Renato Bastos Loureiro
89708
ARob (31/05)

1.1

refere-se à saída do sistema

$$h_p(t) = h(t) + b + n_p(t)$$ medições

$$v_m(t) = \dot{h}(t) + n_o(t)$$ corresponde ao input u

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_1 w \\ y = Cx + n \end{cases}, \quad x = \begin{bmatrix} h \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{u}_{v_m} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w$$

estou a afirmar que o process noise apenas afeta a variável h, mas caso também afeta-se b B_1 ficaria igual a $I_{2\times 2}$

$$y = h_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ b \end{bmatrix} + n$$

$\therefore$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = v_m = \dot{h}(t) + n_o(t)$$ → o input é a medição do optical flow

1.2

observabilidade

$$U = obs(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$\therefore \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(U) = 1 < 2$ logo não é observável

1.3

$h_R(t) = h(t) + n_R(t)$ $\quad$ $h_p(t) = h(t) + b + n_p$

$y = \begin{bmatrix} h_R \\ h_p \end{bmatrix}$ $\quad \Rightarrow \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$y = C_2 x + n_2$

$U = obsv(A, C_2) = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \end{bmatrix}$ $\quad$ $C_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(U) = 2 = n$

logo o novo sistema é observável

1.4

state observer structure

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C_2\hat{x})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} h_R \\ h_P \end{bmatrix}$$

$$u = \vartheta_m$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{h}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\vartheta_m + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} h_R \\ h_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{b} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\vartheta_m + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_R \\ h_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \\ l_3 + l_4 & l_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

1.5

$\tilde{x} = x - \hat{x}$ → erro de estimação

$\dot{\tilde{x}} = \bar{A}\,\tilde{x} + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 n_2$

$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$

$= \underbrace{\cancel{Ax}}_{=0} + \cancel{Bu} + B_1 w - A_1\hat{x} - \cancel{Bu} - Ly$

$= -A_1\hat{x} + B_1 w - Ly$

$\downarrow$

$-LC_2$

$= LC_2\hat{x} + B_1 w - L(C_2 x + n_2)$

$= LC_2(\hat{x} - x) + B_1 w - L n_2$

$= -LC_2\tilde{x} + B_1 w - L n_2$

$y = C_2 x + n_2$

$$LC_2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \\ l_3 + l_4 & l_4 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad \bar{A} = -LC_2$

$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{B}_2 = -L$

para garantir que $\tilde{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$

o sistema tem de ser estável

$\det(Is + LC_2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} s + l_1 + l_2 & + l_2 \\ l_3 + l_4 & s + l_4 \end{vmatrix} = (s + l_1 + l_2)(s + l_4) - l_2(l_3 + l_4) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + s\,l_4 + s(l_1 + l_2) + l_4(l_1 + l_2) - l_2(l_3 + l_4) = 0$$

$$s^2 + s\cdot\left(l_1 + l_2 + l_4\right) + \left(l_2 l_4 \cancel{+ l_2 l_4} - l_2 l_3 \cancel{- l_2 l_4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + s\left(l_1 + l_2 + l_4\right) + \left(l_1 l_4 - l_2 l_3\right) = 0$$

garantir que as soluções desta equação estão no <u>semi plano complexo esquerdo</u>

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + l_4 > 0 \\ l_1 l_4 - l_2 l_3 > 0 \Rightarrow l_1 l_4 > l_2 l_3 \end{cases}$$

para um sistema de 2º ordem isto é uma condição necessária e suficiente

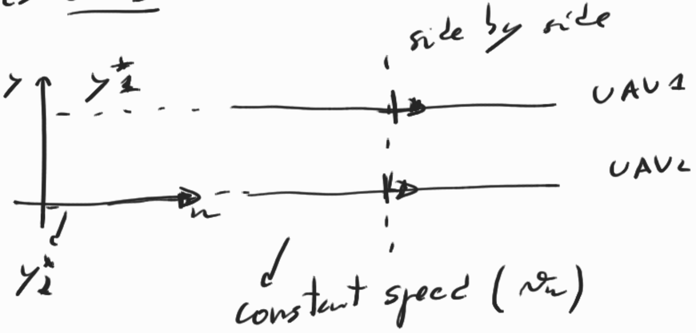
② Non linear Systems

(2.1)

$\dot{p}_1 = v_1$ $\qquad p_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$

$\dot{p}_2 = v_2$

dois UAVs



(2.1.1)

$\sigma(\cdot) \mapsto$ função de saturação

$\sigma(0) = 0$, $s\,\sigma(s) > 0 \; \forall s \neq 0$

$\sigma(s) \mapsto \pm \sigma_{max}$ quando $s \to \pm\infty$

control law:

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ -k_y\, \sigma(y - y_i^*) \end{bmatrix} \quad , \quad k_y > 0 \; , \; v_{x_i} = v_x^*$$

quero garantir que $x_1 - x_2 = 0$ e que $y_1 - y_2 = \text{const.}$

$V(x_1, y_1, x_2, y_2) =$

state $\varphi = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$

quero garantir que $y_1 - y_2$ converge para uma constante dada por $y_1^* - y_2^*$

UAV 1

$$\dot{p}_1 = v_1 = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ -k_y \sigma(y_1 - y_1^*) \end{bmatrix}$$

$$\dot{p}_2 = v_2 = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ -k_y \sigma(y_2 - y_2^*) \end{bmatrix}$$

Lyapunov function para garantir que os UAVS seguem a trajetória definida por y_i^*

<u>UAV 1</u> (é análogo para o <u>segundo UAV</u>)

$$V(y_1 - y_1^*) = (y_1 - y_1^*)\, \underset{h>0}{h}\, (y_1 - y_1^*)$$

constant

$$\dot{V}(y_1 - y_1^*) = 2(y_1 - y_1^*) h (\dot{y}_1)$$

$$= 2h(y_1 - y_1^*)(-k_y \sigma(y_1 - y_1^*))$$

$$= -2hk_y \underbrace{(y_1 - y_1^*)\sigma(y_1 - y_1^*)}_{>0}$$

logo $\boxed{\dot{V}(y - y_1^*) < 0}$

é trivial afirmar que com o controlo feito, a velocidade em x converge para o valor requisitado v_{xi} para ambos os UAVs

2.1.2

garantir que cada UAV segue a trajetória y_i^* e garantir sincronismo na posição $\underline{\underline{x}}$

ou seja pretende-se que $x_1 - x_2 \longmapsto 0$

e que $\dot{x}_1 \longmapsto v_x$ e $\dot{x}_2 \longmapsto v_x$

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ -k_y \sigma(y_i - y_i^*) \end{bmatrix}$$

$$v_{x_i} = -k_x \sigma(x_i - x_j) + v_x^*$$

$$y_1 - y_1^* \longmapsto 0$$

$$y_2 - y_2^* \longmapsto 0$$

$$x_1 - x_2 \longmapsto 0$$

o que pretendo garantir

exemplo de uma matrix diagonal com entradas positivas

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_1^* & y_2 - y_2^* \end{bmatrix}}_{\Theta^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_1^* \\ y_2 - y_2^* \end{bmatrix}}_{\Theta}$$

$$V = \Theta^T H \Theta$$

$$\dot{V} = 2\Theta^T H \dot{\Theta}$$

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 - \cancel{\dot{y}_1^*} = 0 \\ \dot{y}_2 - \underbrace{\cancel{\dot{y}_2^*}}_{=0} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -k_x \sigma(x_1 - x_2) + \cancel{v_x^*} + k_x \sigma(x_2 - x_1) - \cancel{v_x^*}$$

$$= k_x \left(-\sigma(x_1 - x_2) + \sigma(x_2 - x_1) \right)$$

$$\dot{y}_1 - \cancel{\dot{y}_1^*} = -k_y \sigma(y_1 - y_1^*)$$

$$\dot{V} = 2h_1(n_1 - n_2) \cdot k_n \left(-\sigma(n_1 - n_2) + \sigma(n_2 - n_1)\right) +$$
$$- 2h_2 (y_1 - y_1^*) k_y \sigma(y_1 - y_1^*) +$$
$$- 2h_3 (y_2 - y_2^*) k_y \sigma(y_2 - y_2^*)$$

$\rightarrow < 0$

$\rightarrow < 0$

$k_y > 0, \; k_n > 0, \; h_i > 0$

$$2 h_1 k_n \cdot \left(- \underbrace{(n_1 - n_2)\sigma(n_1 - n_2)}_{>0} - \underbrace{(n_2 - n_1)\sigma(n_2 - n_1)}_{>0} \right)$$

$$\boxed{\dot{V} < 0}$$

logo o sistema é estável em todo o domínio em torno do ponto de equilíbrio

$\dot{n}_1 - \dot{n}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\sigma(n_1 - n_2) + \sigma(n_2 - n_1)$

$\Rightarrow \boxed{n_2 = n_1}$ ou seja $n_2 - n_1 = 0$

$\dot{y}_1 - \dot{y}^* = 0 \Rightarrow 0 = -k_y \sigma(y_1 - y_1^*)$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_1^*}$

ponto de equilíbrio: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2

$$\ddot{x}_e = u_e$$

$$u_e = -k_p\,\sigma(x_e) - k_d\,\dot{x}_e$$

2.2.1

$$V_1(x_e, \dot{x}_e) = \alpha_1 \int_0^{x_e} \sigma(s)\,ds + \frac{1}{2}\dot{x}_e^2$$

$$\dot{V}_1(x_e, \dot{x}_e) = \alpha_1 \cdot \sigma(x_e) \cdot \underbrace{\frac{dx_e}{dt}}_{\dot{x}_e} + \dot{x}_e \cdot \ddot{x}_e$$

$$= \alpha_1\, \sigma(x_e)\, \dot{x}_e + \dot{x}_e \cdot \ddot{x}_e$$

$$= \alpha_1\, \sigma(x_e)\, \dot{x}_e + \dot{x}_e \left(-k_p \sigma(x_e) - k_d \dot{x}_e\right)$$

$$= \underbrace{\alpha_1\, \sigma(x_e)\, \dot{x}_e - \dot{x}_e k_p\, \sigma(x_e)}_{\text{igualar a zero}} \underbrace{- k_d\, \dot{x}_e^2}_{<0}$$

$$\alpha\, \sigma(x_e) = k_p\, \sigma(x_e)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = k_p} = 1 > 0$$

$V_1(x_e, \dot{x}_e) > 0$ porque $V(x_e, \dot{x}_e) = \underbrace{\alpha_1}_{>0 \text{ pelo calculado anterior}} \underbrace{\int_0^{x_e} \sigma(s)\, ds}_{>0 \text{ dado que } \sigma(0)=0 \text{ e } s\,\sigma(s)>0} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}_e^2}_{\geq 0}$

2.2.2

$$V_2(x_e,\dot x_e) = \alpha_2\int_0^{x_e}\sigma(s)\,ds + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix}x_e & \dot x_e\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}_e^{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}\beta&\beta\\ \beta&1\end{bmatrix}}_{\beta}\underbrace{\begin{bmatrix}x_e\\ \dot x_e\end{bmatrix}}_{\underline{x}_e}$$

$$\ddot x_e = -k_p\sigma(x_e) - k_d\dot x_e$$

$$\dot V_2(x_e,\dot x_e) = \alpha_2\cdot\sigma(x_e)\cdot\dot x_e + \underline{x}_e^{T}\underline{\beta}\,\dot{\underline{x}}_e$$

$$= \alpha_2\cdot\sigma(x_e)\,\dot x_e + \begin{bmatrix}x_e & \dot x_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta&\beta\\ \beta&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_e\\ -k_p\sigma(x_e)-k_d\dot x_e\end{bmatrix}$$

$$= \alpha_2\sigma(x_e)\cdot\dot x_e + \begin{bmatrix}x_e & \dot x_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\dot x_e + \beta(-k_p\sigma(x_e)-k_d\dot x_e)\\ \beta\dot x_e - k_p\sigma(x_e) - k_d\dot x_e\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}\beta&\beta\\ \beta&1\end{bmatrix}$ não é positiva definida

logo não é possível inferir que $x^T\beta x$ seja sempre maior que 0

$$= \alpha_2\sigma(x_e)\cdot\dot x_e + \beta x_e(\dot x_e - k_p\sigma(x_e) - k_d\dot x_e) + \dot x_e^2\beta - k_p\dot x_e\sigma(x_e) - k_d\dot x_e^2$$

$$= \alpha_2\sigma(x_e)\dot x_e + \beta x_e\dot x_e - k_p\beta x_e\sigma(x_e) - \beta k_d x_e\dot x_e + \dot x_e^2\beta - k_p\dot x_e\sigma(x_e) - k_d\dot x_e^2 < 0$$

para $k_p = k_d = 1$

$$= \alpha_2\sigma(x_e)\dot x_e + \cancel{\beta x_e\dot x_e} - \beta\underbrace{x_e\sigma(x_e)}_{>0} - \cancel{\beta x_e\dot x_e} + \dot x_e^2\beta - \dot x_e\sigma(x_e) - \dot x_e^2$$

$$= \dot x_e\sigma(x_e)\cdot(\alpha_2 - 1) - \beta\underbrace{x_e\sigma(x_e)}_{>0} + \underbrace{\dot x_e^2\beta - \dot x_e^2}_{\dot x_e^2\underbrace{(\beta-1)}_{\beta-1<0}} < 0$$

para $\boxed{\alpha_2 = 1}$

logo $\beta > 0$

$\beta - 1 < 0 \Rightarrow \beta < 1$

$$\boxed{0 < \beta < 1}$$

Ao utilizar V_2, está presente a variável β, na verdade a matriz $\begin{bmatrix}\beta&\beta\\ \beta&1\end{bmatrix}$ isto permite alterar a dinâmica do erro dentro dos limites estabelecidos anteriormente para β sem colocar o sistema instável.