

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Sampling and Aliasing
1º Trabalho de Laboratório

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Miguel Félix, 87083
Renato Loureiro, 89708

2020/21

Índice

1 Sinal Chirp	1
2 Espectrograma do sinal chirp	1
3 Sinal Chirp amostrado com frequênciá inferior à de Nyquist	2
4 Espectrograma da música Romanza	5
5 Amostragem da música com uma frequênciá inferior a duas vezes a frequênciá de Nyquist	5
6 Filtragem da música	6
Referências	7

1 Sinal Chirp

R1.a)

O sinal continuo considerado $x_c(t)$, expresso na equação (1), apresenta uma variação da sua frequência com o tempo caracterizada por ser monótona crescente e de 2^a ordem. Ao ouvir o sinal, após o processo de amostragem com uma frequência de $8kHz$ e a posterior reconstrução do sinal, observaram-se as características anteriormente enunciadas, pois a frequência do som escutado cresceu de forma monótona, não tendo esta uma relação linear tal como descrito anteriormente.

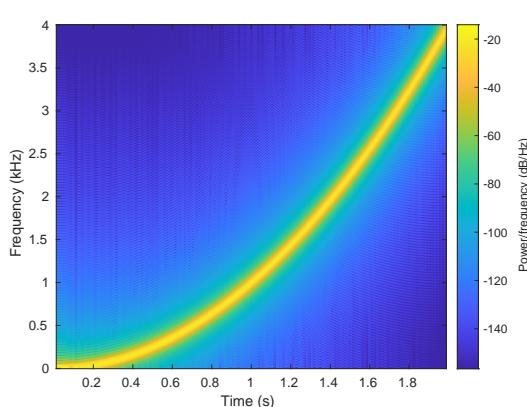
$$x_c(t) = \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{3}k_2t^3 + \frac{1}{2}k_1t^2 + F_0t + \phi_0\right)\right] \quad (1)$$

$$\Omega(t) = 2\pi(k_2t^2 + k_1t + F_0) \quad , k_2 = 1000 \quad , \quad k_1 = F_0 = \phi_0 = 0$$

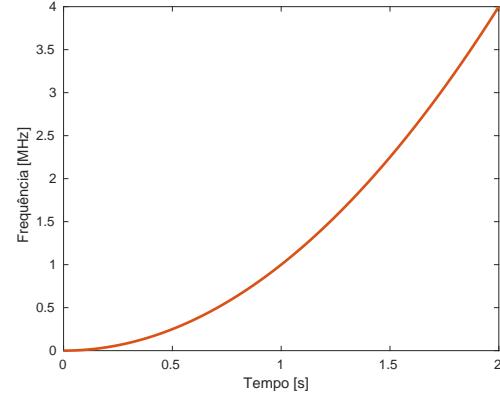
2 Espectrograma do sinal chirp

R2.b)

Para a análise que se segue, foi escolhido o spectrograma com $N = 64$, representado na figura 1a. Em relação ao spectrograma, o sinal representado evidencia o crescimento de 2^a ordem. O sinal reproduzido tem, além das harmónicas predominantes a amarelo, outras harmónicas com menos intensidade a tons de azul. Ao fim dos dois segundos, o sinal apresenta uma frequência máxima predominante de aproximadamente $4kHz$.



(a) Espectrograma do sinal x para $N = 256$



(b) Gráfico da frequência do sinal em função do tempo.

Figura 1

3 Sinal Chirp amostrado com frequência inferior à de Nyquist

R3.a)

De seguida, foi criado um sinal y dado por $y(n) = x(2n)$. Como o sinal y foi amostrado dependendo das amostras de x , podemos obter a sua frequência de amostragem também dependente da frequência de amostragem de x . Neste caso, por cada amostra de y obtida, uma amostra de x foi «perdida» e outra guardada no sinal y . Assim, o número de amostras do sinal y corresponde a metade do número de amostras de x no mesmo intervalo de tempo (2 segundos), ou seja, metade da frequência de amostragem. Logo, o sinal y tem uma frequência de amostragem de 4 kHz (metade dos 8 kHz de x).

R3.b)

Numa fase inicial, o sinal y comporta-se de uma forma semelhante ao sinal x . Isto acontece pois as frequências máximas do sinal corresponde a metade da frequência de amostragem do sinal nesses instantes de tempo, respeitando o teorema de Nyquist. Após aproximadamente 1.4 segundos, ao começar a atingir frequências superiores a 2 kHz, o sinal demonstra um comportamento inesperado em que a sua frequência decresce de forma aproximadamente linear com o tempo até atingir um valor de frequência de perto de 0 Hz, como observado no espectrograma da figura 2. O sinal ouvido, quando reproduzido, comprova empiricamente esta mudança com um sinal cada vez mais agudo até atingir 2 kHz e a partir daí decresce linearmente para um registo mais grave.

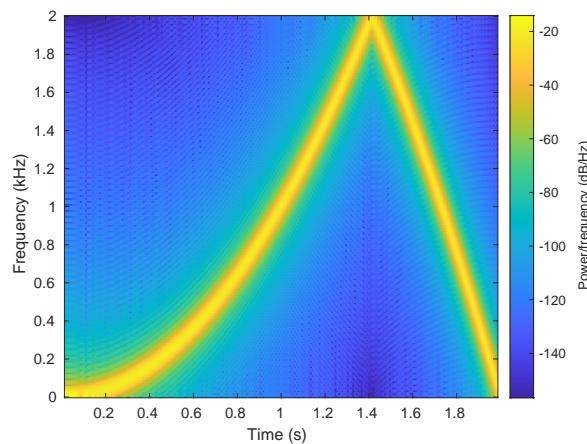


Figura 2: Espectrograma do sinal y para $N=?$

R3.c)

De modo a ilustrar melhor a justificação dada anteriormente, foram escolhidas 4 frequências para serem amostradas a frequências de 20 kHz, 8 kHz e 4 kHz. Os resultados obtidos encontram-se representados nos seguintes gráficos.

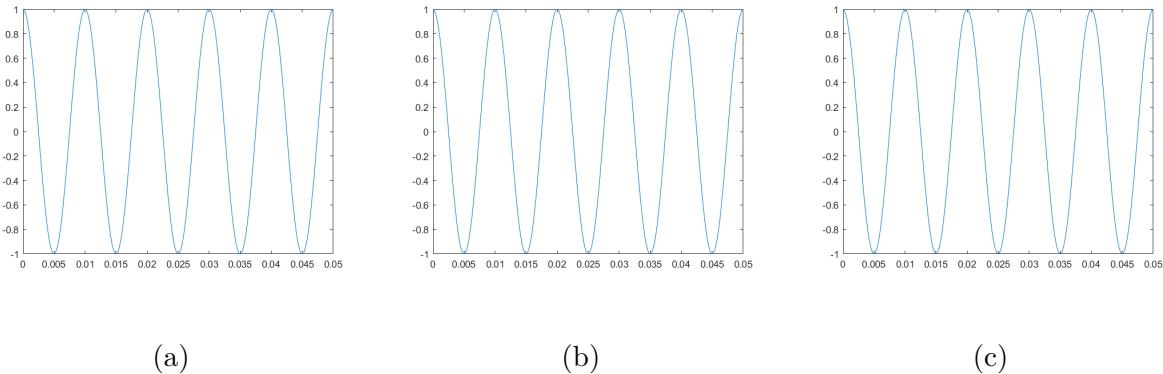


Figura 3: Gráfico da onda sinusoidal z com frequência de 0.1 kHz, em função do tempo, amostrada a uma frequência de 20 kHz (a), 8 kHz (b), 4 kHz (c).

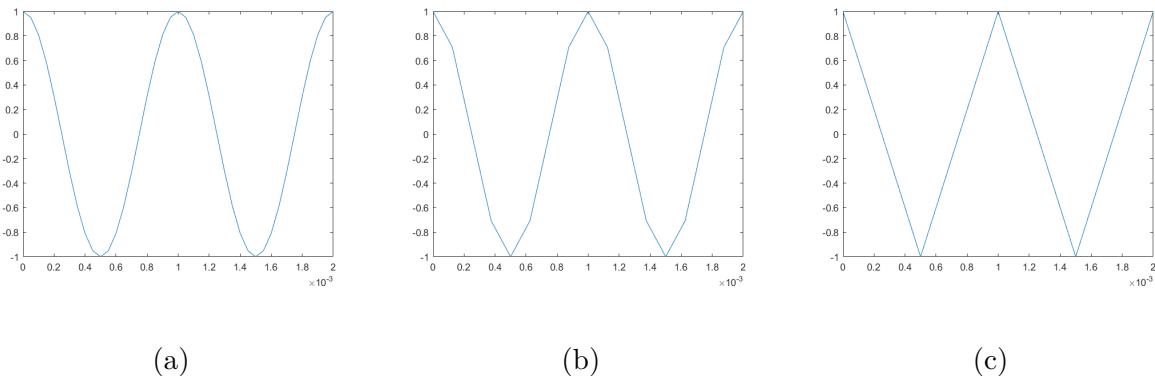


Figura 4: Gráfico da onda sinusoidal z com frequência de 1 kHz, em função do tempo, amostrada a uma frequência de 20 kHz (a), 8 kHz (b), 4 kHz (c).

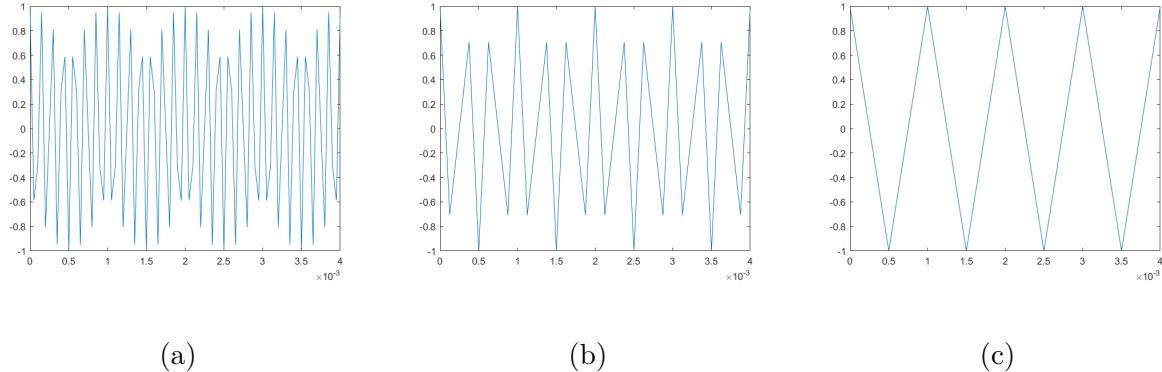


Figura 5: Gráfico da onda sinusoidal z com frequência de 13 kHz, em função do tempo, amostrada a uma frequência de 20 kHz (a), 8 kHz (b), 4 kHz (c).

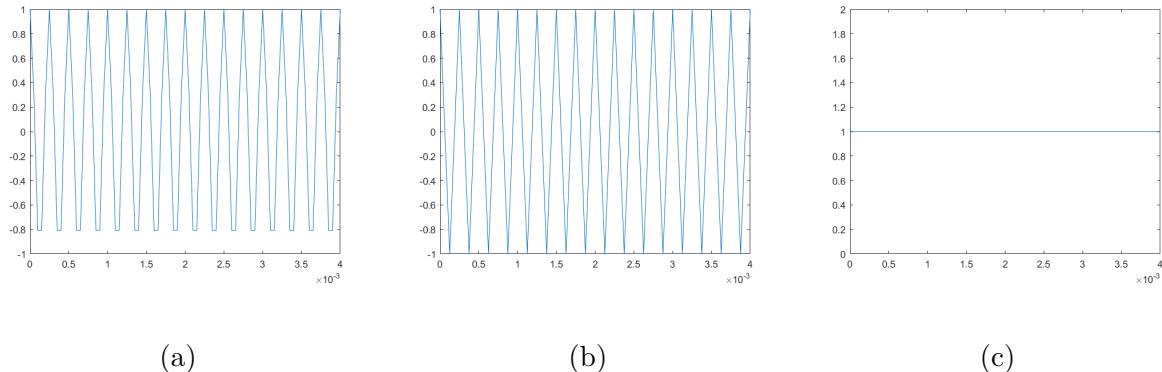


Figura 6: Gráfico da onda sinusoidal z com frequência de 4 kHz, em função do tempo, amostrada a uma frequência de 20 kHz (a), 8 kHz (b), 4 kHz (c).

Na figura 3, é possível observar que todos os sinais amostrados apresentam uma forma que vai de acordo com o esperado. Por ser uma onda sinusoidal de 0.1 kHz, a sua frequência máxima é, em todos os 3 casos, sempre inferior a metade da frequência de amostragem, não desrespeitando o teorema de Nyquist.

Já no caso da figura 4, pode observar-se a qualidade de reprodução da onda a deteriorar-se à medida que a frequência de amostragem diminui. No caso (c) (4 vezes a frequência de onda máxima do sinal), a onda é representada como triangular, mostrando-se alguma perda significativa de informação.

Numa situação ainda menos favorável, com uma frequência de onda amostrada de 13 kHz, a figura 5 demonstra que se amostragem for feita com intervalos cada vez maiores, além de se perder a própria forma original da onda, perde-se também completamente a frequência original, que se torna bastante inferior, como visto no caso (c). Nos casos (a) e (b) pode ainda atentar-se a existência de duas frequências predominantes na onda amostrada (semelhante a uma onda modulada).

Apresenta-se ainda uma outra situação em que a amostragem é feita a um múltiplo da frequência da onda sinusoidal. Na figura 6, para uma frequência de 4 kHz, o sinal amostrado é apresentado como constante o que não corresponde de todo ao sinal original.

Através destes vários exemplos, podem então verificar-se os vários problemas aquando do não cumprimento do teorema de Nyquist.

4 Espectrograma da música Romanza

R4.a)

Como pedido no enunciado, na figura 7 encontra-se o espectrograma dos primeiros 15 segundos da música fornecida no ficheiro '*romanza.mp3*', com $N = 2048$.

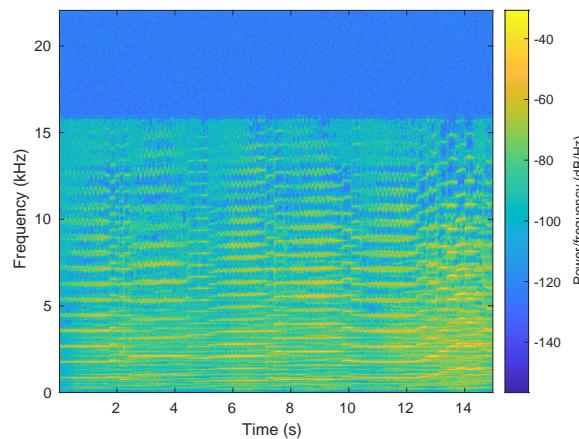


Figura 7: Espectrograma dos primeiros 15 segundos da música '*Romanza*'

5 Amostragem da música com uma frequênci inferior a duas vezes a frequênci de Nyquist

R5.a)

Nesta alínea foi proposto amostrar a música '*Romanza*' com uma frequência de amostragem 5 vezes inferior à frequência de amostragem original do ficheiro *.mp3*.

Na realização do teste sonoro, evidenciou-se distorção do sinal original - isto deveu-se à nova frequência de amostragem imposta. No espectrograma apresentado na Figura 8 verifica-se um conjunto de frequências o sinal original não tinha na banda de frequências apresentada.

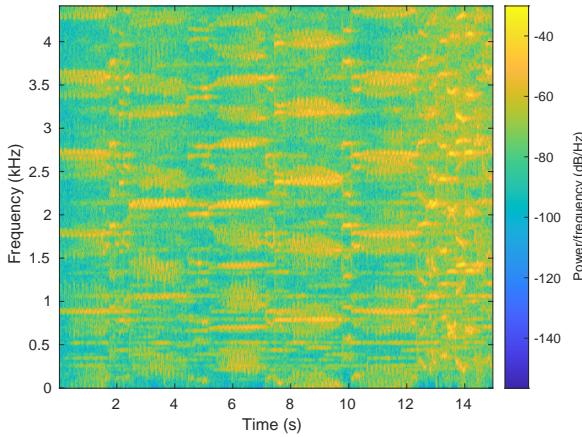


Figura 8: Espectrogrma dos primeiros 15 segundos da mÙsica 'Romanza', com uma frequênci a de amostragem 5 vezes inferior à frequênci a de amostragem original.

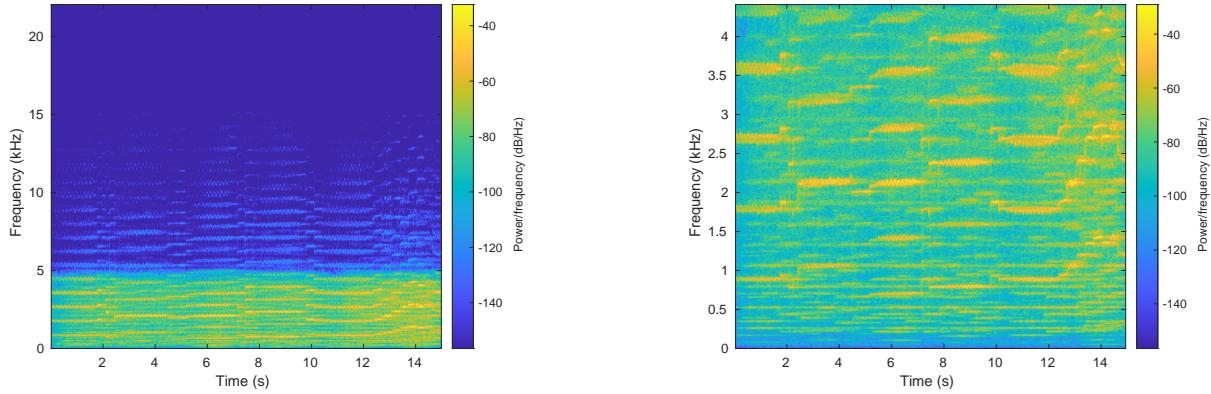
Observa-se aqui o fenômeno de *aliasing* devido à frequênci a de amostragem escolhida, pois esta não obedece ao teorema de amostragem de Nyquist.

6 Filtragem da mÙsica

R6.a)

Nesta alínea é proposto amostrar novamente com uma frequênci a 5 vezes inferior, mas o sinal original é pré-processado através de uma filtragem passa-baixo, com uma frequênci a de corte de 0.2π .

Na Figura 9a está apresentado um espectrogrma do sinal filtrado onde se verifica, como era expectável, um ganho baixo para frequências superiores à frequênci a de corte especificada - no caso de um filtro passa-baixo ideal, o ganho de frequências superiores à frequênci a de corte seria nulo.



(a) Sinal pré-processado com um filtro passa-baixo.

(b) Sinal filtrado seguido de uma amostragem de $F_s/5$.

Figura 9: Espectrogramas dos primeiros 15 segundos do ficheiro '*romanza.mp3*', com modificações.

Verificou-se no teste sonoro do sinal filtrado/amostrado, representado no espetrograma da figura 9b, a inexistência de distorção sonora ou aliasing - isto deveu-se à alteração da frequência de Nyquist do sinal devido à pré-filtragem passa baixo aplicada, i.e. a nova frequência de Nyquist do sistema permitiu garantir que, com uma frequência de amostragem de $F_s/5$, o sinal não se distorc当地 ao contrário do verificado na alínea **R5.a**).

Embora este procedimento anule a distorção do sinal, o sinal originado contém menos informação do que o sinal original, pois as harmónicas de frequência mais elevada frequentes na peça musical foram anuladas com a filtragem.