

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
AERONAVES ROBOTIZADAS

---

**Motion Control of the Parrot AR.Drone**  
3º Trabalho de Laboratório

---

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Luís Ferreira, 86655  
Renato Loureiro, 89708  
Tiago Neto, 89716

2020/21

# Índice

<b>Referências</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Componente Teórica</b>	<b>2</b>
2.1 . . . . .	2
2.2 . . . . .	3
2.3 . . . . .	4
2.4 . . . . .	5
2.5 . . . . .	5
2.6 . . . . .	6
2.7 . . . . .	7
2.8 . . . . .	7
<b>3 Componente Laboratorial</b>	<b>9</b>
3.1 Implementation and simulation . . . . .	9
3.2 Trajetória retilínea . . . . .	9
3.3 Resultados da trajetória retilínea . . . . .	10
3.4 Trajetória Circular . . . . .	11
3.5 Resultados da trajetória Circular . . . . .	11
3.6 Trajetória circular com drone a apontar para o centro . . . . .	12
<b>4 Conclusão</b>	<b>14</b>

# 1 Introdução

Neste trabalho laboratorial, pretende-se abordar os algoritmos necessários para um seguimento autónomo de uma trajetória predefinida. Para tal, começamos por determinar o modelo que rege o movimento do drone, recorrendo às equações da dinâmica/cinemática associadas a um corpo rígido, e analisar a sua estabilidade com o Segundo Método de Lyapunov para a Estabilidade, já que o modelo obtido é não-linear.

Obviamente que no desenho de trajetória é útil termos a liberdade de estabelecermos um caminho sem qualquer tipo de restrições geométricos e ter um controlador que o consiga acompanhar (será sempre necessário ter em consideração que o drone é um sistema subatuado onde terá de haver forçosamente acoplamento de alguns movimentos). No entanto, no limite, podemos sempre decompor qualquer movimento como uma sequência de linhas retas e/ou arcos de circunferência tangentes no ponto de transição, e serão precisamente estes dois movimentos que serão estudados. No entanto, o principal desafio no seguimento deste tipo de trajetórias é o vento, que estará sempre presente num ambiente de funcionamento ao ar livre. Assim, estratégias de seguimento de trajetória têm que ser eficazes no anulamento desta perturbação, estratégias que tentaremos também aplicar.

## 2 Componente Teórica

### 2.1

Fazendo uma comparação entre as equações (1) e (2) do enunciado da atividade laboratorial obtém-se:

$$\begin{cases} \ddot{p} = ge_3 - \frac{T}{m}Re_3 & (1) \\ \ddot{p} = ge_3 - R_z(\psi)u^* & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{T}{m}Re_3 = R_z(\psi)u^* \Leftrightarrow \frac{T}{m}R_z(\psi)R_y(\phi_r)R_x(\theta_r)e_3 = R_z(\psi)u^*$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por  $R_z(\psi)^{-1} = R_z(-\psi)$ , obtém-se uma expressão direta para a entrada virtual  $u^*$ :

$$u^* = \frac{T}{m}R_y(\phi_r)R_x(\theta_r)e_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \\ u_z^* \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} \cos(\phi_r)\sin(\theta_r) \\ -\sin(\phi_r) \\ \cos(\phi_r)\cos(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dado que a transformação linear de rotação não altera a dimensão do vetor a que é aplicada, a expressão para intensidade do *thrust* pode ser determinada igualando as normas dos vetores nos dois lados da equação (1):

$$\left(\frac{T}{m}\right)^2 = (u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2 \Leftrightarrow T = m\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2} \quad (2)$$

Tendo obtido a expressão para o *thrust*, é agora possível determinar *phi* e *theta* em função da entrada virtual.  $\theta_r$  pode ser obtido dividindo a primeira componente pela terceira de (1), tendo:

$$\frac{\sin(\theta_r)}{\cos(\theta_r)} = \frac{u_x^*}{u_z^*} \Leftrightarrow \theta_r = \arctan\left(\frac{u_x^*}{u_z^*}\right) \quad (3)$$

Analisando (1), vê-se que é possível arranjar duas expressões para  $\phi_r$  que, dado o acoplamento de movimentos neste sistema subatuado, se espere que sejam equivalentes: a primeira vem diretamente da segunda componente de (1), utilizando a expressão para o *thrust* obtida em (2):

$$-\frac{T}{m}\sin(\phi_r) = u_y^* \Leftrightarrow \phi_r = \arcsin\left(-\frac{m}{T}u_y^*\right) = \arcsin\left(-\frac{u_y^*}{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2}}\right) \quad (4)$$

A segunda expressão para  $\phi_r$  vem de somar o quadrado da primeira e terceira componentes de (1) (de forma a aplicar a identidade trigonométrica  $\sin^2(\theta_r) + \cos^2(\theta_r) = 1$ ) e novamente utilizando a expressão para o *thrust* obtida em (2):

$$\left(\frac{T}{m}\right)^2 \cos^2(\phi_r) = (u_x^*)^2 + (u_z^*)^2 \Leftrightarrow \phi_r = \arccos\left(\frac{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_z^*)^2}}{\sqrt{(u_x^*)^2 + (u_y^*)^2 + (u_z^*)^2}}\right) \quad (5)$$

Com as expressões (3) e (4)/(5) obtém-se então os ângulos de Euler de referência a usar no anel interior de controlo da atitude a partir de uma entrada virtual (uma aceleração) expressa num referencial  $\{B_2\}$ , com o eixo vertical colinear com o referencial  $\{I\}$  e com um desfasamento entre eles igual ao ângulo de guinada do quadrotor.

## 2.2

Para facilitar a obtenção da dinâmica do erro do sistema, podemos primeiro simplificar a expressão do vetor de estados  $\tilde{x}$ :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}$$

Assim, as matrizes A e B da representação em espaço de estados da dinâmica do erro é obtida de uma forma muito mais direta:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \ddot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \cdot u \quad (6)$$

onde o subscripto indica a dimensão das matrizes quadradas e em que se definiu  $u$  como sendo

$$u = \ddot{\tilde{p}} = \ddot{p} - \ddot{p}_d = ge_3 - R_z(\psi)u^*$$

A partir desta expressão é possível então obter

$$u^* = R_z(-\psi)(ge_3 - \ddot{p}_d - u)$$

Fazendo a ligação com a secção anterior, torna-se então claro que através de uma sequência de transformações é possível obter os ângulos de Euler de referência  $\theta_r$  e  $\phi_r$  a partir da entrada  $u = -K\tilde{x}$  a utilizar na lei de controlo de retroalimentação de estados.

Pretendo-se obter uma matriz K que seja solução do problema de otimização LQR, é preciso primeiro obter a matriz P, resolvendo a equação algébrica de Riccati  $A^T P + P A + Q - \frac{1}{\rho} P B B^T P = 0$  e, então, obter K através da expressão  $K = \frac{1}{\rho} B^T P$ .

Com o controlador LQR implementado, é então finalmente possível obter:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu = A\tilde{x} - BK\tilde{x} = (A - BK)\tilde{x}$$

## 2.3

Relembrando a representação em espaço de estados do sistema,

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu, \text{ com } \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}$$

Com o método de controlo proposto anteriormente, realiza-se a seguinte realimentação de estados, onde  $K$  é obtido por resolução da equação algébrica de Riccati.

$$u = -K\tilde{x}$$

Assim sendo, substituindo a variável de controlo  $u$  pela realimentação de estados anterior, obtem-se a seguinte representação em espaço de estados do sistema,

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BK)\tilde{x} \quad (7)$$

Para verificar a estabilidade deste novo sistema, utiliza-se o método de Lyapunov de verificação de estabilidade de sistemas não-lineares, considerando a função quadrática como a função de Lyapunov candidata,

$$V_1 = \tilde{x}^T P \tilde{x} > 0, \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^6 \quad (8)$$

onde a matrix  $P$  é uma matrix simétrica definida positiva.

Derivando a função  $V_1$  em ordem ao tempo obtem-se,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{V}_1 &= [(A - BK)\tilde{x}]^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P (A - BK)\tilde{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{V}_1 &= \tilde{x}^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]\tilde{x} \end{aligned} \quad (9)$$

A função  $\dot{V}_1$  obtida pode ser escrita da seguinte forma,

$$\dot{V}_1 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} \quad (10)$$

Substituindo a matrix  $K$  na expressão de  $Q^*$  pela definição de  $K$ , proveniente da resolução da equação de Riccati ( $K = R^{-1}B^T P$ ), obtem-se,

$$Q^* = -[A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - (R^{-1}B^T P)^T B^T P] \quad (11)$$

Aplicando a equação de Riccati em regime estacionário, observa-se que  $Q^*$  pode ser escrito como sendo,

$$Q^* = Q + (R^{-1}B^T P)^T B^T P \Leftrightarrow Q^* = Q + \frac{1}{\rho} P^T B B^T P \quad (12)$$

Como a matrix  $Q$  e  $P$  são ambas matrizes definidas positivas, então  $Q^*$  é também uma matrix definida positiva, podendo-se afirmar que,

$$\dot{V}_1 < 0, \forall \tilde{x} \neq 0 \quad (13)$$

Conclui-se assim que o sistema é assintoticamente estável junto do ponto de equilíbrio dado por  $\tilde{x} = 0$ .

## 2.4

Como visto na equação (3) do enunciado, vemos que a perturbação  $w$  é modelada como uma aceleração pura e que, na impossibilidade de saber o seu valor específico, uma sua estimativa afetará assim a entrada virtual  $u$  definida anteriormente. Ainda considerando que esta perturbação é constante, é possível até "esconder" o seu efeito numa possível transformação de coordenadas, evidenciando então que esta perturbação atuará na dinâmica do sistema como uma entrada (logo, estando afetada apenas pela matriz das entradas,  $B$ ).

Mostrando algebricamente o explicado, tem-se então:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \ddot{\tilde{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ ge_3 - R_z(\psi)u^* + w - \ddot{p}_d \end{bmatrix}$$

Usando a equação (4) do enunciado para a entrada virtual  $u^*$  na expressão acima:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ ge_3 - R_z(\psi)(R_z(-\psi)(K\tilde{x} + ge_3 + \hat{w} - \ddot{p}_d)) + w - \ddot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ -K\tilde{x} + \tilde{w} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K\tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{w} = A\tilde{x} - BK\tilde{x} + B\tilde{w} = (A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w} \end{aligned}$$

, obtendo-se então o resultado esperado.

## 2.5

Para verificar a estabilidade do sistema na presença de perturbações, recorre-se novamente à teoria de estabilidade de Lyapunov, considerando a seguinte função de Lyapunov,

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \quad (14)$$

onde  $k_\omega > 0$ ,  $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$  e assumindo que  $\omega$  é constante.

Derivando a função de Lyapunov  $V_2$  obtem-se,

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{k_\omega} \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) \quad (15)$$

Desenvolvendo  $\dot{V}_1$  considerando a dinâmica com a presença de perturbações, obtem-se,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \\ &= ((A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w})^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P((A - BK)\tilde{x} + B\tilde{w}) \\ &= \tilde{x}^T [(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK)] \tilde{x} + \tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P B \tilde{\omega} \\ &= -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} \end{aligned} \quad (16)$$

Juntado a equação (16) e (15), obtem-se,

$$\dot{V}_2 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} + \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\tilde{\omega}} \quad (17)$$

Sabendo que  $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$  e que se considera  $\omega$  constante, obtem-se,

$$\dot{V}_2 = -\tilde{x}^T Q^* \tilde{x} + 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} - \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\hat{\omega}} \quad (18)$$

Para garantir que  $\dot{V}_2 < 0$  procede-se a igualar os dois últimos membros a zero, obtendo-se,

$$\begin{aligned} 2\tilde{\omega}^T B^T P \tilde{x} - \frac{2}{k_\omega} \tilde{\omega}^T \dot{\hat{\omega}} &= 0 \\ 2\tilde{\omega}^T (B^T P \tilde{x} - \frac{1}{k_\omega} \dot{\hat{\omega}}) &= 0 \\ B^T P \tilde{x} - \frac{1}{k_\omega} \dot{\hat{\omega}} &= 0 \\ \dot{\hat{\omega}} &= k_\omega B^T P \tilde{x} \end{aligned} \quad (19)$$

A lei de adaptação obtida anteriormente, permite garantir que o sistema é estável em torno do ponto de equilíbrio  $\tilde{x} = 0$ .

## 2.6

Considerando agora o sistema tem como vetor de estado  $X = [\tilde{x} \ \tilde{\omega}]^T$  e utilizando a lei de adaptação proposta na secção anterior  $\dot{\hat{\omega}} = k_\omega B^T P \tilde{x}$ , as equações em espaço de estados podem-se escrever como sendo,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & B \\ -k_\omega B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Verifica-se facilmente que o ponto de estabilidade deste sistema aumentado é  $X = 0$ . Na secção anterior, verificou-se que a lei de adaptação permite garantir que  $\dot{V}_2 < 0$ , concluindo-se que o sistema é estável perto do ponto de equilíbrio. Para afirmar que o sistema é globalmente assintoticamente estável na origem do sistema, recorre-se ao teorema de Krazovskii-LaSalle:

$$\Omega = \{X : \dot{V}_2(X) = 0\} \quad (21)$$

O maior *invariant set* contido em  $\Omega$  é a origem, concluindo-se que o sistema proposto é globalmente assintoticamente estável.



## 2.7

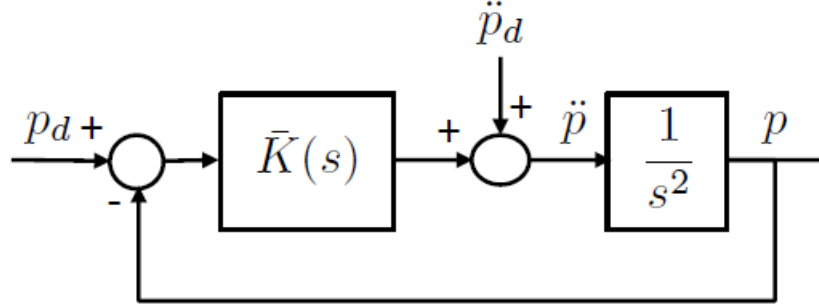


Figura 1: Diagrama de Blocos correspondente à lei de controlo proposta

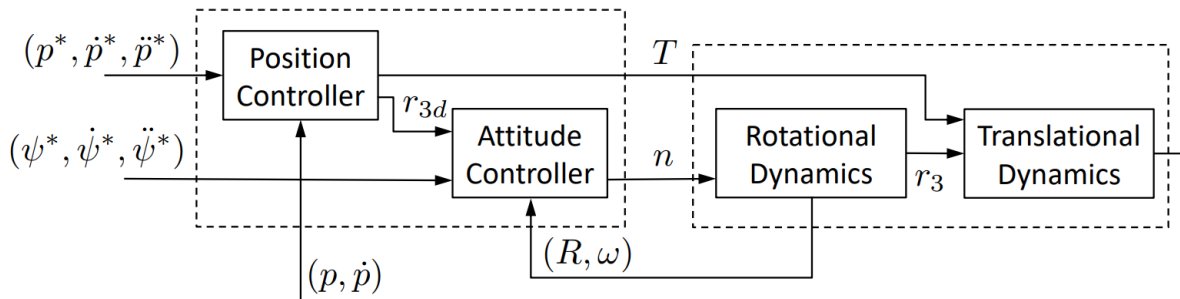
A lei de controlo  $\tilde{u} = \ddot{p} - \ddot{p}_d = K \cdot \tilde{x}$  proposta como resolução ao problema de otimização LQR pode então ser expandida, aplicando a transformada de Laplace:

$$\tilde{u} = K\tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{U} = K(s)\tilde{X}(s) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) - P_d(s) \\ s(P(s) - P_d(s)) \end{bmatrix} = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) \Leftrightarrow$$

$$U(s) - s^2P_d(s) = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) \Leftrightarrow U(s) = (K_1 + K_2s)(P(s) - P_d(s)) + s^2P_d(s)$$

Da expressão acima e comparando com o diagrama de blocos da figura 1, retira-se então que  $\bar{K}(s) = K_1 + K_2s$  e, comparando com a estrutura típica de um controlador PID, conclui-se que os elementos da matriz  $K_1$  representam o termo proporcional ao erro  $p_d - p$  da respetiva dimensão e  $K_2$  o termo derivativo. Ainda se acrescenta que a lei de controlo solução do problema LQR não só fornece ferramentas de seguimento de uma referência como também um termo dissipativo que diminui a energia do sistema, obrigando a convergir num valor, ao contrário do que sucederia em sistemas marginalmente estáveis.

## 2.8

Figura 2: Controlo hierárquico usado no *quadrotor*

Dado o controlo hierárquico que foi desenvolvido nas aulas teóricas, explicitado na figura acima, onde foi implementado uma dinâmica de anel interior de controlo de atitude e um anel externo de controlo de posição, torna-se possível fazer o seguimento independente da posição e do ângulo de guinada desejado (tal como seria de esperar, já que são estas quatro variáveis - três dimensões físicas da dimensão e ângulo de guinada - que constituem o *flat input*, analisado no primeiro laboratório). Assim, assumindo que as constantes de tempo associado a cada anel são diferentes o suficiente para os considerar desacoplados, é então possível desenvolver o controlador linear pedido, usando a variável em si e a sua primeira derivada:

$$\Psi(s) = \frac{\psi}{\dot{\psi}} = \frac{k}{s + a}$$

Assim, pretendendo-se um mecanismo de controlo de *feedback* com seguimento de referência, pode-se então usar um tradicional controlador PID:

- O termo proporcional ao erro entre a referência e saída obtida permite assim garantir um seguimento da referência;
- O termo integral contabiliza os valores anteriores do erro. Assim, se existir um erro residual após a aplicação do termo proporcional, garantido assim um seguimento com erro estático;
- Não havendo requisitos para a velocidade de aproximação da saída da referência, não há então necessidade de um termo derivativo.

O controlador PI será então da forma:

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

Com as funções de transferência associadas ao modelo e ao controlador, e assumindo uma retroalimentação negativa, obtém-se a função de transferência associada à cadeia fechada:

$$\frac{\psi}{\psi_r}(s) = \frac{K(s)\Psi(s)}{1 + K(s)\Psi(s)} = \frac{K_p k s + K_i k}{s^2 + (K_p k + a)s + K_i k}$$

### 3 Componente Laboratorial

#### 3.1 Implementation and simulation

De forma a implementar o controlador e adaptá-lo às variáveis de entrada foram mantidas as expressões para os ângulos de rolamento, picada e guinada. De forma a simplificar o design foi pressuposto que todas as trajetórias encontravam-se no plano horizontal e que tanto o ângulo de rolamento como os ângulos de picada e guinada são muito pequenos. Foi assumido também que a implementação do controlador é dada por

$$w_r = -k_w(z - z_d) \quad (22)$$

com  $k_w=1$ .

#### 3.2 Trajetória retilínea

O movimento retilíneo descrito pelo drone foi efetuado a velocidade, altitude e guinada constante. É de esperar que o drone faça uma trajetória que seja uma reta ao longo do eixo horizontal. No bloco *Desired Trajectory* foi descrito o movimento a partir das equações de movimento apresentados abaixo.

$$\begin{aligned} p_d &= \begin{pmatrix} 0.1dt \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{p}_d &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \ddot{p}_d &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

As equações em cima foram implementadas pelo seguinte bloco de código MATLAB.

```
1 pd=[0.1*t;0;1];
2 dot_pd = [0.1;0;0];
3 ddot_pd = [0;0;0];
4 psi_d = 0;
```

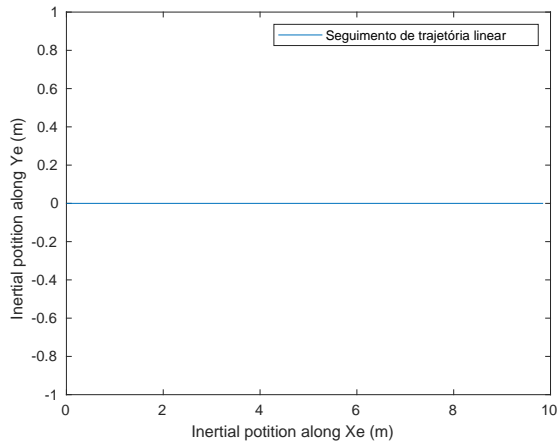
Os ganhos utilizados no controlador foram os seguintes:

$$k_1 = -2.2361$$

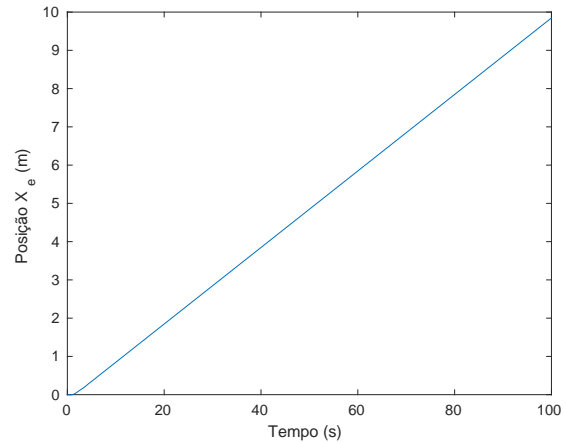
$$k_2 = -3.0777$$

### 3.3 Resultados da trajetória retilínea

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória retilínea.

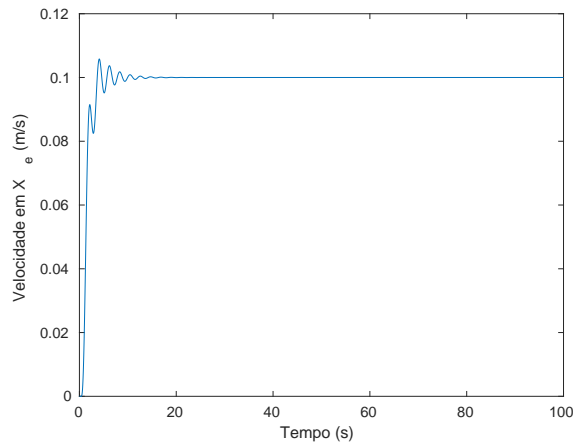


(a) Trajetória percorrida

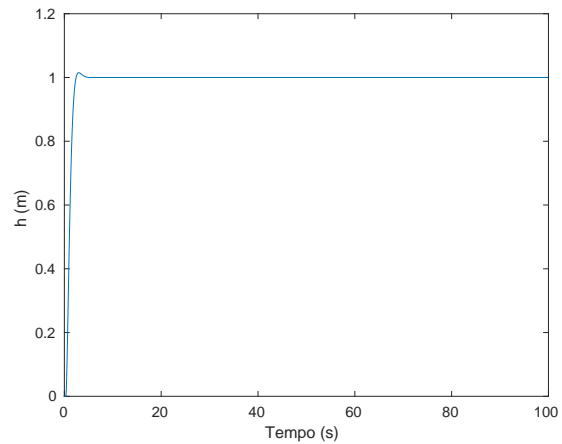


(b)  $X_e(t)$

Figura 3: Resultados relativos à posição para uma trajetória retilínea



(a)  $V_e(t)$



(b) Variação de  $h(t)$

Figura 4: Resultados relativos à velocidade e altura para uma trajetória retilínea

Observa-se através dos gráficos acima que, relativamente à posição, temos um bom seguimento da trajetória, o drone descreve a trajetória proposta de uma forma satisfatória. Relativamente ao gráfico da altitude verifica-se que existe sobre-elevação e que logo a seguir o drone fica com uma altura constante de 1m tal como era esperado. A sobre-elevação existente é pequena. Através do gráfico da velocidade podemos ver que o sistema é oscilatório nos primeiros instantes, mas passado cerca de 15 segundos a velocidade torna-se constante.

Resumindo, o sistema apresenta uma boa resposta e o controlador projetado é satisfatório para uma trajetória retilínea.

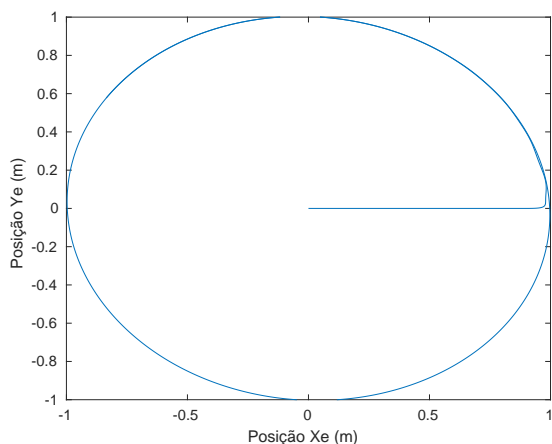
### 3.4 Trajetória Circular

De seguida pretende-se definir uma trajetória circular num plano horizontal. A trajetória tem um raio de 1 m e é efetuada com uma velocidade angular de 0.1 rad/s e um ângulo de guinada constante. No bloco *Desired Trajectory* foi descrito o movimento a partir do seguinte código MATLAB:

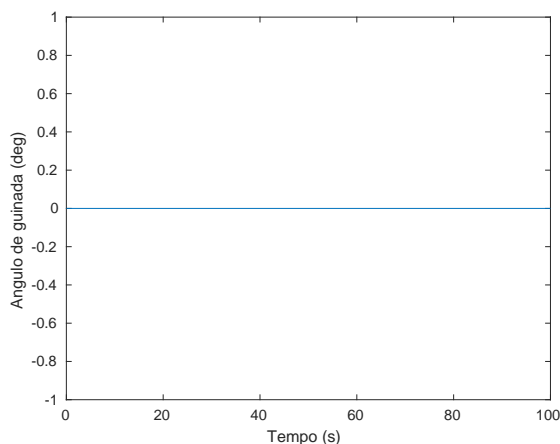
```
1 r=1;
2 omega=0.1;
3 pd=[r*cos(omega*(t-10));r*sin(omega*(t-10));1];
4 dot_pd=[-r*sin(omega*(t-10))*omega; r*omega*cos(omega*(t-10));0];
5 ddot_pd=[-r*(omega^2)*cos(omega*(t-10)); -r*(omega^2)*sin(omega*(t-10));0];
6 psi_d=0;
```

### 3.5 Resultados da trajetória Circular

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória circular.



(a) Trajetória percorrida



(b)  $\psi(t)$

Figura 5: Resultados para uma trajetória circular

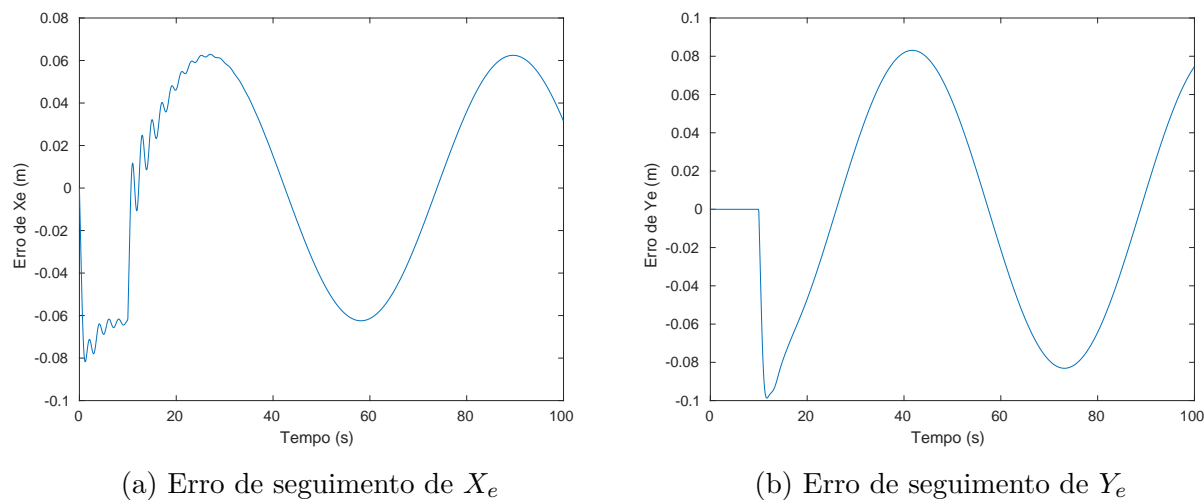


Figura 6: Resultados para uma trajetória circular

Como se pode ver pelo gráfico da figura 5.a o drone começa o seu percurso no centro do referencial e faz uma circunferência de raio 1 com centro na origem. Tanto o erro de seguimento em X como o erro de seguimento em Y possuem um carácter oscilatório porém com uma amplitude relativamente baixa. Nos primeiros segundos pode-se ver que ambos os erros possuem um comportamento peculiar, isto pode-se dever ao facto o drone começar a sua trajetória na origem do referencial. O erro de seguimento em X oscila por entre -0.06 e 0.06 metros e o erro de seguimento em y oscila entre os -0.08 e 0.08. Relativamente ao ângulo de picada, como se pode verificar na figura 5.b este é constante, tal já era esperado.

### 3.6 Trajetória circular com drone a apontar para o centro

Pretende-se efetuar a mesma trajetória circular que foi descrita anteriormente, mas desta com um ângulo de guinada tal que o drone aponte sempre para o centro da circunferência. Isto é obtido implementado o seguinte código MATLAB no bloco *Desired Trajectory*.

```

1 r=1;
2 omega=0.1;
3 pd=[r*cos(omega*(t));r*sin(omega*(t));1];
4 dot_pd=[-r*sin(omega*(t))*omega; r*omega*cos(omega*(t));0];
5 ddot_pd=[-r*(omega^2)*cos(omega*(t)); -r*(omega^2)*sin(omega*(t));0];
6 psi_d=omega*(t);

```

Abaixo encontram-se os gráficos obtidos para simulação da trajetória circular com o drone a apontar para o centro da circunferência descrita.

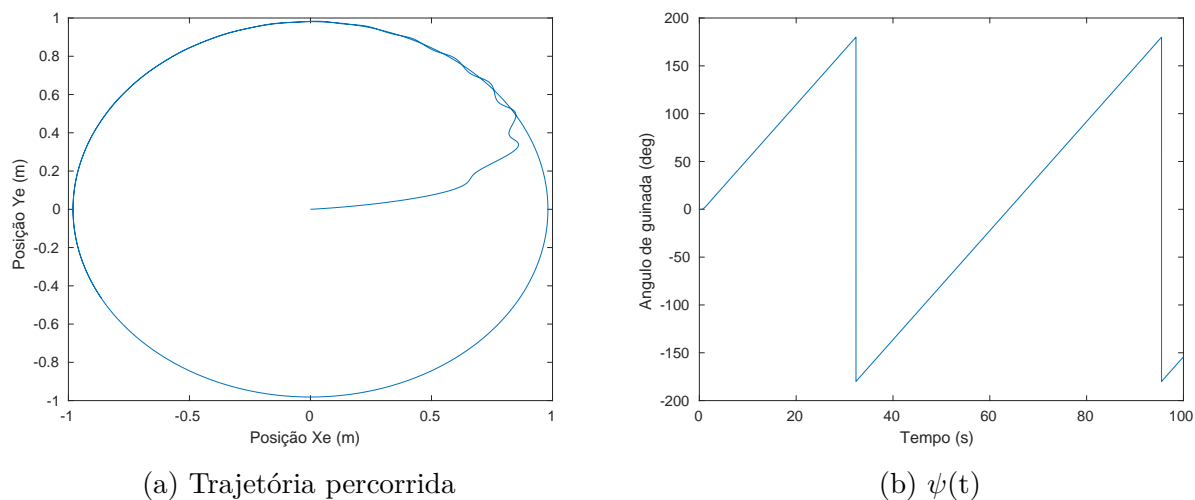


Figura 7: Resultados para uma trajetória circular com o drone virado para o centro

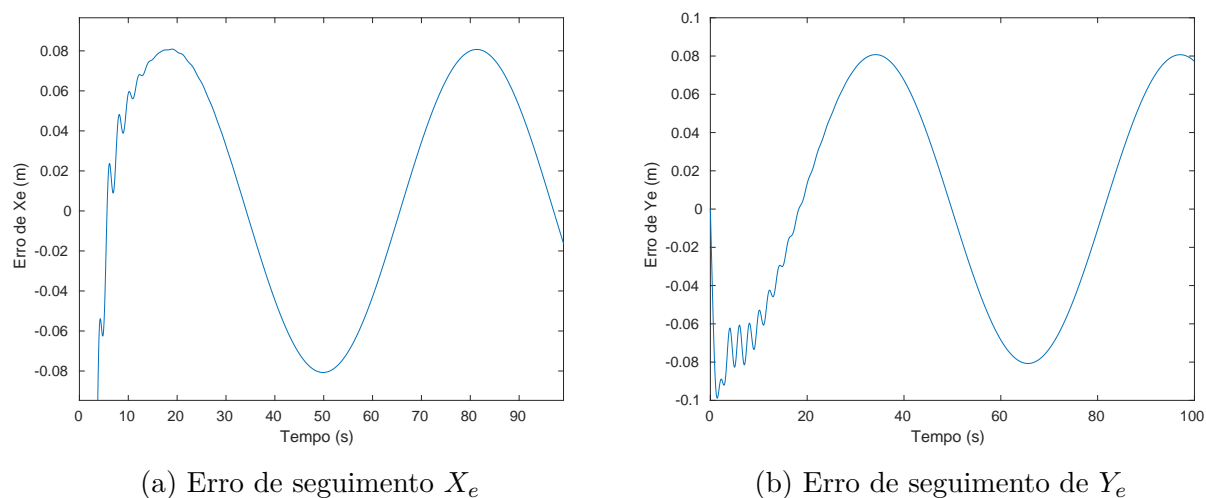


Figura 8: Resultados para uma trajetória circular com o drone virado para o centro

A trajetória efetuada é igual à anterior, uma circunferência de raio centrado na origem do referencial, mas desta vez o ângulo de guinada não é constante pois o drone tem de estar a apontar para o centro da circunferência. Pode-se ver mais uma vez que a trajetória seguida pelo drone coincide com a trajetória pedida e que os erros de seguimento continuam a apresentar um carácter oscilatório à volta dos valores ditos anteriormente. Na figura 8.b pode-se ver o ângulo da guinada em função do tempo, e confirma-se através deste gráfico que o drone está constantemente virado para o centro da circunferência.

## 4 Conclusão

No relatório presente está apresentado um controlador de seguimento de trajetória para o Parrot AR.Drone onde se baseou nas equações de cinemática/dinâmica simplificadas utilizando um termo de input virtual. Estudou-se uma lei de controlo baseada na solução de controlo ótimo do LQR, sendo que a estabilidade do sistema foi provada com base na Teoria de Lyapunov. Também estudou-se a estabilidade do sistema na presença de perturbações e de um estimador adaptativo das mesmas, onde se verificou que pela teoria de Lyapunov o novo sistema é globalmente assintoticamente estável.

Realizou-se simulações com o controlador proposto para três situações distintas, trajetória em linha reta com velocidade constante e guinada constante, trajetória circular com velocidade angular constante e guinada constante e por ultimo trajetória circular com velocidade angular constante e ângulo de guinada a variar de modo a que o drone esteja sempre orientado para o centro da circunferência descrita por este.

Os resultados obtidos para cada uma das simulações descritas mostraram-se aceitáveis em termos de estabilidade, de seguimento de referencia, com um erro de seguimento desprezável e reduzidas oscilações.