0.5$



(b) $K_p = 1.0$



(c) $K_p = 2.4$



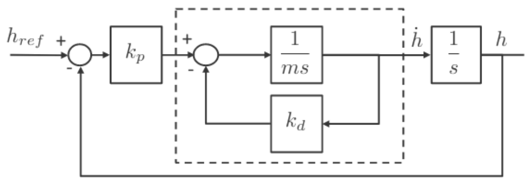
(d) $K_p = 3.2$

Figura 14: Resposta no tempo a escalões para diferentes valores de K_p. Apresenta-se o sinal simulado (azul), o sinal real (vermelho) e o sinal de referencia (amarelo).

Através da observação dos 4 casos apresentados é possível afirmar-se que o resultado entre o sinal simulado e o sinal real não é muito díspar e seguem aproximadamente a mesma dinâmica.

3.2 Comparação de resultados teóricos, experimentais e de simulação

Nesta secção da componente laboratorial procede-se a comparar os resultados provenientes das simulações efetuadas na secção anterior, dos dados reais fornecidos e também da base teórica, sendo que o modelo de controlo teórico da altitude de referencia utilizado está presente na figura 15.



$$\frac{h}{h_{ref}} = \frac{\frac{k_p}{m}}{s^2 + \frac{k_d}{m}s + \frac{k_p}{m}}$$

Figura 15

Verifica-se que com este modelo teórico, o sistema é de segunda ordem, sem existência de zeros e com o ganho estático sempre unitário independente dos valores de k_p ou de k_d.

Para compreender a dinâmica do sistema teórico para variações do ganho, está apresentado na figura 16 o root-locus do modelo teórico para valores de $K_d = 2$ e $m = 1$, estes valores foram escolhidos de forma arbitrária apenas para a identificação de alterações do sistema para ganhos diferentes.

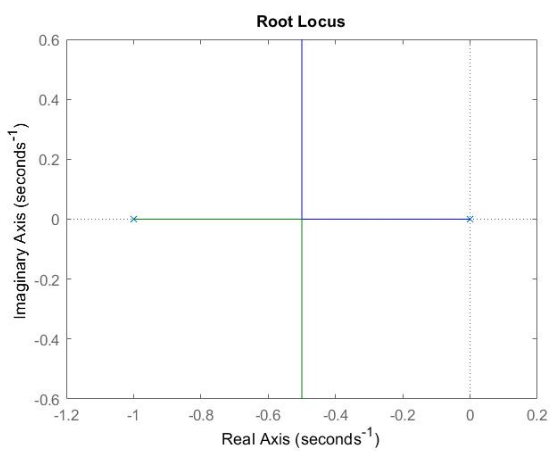


Figura 16

A partir do root-locus verifica-se que para ganhos elevados, o sistema torna-se oscilatório, sendo que a parte real dos pólos mantém-se constante ao longo do aumento do ganho quando estes têm componente imaginária não nula.

Ao contrário do modelo teórico anteriormente apresentado, o modelo em Simulink fornecido apresenta a seguinte estrutura de controlo de altitude:

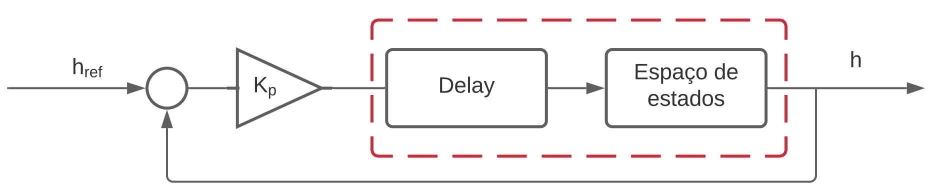


Figura 17

O modelo apresenta um bloco referente ao espaço de estados que descreve uma dinâmica de 2ºordem e com apenas um input e um output (SISO), mas também um delay devido ao atraso de comunicação entre o controlador e o quadrirotor. Está apresentado na equação seguinte a função de transferência correspondente ao espaço de estados conjunta com o delay.

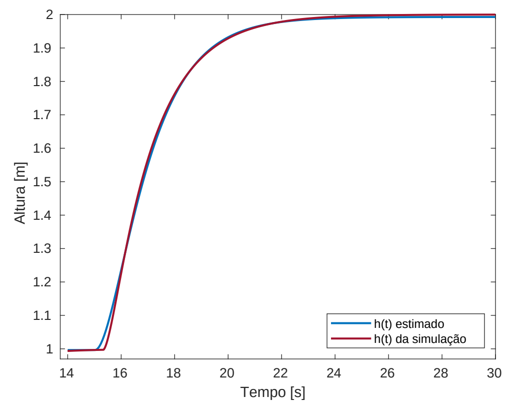
$$G(s) = \frac{0.1526s + 5.153}{s^2 + 5.82s + 1.375 \cdot 10^{-11}} \cdot e^{-s0.026} \tag{33}$$

3.2.1 Análise de resultados a partir de estimação de funções de transferência

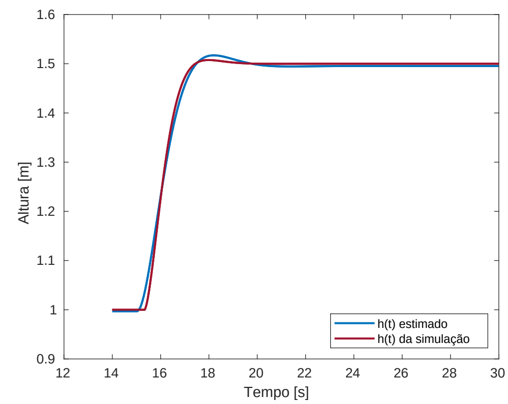
Como o modelo do Simulink difere do modelo de referência teórico, devido à existência de um zero e do delay, procedeu-se a realizar uma aproximação do sistema simulado de modo a obter uma configuração da função de transferência semelhante ao teórico, permitindo assim comparar os três casos presentes. Para este efeito utilizou-se na estimação o *System Identification Toolbox* do MATLAB. Na tabela seguinte está apresentado as funções de transferência estimadas do modelo de Simulink que relacionam a entrada h_{ref} e a saída h, mas também dados relativos ao fit da estimação e da dinâmica estimada:

k_p	Numerador	Denominador	Fit [%]	Pólos	ξ	ω	τ
0.5	1.064	$s^2 + 2.261s + 1.067$	97.74	-0.67 -1.59	1.0	-0.67 -1.59	1.49 0.62
1.0	1.944	$s^2 + 1.972s + 1.95$	96.98	$-0.986 \pm 0.989i$	0.706	1.40	1.01
2.4	5.37	$s^2 + 1.314s + 5.386$	83.6	$-0.657 \pm 2.23i$	0.283	2.32	1.52
3.2	7.813	$s^2 + 0.6966s + 7.845$	78.3	$-0.348 \pm 2.78i$	0.124	2.8	2.87

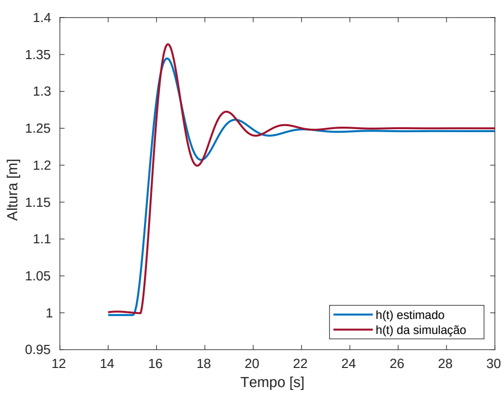
Para complementar a tabela anterior referente à aproximação dos dados de simulação por um modelo de 2ºordem, está apresentado na figura 18 a resposta no tempo do modelo de *Simulink* e da respetiva aproximação executada.



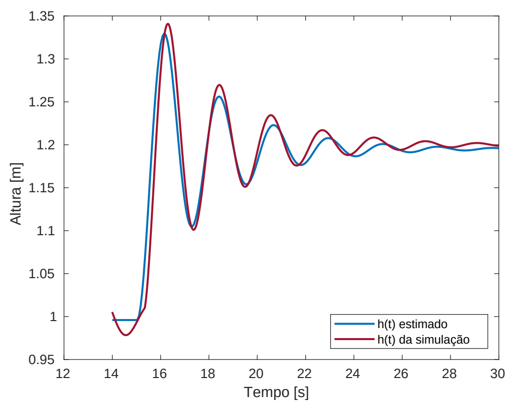
(a) $K_p = 0.5$



(b) $K_p = 1.0$



(c) $K_p = 2.4$



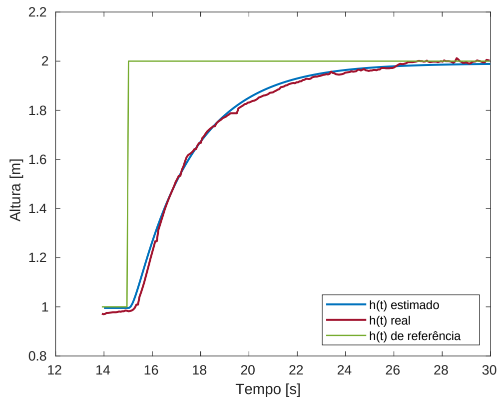
(d) $K_p = 3.2$

Figura 18: Comparação na resposta no tempo do sinal do modelo de *Simulink* e do sinal estimado.

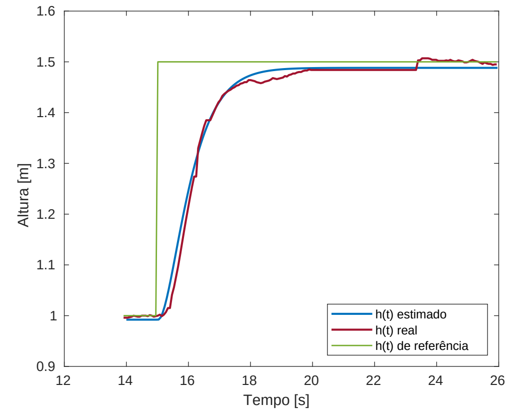
No caso da análise dos dados reais, realizou-se o mesmo procedimento anterior obtendo assim as funções de transferência para cada valor de k_p. Na tabela seguinte está apresentado as respectivas funções de transferência e dados de fit de estimação e da dinâmica:

k_p	Numerador	Denominador	Fit [%]	Pólos	ξ	ω	τ
0.5	2.052	$s^2 + 5.418s + 2.061$	94.9	-0.412 -5.01	1.0	-0.412 -5.01	2.43 0.2
1.0	3.018	$s^2 + 3.426s + 3.043$	91.55	$-1.71 \pm 0.33i$	0.982	1.74	0.584
2.4	5.74	$s^2 + 1.692s + 5.757$	86.7127	$-0.846 \pm 2.25i$	0.353	2.40	1.18
3.2	7.499	$s^2 + 0.8165s + 7.518$	73.97	$-0.948 \pm 1.29i$	0.593	1.6	1.06

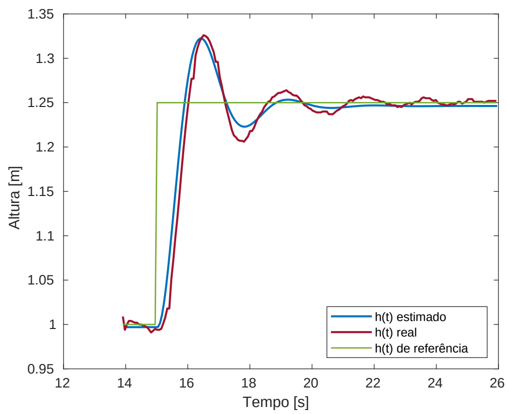
Para complementar a análise e verificação dos resultados, está apresentado na figura 19 a resposta no tempo do sinal real e da estimação de segunda ordem realizada.



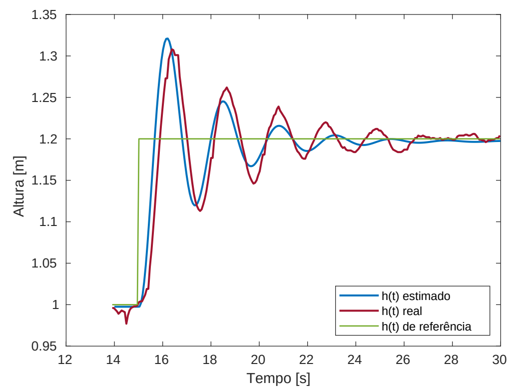
(a) $K_p = 0.5$



(b) $K_p = 1.0$



(c) $K_p = 2.4$



(d) $K_p = 3.2$

Figura 19: Comparação na resposta no tempo do sinal real e do sinal estimado.

É possível afirmar que o modelo de segunda ordem apresenta-se como uma boa aproximação ao dados reais, tendo obtido valores de fit elevados para cada caso de ganho e por análise da resposta no tempo, verifica-se um comportamento semelhante entre a estimação de 2ºordem e os dados reais. Embora é evidente a dificuldade do sistema de 2ºordem simular o delay apresentado nos resultados reais.

A partir dos dados anteriores o modelo de *Simulink* e o modelo real apresentam características semelhantes ao modelo teórico, dado que em ambos os casos quando se aumenta o ganho de realimentação proporcional o sistema tende a ficar oscilatório, e nos três casos o sistema tem sempre um ganho aproximadamente unitário.

3.3 Estimação de K_d e comparação dos sistemas em cadeia fechada

Nesta secção da componente laboratorial propomos uma abordagem do cálculo do K_d a partir do modelo de *Simulink*, embora como vai ser descrito existem várias formas de o estimar dependendo obviamente das aproximações realizadas. Para além da estimação do

K_d também é realizada uma estimação da massa (m) do quadri-rotor dado que esta não foi fornecida no enunciado deste relatório.

3.3.1 1ª abordagem no calculo de K_d

Para a estimação do K_d, utilizou-se a abordagem realizada anteriormente de modelar o sistema presente no *Simulink* como um sistema de 2º ordem e assim relacionar a função de transferência teórica com a função de transferência estimada, mas evidenciou-se que para diferentes simulações e estimativas realizadas, o valor de K_d varia, algo que não é o desejado segundo a teoria utilizada, assim sendo, considerou-se o melhor valor de K_d aquele que provinha da estimação do modelo de segunda ordem com melhor fit e menor variância dos parâmetros estimados da função de transferência.

Deste modo, como para $K_p = 0.5$ apresenta um valor de fit de 97.74% realizou-se a estimação de K_d a partir dos dados resultantes da simulação com este ganho K_p. A função de transferência estimada foi a seguinte:

$$G(s) = \frac{1.064}{s^2 + 2.261s + 1.067} \tag{34}$$

Ao comparar com a função de transferência em cadeia fechada do modelo teórico resulta as seguintes relações:

$$\frac{K_p}{m} = 1.067$$
$$\frac{K_d}{m} = 2.261$$

Ao resolver o anterior sistema de equações resulta que o valor de K_d é 1.0595 e a massa do quadri-rotor é 0.4686 Kg.

3.3.2 2ª abordagem no calculo de K_d

Outra abordagem efetuada para a estimação de K_d foi assumir a inexistência do bloco de delay do *Simulink*, que na abordagem anterior influência a função de transferência estimada, e apenas considerar a função de transferência presente no bloco de espaço de estados e concretizar algumas aproximações para facilmente comparar com a função de transferência teórica do anel fechado interior. De seguida está apresentado a função de transferência que representa o espaço de estados:

$$H(s) = \frac{0.1526s + 5.153}{s^2 + 5.82s + 1.375 \cdot 10^{-11}} \tag{35}$$

A função de transferência do anel interior do esquema teórico é o seguinte:

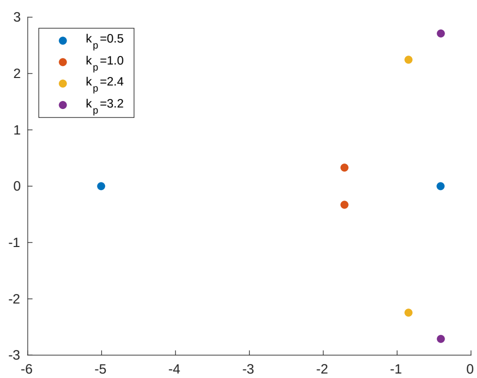
$$H(s) = \frac{1/m}{s(s + k_d/m)} \tag{36}$$

De forma a determinar K_d realizou-se a aproximação de $1.375 \cdot 10^{-11} = 0$ de modo a relacionar as duas anteriores equações. Conclui-se então que:

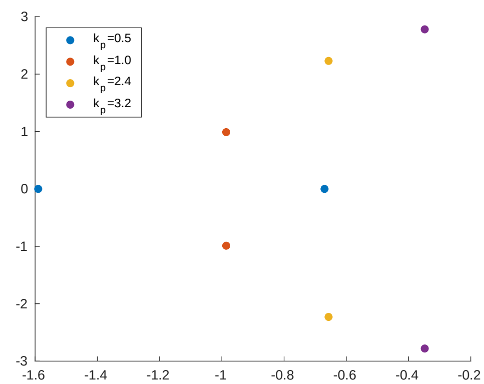
$$K_d = 1.129$$
$$m = 0.194$$

3.3.3 Validação do modelo teórico

Para comparar os resultados reais, de simulação e teóricos, procedeu-se a localizar os pólos para cada caso utilizando as funções de transferência de segunda ordem anteriormente calculadas. Apresenta-se na figura 20 a localização dos pólos nas estimações realizadas para os dados reais quer os dados de simulação.



(a) Localização dos pólos das funções de transferência estimadas a partir de dados reais.



(b) Localização dos pólos das funções de transferência estimadas a partir do modelo em Simulink.

Figura 20

Verifica-se que em ambos os casos anteriores, a dinâmica do sistema varia de forma semelhante quando k_p varia, i.e. os dois têm topologias semelhantes.

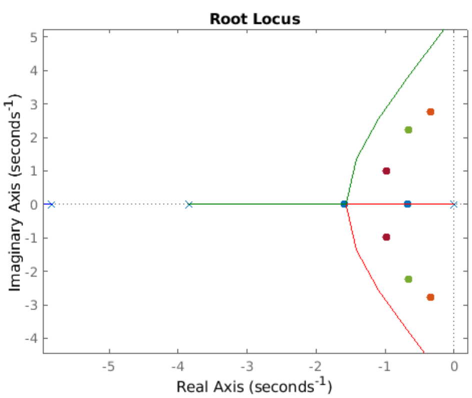
Se se comparar com o root locus criado na secção **2.11**, a topologia deste difere dos resultados obtidos, pois afirma que para valores elevados de k_p, os pólos têm componente imaginária não nula e que a componente real se mantém constante, algo que não se verifica nos resultados anteriores.

O anterior resultado é causado pela existência do atraso no modelo, pois este leva à perda da margem de fase do sistema, mas também a mudar a dinâmica do mesmo como observado anteriormente.

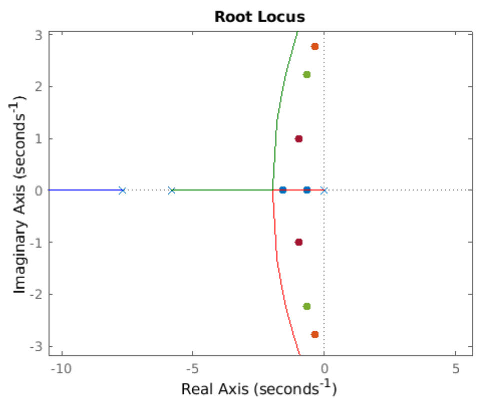
Para fundamentar a justificação anterior, apresenta-se na figura seguinte o root-locus do modelo de *Simulink* onde se considerou uma aproximação de primeira ordem do atraso, tal como apresentado na equação (37), e onde se também apresenta os pólos do sistema estimado do *Simulink* anteriormente com um modelo de segunda ordem.

$$e^{-Ts} = \frac{1}{1+Ts} \quad ou \quad e^{-Ts} = \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s} \tag{37}$$

Na primeira equação é uma aproximação por série de Taylor, a segunda corresponde a uma aproximação de Padé que segundo a literatura apresenta melhor resultados comparativamente à aproximação de Taylor.



(a) Root locus do sistema com a aproximação de primeira ordem de Taylor do delay.



(b) Root locus do sistema com a aproximação de primeira ordem de Padé do delay.

Figura 21

Verifica-se uma topologia semelhante tal como anteriormente afirmado, mas ao aproximar o atraso por um pólo real, altera a ordem do sistema, i.e. o modelo fica com três pólos, mas como o pólo real acrescentado tem uma frequência muito elevada, considerou-se negligente o efeito deste pólo e é por isso que se está a comparar o root locus do modelo de terceira ordem com os pólos determinados pela estimativa de segunda ordem, pois estes são os pólos considerados dominantes.

É de salientar que ao contrário do modelo teórico onde não é possível o sistema ficar instável com o aumento do ganho K_p, o modelo real/Simulink pode ficar instável, sendo isto causado pela existência de atraso.

4 Conclusão

Neste relatório obtivémos as equações da dinâmica e da cinemática do quadri-rotor e da sua linearização num ponto de equilibrio - hovering.

Posteriormente, realizou-se múltiplas experiências com o objetivo de recolher dados sobre a dinâmica real da altitude do drone, embora estes dados reais tenham sido fornecidos directamente pela coordenadora do laboratório.

Comparou-se os resultados reais com os resultados provenientes de um modelo linear criado no *Simulink*, de modo a verificar se ambos detinham a mesma dinâmica ou se o modelo no simulador é uma boa aproximação. Concluiu-se que os dados de simulação estão coerentes com os dados reais, embora com algumas diferenças numéricas, devido a imprecisões e estimativas realizadas.

Verificou-se que o modelo base teórico não é representativo da dinâmica do Drone, isto apenas se deve ao atraso existente entre o controlador e o Drone. Identificou-se que no plano complexo, os pólos do sistema real e simulado apresentam comportamento idêntico para variações do ganho proporcional K_p, mas apresentam uma topologia diferente do modelo teórico. Pode-se considerar o modelo base teórico como uma aproximação, mas apenas para ganhos K_p baixos.

A grande diferença encontrada entre os dados reais e o modelo teórico, é que o modelo real pode ficar instável para ganhos proporcionais elevados.

No final propõe-se uma alternativa ao modelo teórico baseado na aproximação de primeira ordem do atraso existente de modo a permitir que o novo modelo tenha um comportamento semelhante ao modelo real.