

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

**Análise Espectral com a Transformada
Discreta de Fourier**
2º Trabalho de Laboratório

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Renato Loureiro, 89708
Miguel Félix, 87083

2020/21

1 Análise espectral de um sinal sintético

R1.a)

```
1 N=512;      w0=5.2*2*pi/N;  
2 for n=1:length(samples)  
3     x(n)=5*cos(w0*samples(n) + 1)+ 2*cos(2*w0*samples(n) +2) +...  
4     3*cos(5*w0*samples(n) + 3);  
5 end
```

R1.b)

O sinal observado é periódico e oscilatório, pois resulta da combinação de três sinais periódicos sinusoidais. Observam-se 5 repetições em que o sinal atinge os valores máximos e mínimos de 8.9 e -6.6 unidades, respectivamente.

```
1 plot(samples,x);
```

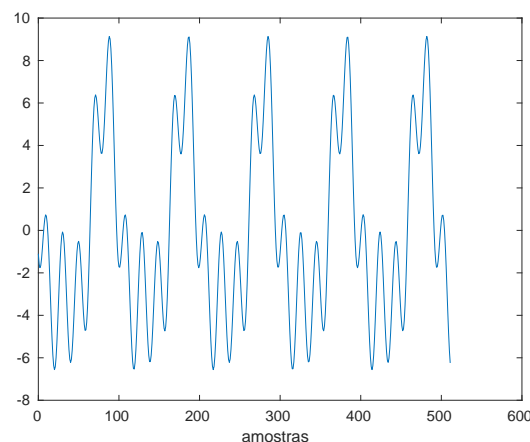


Figura 1: Gráfico da intensidade do sinal criado em função das amostras.

R1.c) De modo a conduzir a análise dos gráficos da magnitude e fase da DFT, apenas se usaram os dados relativos a metade do gráfico gerado, de $[0;0.5]$ (frequências normalizadas pela duração do sinal $M=512$). Esta análise de apenas um lado é possível devido às propriedades da própria transformada em que, para sinais reais, os valores de $[0.5; 1]$ são o complexo conjugado para valores de $[0; 0.5]$.

Através da observação do gráfico da figura 2a, pode notar-se a existência de três picos distintos, que correspondem no eixo horizontal às 3 frequências normalizadas das sinusóides que somadas geram o sinal; no eixo vertical observa-se a magnitude de cada uma destas componentes para o sinal x . Observa-se que a menor frequência identificada tem a maior amplitude, que está de acordo com a equação que define o sinal. Em relação às outras frequências de pico, uma análise análoga pode ser feita em que o pico com maior frequência

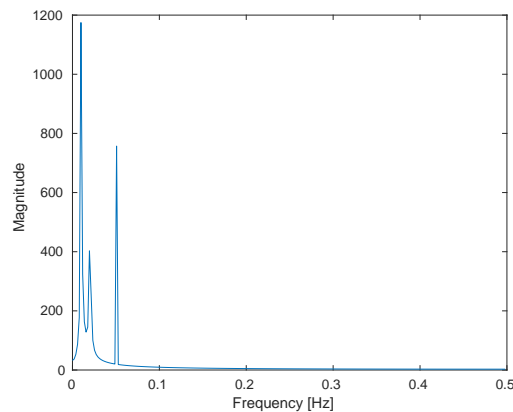
corresponde à magnitude intermédia e a frequência intermédia corresponde à magnitude mais reduzida, tudo de acordo com a equação de partida.

Na figura 2b, observa-se o mesmo eixo horizontal que na análise anterior mas agora com o eixo vertical a representar o ângulo da fase em radianos correspondente a cada frequência normalizada.

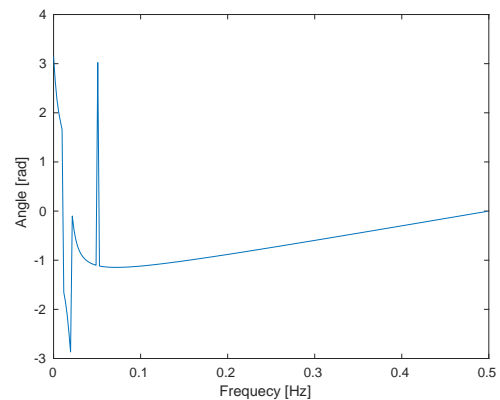
```

1 yfft=fft(x);
2 abs_yfft=abs(yfft);      angle_yfft=angle(yfft);
3 f=(0:N/2-1)./N;
4 figure()
5     plot(f,abs_yfft(1:N/2));
6     xlabel("Frequency [Hz]");   ylabel("Magnitude");
7 figure()
8     plot(f,angle_yfft(1:N/2));
9     xlabel("Frequency [Hz]");   ylabel("Angle [rad]");

```



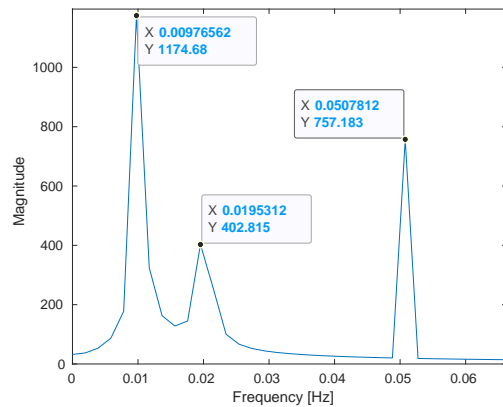
(a) Gráfico da magnitude da transformada de Fourier discreta do sinal original.



(b) Gráfico da fase da transformada de Fourier discreta do sinal original.

Figura 2

R1.d)



n	Magnitude	Âng. [rad]	Freq. [Hz]
5	1174.68	1.66111	0.0098
10	402.815	-2.86734	0.0195
26	757.183	3.02112	0.0508

(b) Identificação dos 3 maiores picos com os respectivos índices, magnitudes, fases e frequências não normalizadas

(a) Gráfico da transformada de Fourier do sinal e identificação das coordenadas dos picos.

Figura 3: Gráfico da transformada discreta de Fourier do sinal com ênfase nos picos e tabela identificativa dos picos.

```

1 z=zeros(1,N);
2 n=1:N;
3 peaks=[ 5, 1174.68, 1.66111;
4         10, 402.815, -2.86734;
5         26, 757.183, 3.02112];
6 for i=1:length(peaks)
7     z=z+(2/N)*(peaks(i,2)*cos(2*pi*n*peaks(i,1)/N + peaks(i,3)));
8 end
9 plot(samples,z);
10 xlabel("amostras");

```

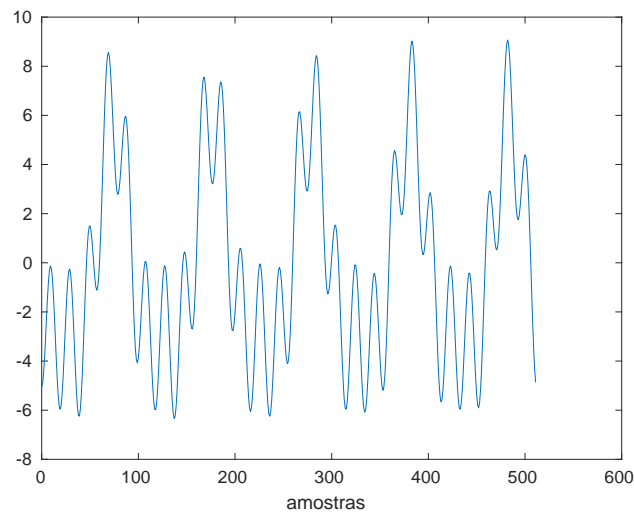


Figura 4: Gráfico da intensidade do sinal reconstruído em função das amostras.

R1.e) Apesar de não ser perfeita, a reconstrução revela alguma sobreposição com o sinal original criado, $x(n)$. Na imagem 5 podemos observar ambos os sinais - o original (a azul) e o reconstruído (a vermelho) - e avaliar que, apesar das frequências na reconstrução corresponderem quase na totalidade entre ambos, as magnitudes por vezes não atingem ou ultrapassam os valores pretendidos. As variações do sinal original foram bem reconstruídas no sentido em que quando existe uma subida no sinal $x(n)$, também está presente uma subida no sinal reconstruído, o mesmo comportamento para as variações negativas.

Estas imprecisões podem ser explicadas pelo facto da reconstrução do sinal usar apenas as três frequências com maior intensidade, descartando todas as outras que também influenciam e compõem o sinal, como foi observado na figura 2a. Podemos concluir que ao usar este método, perde-se informação sobre o sinal na sua reconstrução.

```
1 figure()
2     plot(samples,x);
3     hold on
4     plot(samples,z);
5     xlabel("amostras");
6     legend("Sinal original", "Sinal reconstruido");
```

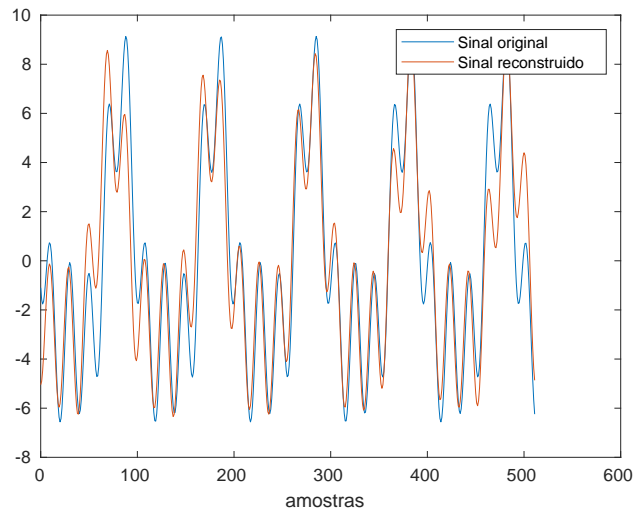


Figura 5: Gráfico da intensidade em função das amostras do sinal original, a vermelho, e sinal reconstruído, a azul.

R1.f)

Para calcular a transformada, foi necessário fazer alterações ao sinal original visto que o número de amostras deste ($M=512$) não correspondia ao número de amostras que a transformada teria que ter para cumprir com as especificações do enunciado ($N=1024$). Assim, utilizou-se o método *zero padding* que consiste em atribuir o valor de intensidade zero para todas as amostras adicionais do sinal, até este número ser igual a $N=1024$. Neste caso concreto, foram adicionadas 512 novas amostras com o valor 0, após a amostra 512 do sinal original.

```

1 N=2*512;    w0=5.2*2*pi/N;  samples=0:N-1;
2 for n=1:length(samples)
3     if n<N/2
4         x(n)=5*cos(w0*samples(n) +1)+ 2*cos(2*w0*samples(n) +2) +...
5         3*cos(5*w0*samples(n) + 3);
6     else
7         x(n)=0;
8     end
9 end

```

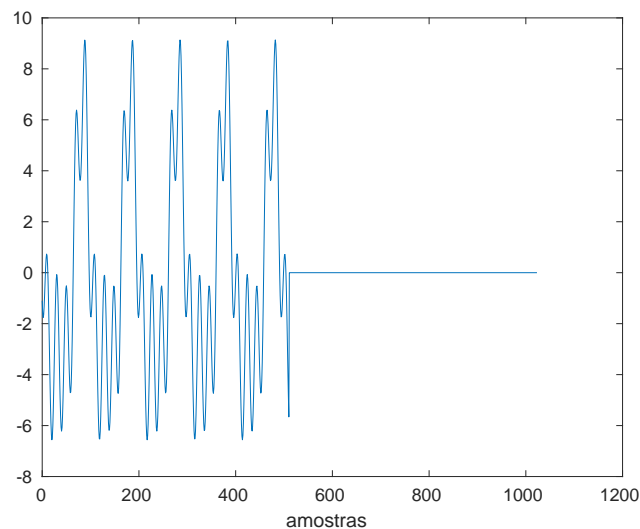


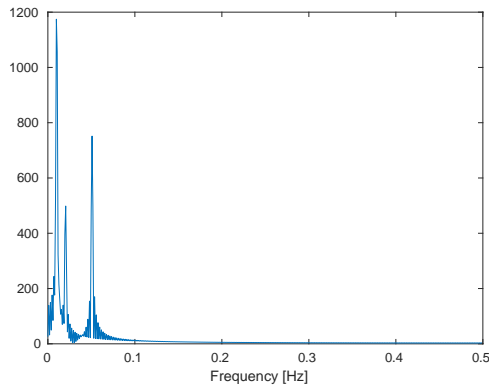
Figura 6: Gráfico da intensidade do sinal x , depois de se adicionarem mais 512 amostras com intensidade zero, após a última amostra do sinal (*zero padding*).

Depois de ter o sinal original criado, concretizou-se a sua transformada de Fourier discreta. Desta vez, os gráficos obtidos, tanto para a fase como para a magnitude, apresentaram um comportamento bastante ondulatório. Ao serem acrescentadas mais amostras, aumentam o número de pontos no espectro, o que implica o aumento da resolução da frequência. Como para cada amostra corresponde uma função *sinc*, já que a função FFT opera os dados como se fossem uma sequência infinita de zeros antes e após o sinal, ao aumentar a resolução a função *sinc* torna-se cada vez mais observável e cada vez mais bem definida com mais pontos, surgindo de uma forma mais evidente as oscilações características que definem esta função.

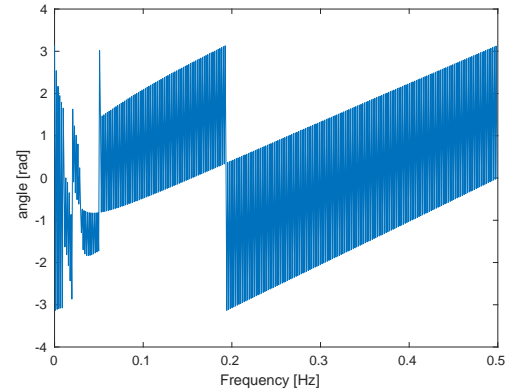
```

1  yfft=fft(x);
2  abs_yfft=abs(yfft);      angle_yfft=angle(yfft);
3  f=(0:N/2-1)./N;
4
5  figure()
6      plot(f,abs_yfft(1:N/2));
7      xlabel("frequencia [Hz]");  ylabel("Magnitude");
8
9  figure()
10     plot(f,angle_yfft(1:N/2));
11     xlabel("frequencia [Hz]");  ylabel("Angulo [rad]");

```

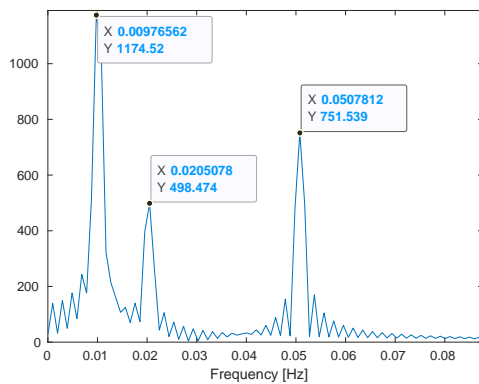


(a) Gráfico da intensidade da transformada de Fourier do sinal.



(b) Gráfico da fase da transformada de Fourier do sinal.

Figura 7



(a) Gráfico da intensidade transformada de Fourier do sinal, com ênfase nos picos, mostrando as suas coordenadas.

n	Magnitude	Âng. [rad]	Freq. [Hz]
10	1192.15	1.3341	0.0098
21	368.903	1.03408	0.0205
52	740.565	3.02683	0.0508

(b) Identificação dos 3 maiores picos com os respetivos índices, magnitudes, fases e frequências não normalizadas

Figura 8: Gráfico da transformada discreta de Fourier do sinal com ênfase nos picos e tabela identificativa dos picos.

```

1 z=zeros(1,N);
2 n=1:N;
3 peaks=[ 10, 1192.15, 1.33341;
4         21, 368.903, 1.03408;
5         52, 740.565, 3.02683];
6 for i=1:length(peaks)
7     z=z+(2/N)*(peaks(i,2)*cos(2*pi*n*peaks(i,1)/N + peaks(i,3)));
8 end

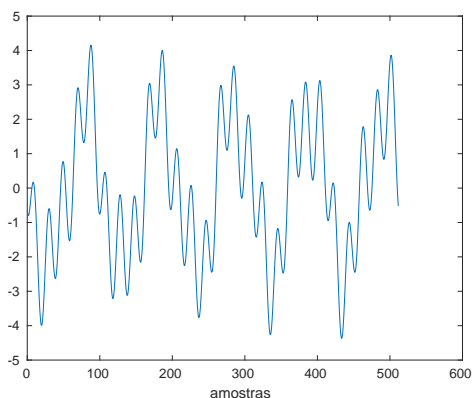
```



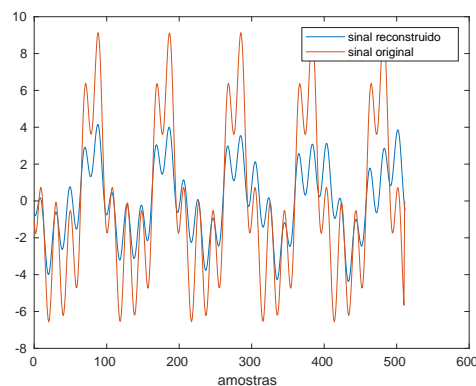
```

9 plot(samples/2,z)
10 xlabel("amostras")

```



(a) Gráfico da intensidade do sinal reconstruído em função das amostras, para $N=1024$.



(b) Gráfico da intensidade em função das amostras do sinal original, a vermelho, e sinal reconstruído, a azul, para $N=1024$.

Figura 9

Comparando ambos os sinais, nesta nova situação a reconstrução do sinal revela-se de pior qualidade quando comparada à feita anteriormente com $M=512$. Intuitivamente, faria sentido que quanto maior o número de amostras da transformada (e consequentemente menor intervalo entre amostras), melhor seria a qualidade do sinal reconstruído mas tal não acontece pois, como se observa pelo gráfico 8, as amplitudes dos picos não atingem valores tão elevados (que serão mais afastados dos valores reais originais). Ao aumentar a resolução na frequência, os picos ficarão mais largos o que lhes dará uma menor amplitude (ainda mais afastados do valor original).

Embora pelo anteriormente referido, parece que a aplicação de *zero padding* não tem vantagens, mas ao verificar as frequências, identifica-se que na verdade este método permite estimar melhor as frequências características do sinal. Na tabela seguinte está apresentado a comparação de valores de frequência estimada para $N=512$ e $N=1024$.

	erro f_1 [%]	erro f_2 [%]	erro f_3 [%]
$N=512$	3.48	6.44	0.42
$N=1024$	3.48	0.94	0.03

2 Análise espectral de um sinal sonoro real

R2.a)

```

1 [p,Fs]=audioread('How_many_roads.wav');

```

```
2 soundsc(p,Fs);
```

R2.b)

```
1 M=2048;  
2 seg=p(48500:48500+M-1);  
3 plot(0:M-1, seg);
```

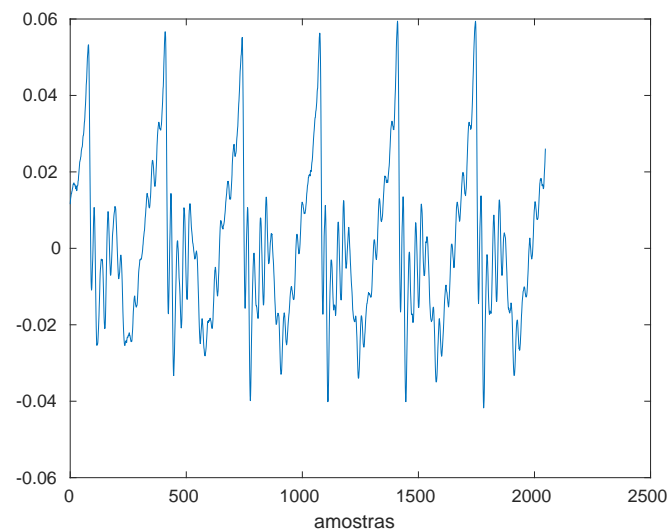
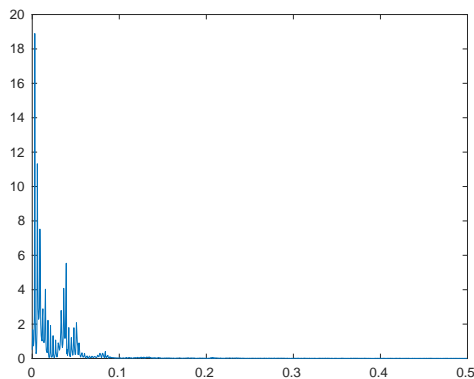


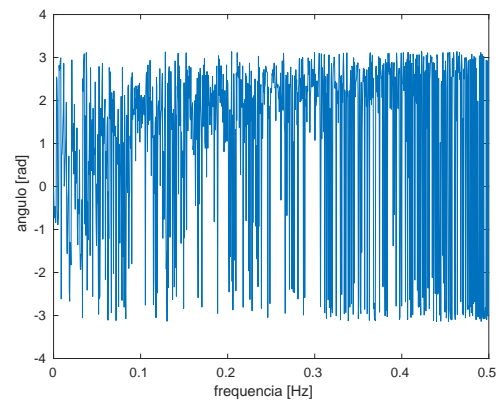
Figura 10: Gráfico do sinal numa parte do ficheiro *How_many_roads.wav* com a intensidade no eixo vertical e as amostras no eixo horizontal.

R2.c)

```
1 yfft=fft(seg);  
2 abs_yfft=abs(yfft);  
3 angle_yfft=angle(yfft);  
4 z=zeros(1,M);  
5 n=1:M;  
6 peaks=[ 6, 18.894, -0.605;  
7         12, 11.321, -0.438;  
8         18, 7.5243, -2.614];
```

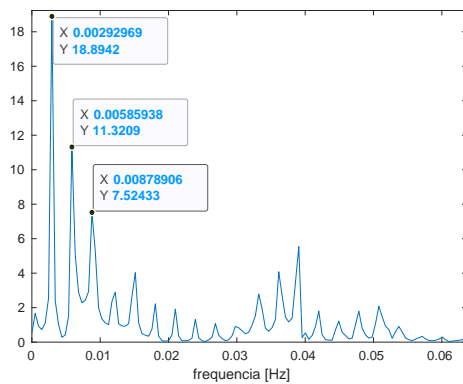


(a) Gráfico da intensidade da transformada de Fourier do sinal.



(b) Gráfico da fase da transformada de Fourier do sinal.

Figura 11



(a) Gráfico da transformada de Fourier do sinal da gravação de voz fornecida, com ênfase nos picos, mostrando as suas coordenadas.

n	Magnitude	Âng. [rad]	Freq. [Hz]
6	18.894	-0.605	0.0029
12	11.321	-0.438	0.0059
18	7.5243	-2.614	0.0088

(b) Identificação dos 3 maiores picos com os respectivos índices, magnitudes, fases e frequências não normalizadas.

Figura 12: Gráfico da transformada discreta de Fourier do sinal com ênfase nos picos e tabela identificativa dos picos.

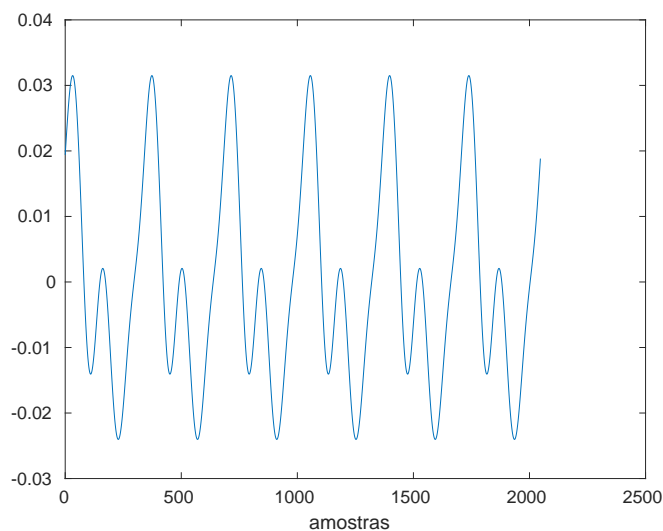


Figura 13: Gráfico do sinal reconstruído usando apenas as três frequências de maior intensidade.

R2.d)

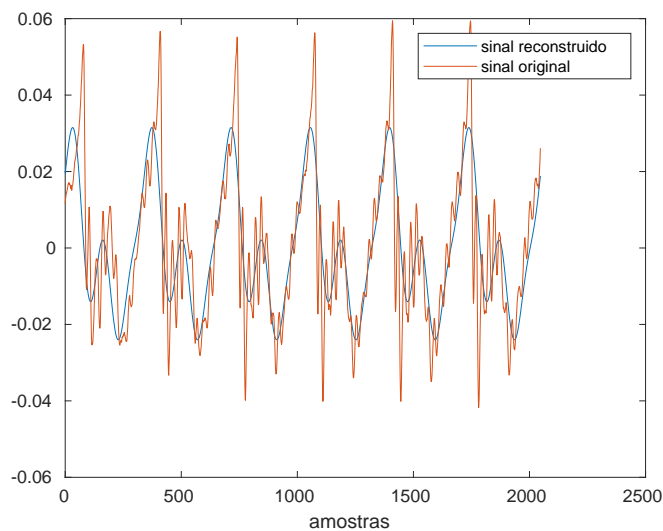


Figura 14: Gráficos sobrepostos do sinal original, a vermelho, e do sinal reconstruído, a azul.

À semelhança do que aconteceu na análise anterior, o sinal reconstruído aproxima-se pouco satisfatoriamente do original. Os picos do sinal encontram-se quase nas mesmas amostras mas não chegam a atingir os mesmos valores em amplitude e as oscilações entre picos quase que desaparecem. Pode afirmar-se que a reconstrução deste sinal foi menos bem sucedida comparativamente à reconstrução feita anteriormente; por ser um sinal mais

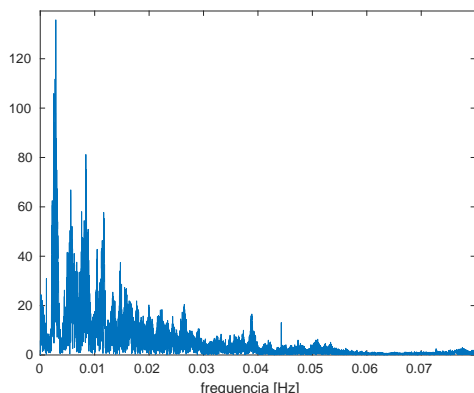
complexo, este apresenta um maior número de frequências no gráfico da sua transformada, o que faz com que, ao reconstruí-lo usando apenas as 3 sinusoidais mais importantes, se perca ainda mais informação.

R2.e)

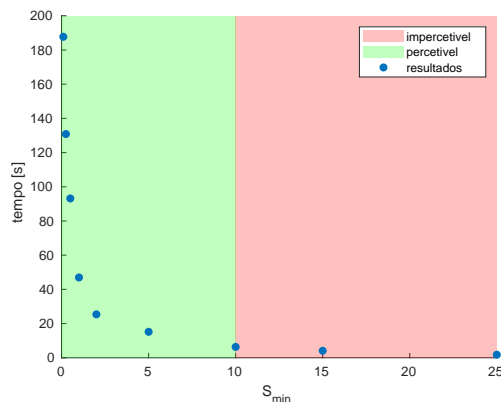
```

1 S_min=[15,10,5,2,1,0.5,0.25,0.1, 0.05];
2 z=zeros(1,N);
3 for j=1:length(S_min)
4     tic
5     for i=1:N/2
6         if abs_yfft(i)>S_min(j) % 10 it makes possible to hear
7             z=z + (1/N)*2*abs_yfft(i)*cos(2*pi*i*n/N + angle_yfft(i));
8         end
9     end
10    aux(j)=toc;
11 end

```



(a) Gráfico da intensidade da transformada de Fourier para o sinal do ficheiro de áudio *How_many_road.wav*.



(b) Gráfico ilustrativo das áreas onde para diferentes valores de S_{min} , o áudio se torna perceptível. Os pontos a azul representam os resultados em termos de tempo de processamento do sinal, para cada valor de S_{min} testado.

Figura 15

Após ouvir várias reconstruções, concluiu-se que com $S_{min} = 10$ é possível distinguir e reconhecer as palavras ditas no áudio. Foram descartados 202849 coeficientes, tendo apenas recorrido a 5022 coeficientes, isto corresponde a apenas 2% do número total de coeficientes possíveis.

É importante reconhecer que, embora para um valor de $S_{min} = 10$ seja possível ainda compreender o áudio, este tem alguma distorção. Ao observar a figura anterior, verifica-se que a escolha deste limite inferior S_{min} tem um impacto relevante no tempo de processamento

da transformada inversa de Fourier, i.e. para valores baixos o resultado é idêntico ao original, mas implica um processamento muito elevado e também o acesso a muito mais memória.