

# **Apontamentos de Sistemas de Controlo de Tráfego**

Eng.<sup>a</sup> Aeroespacial

IST, Dezembro de 2009

Prof. Fernando D. Nunes

## Índice

I – Introdução aos Sistemas de Rádio-Navegação.....	1
II – Sistemas de Radar.....	28
III – Estimação de Parâmetros.....	51
IV – Sistemas Lineares em Espaço de Estados.....	69
V – Filtragem de Kalman.....	91
VI – GPS.....	127
VII – Controlo de Tráfego Aéreo.....	181

# I - Introdução aos Sistemas de Rádio-navegação

A rádio-navegação engloba um conjunto de métodos de determinação da posição de um veículo móvel que se baseiam na medição do tempo de trânsito de uma onda electromagnética entre o transmissor e o receptor. Devido à velocidade da luz de 300 mil Km por segundo, a incerteza na posição é de aproximadamente 30 cm por cada nanosegundo de erro na medição do tempo. A rádio-navegação pode ser classificada como [1]:

1. rádio-navegação activa;
2. rádio-navegação passiva.

Um sistema típico de rádio-navegação activa é esquematizado na figura 1: o receptor determina a sua posição por transmissão de uma série de impulsos para um transmissor distante, o qual retransmite esses impulsos imediatamente mas numa frequência diferente. A distância do veículo ao transmissor distante é obtida multiplicando metade do tempo de ida-e-volta pela velocidade da luz. Num sistema de rádio-navegação passiva, um transmissor distante envia uma série de impulsos em instantes de tempo muito precisos. O receptor de navegação capta os impulsos, determina o seu tempo de viagem, e multiplica-o pela velocidade da luz para obter a distância pretendida. A desvantagem dos sistemas de rádio-navegação passiva é a de exigirem relógios com precisões extremamente elevadas tanto por parte do transmissor como do receptor. A desvantagem dos sistemas de rádio-navegação activa é o facto do equipamento de re-transmissão (transponder) só assegurar serviço a um número limitado de utilizadores simultâneos.

Quanto à dimensão da região servida pelo sistema de rádio-navegação, os sistemas dizem-se locais, regionais ou globais. Um sistema local pode servir uma região de poucos quilómetros, por exemplo, em torno de um aeroporto, como o ILS. Um sistema regional poderá abarcar uma área correspondente a um país, por exemplo, o Loran-C. Um sistema diz-se global se funcionar ao nível do planeta como, por exemplo, o GPS.

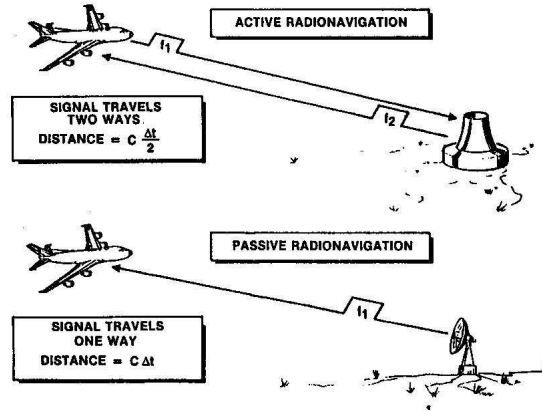


Figura 1: Sistemas de rádio-navegação activos e passivos

## 1 Princípios de rádio-navegação

A rádio-navegação usa medições de distâncias, de ângulos, ou uma combinação de ambos [5].

Suponhamos que conhecemos as distâncias  $r_i$ ,  $i = 1, 2$  do observador (receptor) a dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  (transmissores) no plano através da medição dos tempos de propagação transmissor-receptor. O observador está então colocado sobre uma circunferência de raio  $r_1$  tendo  $P_1$  como centro. Esta circunferência designa-se *linha-de-posição* (LOP). Um segundo transmissor originará uma nova LOP de raio  $r_2$  centrada em  $P_2$ . O observador estará situado na intersecção das LOPs. Como a intersecção de 2 circunferências não concêntricas corresponde a 2 pontos, a ambiguidade na determinação do posição do receptor terá de ser levantada recorrendo a informação adicional (ou a um terceiro transmissor). Este método designa-se de posicionamento distância-distância (ou  $\rho - \rho$ ).

Alternativamente, se o receptor dispuser de uma antena sensível à direcção, este pode determinar a direcção para cada um dos transmissores e, sabendo as posições exactas dos transmissores, calcular a posição do receptor. Este método é conhecido por posicionamento  $\theta - \theta$ .

Em sistemas de rádio-navegação passivos o uso do método  $\rho - \rho$  é dificultado por erros de relógio tanto dos transmissores como do receptor. Embora seja possível dotar os transmissores de relógios muito precisos, como sejam as referências de cézio ou de rubídio em que os desvios diários são da ordem de 100 ns (o que equivale a cerca de 30 m), os relógios dos receptores são normalmente de menor qualidade (tipicamente relógios de quartzo) o que acarreta erros de posicionamento de várias centenas de Km. A solução consiste em determinar a posição do receptor sem estimar o tempo absoluto de chegada dos sinais. Ao invés, o que se determina são as diferenças nos tempos

de chegada dos sinais a partir de dois pares de transmissores diferentes, por exemplo,  $t_2 - t_1$  e  $t_3 - t_1$ . A diferença no tempo de chegada ao receptor,  $t_2 - t_1$ , dos transmissores  $P_1$  e  $P_2$  é uma medida directa da diferença de distância a estes transmissores. A LOP que representa a diferença constante da distância aos dois transmissores no plano é uma hipérbole. Três transmissores geram três LOPs e o receptor localiza-se no ponto de intersecção das hipérboles. No espaço tri-dimensional as hipérboles são substituídas por hiperbolóides sendo preciso três destas superfícies para determinar a posição.

Alguns dos esquemas mais comuns de posicionamento geométrico encontram-se representados na Fig. 2.

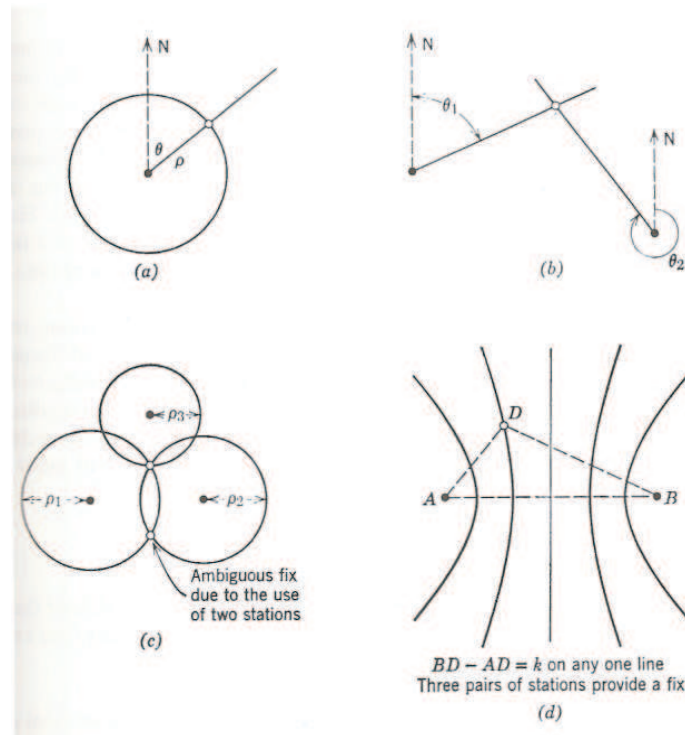


Figura 2: Esquemas comuns de posicionamento geométrico: (a) ro-teta ( $\rho - \theta$ ), (b) teta-teta ( $\theta - \theta$ ), (c) ro-ro ( $\rho - \rho$ ), (d) hiperbólico

## 1.1 Factores de desempenho dos sistemas

A utilidade dos sistemas de rádio-navegação reflecte-se nos seguintes factores: precisão [accuracy], cobertura [coverage], disponibilidade [availability], integridade [integrity], ambiguidade [ambiguity] e capacidade [capacity][5]:

- *Precisão*: É uma medida estatística do desempenho e é tipicamente dada pela raiz quadrática média (rms) do erro de posição num dado intervalo de tempo. As especificações da precisão geralmente referem-se a uma das seguintes definições: a)

precisão predizível (predictable accuracy): trata-se da precisão de uma estimativa de posição relativamente à posição correcta; b) precisão repetível (repeatable accuracy): mede a precisão em que um utilizador volta à posição cujas coordenadas foram medidas anteriormente pelo mesmo sistema de navegação.

- *Cobertura*: A área de cobertura servida por um sistema de rádio-navegação é definida em termos de uma dada especificação do desempenho do sistema. Em geral, o limite de cobertura é definido pela imposição de que o receptor seja capaz de adquirir e usar o sinal de rádio-navegação e que a solução de navegação verifique uma determinada precisão.
- *Disponibilidade*: É a probabilidade de um sistema de rádio-navegação estar disponível para utilização. Nos EUA, disponibilidades abaixo dos 99.7% não verificam as condições do Federal Radio Navigation Plan para navegação segura.
- *Integridade*: É a capacidade do sistema para fornecer avisos ao utilizador sobre os instantes em que o sistema não deve ser usado. Por exemplo, os sistemas VOR e Tacan efectuem a monitorização da integridade através da utilização de um receptor independente. Quando é detectada uma condição de falta de precisão, os transmissores removem os seus sinais de transmissão dentro do intervalo de dez segundos após a existência da falha.
- *Ambiguidade*: Existe ambiguidade quando um sistema de rádio-navegação identifica duas ou mais posições para o receptor, a partir do mesmo conjunto de medições, sem indicação de qual a posição mais correcta.
- *Capacidade*: É o número de utilizadores que um sistema de rádio-navegação pode servir simultaneamente. Por exemplo, não existe qualquer restrição ao número receptores que podem usar Loran-C ou GPS; por outro lado, DME e Tacan estão normalmente limitados a cerca de 110 utilizadores simultâneos.

## 1.2 Diluição geométrica de precisão

Na presença de erros na determinação dos tempos de chegada tanto os sistemas que se baseiam na determinação dos tempos absolutos como aqueles que usam as diferenças dos tempos de chegada (sistemas de LOP hiperbólico) apresentam erros na determinação da posição do receptor que dependem de dois factores independentes:

- (i) erros na determinação dos tempos (absolutos ou relativos);
- (ii) geometria da constelação de transmissores+receptor.

Admitindo que  $\sigma$  é o desvio-padrão do erro na medição das distâncias (assume-se uma distribuição gaussiana), o valor quadrático médio do erro de posicionamento é

dado por

$$d_{rms} = \text{GDOP} \cdot \sigma \quad (1)$$

em que GDOP (*geometric dilution of precision*) é uma quantidade que depende apenas da geometria (posições relativas) dos transmissores e do receptor. A qualidade da estimativa da posição do receptor é tanto melhor quanto menor for o factor GDOP.

Por exemplo, para sistemas com duas LOPs circulares prova-se que [2]

$$d_{rms} = \text{cosec}(\beta) \sqrt{2\sigma^2[1 + \mu \cos(\beta)]} \quad (2)$$

em que  $\mu$  é o coeficiente de correlação entre os erros de medição nas duas LOPs e  $\beta$  é o ângulo de intersecção das duas LOPs. Atendendo a (1) vem

$$\text{GDOP} = \text{cosec}(\beta) \sqrt{2[1 + \mu \cos(\beta)]} \quad (3)$$

Fazendo  $\mu = 0$  (erros de medição das distâncias independentes) verifica-se que  $\text{GDOP} = \sqrt{2}$  para  $\beta = \pi/2$  e  $\text{GDOP} = 2\sqrt{2}$  para  $\beta = \pi/6$ . Por conseguinte, a qualidade das estimativas da posição do receptor depende da forma do triângulo cujos vértices são constituídos pelo receptor e pelos dois transmissores.

O uso do factor GDOP vulgarizou-se com a navegação por satélite. Nesse caso, a posição dos satélites utilizados está em constante mudança pelo que a constelação dos satélites usados tem de ser verificada regularmente para manter o desempenho do sistema satisfatório. Para ter uma idéia do valor do GDOP em função da geometria consideremos a seguinte situação. Quatro satélites são usados para determinar uma posição 3D. O GDOP é inversamente proporcional ao volume de um tetraedro com as posições dos quatro satélites nos seus vértices.

### 1.3 Resolução da equação de posição

Consideremos que, num referencial cartesiano tri-dimensional, são conhecidas as distâncias do observador  $U(x_u, y_u, z_u)$  a três pontos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de acordo com

$$R_i(x_u, y_u, z_u) = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} \quad (4)$$

A equação (4) é não-linear com três incógnitas. A resolução de um sistema de três (ou mais) destas equações não pode ser, em geral, efectuada de forma fechada. Para resolver o sistema de equações de forma iterativa pode proceder-se à linearização de (4) usando uma expansão em série de Taylor (e mantendo apenas o termo linear)

$$R_i = \tilde{R}_i + \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \tilde{x}_u}(x_u - \tilde{x}_u) + \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \tilde{y}_u}(y_u - \tilde{y}_u) + \frac{\partial \tilde{R}_i}{\partial \tilde{z}_u}(z_u - \tilde{z}_u) \quad (5)$$

em que  $(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u, \tilde{z}_u)$  é uma estimativa inicial da posição do receptor U e

$$R_i = R_i(x_u, y_u, z_u), \quad \tilde{R}_i = R_i(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u, \tilde{z}_u) \quad (6)$$

Efectuando as derivadas parciais em (5) obtém-se

$$R_i = \tilde{R}_i - \frac{x_i - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_i}(x_u - \tilde{x}_u) - \frac{y_i - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_i}(y_u - \tilde{y}_u) - \frac{z_i - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_i}(z_u - \tilde{z}_u) \quad (7)$$

ou, matricialmente

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} x_u - \tilde{x}_u \\ y_u - \tilde{y}_u \\ z_u - \tilde{z}_u \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que

$$H = - \begin{bmatrix} \frac{x_1 - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_1} & \frac{y_1 - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_1} & \frac{z_1 - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_1} \\ \frac{x_2 - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_2} & \frac{y_2 - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_2} & \frac{z_2 - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_2} \\ \frac{x_3 - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_3} & \frac{y_3 - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_3} & \frac{z_3 - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A equação (8) pode ser usada para resolver a diferença entre a posição correcta  $(x_u, y_u, z_u)$  e a posição estimada  $(\tilde{x}_u, \tilde{y}_u, \tilde{z}_u)$ . De facto tem-se

$$R = \tilde{R} + H\Delta u \quad (10)$$

ou

$$\Delta R = H\Delta u \quad (11)$$

pelo que

$$\Delta u = H^{-1}\Delta R \quad (12)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_u \\ \tilde{y}_u \\ \tilde{z}_u \end{bmatrix} + H^{-1} \begin{bmatrix} R_1 - \tilde{R}_1 \\ R_2 - \tilde{R}_2 \\ R_3 - \tilde{R}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Quando existem mais medições que incógnitas (número de pontos de referência  $n > 3$ ) a matriz  $H(n \times 3)$  é dada por

$$H = - \begin{bmatrix} \frac{x_1 - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_1} & \frac{y_1 - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_1} & \frac{z_1 - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_1} \\ \frac{x_2 - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_2} & \frac{y_2 - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_2} & \frac{z_2 - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_n - \tilde{x}_u}{\tilde{R}_n} & \frac{y_n - \tilde{y}_u}{\tilde{R}_n} & \frac{z_n - \tilde{z}_u}{\tilde{R}_n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

e pode seguir-se um procedimento similar usando a matriz pseudo-inversa de  $H$  em vez de  $H^{-1}$ , isto é



$$\Delta u = (H^T H)^{-1} H^T \Delta R \quad (15)$$

Quando o número de medições é menor do que 3 o sistema não pode ser resolvido e a posição não pode ser calculada.

Na prática, a linearização introduz erros e é normalmente necessário usar um método iterativo para melhorar a estimativa dada por (12) ou (15). Em cada iteração a posição calculada na iteração anterior é usada como a estimativa inicial nas equações (5)-(9) e o algoritmo é de novo aplicado. Na primeira iteração é necessário usar uma estimativa inicial pré-definida. O procedimento iterativo funciona melhor (maior velocidade de convergência para o valor correcto) quando as distâncias envolvidas aumentam porque o processo de linearização comete menos erros. Por esse motivo, os sistemas baseados em satélites necessitam geralmente de um número menor de iterações do que os sistemas baseados em terra.

A Fig. 2 ilustra o processo de convergência (a 2 dimensões) na determinação da posição do observador  $U(400, 300)$  quando é conhecida a sua distância aos pontos  $P_1(100, -500)$  e  $P_2(-200, -500)$ . A estimativa inicial da posição do observador é  $E_0(0, 0)$ . Note-se que a convergência para o valor correcto se verifica após 4 iterações:  $E_1, \dots, E_4$ .

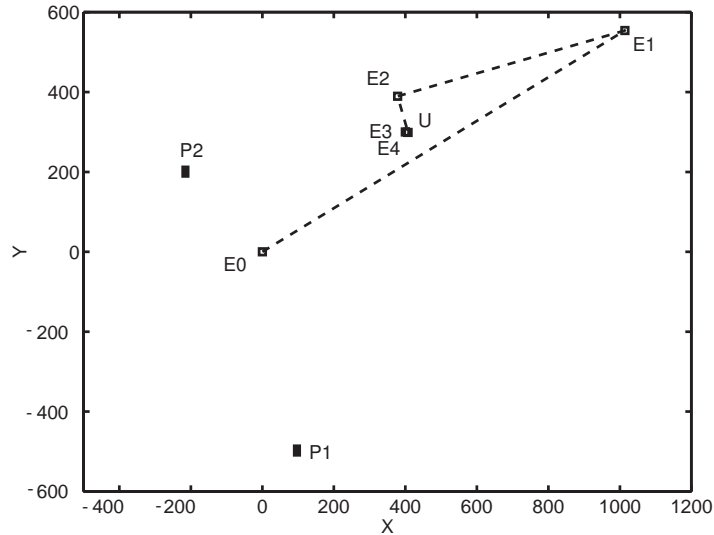


Figura 3: Convergência da solução da posição do receptor usando o método iterativo

Descreve-se, de seguida, alguns dos sistemas de rádio-navegação mais utilizados em aviação. Para uma resenha histórica dos métodos de rádio-navegação vide, por exemplo, [3].

## 2 Sistemas de Navegação Terrestres

### 2.1 ADF

O ADF (Automatic Direction Finder) ou rádio-bússola inclui um emissor ou rádio-farol (radiobeacon) emitindo na banda dos 190-415 KHz ou 510-535 KHz [4], [8]. O alcance das transmissões varia entre 75 e 400 Km. No avião, um receptor sintonizado para a frequência do rádio-farol permite determinar o ângulo ( $\alpha$ ) que a direcção do voo faz com a linha que une o avião ao emissor. No painel de instrumentos um dispositivo (RBI, radio bearing indicator) indica esse ângulo permitindo ao piloto modificar a trajectória até se atingir a situação de alinhamento.

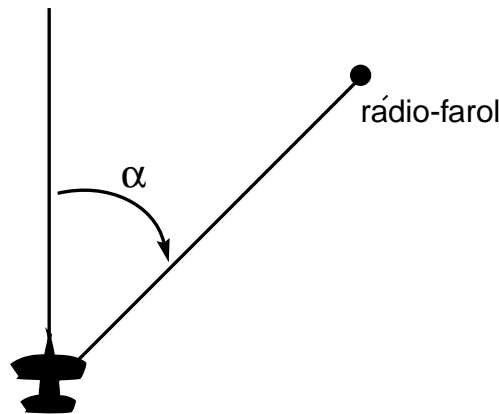


Figura 4: Medição do ângulo de voo relativamente ao rádio-farol

Existem vários factores que afectam o funcionamento do ADF:

a) *trovoadas*:

A actividade eléctrica no interior das núvens cria radiação e, por vezes, provoca desvios na agulha do RBI.

b) *noite*:

Durante o dia o ADF recebe ondas de rádio via superfície, mas à noite algumas camadas da ionosfera reflectem essas ondas causando interferência com as ondas de superfície. Esse efeito é mais acentuado acima dos 350 KHz.

c) *sólo*:

O terreno pode perturbar significativamente a propagação das ondas. Áreas montanhosas podem gerar reflexões e a concentração de grandes massas minerais com fortes propriedades electromagnéticas pode enfraquecer as ondas de rádio causando disrupção do sinal ou informações erróneas por parte da agulha do BRI. Os efeitos são mais intensos em voos de baixa altitude.

d) *interferência*:

Se duas estações estiverem a emitir a pequena distância e com frequências próximas podem interferir entre si. Este efeito tende a acentuar-se à noite devido à reflexão das ondas na ionosfera.

e) *linha de costa*:

Quando as ondas de rádio atravessam a linha de costa tendem a sofrer um pequena deflecção. Este efeito é mais acentuado se o ângulo entre a linha de costa e a direcção de propagação das ondas de rádio for inferior a  $30^\circ$  e se o voo se realizar a baixa altitude.

f) *ângulo de incidência*:

Existe um erro induzido na recepção do sinal pela própria fuselagem do avião. Este erro está directamente relacionado com o ângulo que os sinais de rádio fazem com os eixos longitudinal e transversal da aeronave e apresenta valores máximos para ângulos de incidência de  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  e  $315^\circ$  (erro quadrantal). Este erro é devido ao efeito que as superfícies metálicas exercem na distribuição do campo magnético na vizinhança da antena de ADF.

g) *zonas de silêncio*:

As antenas em terra têm usualmente a forma de um T e irradiam no plano horizontal. Isto significa que quando o avião está sobre a antena ou numa posição próxima o diagrama de radiação impede a recepção de sinais numa “zona de silêncio” que pode atingir os 6 Km em voos de altitude elevada.

## 2.2 VOR

O VHF Omnidirectional Range (VOR) é o sistema de rádio-ajuda à navegação mais utilizado a nível mundial em rotas de curta e média distância [4], [5].

A cada VOR é atribuída uma frequência entre 108.10 MHz e 117.90 MHz com espaçamento entre canais de 50 KHz. A transmissão é efectuada com dois sinais: (a) um *sinale de referência* que apresenta fase constante em todas as direcções (omnidireccional) e (b) um *sinale de fase variável* cuja fase varia com a direcção que o VOR faz com o receptor. Os sinais de referência e de fase variável são respectivamente da forma

$$\cos(2\pi f_m t + \theta_1)$$

$$\cos(2\pi f_m t + \theta_2)$$

em que  $f_m = 30$  Hz,  $\theta_1$  é fixo e  $\theta_2 = \theta_1 - \phi$  (onde  $\phi$  é o ângulo entre a trajectória do avião e o norte magnético).

O sinal de fase variável é modulado por forma a que na direcção do norte magnético a referência e o sinal variável se encontrem precisamente em fase entre si. Em qualquer outra direcção os dois sinais apresentam um desfasamento relativo igual ao ângulo de

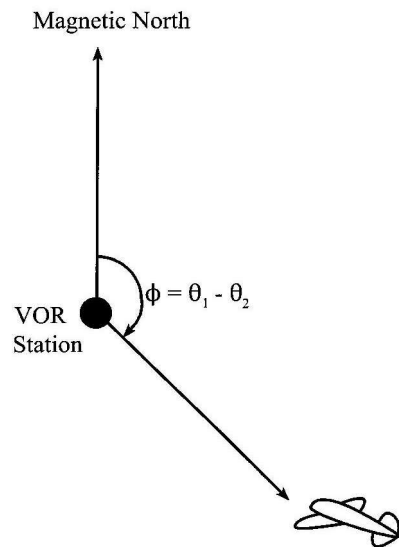


Figura 5: Trajectória do avião relativamente à estação de VOR

rumo relativamente ao norte magnético. Por exemplo, quando o avião se encontra a leste do VOR a fase do sinal variável apresenta um atraso de  $90^\circ$  em relação à da referência. O receptor a bordo do avião determina a direcção do voo a partir do desfasamento (ou equivalentemente, atraso) entre os sinais recebidos.

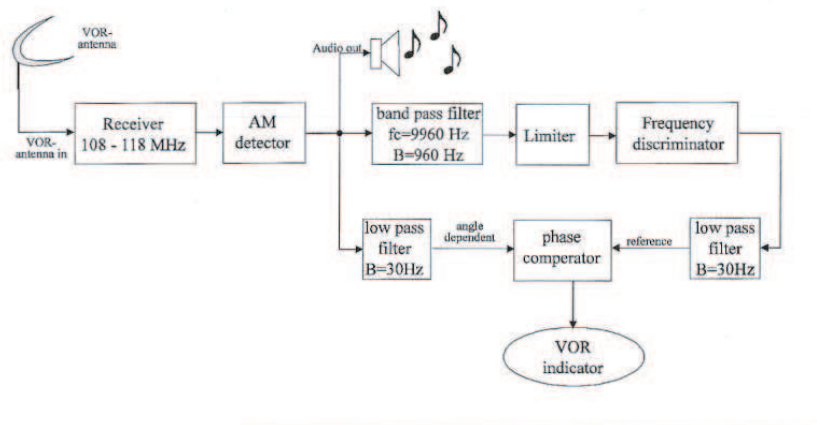


Figura 6: Esquema do receptor VOR [2]

A Fig. 6 mostra esquema para recepção de sinais VOR. À saída do receptor existe um detector de modulação de amplitude. A sua saída inclui: (1) um sinal sinusoidal de 30 Hz, de fase variável, com fase dependente da direcção do receptor relativamente ao transmissor VOR; (2) um sinal de voz (se utilizado na transmissão); (3) um sinal de identificação do VOR com codificação de Morse, centrado em 1020 Hz e (4) um sinal

de FM com sub-portadora em 9960 Hz, modulado em frequência pelo sinal sinusoidal de referência a 30 Hz. O desvio de frequência do sinal de FM é de 480 Hz (índice de modulação=16).

Os VORs usados em navegação de médio curso têm potências de 200 watts e frequências entre 112.00 MHz e 117.90 MHz, permitindo transmissões até distâncias de 300 Km. Os VORs usados durante a aproximação à pista têm uma potência de 50 watts e frequências entre 108.10 e 111.80 MHz. Os sinais podem ser captados até distâncias da ordem dos 40 Km. Dado que as transmissões VOR se efectuam em linha-de-vista as distâncias de recepção variam com a altitude do avião.

## 2.3 DME

O DME (Distance Measuring Equipment) é um dispositivo que calcula e indica continuamente ao piloto a distância entre o avião e a estação de DME em terra [4], [5].

O sistema DME é composto por um *transponder* na unidade de terra e um *interrogador* na aeronave. O interrogador emite um par de impulsos de rádio (de duração  $3.5 \mu s$ ) num dado canal com um determinado espaçamento o qual, uma vez captado pelo transponder do DME no sólo inicia um processo de resposta que consiste no envio de outro par de impulsos para o avião com o mesmo espaçamento ( $12 \mu s$ ) mas usando frequências diferentes.

Na aeronave determina-se o tempo de ida-e-volta entre a interrogação e a resposta, desconta-se 50 microsegundos (tempo de processamento em terra) e divide-se o resultado por 2. A multiplicação pela velocidade da luz permite obter a distância entre o avião e a estação de terra.

O DME opera na banda de UHF de 962 MHz a 1213 MHz com incrementos de 1 MHz. As frequências usadas pelo interrogador são 1025-1150 MHz e o transponder usa duas bandas: 962-1024 MHz e 1151-1213 MHz. O número de frequências disponíveis é de 252 pelo que existem 126 canais. Cada canal utiliza duas frequências, uma para a interrogação e outra para a resposta. Em cada par de frequências a diferença entre a frequência de interrogação e a de resposta é sempre de  $\pm 63$  MHz.

O alcance das estações de DME pode chegar aos 370 Km mas, tal como acontece com as estações VOR, quanto maior for a altitude do avião maior será o alcance do DME.

Recomenda-se que o erro do DME não exceda o pior dos seguintes valores: meia milha náutica ( $\approx 900$  metros) ou 3% da distância. O valor indicado pelo DME é a distância entre o interrogador e o transponder (designada por *slant range*), não a distância entre o avião e a estação de terra medida à superfície. A diferença entre as duas distâncias é insignificante para distâncias avião-estação de terra superiores a cerca de 30 Km.

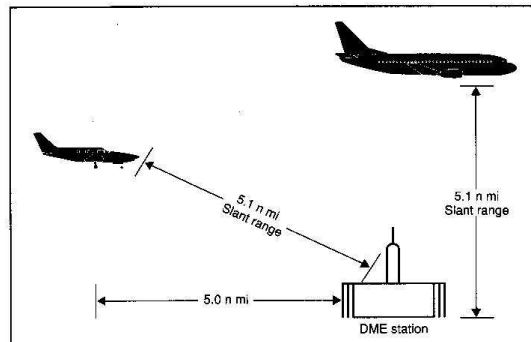


Figura 7: Medição de *slant range* usando o DME

O DME encontra-se, em geral, associado a um VOR (VOR/DME). Esta combinação é, de facto, o principal suporte para as rotas de curta e média distância a nível mundial.

A nível militar existem dois sistemas equivalentes ao VOR/DME designados por *Tacan* (tactical air navigation) e por *VORTAC* (VHF Omni-directional Range/Tactical Air Navigation). Os princípios de operação teórica e técnica do Tacan são diferentes daqueles que são usados no VOR/DME. No entanto, o resultado final é idêntico. O equipamento em terra pode consistir em unidades transmissoras fixas ou móveis. O equipamento a bordo em conjunto com o equipamento terrestre, transformam o sinal transmitido numa representação visual da informação de azimuth e distância. O Tacan funciona em UHF na banda de 960 MHz a 1215 MHz.

Um Vortac é um sistema com dois componentes: VOR e Tacan, fornecendo três serviços independentes: VOR-azimutes; Tacan-azimutes e Tacan-distâncias (DME). Apesar de ser constituído por mais de um componente, tendo mais do que uma frequência e mais do que uma antena, um Vortac é considerado como uma rádio-ajuda única.

## 2.4 Loran-C

O Loran-C (Long Range Navigation) é um sistema de rádio-navegação muito utilizado em barcos, aviões e veículos terrestres [4], [5]. Apesar de, em 1994, os E.U.A. terem terminado a operação das estações de Loran-C fora do seu território, parte dessas estações foram, a partir de então, mantidas operacionais pelos governos dos diversos países. Na Europa, oito estações novas ou re-equipadas entraram em funcionamento em 1995 permitindo cobrir a parte noroeste do continente.

O sistema Loran-C consiste numa estação *mestre* (designada por estação M) e por duas a cinco estações *escravas* ou *secundárias* (identificadas pelas letras V, W, X, Y e Z). Este conjunto é conhecido por *cadeia*. Em intervalos de tempo regulares a estação-

mestre transmite um conjunto de impulsos à frequência de 100 KHz. Este intervalo de repetição, designado por *intervalo de repetição de grupo* [GRI=group repetition interval], é diferente para cada cadeia podendo variar entre 40 e 100 milisegundos. As estações emitem com potências elevadas (250-1500 Kw). A frequência de 100 KHz foi escolhida por permitir a propagação da onda de sólo a grandes distâncias.

O funcionamento do sistema é o seguinte. A estação-mestre transmite um conjunto de 8 impulsos [burst]; após um certo intervalo de tempo (devido a atraso de propagação entre estações) a primeira estação secundária transmite o seu burst, seguindo-se a segunda estação secundária, etc. O processo repete-se novamente com a transmissão da estação-mestre.

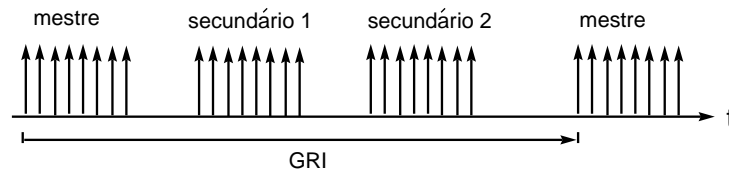


Figura 8: Transmissão de impulsos no sistema Loran-C

As medições efectuadas pelo receptor consistem em determinar as diferenças dos tempos de chegada entre o sinal mestre e os sinais das estações secundárias. A corrente na antena de recepção correspondente a um impulso recebido é

$$i(t) = At^2 \exp\left(-2\frac{t}{t_p}\right) \sin(\omega_0 t + \phi), \quad t \geq 0 \quad (16)$$

em que  $t_p = 65 \mu s$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 100$  KHz e  $\phi = 0$  ou  $\pi$ . Normalmente o instante de medição do impulso corresponde à terceira passagem por zero no sentido ascendente do sinal (ou seja,  $30 \mu s$  após o início do impulso).

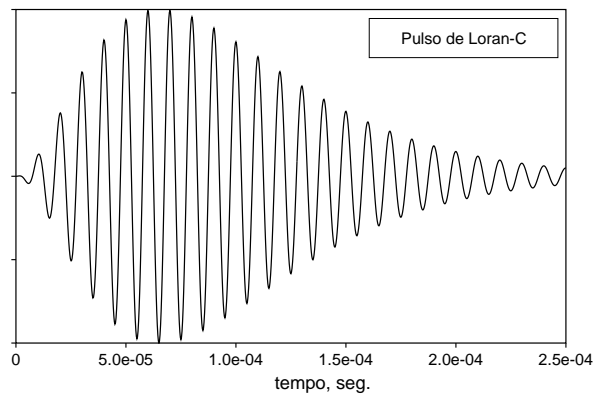


Figura 9: Impulso de Loran-C

Na figura seguinte mostra-se parte de um padrão hiperbólico correspondente à estação-mestre M e à estação secundária S. Os números vêm expressos em microsegundos. No ponto P sobre a curva 53000 uma imprecisão de 1 microsegundo na diferença de tempos representa um erro de posição de cerca de 500 metros. A precisão do Loran-C (100-300 m) depende da geometria das estações e do utilizador e também dos atrasos de propagação dos sinais sobre a água e sobre o sólo.

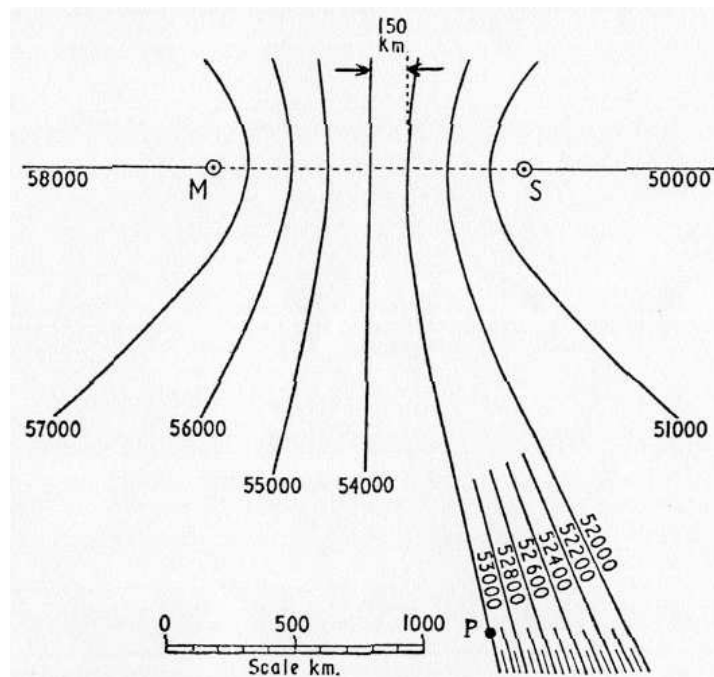


Figura 10: Cada curva (hipérbole) representa os pontos da superfície terrestre em que a diferença dos instantes de chegada do sinal mestre e do sinal secundário é constante no sistema Loran-C

Assume-se que os sinais de Loran-C viajam entre o emissor e o receptor como ondas de superfície. Contudo, réplicas do sinal podem atingir o receptor através de propagação na ionosfera. Dado que o percurso da onda de céu ( $\geq 35 \mu s$ ) é maior que o da onda de superfície, o receptor efectua a medição do tempo de chegada da onda de superfície antes da chegada da onda de céu. Esta protecção contra a interferência da onda de céu é uma vantagem importante do Loran-C relativamente a outros métodos de navegação que operam na mesma gama de frequências.

Os valores da precisão (2drms) são: precisão predizível 0.25nm (ou 460m); precisão repetível 60 – 300ft (ou 18 – 90m) [8].



## 2.5 ILS

O **ILS** (Instruments Landing System) é o sistema standard para aproximação e aterragem usando procedimentos baseados em instrumentos [4], [5]. O sistema é composto por vários dispositivos que fornecem ao piloto informação essencial em aterragens com fraca visibilidade ou condições de tempo adversas. O ILS fornece ao piloto um percurso de aproximação que se encontra perfeitamente alinhado com o eixo da pista. É fornecida orientação tanto lateral (rota) como vertical (ladeira) durante a aproximação.

O sistema ILS está equipado com 3 tipos diferentes de transmissores:

- **localizador** [localizer], centrado na extremidade da pista; proporciona orientação lateral;
- **emissor de ladeira** [glide slope], localizado lateralmente ao alinhamento da pista, perto da sua extremidade; proporciona orientação vertical;
- **rádio-balizas** [marker beacons], localizados em pontos discretos ao longo do percurso de aproximação; servem para alertar os pilotos do seu progresso ao longo da trajectória de descida.

O localizador fornece ao piloto a informação longitudinal relativamente ao eixo da pista, a ladeira dá o ângulo vertical de aproximação à pista e finalmente as rádio-balizas alertam o piloto auditiva e visualmente das distâncias à pista.

O localizador consiste num transmissor operando na banda de 108.1 MHz a 111.95 MHz, um agregado de antenas e equipamento de monitorização localizados no fim da pista. É emitido um feixe altamente direccionado, alinhado com o eixo da pista, que se encontra modulado em amplitude por dois tons: 90 Hz e 150 Hz. O sinal de 150 Hz é predominante do lado direito da pista (quando se olha a partir do avião), enquanto que o sinal de 90 Hz predomina do lado esquerdo. Se o avião estiver alinhado com a pista ambos os tons têm iguais intensidades, caso contrário, um dos tons é recebido com maior intensidade. O sinal do localizador é transmitido segundo um feixe bastante estreito, estendendo-se 35° tanto para a esquerda como para a direita do eixo da pista até uma distância de cerca de 18 Km. O sinal é ainda utilizável num sector de 10° para cada lado da linha central entre os 18 e os 33 Km.

O transmissor de ladeira está localizado lateralmente à pista e funciona em frequências de UHF na banda de 328.60 MHz a 335.40 MHz. Estas frequências estão emparelhadas com as frequências do localizador (a selecção da frequência do localizador determina a frequência do transmissor de ladeira). O emissor de ladeira transmite dois sinais modulados em amplitude a 90 Hz e a 150 Hz tal como o localizador. Se o avião se encontra acima do percurso óptimo de aproximação (glide path), o sinal de 90 Hz será

predominante avisando o piloto de que deverá voar mais baixo. Se o avião se encontrar abaixo do percurso óptimo de aproximação o sinal de 150 Hz predominará indicando ao piloto que deverá voar mais alto. O transmissor de ladeira tem um alcance de cerca de 18 Km com um ângulo de  $8^\circ$  para cada lado do eixo da pista.

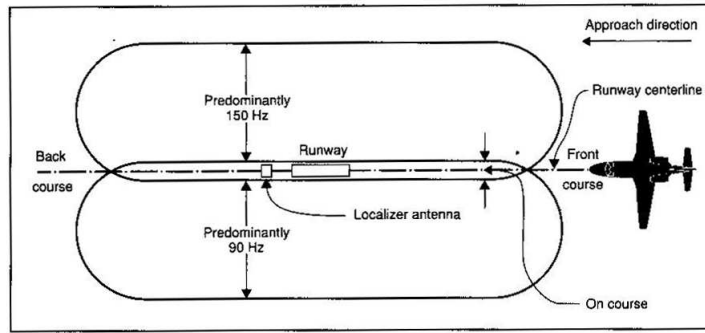


Figura 11: Procedimento de aproximação do ILS e padrão de radiação do localizador

As rádio-balizas são transmissores com potências de cerca de 3 W que têm por missão alertar o piloto para pontos específicos durante a operação de aproximação à pista. Existem, em geral, três balizas; a exterior a cerca de 9 Km (5 nmi) do fim da pista, a intermédia a cerca de 1 Km (3000 ft) e a interior a cerca de 330 m (1000 ft). Todas funcionam na frequência de 75 MHz usando uma emissão vertical direccional.

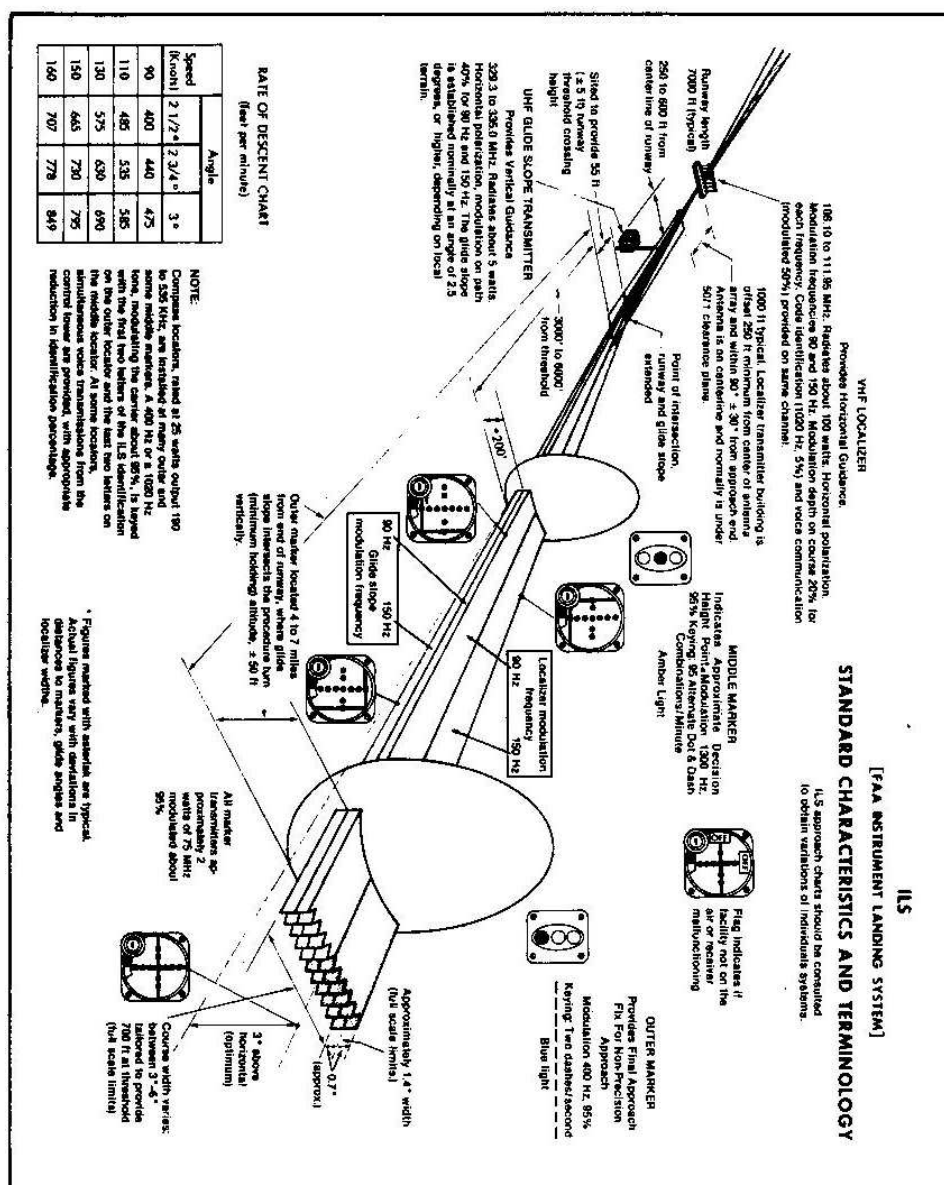


Figura 12: Descrição do sistema ILS [4]

## 3 Sistemas de Navegação Global por Satélite

A forma mais recente e precisa de navegação é baseada na utilização de satélites (GNSS=*Global Navigation Satellite System*). Os governos dos E.U.A. e da Rússia desenvolveram dois sistemas equivalentes conhecidos respectivamente por **GPS** (Global Positioning System) e por **Glonass** [1], [6]. Presentemente, a Europa está a desenvolver o seu sistema GNSS designado **Galileo**. Os sistemas GNSS operam de forma análoga à dos sistemas hiperbólicos de navegação como o Loran-C. A diferença principal é que os transmissores se encontram localizados em satélites não-geostacionários em vez de estações fixas. Além disso, as frequências utilizadas são muito mais elevadas o que permite precisões inigualadas pelos outros métodos de rádio-navegação.

### 3.1 GPS

O GPS tornou-se completamente operacional em 1994 fornecendo uma cobertura a nível mundial. Hoje em dia, atingida a fase de maturidade, as suas aplicações cresceram muito para além do usual posicionamento de barcos e aviões. Outras aplicações incluem a cartografia, o seguimento de veículos em terra, a navegação espacial na proximidade da Terra, a construção de estradas e edifícios, a agricultura, a monitorização dos movimentos da crosta terrestre, a disseminação do tempo a nível mundial, etc.

O problema central num receptor de GPS consiste na estimação com elevado grau de precisão da posição, velocidade e tempo baseada em observações ruidosas dos sinais de satélite. Ao contrário de outros métodos de rádio-navegação, os receptores de GPS são inteiramente passivos (no sentido de não transmitirem de volta qualquer sinal). O sistema de satélites que constitui o *segmento espacial* do GPS consiste em 24 satélites dispostos em 6 órbitas de 4 satélites com períodos de 11 horas e 58 minutos. Tal assegura a qualquer utilizador do globo uma visibilidade de 4 ou mais satélites em qualquer instante. Do ponto de vista do observador, a geometria dos satélites varia constantemente dado que os satélites não são geo-estacionários. A manutenção de informação actualizada nas mensagens transmitidas é efectuada por estações terrestres de monitorização, colectivamente designadas por *segmento de controlo*. Estas estações actualizam periodicamente a informação que é disseminada por todos os satélites.

Os sinais de GPS são transmitidos por duas portadoras coerentes com frequências distintas, L1 (1575.42 MHz) e L2 (1227.60 MHz), as quais são moduladas por diferentes sinais de espalhamento de espectro. A portadora principal, L1, encontra-se modulada por dois tipos de códigos de ruído pseudo-aleatório: um a 1.023 MHz, designado por **código C/A** (Coarse/Acquisition), e o outro a 10.23 MHz, designado por **código P**. O código P é encriptado sempre que o modo A-S (anti-spoofing) se encontra activado originando o **código Y**. O percurso de onda correspondente ao tempo de chip do código

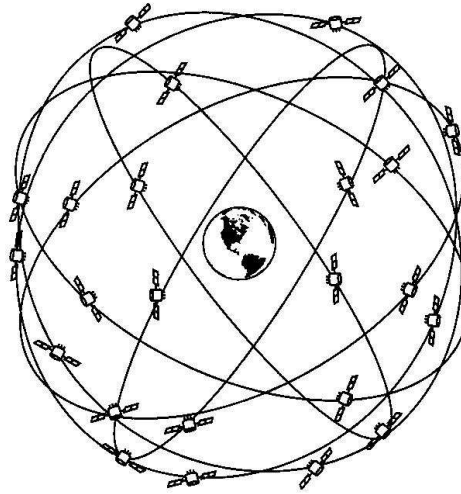


Figura 13: Constelação de GPS

Y é de 30 metros o que possibilita o posicionamento mais preciso. Por isso, este código é apenas acessível com autorização. Em linguagem oficial o acesso ao código Y está reservado ao modo de operação **PPS** (Precise Positioning Service), enquanto que tudo o resto é classificado como **SPS** (Standard Positioning Service). Todos os utilizadores têm acesso ao código C/A, o qual permite uma menor precisão de posicionamento devido ao percurso de onda correspondente ao tempo de chip ser de 300 metros.

O sinal da segunda portadora (L2) contém apenas a modulação com código Y e destina-se a possibilitar aos utilizadores autorizados medirem os atrasos de propagação na ionosfera usando duas frequências. Dado que as portadoras L1 e L2 são diferentemente atrasadas pela ionosfera, um receptor que aceite as duas frequências pode calcular esse atraso (porque ele é proporcional a  $1/f^2$ ). Esta correcção da velocidade da luz através da ionosfera é essencial. Um receptor de frequência única tem de recorrer a estimativas da correcção ionosférica cujos parâmetros são emitidos pelos satélites.

Todos os satélites usam as mesmas frequências de portadora. Cada satélite tem a sua própria sequência pseudo-aleatória de 1023 bits (o seu código C/A que é um código de Gold). O período de repetição é de 1 milissegundo para o código C/A e de 1 semana para o código Y.

Uma mensagem de navegação a 50 bits/segundo é também combinada com as sequências de ruído pseudo-aleatório. Esta mensagem de navegação, com 1500 bits de comprimento, é repetida de 30 em 30 segundos, transportando vários tipos de informação com diversos graus de importância funcional e operacional para o utilizador. De grande importância são as **efemérides dos satélites**, uma colecção de dados constituindo até 60% da mensagem que, quando descodificadas, descrevem univocamente a posição e a trajectória do satélite que a enviou. Os restantes 40% do espaço da men-

sagem são comuns a todos os satélites e contêm informação geral (**almanac**), como sejam as posições aproximadas dos satélites (para fins de aquisição de sinais e possível orientação da antena do receptor) e o estado de operacionalidade dos vários satélites [satellite health status].

• **Determinação da posição em GPS:**

Seja

$$R_i = \sqrt{(X_i - x_R)^2 + (Y_i - y_R)^2 + (Z_i - z_R)^2} \quad (17)$$

a distância entre o satélite  $i$ , de coordenadas  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , e o receptor, de coordenadas  $(x_R, y_R, z_R)$ .

Os receptores de GPS recebem e decodificam sinais provenientes dos satélites com informação sobre as posições dos mesmos o que permite resolver o problema da determinação da posição do receptor. Seja  $\tilde{t}_R$  o tempo nominal de relógio do receptor no instante de recepção do sinal de satélite e  $\tilde{t}_i$  o tempo nominal de relógio do satélite no instante de emissão desse sinal (por nominal entende-se o tempo indicado na prática pelos respectivos relógios). O tempo nominal de satélite é o tempo obtido pelo conjunto dos relógios atômicos a bordo do satélite. O tempo nominal do receptor é, em geral, obtido por um receptor de quartzo, com uma precisão muito inferior à dos relógios dos satélites. Os tempos nominais estão relacionados com os tempos verdadeiros  $t_i$  e  $t_R$  (tempos de GPS) através de

$$\begin{aligned} \tilde{t}_R &= t_R + \Delta t_R, \\ \tilde{t}_i &= t_i + \Delta t_i. \end{aligned} \quad (18)$$

em que  $\Delta t_i$  e  $\Delta t_R$  são respectivamente os erros de relógio do satélite e do receptor. Em geral,  $|\Delta t_i| \ll |\Delta t_R|$ .

A **pseudo-distância** [pseudo-range] é uma medida da distância entre o satélite e o receptor dada por

$$\rho_i = (\tilde{t}_R - \tilde{t}_i)c \quad (19)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz.

A pseudo-distância  $\rho_i$  seria igual à distância geométrica  $R_i$  que o sinal percorreria se o meio de propagação fosse o vácuo e se não existissem erros de relógio ou outras perturbações à propagação dos sinais. A diferença de tempos nominais,  $\tilde{t}_R - \tilde{t}_i$ , é medida no receptor correlacionando os códigos de ruído pseudo-aleatório (PRN, pseudo-random noise) idênticos gerados pelo satélite e pelo receptor. Para alinhar no tempo os dois

códigos o receptor efectua sucessivos desvios da réplica PRN interna até que o máximo da correlação ocorra.

A pseudo-distância vem dada por

$$\rho_i = (t_R - t_i)c + (\Delta t_R - \Delta t_i)c \quad (20)$$

O tempo de propagação dos sinais no espaço,  $t_R - t_i$ , vai depender essencialmente da distância  $R_i$  mas é igualmente afectado pelos atrasos de propagação na ionosfera e na troposfera. Deste modo

$$(t_R - t_i)c = R_i + \Delta R_{\text{prop}} \quad (21)$$

em que  $\Delta R_{\text{prop}}$  é o erro devido aos atrasos de propagação, pelo que

$$\rho_i = R_i + \Delta R_{\text{prop}} + (\Delta t_R - \Delta t_i)c \quad (22)$$

É possível eliminar (quase) completamente os erros devidos à ionosfera/troposfera e ao relógio de satélite, resultando

$$\rho_i = R_i + c\Delta t_R + \epsilon \quad (23)$$

em que  $\epsilon$  é um erro residual. Os erros contidos nas medidas de pseudo-distância em modo SPS podem ser classificados nas categorias listadas na tabela seguinte [6]. Assume-se que existem algoritmos no receptor para compensar os atrasos ionosférico e troposférico e o efeito de multipercurso.

segmento	fonte de erro	erro de GPS $1\sigma$ (m)
espaço	estabilidade do relógio de satélite	1.1
	atraso de grupo de L1	0.3
controlo	erros das efemérides	0.8
utilizador	atraso ionosférico	7.0
	atraso troposférico	0.2
	ruído do receptor e resolução	0.1
	multipercurso	0.2
UERE	total	7.1

Tabela de erros da pseudo-distância para código C/A SPS

A v.a.  $\epsilon$  em (23) costuma ser considerada gaussiana, de média nula e variância  $\sigma_{\text{UERE}}^2$  (com o desvio padrão indicado na Tabela).

Desprezando o erro  $\epsilon$  resulta para (23):

$$\rho_i = R_i + c\Delta t_R \quad (24)$$

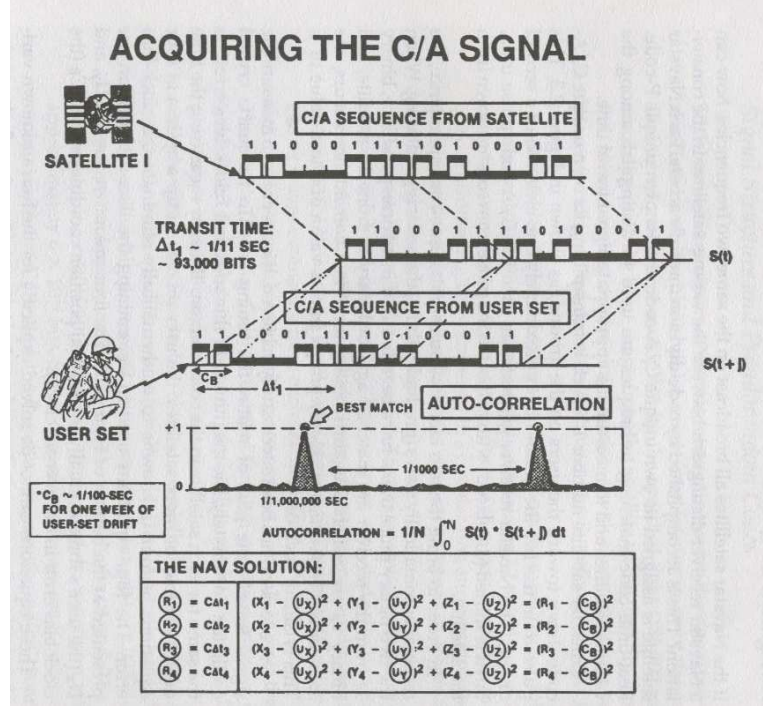


Figura 14: Aquisição do código de um sinal de GPS [1]

Em espaço livre existem 3 coordenadas para determinar. Além disso, um receptor autónomo não se encontra, em geral, sincronizado com o tempo do sistema de satélites, quando inicia o seu funcionamento, isto é,  $|\Delta t_r| \gg 0$ . Assim, o problema do posicionamento em GPS consiste na resolução de um sistema de  $N$  equações a quatro incógnitas (3 coordenadas espaciais+tempo). No caso mais simples, em que se observa  $N = 4$  satélites, as equações de navegação são:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(X_1 - x_R)^2 + (Y_1 - y_R)^2 + (Z_1 - z_R)^2} + c\Delta t_R \\ \rho_2 &= \sqrt{(X_2 - x_R)^2 + (Y_2 - y_R)^2 + (Z_2 - z_R)^2} + c\Delta t_R \\ \rho_3 &= \sqrt{(X_3 - x_R)^2 + (Y_3 - y_R)^2 + (Z_3 - z_R)^2} + c\Delta t_R \\ \rho_4 &= \sqrt{(X_4 - x_R)^2 + (Y_4 - y_R)^2 + (Z_4 - z_R)^2} + c\Delta t_R, \end{aligned} \quad (25)$$

em que  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  são as pseudo-distâncias relativamente aos 4 satélites,  $[X_i, Y_i, Z_i]^T$  são as coordenadas cartesianas da posição do satélite  $i$  (fornecidas pelas efemérides). As



equações (25) estão sujeitas a perturbações intencionalmente provocadas ou não como sejam ruído de medição, desvio dos satélites relativamente aos dados das efemérides, erros dos relógios de satélite, desvanecimento por multi-percurso, etc. O nível de operação SPS foi até Maio de 2000 propositadamente degradado pela introdução de erros nos relógios de satélite e nos dados das efemérides. Esta degradação, designada por SA (selective availability), visava diminuir a precisão do posicionamento.

As equações não-lineares (25) podem ser resolvidas usando:

- (i) soluções na forma fechada como o algoritmo de Bencroft;
- (ii) técnicas iterativas baseadas em linearizações, ou
- (iii) filtragem de Kalman.

#### • Extensões do GPS:

O GPS básico pode ser estendido por forma a cumprir requisitos de integridade correntes em aviação civil, e em transportes terrestres e marítimos. O DGPS (GPS diferencial) é um desses métodos.

O DGPS melhora o GPS mediante o uso de correcções diferenciais às medições básicas dos sinais de satélite. O DGPS baseia-se no conhecimento preciso da localização geográfica de uma ou mais estações de referência. Esse conhecimento é usado para calcular correcções às medições de distância ou às posições resultantes.

Os sistemas DGPS só são eficazes para áreas de algumas dezenas de Kms em torno das estações de referência. Para cobrir integralmente um continente seria necessário um número elevado de estações autónomas de DGPS. Uma alternativa é constituída pelo WAAS (Wide Area Augmentation System). Consiste numa estação-mestre que recebe informação de cerca de 25 estações de referência distribuídas pelo território norte americano (vide Fig. 15). As correcções diferenciais para cada zona do território são codificadas numa mensagem de navegação a 250 bits/segundo e enviadas para um conjunto de satélites geo-estacionários que retransmitem os dados de forma selectiva para os utilizadores em terra. Um receptor de GPS terá de ser modificado de modo a receber as novas mensagens e a utilizá-las na correcção dos dados de navegação provenientes dos satélites de GPS. Os sinais WAAS permitem precisões no plano horizontal de 1-2 metros.

Sistemas equivalentes ao WAAS foram instalados pela Europa e pelo Japão sobre os respectivos territórios. Estes sistemas são designados respectivamente por European Geostationary Navigation Overlay System (EGNOS) e Multifunction Transportation Satellite-based Satellite Augmentation System (MSAS).

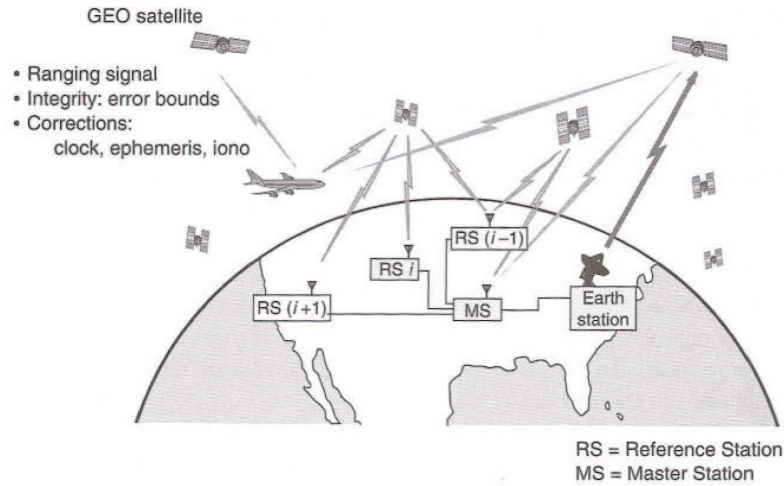


Figura 15: Esquema do WAAS [9]

### 3.2 Glonass

Glonass é um sistema russo de rádio-navegação baseado em satélites que permite determinar as três coordenadas da posição, a velocidade e o tempo em qualquer ponto da superfície terrestre. Em muitos aspectos, o Glonass é bastante semelhante ao GPS. O sistema consiste numa constelação de 24 satélites, uma rede de monitorização no sólo, e vários tipos de equipamento de utilizador. A constelação consiste em 3 planos orbitais de 8 satélites. O equipamento de recepção é fabricado na Rússia e noutros países. Alguns fabricantes constroem receptores combinados de GPS/Glonass. A determinação da posição, velocidade e tempo é assegurada por sequências pseudo-aleatórias como no GPS, mas ao contrário deste, o Glonass utiliza acesso múltiplo por divisão na frequência (FDMA), em vez de acesso múltiplo por divisão no código (CDMA), para distinguir os sinais provenientes dos vários satélites. A utilização de FDMA permite que as mesmas sequências pseudo-aleatórias sejam utilizadas por todos os satélites. As frequências utilizadas correspondem às bandas 1240-1260 MHz e 1597-1617 MHz.

### 3.3 Galileo

Em Março de 2002 a União Europeia decidiu avançar com a fase de desenvolvimento do sistema europeu de rádio-navegação global, Galileo. Tal como o GPS este sistema baseia-se na técnica de acesso múltiplo por divisão no código (CDMA). A entrada em funcionamento do Galileo está prevista para 2012.

A constelação prevista consiste em 30 satélites dispostos em três planos inclinados

a 56° relativamente ao Equador, à altitude de 23616 Km. Cada plano dispõe de dez satélites igualmente afastados, cada um demorando aproximadamente 14 horas a percorrer uma órbita completa. Cada plano dispõe de um satélite de reserva capaz de substituir qualquer satélite avariado do plano.

O controlo da constelação será efectuado por dois Centros de Controlo na Europa que assegurarão igualmente a sincronização dos relógios atómicos dos satélites, o processamento dos sinais de integridade e de todos os dados.

O Galileo transmitirá 10 sinais através das seguintes bandas [6], [7]:

- E5a-E5b: 1164-1215 MHz;
- E6: 1260-1300 MHz;
- E2-L1-E1: 1559-1591 MHz (já parcialmente utilizada pelo GPS).

A partilha desta banda com o GPS será efectuada numa base de não interferência, por forma a evitar perturbações no funcionamento do sistema americano, enquanto se oferece aos utilizadores acesso simultâneo ao GPS e ao Galileo com aumentos mínimos de custo e de complexidade dos receptores.

O conjunto dos serviços previstos para o sistema Galileo podem ser sub-divididos da seguinte forma tendo em conta os níveis de prestação e segurança associados [6], [7]:

- Open Service (OS): é o serviço de base gratuito pensado para as aplicações públicas e privadas de interesse geral; relativamente ao correspondente serviço civil do GPS assegurará níveis de precisão e de disponibilidade superiores; para aceder a estes sinais não será necessário nenhum tipo de autorização, mas não será fornecida informação sobre a integridade do serviço;
- Safety-of-Life Service (SoL): apresenta as mesmas prestações e características do serviço OS às quais se junta um serviço de integridade à escala global; este aspecto torna o serviço apropriado para o uso em sectores de transporte para os quais a informação em tempo real sobre o estado de funcionamento do sistema de navegação é indispensável (no sentido em que a falha do sistema coloca em perigo vidas humanas);
- Commercial Service (CS): este serviço facilitará o desenvolvimento de aplicações profissionais de valor acrescentado com prestações de navegação melhores que as disponibilizadas pelo serviço OS e permitirá a disseminação de dados adicionais encriptados;
- Public Regulated Service (PRS): será implementado com sinais encriptados particularmente resistentes a interferências (jamming, spoofing); o acesso será controlado por autoridades civis e reservado às necessidades das instituições públicas em matéria de protecção civil e segurança nacional.

## 4 Conclusões

A adopção de um sistema de navegação pela aviação civil exige o cumprimento de certos critérios rigorosos. As exigências referem-se essencialmente a três áreas: *cobertura* [coverage], *precisão* [accuracy] e *monitorização da integridade* [integrity monitoring].

(i) A **cobertura** (*disponibilidade*) de um sistema de navegação prende-se com a questão de onde e quando pode o sistema ser usado. Um sistema baseado em satélites é utilizável quando quatro ou mais satélites estiverem em linha-de-vista do utilizador. Um sistema global deve, de facto, dispor de uma constelação com dimensão tal que qualquer utilizador em qualquer momento observe o número suficiente de satélites.

(ii) A **precisão** do posicionamento exigida em aviação civil depende da fase do voo, e varia normalmente entre vários quilómetros para rotas longas e várias centenas de metros para aproximações de baixa precisão. As aproximações de precisão, executadas sob condições de má visibilidade, requerem que o sistema de navegação guie o avião até à altitude de 60 metros ou menos. Estas aproximações, correntemente executadas com equipamentos especiais instalados nos aeroportos, exigem estimativas de posicionamento muito mais precisas que as fornecidas pelos equipamentos de GPS ou Glonass isolados.

(iii) A **monitorização da integridade** refere-se à capacidade do sistema e dos seus utilizadores para detectarem o mau funcionamento do sistema com a brevidade necessária: um sistema de navegação deve ter a capacidade de fornecer aviso atempado aos utilizadores de quando não deve ser utilizado. As anomalias na integridade do sistema são raras, ocorrendo apenas algumas vezes por ano, mas podem ser críticas, especialmente em navegação aérea. As três fontes principais de problemas de integridade são: os relógios de satélite, as efemérides e a estação de controlo principal em terra.

O desempenho do Glonass em termos de precisão no posicionamento é potencialmente similar ao do GPS. No entanto, subsiste o problema da manutenção da constelação de satélites pelo governo russo o que implica a degradação do Glonass ao nível da cobertura. Tal como o GPS, o Glonass e o Galileo são candidatos a sistemas suplementares de navegação em aviação civil. Por outro lado, a combinação de dois ou mais sistemas resulta num potencial candidato a sistema único de navegação para as fases de voo terminal e em rota, e para as aproximações de baixa precisão.

Para minimizar o problema da integridade foram propostas outras soluções híbridas que passam pela associação de vários sistemas de rádio-navegação, como por exemplo a integração de GPS e de Loran-C. Embora a precisão do Loran-C (200-400 m) seja inferior à do GPS, o seu perfil de imunidade ao ruído, desvanecimento e interferência é também completamente diferente o que é uma vantagem quando utilizado em conjunto

com o GPS. Em geral, os GNSS e o sistema Loran-C parecem complementar-se bastante bem devido às suas características bem distintas, nomeadamente em termos de: a) potência dos sinais; b) frequência da portadora e c) modo de propagação das ondas.

## Referências

- [1] Tom Logsdon - *“The Navstar Global Positioning System”*, Van Nostrand Reinhold, N. York, 1992.
- [2] D. van Willingen et al., “Radio Navigation”, course ET4-022, Radio Navigation Group, Delft University of Technology, Feb. 2004.
- [3] Bill Gunston - *“Avionics. The story and technology of aviation electronics”*, Patrick Stephens Limited, U.K., 1990.
- [4] Michael S. Nolan - *“Fundamentals of Air Traffic Control”*, Wadsworth Publishing Company, Belmont, CA, 1994.
- [5] Myron Kayton and Walter Fried (eds.) - *“Avionics Navigation Systems”*, Wiley, N. York, 1997.
- [6] Elliott D. Kaplan, C. Hegarty, eds. - *“Understanding GPS. Principles and Applications”*, second edition, Artech House, Boston, MA, 2006.
- [7] J. Avila-Rodriguez et al. - “The MBOC Modulation: The Final Touch to the Galileo Frequency and Signal Plan”, *ION GPS-2007*, Fort Worth, TX, Sept. 2007, pp. 1515-1529.
- [8] “2001 Federal Radio Navigation Systems”, US Department of Transport and Department of Defense.
- [9] P. Misra, P. Enge - *Global Positioning System, Signals, Measurements, and Performance*, Ganga-Jamuna, Lincoln, MS, 2004.

## II - Sistemas de Radar

### 1 Equação do Radar

O Radar é um dispositivo que transmite sinais electromagnéticos e recebe ecos reflectidos por objectos de interesse (alvos) dentro do seu volume de cobertura. Em geral, os radares são do tipo *mono-estático* se a antena de transmissão e de recepção for única, ou *bi-estático* se as antenas forem diferentes. A Fig. 1 mostra o esquema simplificado de um radar coerente típico [1].

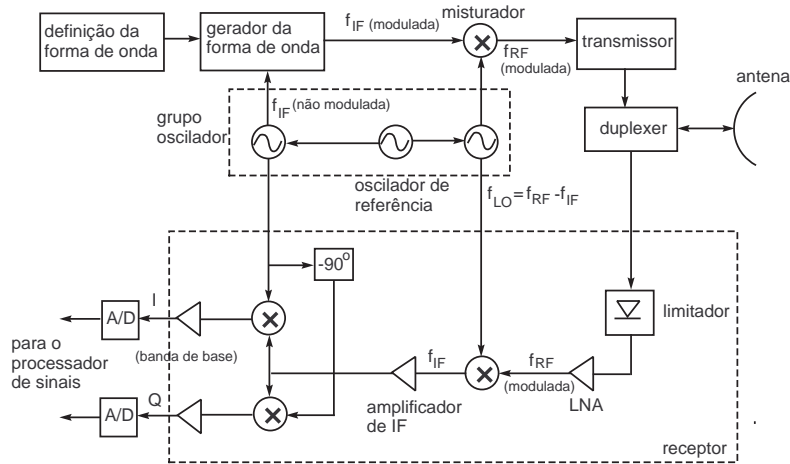


Figura 1: Diagrama de blocos simplificado de um radar de pulsos

Seja  $P_t$  a potência transmitida pelo radar,  $G$  o ganho da antena de transmissão,  $A_e$  a área eficaz da antena de recepção,  $R$  a distância do alvo ao radar e  $\sigma$  a área eficaz de reflexão do alvo (radar cross section). A potência recebida devida à reflexão das ondas electromagnéticas no alvo e retransmissão para a antena de recepção é [1], [2]

$$P_r = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 R^4} = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4 L} \quad (1)$$

em que  $L > 1$  é um factor que contabiliza o efeito de outros tipos de perdas (devidos à atmosfera, atenuação nos guias de onda, etc.). Seja  $(P_r)_{min}$  a potência mínima detectável. A distância máxima de operação do radar é

$$R_{max} = \left[ \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 L (P_r)_{min}} \right]^{1/4} \quad (2)$$

em que  $\lambda = c/f_0$  é o comprimento de onda do sinal emitido,  $c = 3 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz e  $f_0$  é a frequência da portadora. Valores típicos da área eficaz de reflexão do alvo são dados na tabela seguinte [3]

target	$\sigma$ (m <sup>2</sup> )
insecto	$10^{-5}$
pássaro	0.01
pequeno míssil	0.1
homem	1
pequeno avião	2
caça grande	10
avião comercial grande	40

A detecção é baseada num nível de limiar à saída do receptor. Se a saída do receptor exceder esse limiar, assume-se que o sinal reflectido no alvo se encontra presente. A tensão a comparar com o limiar pode ser a saída de um filtro adaptado, que é desenhado para maximizar o pico do sinal da saída relativamente ao ruído presente.

## 2 Detecção de envolvente

Consideremos o esquema da Fig. 1. O sinal transmitido é um impulso rectangular de rádio-frequência de duração  $T_p$

$$s(t) = \sqrt{2P_t} \Pi\left(\frac{t}{T_p}\right) \cos(2\pi f_0 t) \quad (3)$$

Na presença de um alvo o sinal recebido é

$$r(t) = \sqrt{2P_r} \Pi\left(\frac{t - t_d}{T_p}\right) \cos(2\pi f_0 (t - t_d)) + w(t) \quad (4)$$

em que  $w(t)$  é idealmente ruído de banda larga, gaussiano, com densidade espectral de potência  $\mathcal{N}_0/2$ .

O ruído pode ser escrito em termos das suas componentes em fase ( $n_i(t)$ ) e em quadratura ( $n_q(t)$ ) como

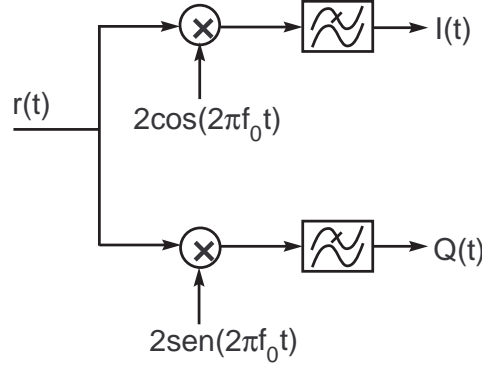


Figura 2: Heterodinagem do sinal recebido para banda de base

$$w(t) = n_i(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (5)$$

Heterodinando para banda de base obtêm-se as seguintes componentes em base e em quadratura de acordo com o esquema da Fig. 2

$$\begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2P_r} \Pi\left(\frac{t - t_d}{T_p}\right) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_i(t) \\ -n_q(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que  $\phi = 2\pi f_0 t_d$  ( $t_d$  é o tempo de ida-e-volta do sinal de radar). Por integração normalizada obtém-se

$$\begin{bmatrix} Z_i \\ Z_q \end{bmatrix} = \frac{1}{T_p} \int_{t_d - T_p/2}^{t_d + T_p/2} \begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} dt = \sqrt{2P_r} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_i \\ N_q \end{bmatrix} \quad (7)$$

em que  $N_i$  e  $N_q$  são duas v.a. gaussianas independentes com médias nulas e variâncias

$$\sigma_N^2 = E\{N_i^2\} = E\{N_q^2\} = \frac{\mathcal{N}_0}{T_p}. \quad (8)$$

$Z_i$  e  $Z_q$  são duas v.a. gaussianas independentes caracterizadas por  $Z_i \sim N(\sqrt{2P_r} \cos \phi, \sigma_N^2)$  e  $Z_q \sim N(\sqrt{2P_r} \sin \phi, \sigma_N^2)$ .

A envolvente

$$Z = \sqrt{Z_i^2 + Z_q^2} \quad (9)$$

é uma v.a com distribuição de Rice cuja fdp é dada por (ver Apêndice A)

$$p_Z(z|S > 0) = \frac{z}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{z^2 + S^2}{2\sigma_N^2}\right) I_0\left(\frac{zS}{\sigma_N^2}\right), \quad z \geq 0 \quad (10)$$



em que  $S^2 = (E\{Z_i\})^2 + (E\{Z_q\})^2 = 2P_r$  é o parâmetro de não-centralidade da distribuição e  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero [4].

Na ausência de alvo tem-se  $Z_i \sim N(0, \sigma_N^2)$  e  $Z_q \sim N(0, \sigma_N^2)$  e  $Z$  é uma v.a. com distribuição de Rayleigh com fdp dada por

$$p_Z(z|S=0) = \frac{z}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_N^2}\right), \quad z \geq 0. \quad (11)$$

As fdp  $p_Z(z|S=0)$  e  $p_Z(z|S>0)$  encontram-se esquematizadas na Fig. 3.

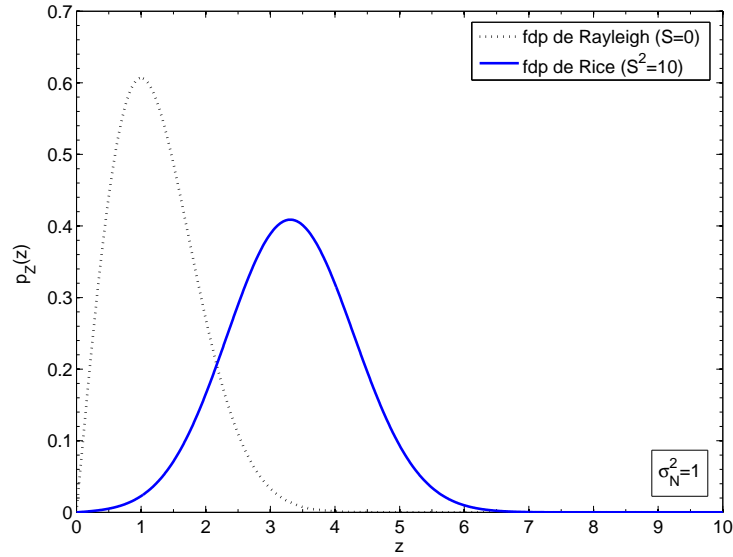


Figura 3: Funções densidade de probabilidade de Rayleigh e de Rice

A operação de detecção do alvo supõe a definição de uma tensão de limiar  $V_{th}$  e o seguinte critério de decisão

$$\begin{cases} Z < V_{th}, & \text{alvo ausente} \\ Z > V_{th}, & \text{alvo presente} \end{cases} \quad (12)$$

A probabilidade de detecção correcta do alvo é

$$\begin{aligned} P_d &= \text{prob}\{Z > V_{th}|S > 0\} \\ &= \int_{V_{th}}^{\infty} p_Z(z|S > 0) dz = Q\left(\frac{S}{\sigma_N}, \frac{V_{th}}{\sigma_N}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$= Q \left( \sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}_0}}, V_{th} \sqrt{\frac{T_p}{\mathcal{N}_0}} \right).$$

em que  $E_p = P_r T_p$  é a energia do impulso recebido e  $Q(\cdot, \cdot)$  é a função Q de Marcum (vide Apêndice A).

A probabilidade de falso alarme (detecção incorrecta do alvo na sua ausência) é dada por

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \text{prob}\{Z > V_{th} | S = 0\} \\ &= \int_{V_{th}}^{\infty} p_Z(z | S = 0) dz = \exp \left( -\frac{V_{th}^2}{2\sigma_N^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

A Fig. 4 mostra as probabilidades de detecção correcta do alvo para diversos valores de  $P_{fa}$  em função de  $E_p/\mathcal{N}_0$ .

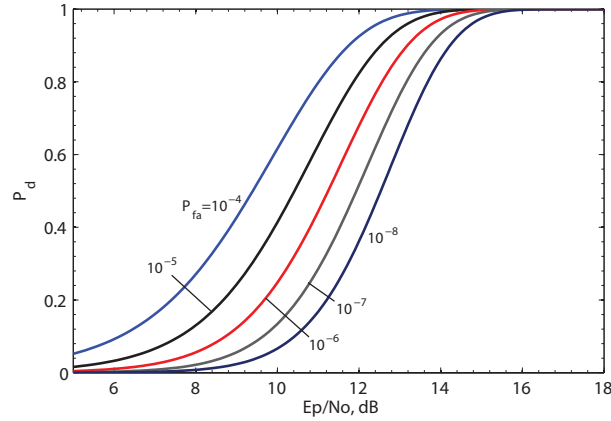


Figura 4: Probabilidades de detecção correcta do alvo para diferentes valores da probabilidade de falso alarme

Valores elevados de  $V_{th}$  conduzem a baixas probabilidades de falso alarme mas as probabilidades de detecção correcta do alvo virão igualmente diminuídas.

Em geral, o valor de  $V_{th}$  é escolhido em função da probabilidade de falso alarme admissível (critério de Neyman-Pearson), isto é

$$V_{th} = \sqrt{-2\sigma_N^2 \ln(P_{fa})} \quad (15)$$

que substituindo em (13) dá

$$P_d = Q \left( \sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}_0}}, \sqrt{-2 \ln(P_{fa})} \right) \quad (16)$$

O critério de Neyman-Pearson consiste em:

- Escolher uma probabilidade de falso alarme aceitável ( $P_{fa}$ ).
- Determinar a probabilidade de detecção correcta através de (16).

Exemplo:

Seja  $\mathcal{N}_0 = 10^{-14}$  W/Hz,  $P_r = 2 \times 10^{-8}$  W/Hz,  $T_p = 10^{-5}$  s e  $P_{fa} = 10^{-5}$ . Determinar a probabilidade de detecção correcta do alvo.

Solução:  $P_d = Q(6.32, 4.80) = 0.946$ .

### 3 Técnicas de detecção multi-impulso

Por forma a diminuir a probabilidade de falso alarme, vários impulsos podem ser combinados antes de uma decisão ser tomada. Algumas das técnicas são as seguintes [1]:

- *Integração coerente*, na qual os impulsos são adicionados antes da detecção de envolvente.
- *Integração não-coerente*, na qual a envolvente de cada impulso é determinada e os resultados são adicionados antes da operação de decisão.
- *Integração binária*, na qual cada impulso é comparado com um limiar e o número  $M$  de cruzamentos do limiar de detecção é usado como critério de decisão.
- *Detecção cumulativa*, caso particular da técnica anterior em que  $M = 1$  é o critério de decisão.

Por exemplo, considere-se a técnica de integração binária em que o critério de decisão é baseado em, pelo menos,  $M$  detecções em  $N$  tentativas, com  $N > M$ . A probabilidade de se ter exactamente  $k$  detecções em  $N$  tentativas é

$$P_d(k, N) = \binom{N}{k} P_d^k (1 - P_d)^{N-k} \quad (17)$$

em que  $P_d$  é a probabilidade de detecção correcta do alvo em cada tentativa, e a probabilidade global de detecção correcta do alvo é

$$\tilde{P}_d = \sum_{k=M}^N \binom{N}{k} P_d^k (1 - P_d)^{N-k}. \quad (18)$$

De forma análoga, a probabilidade global de falso alarme é dada por

$$\tilde{P}_{fa} = \sum_{k=M}^N \binom{N}{k} P_{fa}^k (1 - P_{fa})^{N-k} \quad (19)$$

em que  $P_{fa}$  é a probabilidade de falso alarme para uma única tentativa.

Na Fig. 5 esquematiza-se as probabilidades de detecção correcta do alvo usando integração binária com  $N = 5$  tentativas e probabilidade de falso alarme por tentativa  $P_{fa} = 10^{-5}$ .

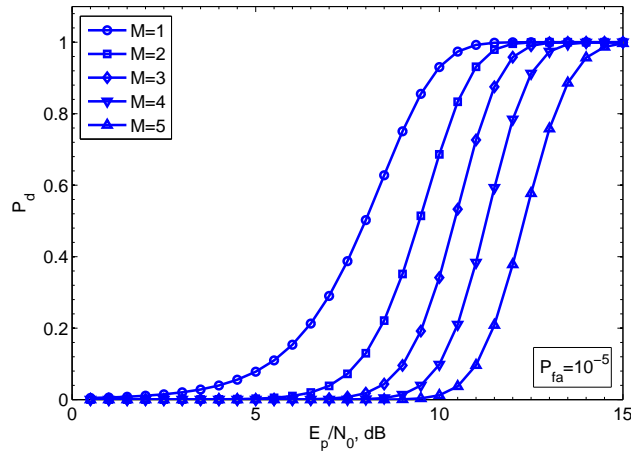


Figura 5: Probabilidades de detecção correcta do alvo usando detecção multi-impulso com  $N = 5$  tentativas e  $P_{fa} = 10^{-5}$

As probabilidades globais correspondentes de falso alarme são:

$$M = 1; \quad \tilde{P}_{fa} = 5 \times 10^{-5}$$

$$M = 2; \quad \tilde{P}_{fa} = 10^{-9}$$

$$M = 3; \quad \tilde{P}_{fa} = 10^{-14}$$

$$M = 4; \quad \tilde{P}_{fa} = 5 \times 10^{-20}$$

$$M = 5; \quad \tilde{P}_{fa} = 10^{-25}$$

Estes resultados mostram que, embora para uma determinada relação sinal-ruído, as probabilidades de detecção correcta do alvo diminuam com a detecção multi-impulso, este inconveniente é mais do que compensado pela diminuição muito significativa das probabilidades de falso alarme.

## 4 Função de ambiguidade

Nesta secção consideramos o problema do processamento do sinal reflectido por um alvo que se move relativamente ao receptor. Assume-se que o sinal transmitido pelo radar é de banda estreita, podendo ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \text{Re}\{s(t)\} &= \text{Re}\{u(t) \exp(j2\pi f_0 t)\} \\ &= \text{Re}\{u(t)\} \cos(2\pi f_0 t) - \text{Im}\{u(t)\} \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (20)$$

em que  $u(t)$  é a envolvente complexa do sinal passa-banda. Assume-se que o sinal recebido (eco) é igual ao sinal transmitido excepto quanto ao atraso  $t_d$  (tempo de ida-e-volta) e ao desvio de frequência Doppler  $f_d$  devido ao movimento relativo alvo-receptor.

O desvio de frequência Doppler é definido como a diferença entre a frequência recebida e a frequência transmitida

$$f_d = f_R - f_T \quad (21)$$

Desprezando efeitos de segunda ordem (relativísticos, acelerações, etc.) o desvio de frequência encontra-se relacionado com a variação da distância radar-alvo  $\dot{R}$  através de [3]

$$f_d = -\frac{2\dot{R}}{\lambda} = -f_T \frac{2\dot{R}}{c} \quad (22)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz.

O sinal recebido é da forma

$$\text{Re}\{s_r(t)\} = \text{Re}\{u(t - t_d) \exp[j2\pi(f_0 + f_d)(t - t_d)]\}. \quad (23)$$

Ignoramos aqui a mudança de amplitude do sinal reflectido e assumimos que o filtro se encontra adaptado à réplica do sinal transmitido, de acordo com [5]

$$y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} s_r(t) s^*(t - \alpha) dt \quad (24)$$

Logo

$$y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - T_d) u^*(t - \alpha) \exp \{j2\pi[(f_0 + f_d)(t - t_d) - f_0(t - \alpha)]\} dt \quad (25)$$

ou fazendo

$$\tau = t - t_d \quad \text{and} \quad t_e = \alpha - t_d \quad (26)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} y(t_e) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t_e) \exp \{j2\pi[(f_0 + f_d)\tau - f_0(\tau - t_e)]\} d\tau \\ &= \exp(j2\pi f_0 t_e) \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)^*(\tau - t_e) \exp(j2\pi f_d \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

A função

$$\chi(t_e, f_d) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u^*(\tau - t_e) \exp(j2\pi f_d \tau) d\tau \quad (28)$$

resume convenientemente a resposta do filtro adaptado a um alvo pontual que se encontra atrasado ou apresenta um desvio Doppler relativamente ao alvo esperado para o qual o filtro se encontra ajustado [1].

A função  $|\chi(t_e, f_d)|^2$  é, em geral, designada de *função de ambiguidade* do radar [6]. Nalguns livros designa-se por função de ambiguidade a quantidade  $|\chi(t_e, f_d)|$  [3] ou  $\chi(t_e, f_d)$  [5]. Se o radar se encontrar adaptado (ajustado) para um dado par distância e velocidade relativa do alvo, a observação da função de ambiguidade  $|\chi(t_e, f_d)|^2$  permite determinar qual é a capacidade do radar para distinguir dois alvos próximos entre si e/ou com frequências Doppler semelhantes (i.e., velocidades semelhantes). Tal explica a razão do termo função de ambiguidade.

Considere-se que o impulso  $u(t)$  se encontra normalizado de tal forma que, quando o alvo apresenta a posição e velocidade esperadas ( $t_e = 0$ ,  $f_d = 0$ ), se tem

$$\chi(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)|^2 d\tau = 1 \quad (29)$$

Verificam-se as seguintes propriedades:

- Quando o alvo detectado não se encontra na posição/velocidade esperadas, a função de ambiguidade é

$$0 \leq |\chi(\tau, \nu)| \leq 1 \quad (30)$$

- O integral de  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  é a unidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = 1 \quad (31)$$

- A função  $|\chi(\tau, \nu)|$  exibe simetria em torno da origem

$$|\chi(-\tau, -\nu)| = |\chi(\tau, \nu)| \quad (32)$$

Fixando uma das variáveis  $\tau$  ou  $\nu$  obtêm-se duas novas funções. Fazendo  $\nu = 0$  conduz ao *delay cut*

$$|\chi(\tau, 0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u^*(t - \tau) dt \right|^2 = |R(\tau)|^2 \quad (33)$$

em que  $R(\tau)$  é a função de autocorrelação temporal de  $u(t)$ .

Fazendo  $\tau = 0$  obtém-se o *Doppler cut*

$$|\chi(0, \nu)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \exp(j2\pi\nu t) dt \right|^2 \quad (34)$$

isto é,  $|\chi(0, \nu)|^2$  depende apenas da envolvente complexa  $|u(t)|$  do sinal transmitido.

## 4.1 impulso monocromático

Considere-se o sinal

$$s(t) = \text{Re}\{u(t) \exp(j2\pi f_0 t)\} \quad (35)$$

em que  $u(t)$  é um impulso rectangular de duração  $T_p$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t}{T_p}\right). \quad (36)$$

Obtém-se [6]

$$\begin{aligned} \chi(t_e, f_d) &= \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\tau}{T_p}\right) \Pi\left(\frac{\tau - t_e}{T_p}\right) \exp(j2\pi f_d \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{t_e + T_p/2} \exp(j2\pi f_d \tau) d\tau, & -T_p < t_e \leq 0 \\ \frac{1}{T_p} \int_{t_e - T_p/2}^{T_p/2} \exp(j2\pi f_d \tau) d\tau, & 0 \leq t_e < T_p \\ 0, & |t_e| \geq T_p \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

ou,

$$|\chi(t_e, f_d)|^2 = \Lambda^2\left(\frac{t_e}{T_p}\right) \text{sinc}^2\left[f_d T_p \Lambda\left(\frac{t_e}{T_p}\right)\right] \quad (38)$$

em que  $\Lambda(\cdot)$  é a função triângulo definida por

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T. \end{cases} \quad (39)$$

A função de ambiguidade (38) encontra-se esquematizada na Fig. 6.

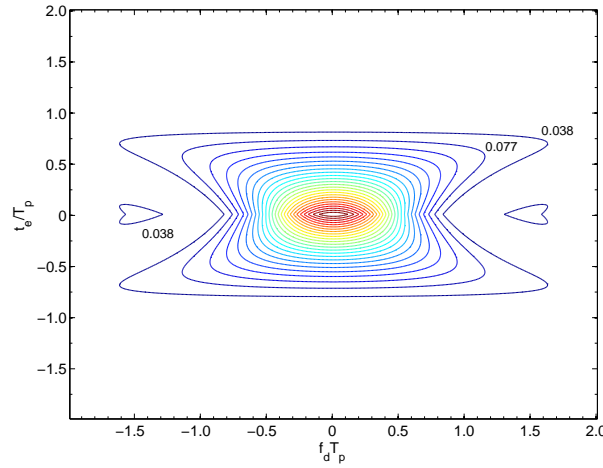


Figura 6: Contornos da função de ambiguidade para o impulso rectangular

O “corte” da função de ambiguidade para  $f_d = 0$  é

$$|\chi(t_e, 0)|^2 = \Lambda^2\left(\frac{t_e}{T_p}\right) \quad (40)$$

e para  $t_e = 0$  é

$$|\chi(0, f_d)|^2 = \text{sinc}^2(f_d T_p) \quad (41)$$

Logo, a região de ambiguidade no domínio do tempo é  $-T_p \leq t_e \leq T_p$  e na frequência é  $-1/T_p \leq f_d \leq 1/T_p$  (considerou-se o intervalo limitado ao lobo principal da função  $\text{sinc}^2(\cdot)$ ). Estes valores dão uma ideia da resolução do radar em termos da distância mínima entre dois alvos próximos e a diferença mínima de velocidades entre eles.

Como a função de ambiguidade é nula para  $|t_e| > T_p$ , em que  $t_e$  é a diferença entre os tempos de ida-e-volta de dois alvos próximos, a distância mínima entre eles é

$$\delta d = \frac{cT_p}{2} \quad (42)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz. Por exemplo, um impulso de duração  $T_p = 1 \mu s$  permite identificar alvos pontuais estáticos separados por distâncias de, pelo menos, 150 metros.

A resolução em termos da diferença de velocidades  $\delta v$  entre os alvos é dada por



$$\delta f_d = \frac{\delta v}{c} f_0. \quad (43)$$

Logo

$$\delta v = \frac{c}{f_0} \frac{1}{T_p} = \frac{\lambda}{T_p} \quad (44)$$

em que  $\lambda = c/f_0$  é o comprimento de onda da portadora do radar.

A resolução do radar aumenta quando a área em que  $|\chi(t_e, f_d)|^2$  é significativamente maior que zero diminui. Idealmente dever-se-ia ter  $|\chi(0, 0)|^2 = 1$  e  $|\chi(t_e, f_d)|^2 = 0$  para  $(t_e, f_d) \neq (0, 0)$ . Na prática, tal não é possível devido a (31).

Note-se que as funções (40) e (41) podem ser tão estreitas quanto desejável, através de uma conveniente mudança da duração do impulso  $T_p$ . No entanto, não é possível fazer as duas funções arbitrariamente estreitas ao mesmo tempo. As equações (42) e (44) mostram que as resoluções na distância e na velocidade não são independentes: quando  $T_p$  diminui a resolução na distância melhora mas a resolução na velocidade degrada-se.

Em conclusão: com impulsos rectangulares constantes na frequência não é possível ter-se simultaneamente boas resoluções na distância e na derivada da distância (velocidade). De seguida, iremos considerar sinais que permitem minimizar este problema.

## 4.2 impulso modulado linearmente em frequência

Considere-se um impulso cuja frequência varia linearmente com o tempo (sinal *chirp*)

$$s(t) = \text{Re}\{u(t) \exp(j2\pi f_0 t)\}$$

com

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T_p}} \Pi\left(\frac{t}{T_p}\right) \exp(j\pi\gamma t^2) \quad (45)$$

e frequência instantânea variável

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_0 t + \pi\gamma t^2) \\ &= f_0 + \gamma t. \end{aligned} \quad (46)$$

A transformada de Fourier de  $u(t)$  é dada por [7]

$$U(f) = \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \exp\left[-j\pi \frac{(f - f_0)^2}{\gamma}\right] [Z(u_2) - Z(u_1)] \quad (47)$$

em que  $Z(u)$  é o integral complexo de Fresnel

$$Z(u) = C(u) + jS(u) = \int_0^u \exp\left(j\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad (48)$$

e os argumentos  $u_1$  e  $u_2$  são definidos por

$$u_1 = -2(f - f_0)\sqrt{\frac{T_p}{2\Delta}} - \sqrt{\frac{T_p\Delta}{2}} \quad (49)$$

$$u_2 = -2(f - f_0)\sqrt{\frac{T_p}{2\Delta}} + \sqrt{\frac{T_p\Delta}{2}}. \quad (50)$$

A quantidade  $\Delta$ , definida por

$$\Delta = \gamma T_p \quad (51)$$

é a mudança da frequência instantânea durante o impulso de duração  $T_p$ . A quantidade não dimensional

$$D = T_p\Delta \quad (52)$$

é designada de *factor de dispersão*. A Fig. 7 apresenta gráficos da magnitude normalizada do espectro

$$\sqrt{\Delta}|U(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \{[C(u_2) - C(u_1)]^2 + [S(u_2) - S(u_1)]^2\}^{1/2} \quad (53)$$

para diferentes valores de  $D$ . A figura mostra que em qualquer caso a largura de banda do sinal  $s(t)$  é bem aproximada por

$$B_{RF} \approx \Delta = \gamma T_p. \quad (54)$$

A função de ambiguidade para o impulso com modulação linear de frequência é dada por [1], [5]

$$\begin{aligned} |\chi(t_e, f_d)|^2 &= \Lambda^2 \left(\frac{t_e}{T_p}\right) \text{sinc}^2 \left[ f_d T_p \Lambda \left(\frac{t_e}{T_p}\right) \left(1 + \gamma \frac{t_e}{f_d}\right) \right] \\ &= \Lambda^2 \left(\frac{t_e}{T_p}\right) \text{sinc}^2 \left[ \Lambda \left(\frac{t_e}{T_p}\right) \left(f_d T_p + D \frac{t_e}{T_p}\right) \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

O Doppler cut é

$$|\chi(0, f_d)|^2 = \text{sinc}^2(f_d T_p) \quad (56)$$

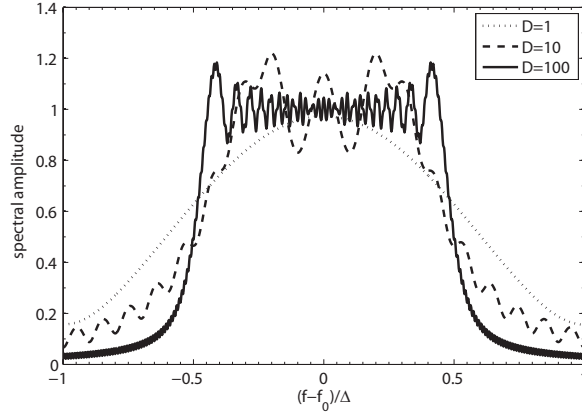


Figura 7: Magnitude do espectro do sinal chirp para vários valores de  $D$

sendo igual ao do impulso monocromático. O delay cut é

$$|\chi(t_e, 0)|^2 = \Lambda^2 \left( \frac{t_e}{T_p} \right) \text{sinc}^2 \left[ D \frac{t_e}{T_p} \Lambda \left( \frac{t_e}{T_p} \right) \right]. \quad (57)$$

Para  $D \gg 1$  a função anterior pode ser bem aproximada por

$$|\chi(t_e, 0)|^2 \approx \text{sinc}^2 \left( D \frac{t_e}{T_p} \right) \quad (58)$$

e a posição do primeiro nulo positivo é

$$D \frac{t_e}{T_p} = 1 \rightarrow t_e = \frac{T_p}{D} \quad (59)$$

o que contrasta com a posição correspondente do impulso monocromático que é  $t_e = T_p$ . Isto é, a região de ambiguidade para  $f_d = 0$  passou de  $|t_e| \leq T_p$  no impulso monocromático para  $|t_e| \leq T_p/D$  no impulso chirp. Em termos da resolução espacial passamos de  $\delta d = cT_p/2$  (impulso monocromático) para  $\delta d = cT_p/(2D) = c/(2\Delta)$  (impulso chirp). Este resultado é muito importante e mostra que é possível melhorar a resolução espacial de acordo com

$$\frac{\delta d_{monoc}}{\delta d_{chirp}} = \frac{T_p/2}{1/(2\Delta)} = \Delta T_p = D \quad (60)$$

sem ser necessário reduzir a duração do impulso transmitido. Note-se que a detectabilidade dos sinais recebidos na presença de ruído, depende da energia do impulso, pelo que é tecnologicamente complicado manter a energia do impulso quando a sua duração é reduzida, devido ao insustentável aumento da potência do sinal transmitido. A técnica que consiste no aumento da largura de banda por intermédio da modulação de frequência, o que permite melhorar a resolução espacial do radar, é chamada *pulse*

*compression* (compressão de impulsos). Esta designação é devida ao facto de o mesmo resultado ser obtido usando um impulso monocromático com duração reduzida para  $T_p/D$  (impulso comprimido).

Pode mostrar-se que, se a largura de banda do impulso aumentar de  $1/T_p$  para  $B > 1/T_p$  através de virtualmente qualquer tipo de modulação (tal como FM não-linear ou codificação de fase), obtém-se uma técnica de compressão de impulsos pelo factor  $BT_p$  [1].

### 4.3 trém de impulsos coerentes

Considere-se agora o conjunto de  $N$  impulsos rectangulares monocromáticos coerentes

$$s(t) = \text{Re}\{u(t) \exp(j2\pi f_0 t)\}$$

com

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{NT_p}} \sum_{n=0}^{N-1} \Pi\left(\frac{t - nT_R}{T_p}\right) \quad (61)$$

em que  $T_R$  é o intervalo de repetição dos impulsos e cada impulso tem duração  $T_p$  com  $T_R \gg T_p$ , como se indica na Fig. 8.

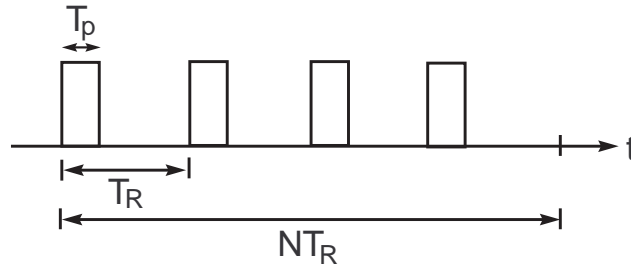


Figura 8: Trém de  $N$  impulsos rectangulares

Defina-se

$$\text{sind}(N, x) = \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)}, \quad \text{sind}(N, 0) = N \quad (62)$$

Tem-se [1]

$$|\chi(t_e, f_d)|^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \quad (63)$$

$$\left\{ \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \Lambda\left(\frac{t_e - pT_R}{T_p}\right) \text{sinc}\left[f_d T_p \Lambda\left(\frac{t_e - pT_R}{T_p}\right)\right] \cdot \text{sind}[(N - |p|), \pi f_d T_R] \right\}^2$$

Esta função de ambiguidade é representada na Fig. 9 para  $N = 5$  e  $T_R/T_p = 5$ .

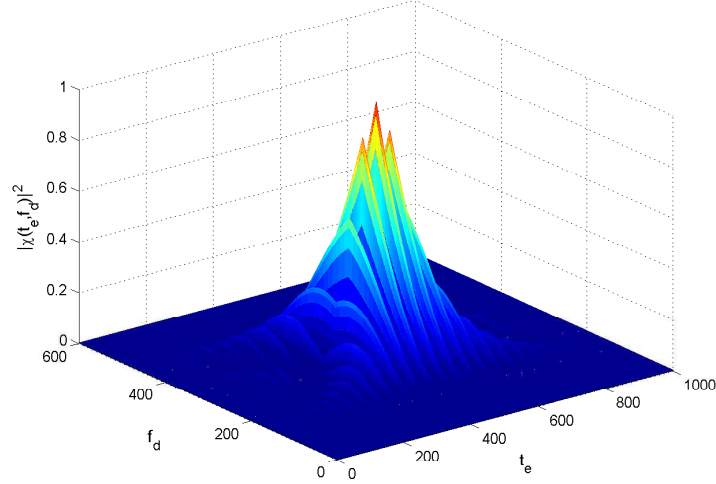


Figura 9: Função de ambiguidade para um trém de  $N = 5$  impulsos monocromáticos com  $T_R = 5T_p$

O delay cut é

$$|\chi(t_e, 0)|^2 = \left[ \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) \Lambda\left(\frac{t_e - pT_R}{T_p}\right) \right]^2 \quad (64)$$

e encontra-se representado na Fig. 10 para  $N = 5$  e  $T_R/T_p = 5$ . Por conseguinte, o delay cut é igual a um conjunto de  $2N - 1$  réplicas do delay cut para o impulso monocromático de duração  $T_p$ . Em torno de  $t_e = 0$  o delay cut é semelhante ao do impulso monocromático. Isto é, a resolução espacial é semelhante à do impulso isolado.

O Doppler cut da função de ambiguidade é

$$\begin{aligned} |\chi(0, f_d)|^2 &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \Lambda\left(p \frac{T_R}{T_p}\right) \text{sinc}\left[f_d T_p \Lambda\left(p \frac{T_R}{T_p}\right)\right] \text{sind}[(N - |p|), \pi f_d T_R] \right\}^2 \\ &= \left[ \frac{1}{N} \text{sinc}(f_d T_p) \text{sind}(N, \pi f_d T_R) \right]^2 \end{aligned} \quad (65)$$

encontrando-se representado na Fig. 11 para  $N = 5$  e  $T_R/T_p = 5$ .

Como  $T_R \gg T_p$ , a função  $\text{sind}(\cdot)$  tende para zero mais rapidamente que a função  $\text{sinc}(\cdot)$  levando a

$$|\chi(0, f_d)|^2 \approx \frac{1}{N^2} \text{sind}^2(N, \pi f_d T_R) \quad (66)$$

A posição do primeiro nulo positivo na função anterior corresponde a  $\sin^2(\pi f_d N T_R) = 0$ ; isto é

$$f_d = \frac{1}{N T_R}. \quad (67)$$

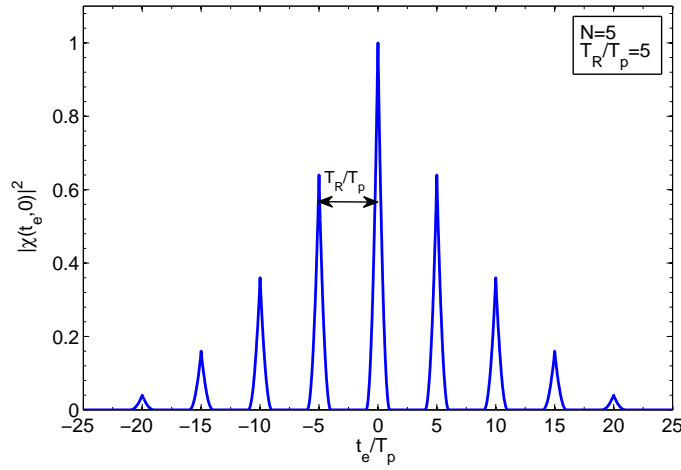


Figura 10: Delay cut para um trém de impulsos monocromáticos ( $N = 5$  e  $T_R = 5T_p$ ) com  $f_d = 0$

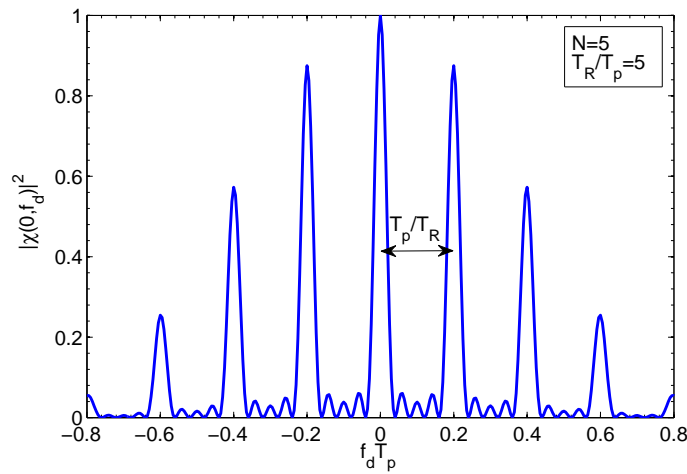


Figura 11: Doppler cut para um trém de impulsos monocromáticos ( $N = 5$  e  $T_R = 5T_p$ ) com  $t_e = 0$

Este resultado mostra que a resolução no domínio da frequência é controlada pela duração total do trem de impulsos ( $NT_R$ ). Note-se que, ao contrário do impulso monocromático, onde as resoluções no tempo (distância) e na frequência (velocidade) eram mutuamente dependentes (através da duração do impulso  $T_p$ ), no caso de um trem de impulsos podemos seleccionar independentemente as resoluções no tempo e na frequência [2]. Este privilégio é obtido à custa da geração de picos adicionais na função de ambiguidade.

A Fig. 12 mostra um corte do gráfico de contornos da função de ambiguidade contendo o pico principal e três picos adjacentes. A separação entre as linhas e colunas de picos depende apenas do parâmetro  $T_R$  enquanto que a largura do pico principal ao longo do eixo do tempo depende de  $T_p$  e a largura segundo o eixo da frequência depende de  $NT_R$ . Estas duas últimas quantidades podem ser ajustadas independentemente.

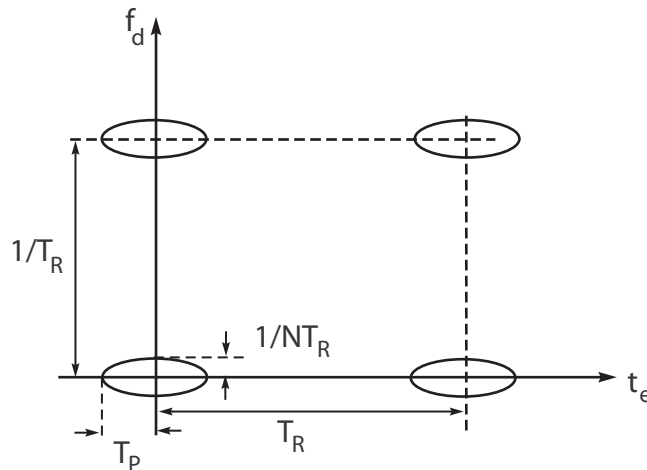


Figura 12: Secção do gráfico de contornos da função de ambiguidade para um trem de impulsos coerentes

## 5 Precisão das medições de radar

Na secção anterior debruçámo-nos sobre a capacidade do sistema de radar para separar dois alvos com distâncias e/ou velocidades próximas. Aqui, vamos considerar o problema da precisão espacial, i.e., qual a precisão que uma estimativa da distância pode atingir. Considere-se que o sinal de radar transmitido é  $s(t)$ , o atraso de ida-e-volta do transmissor para o alvo e volta é  $\tau_0 = 2R/c$ , em que  $R$  é a distância e  $c$  é a velocidade de propagação. O sinal recebido é

$$x(t) = s(t - \tau_0) + w(t) \quad (68)$$

em que  $w(t)$  é ruído aditivo gaussiano (AWGN) com densidade espectral de potência  $\mathcal{N}_0/2$ . Assume-se que o impulso transmitido é diferente de zero no intervalo  $[0, T_p]$ . Considera-se que o sinal é essencialmente limitado na frequência á largura de banda  $B$  Hz. Usando o limite inferior de Cramer-Rao (CRLB), pode mostrar-se que a variância da estimativa  $\hat{\tau}_0$  é dada por [8], [10]

$$\text{var}(\hat{\tau}_0) \geq \frac{\mathcal{N}_0}{2 \int_0^{T_p} \left( \frac{ds(t)}{dt} \right)^2 dt} \quad (69)$$

Dado que

$$E_p = \int_0^{T_p} s^2(t) dt \quad (70)$$

é a energia do sinal, resulta

$$\text{var}(\hat{\tau}_0) \geq \frac{\mathcal{N}_0}{2E_p \overline{F^2}} \quad (71)$$

onde

$$\overline{F^2} = \frac{\int_0^{T_p} \left( \frac{ds(t)}{dt} \right)^2 dt}{\int_0^{T_p} s^2(t) dt} \quad (72)$$

é a *largura de banda quadrática média* do sinal  $s(t)$ . Usando as propriedades da transformada de Fourier (TF) demonstra-se que

$$\overline{F^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} \quad (73)$$

em que  $S(f)$  designa a TF de  $s(t)$ . Finalmente, tendo em conta que  $R = c\tau_0/2$ , o CRLB para o erro quadrático médio da distância é

$$\text{var}(\hat{R}) \geq \frac{c^2}{8(E_p/\mathcal{N}_0)\overline{F^2}} \quad (74)$$

Este resultado mostra que a precisão espacial depende da relação sinal-ruído  $2E_p/\mathcal{N}_0$ , com esperado, mas também da largura de banda quadrática média do sinal  $s(t)$ .

Na prática, não é possível usar larguras de banda infinitas, como considerado em (73). Sistemas práticos usam larguras de banda finitas  $B$ , tais que (em banda de base)

$$\overline{F^2} = \frac{\int_{-B}^B (2\pi f)^2 |S(f)|^2 df}{\int_{-B}^B |S(f)|^2 df} \quad (75)$$

Exemplo:



Considere um impulso rectangular de duração  $T_p$  e um sistema de banda limitada com  $BT_p \gg 1$ . Determine a largura de banda quadrática média correspondente e o erro rms de distância mínimo.

Solução:

A largura de banda quadrática média truncada é

$$\overline{F^2} = \frac{4\pi^2 T_p^2 \int_{-B}^B f^2 \text{sinc}^2(fT_p) df}{T_p^2 \int_{-B}^B \text{sinc}^2(fT_p) df} = \frac{4B}{T_p} \quad (76)$$

O erro de distância rms é

$$\sqrt{\text{var}(\hat{R})} \geq \frac{c}{2\sqrt{2(E_p/N_0)\overline{F^2}}} = \frac{c}{4} \sqrt{\frac{T_p}{2(E_p/N_0)B}} \quad (77)$$

Alguns resultados são mostrados na Fig. 13.

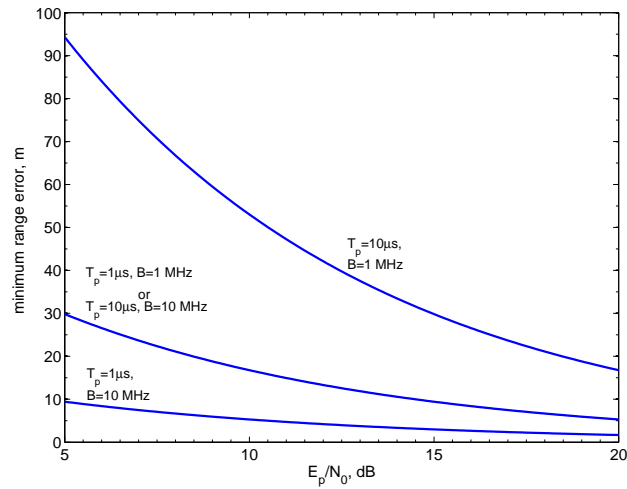


Figura 13: Erros mínimos de distância rms para um impulso rectangular

## A Distribuições de Rice/Rayleigh

A variável aleatória (v.a.)  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , onde  $X$  e  $Y$  são v.a. gaussianas com médias  $m_1 = E\{X\}$  e  $m_2 = E\{Y\}$  variância comum  $\sigma^2$ , apresenta uma distribuição de Rice com função densidade de probabilidade (pdf) [11]

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + S^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rS}{\sigma^2}\right), \quad r \geq 0 \quad (78)$$

em que  $S^2 = m_1^2 + m_2^2$  é o parâmetro de não-centralidade e  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, a qual pode ser calculada de acordo com [4]

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos \theta) d\theta \quad (79)$$

O mmomento de ordem  $k$  de  $R$  é [11]

$$E\{R^k\} = (2\sigma^2)^{k/2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{k}{2} + 1, 1; \frac{S^2}{2\sigma^2}\right) \quad (80)$$

em que [4]

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (81)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (82)$$

e  ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$  é a função hipergeométrica confluyente dada por [4]

$${}_1F_1(\alpha, \beta; x) = 1 + \frac{\alpha x}{\beta} + \frac{(\alpha)_2 x^2}{(\beta)_2 2!} + \cdots + \frac{(\alpha)_n x^n}{(\beta)_n n!} + \cdots \quad (83)$$

em que

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1), \quad (\alpha)_0 = 1 \quad (84)$$

A função cumulativa de  $R$  é

$$F_R(r) = \int_0^r p_R(\rho) d\rho = 1 - Q\left(\frac{S}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right), \quad r \geq 0 \quad (85)$$

em que  $Q(\alpha, \beta)$  é a função Q de Marcum obtida por

$$\begin{aligned} Q(a, b) &= \int_b^\infty x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax) dx \\ &= 1 - \int_0^b x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax) dx. \end{aligned} \quad (86)$$

Como casos particulares temos  $Q(a, 0) = 1$  e  $Q(0, b) = \exp(-b^2/2)$ .

A fdp de Rayleigh  $R$  é um caso particular da fdp de Rice em que  $m_1 = m_2 = 0$ . Obtém-se

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0 \quad (87)$$

com momentos dados por

$$E\{R^k\} = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \quad (88)$$

e a variância é

$$\sigma_R^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \quad (89)$$

A função cumulativa é

$$F_R(r) = \int_0^r \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0 \quad (90)$$

## Referências

- [1] R. Sullivan, *“Microwave Radar, Imaging and Advanced Concepts”*, Artech, Norwood, MA, 2000.
- [2] M. Skolnik, *“Introduction to Radar Systems”*, 2.nd edition, McGraw-Hill, 1980.
- [3] N. Levanon, *“Radar Principles”*, Wiley, N. York, 1988.
- [4] M. Abramowitz, I. Stegun, *“Handbook of Mathematical Functions”*, Dover, N. York, 1970.
- [5] A. Rihaczek, *“High-Resolution Radar”*, Artech, Norwood, MA, 1996.
- [6] H. van Trees, *“Detection, Estimation, and Modulation Theory”*, Part III, Wiley, 2001.
- [7] J. Klauder, A. Price, S. Darlington, W. Albersheim, *The Theory and Design of Chirp Radars*, Bell System Technical Journal, vol. 39, no. 4, pp. 745-809, July 1960.
- [8] S. Kay, *“Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory”*, Prentice-Hall, 1993.

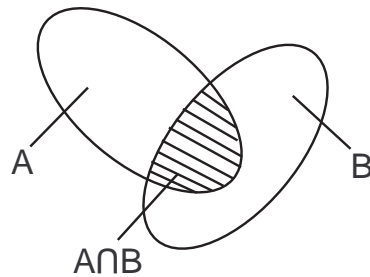
- [9] J. Melsa and D. Cohen, “*Decision and Estimation Theory*”, McGraw-Hill, Tokyo, 1978.
- [10] H. van Trees, “*Detection, Estimation, and Modulation Theory*”, Part 1, Wiley, 1968.
- [11] J. Proakis, “*Digital Communications*”, McGraw-Hill, fourth edition, Boston, 2001.

### III - Estimação de parâmetros

#### 1 Probabilidades conjuntas e condicionais

A probabilidade conjunta dos acontecimentos A e B é

$$P\{AB\} \equiv P\{A \cap B\} \quad (1)$$



Se os acontecimentos forem mutuamente exclusivos (disjuntos) tem-se

$$P\{AB\} = P\{\phi\} = 0 \quad (2)$$

A probabilidade da reunião dos acontecimentos A e B é

$$P\{A \cup B\} = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3)$$

Generalizando, a probabilidade da reunião de  $n$  acontecimentos é dada por

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 A_2) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) + \dots + P(A_n \cap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i) \quad (4)$$

em que  $\overline{A}_i$  designa o complemento (não ocorrência) do acontecimento  $A_i$ .

Frequentemente a probabilidade de ocorrência de um acontecimento B depende da ocorrência do acontecimento A. Designemos por  $P(B|A)$  a probabilidade de ocorrência (probabilidade condicional) do acontecimento B dado que o acontecimento A ocorreu. Tem-se

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0 \quad (5)$$

Tem-se igualmente

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 \quad (6)$$

pelo que, de (5) e (6) resulta

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad (7)$$

Trata-se da *fórmula, teorema ou regra de Bayes*. Para as funções densidade de probabilidade tem-se de forma análoga

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x)p(x) dx} \quad (8)$$

Se os acontecimentos A e B forem independentes obtém-se

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \quad (9)$$

A *regra de cadeia* permite calcular a probabilidade de vários acontecimentos conjuntos

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) \quad (10)$$

Se  $B_1, B_2, \dots, B_m$  for um conjunto de acontecimentos mutuamente exclusivos e exaustivos chega-se a

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j)P(B_j), \quad \sum_{j=1}^m P(B_j) = 1 \quad (11)$$

## 2 Estimação de máxima verosimilhança

Dado um parâmetro  $\theta$  e uma (ou mais) observações ruidosas do mesmo,  $z$ , a *regra* usada para determinar (estimar)  $\theta$  a partir de  $z$  chama-se *estimador*. O resultado é a *estimativa*  $\hat{\theta}$ .

### Exemplo 1:

Seja o parâmetro  $\theta$  e o conjunto de observações  $z_i = \theta + n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , em que  $n_i$  são ruídos gaussianos independentes de média nula e de variância  $\sigma^2$ .

Existem vários métodos para estimar  $\theta$ . Por exemplo:

- $\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$
- $\hat{\theta} = \frac{1}{2}[\min\{z_i\} + \max\{z_i\}]$ .

Iremos de seguida analisar alguns tipos de estimadores começando pela estimação de máxima verosimilhança.

Na estimação de máxima verosimilhança (ML=maximum likelihood) a função densidade de probabilidade das observações  $z$  dado o parâmetro desconhecido  $\theta$ , isto é,  $p(z|\theta)$ , é considerada conhecida mas não é necessário conhecer a função densidade de probabilidade de  $\theta$ .

A estimativa ML é definida pelo seguinte critério. Para o vector de observações  $z$ ,  $\hat{\theta}_{ML}$  é a estimativa ML de  $\theta$  se

$$p(z|\hat{\theta}_{ML}) \geq p(z|\hat{\theta}) \quad (12)$$

qualquer que seja a estimativa  $\hat{\theta} \neq \hat{\theta}_{ML}$ . Ou seja,  $\hat{\theta}_{ML}$  maximiza a função  $p(z|\theta)$  para um dado  $z$ .

### Exemplo 2:

Consideremos de novo o problema do Exemplo 1. Tem-se

$$\begin{aligned} p(z|\theta) &= \prod_{i=1}^N p(z_i|\theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Para determinar o máximo da função de verosimilhança deriva-se esta função em ordem a  $\theta$  e iguala-se a zero, o que dá

$$\sum_{i=1}^N (z_i - \theta) = 0 \quad (14)$$

donde

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (15)$$

No caso geral, designamos a função  $p(z|\theta)$ , vista como função de  $\theta$ , como a *função de verosimilhança*. A estimativa ML,  $\hat{\theta}_{ML}$ , é o valor de  $\theta$  para o qual a função de verosimilhança é máxima, ou seja, se o máximo for interior ao domínio de  $\theta$  e  $(z|\theta)$  tiver primeira derivada contínua então

$$\left. \frac{\partial p(z|\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} = 0 \quad (16)$$

### 3 Medidas da qualidade dos estimadores

Na estimação de parâmetros é usual considerar-se as seguintes medidas da qualidade dos estimadores:

**enviesamento (bias):** Um estimador  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  diz-se não-enviesado (unbiased) se

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta, \quad \forall \theta \quad (17)$$

Tal significa que a média das estimativas é igual à quantidade que queremos estimar. Se  $E\{\hat{\theta}\} = \theta + b$ , em que  $b$  não é uma função de  $\theta$ , diz-se que a estimativa apresenta um *enviesamento (bias) conhecido*. Podemos sempre obter uma estimativa não-enviesada subtraindo  $b$  a  $\hat{\theta}$ . No caso em que  $E\{\hat{\theta}\} = \theta + b(\theta)$ , diz-se que a estimativa apresenta um *enviesamento desconhecido*. Dado que o enviesamento depende do parâmetro desconhecido, não podemos simplesmente subtraí-lo a  $\hat{\theta}$ .

**variância do erro de estimação:** É dada por

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\theta} - \theta) &= E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} - (E\{\hat{\theta} - \theta\})^2 \\ &= E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} - b^2(\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

O erro quadrático médio (MSE=mean square error) é dado por

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \text{var}(\hat{\theta} - \theta) + b^2(\theta) \quad (19)$$

Infelizmente, o estimador MMSE (minimum mean square error), que minimiza o erro quadrático médio, não é, em geral, realizável porque o estimador depende de  $\theta$ , dado que o termo  $b(\theta)$  é uma função de  $\theta$ .

A Fig. 1 mostra que existem essencialmente dois mecanismos que contribuem para a degradação da qualidade das estimativas: a variância dos erros de estimação,  $\text{var}(\hat{\theta} - \theta)$  e o enviesamento,  $b$ .



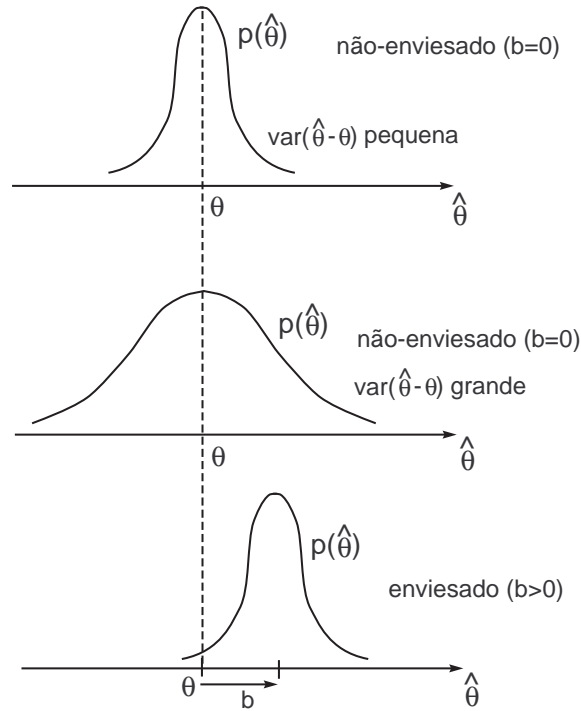


Figura 1: Exemplos de estimadores enviesados e não-enviesados

## 4 Desigualdade de Cramér-Rao

Teorema: Se  $\hat{\theta}$  é uma *qualquer* estimativa não-enviesada de  $\theta$ , então

$$\text{var}(\hat{\theta} - \theta) \geq \frac{1}{E \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p(z|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\}} \quad (20)$$

ou de modo equivalente

$$\text{var}(\hat{\theta} - \theta) \geq \frac{1}{-E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(z|\theta)}{\partial \theta^2} \right]} \quad (21)$$

Assume-se em (20) e em (21) que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem existem e são absolutamente integráveis. As desigualdades (20) e (21) são usualmente referidas como limite de Cramér-Rao (CRLB=Cramér-Rao lower bound). As duas formas são apresentadas dado que uma pode ser mais fácil de calcular que a outra. Para a demonstração do teorema consultar [1], [3] ou [4]. Qualquer estimativa que satisfaça o limite de Cramér-Rao com o sinal de igual é designada de estimativa *eficiente*. Não existe qualquer garantia de que exista uma estimativa eficiente para um dado problema. Contudo, prova-se que se existir uma estimativa eficiente, a estimativa de máxima verosimilhança é eficiente [3].

**Exemplo 3:**

Retomemos o problema do Exemplo 2. A estimativa ML é não-enviesada porque

$$\begin{aligned} E\{\hat{\theta}_{ML}\} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{z_i\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{\theta\} + E\{n_i\} = \theta \end{aligned} \quad (22)$$

A variância do erro de estimação é dada por

$$\begin{aligned} \text{var}\{(\hat{\theta}_{ML} - \theta)^2\} &= E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta + n_i) - \theta\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E\{n_i^2\} = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned} \quad (23)$$

Para determinar o CRLB teremos de calcular o valor espectável do quadrado de

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(z|\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \theta) \quad (24)$$

ou o valor espectável de

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p(z|\theta) = -\frac{N}{\sigma^2} \quad (25)$$

Claramente, a segunda opção é mais fácil e é óbvio que

$$\left[-E\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p(z|\theta)\right\}\right]^{-1} = \text{var}\{\hat{\theta}_{ML} - \theta\} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (26)$$

pelo que a estimativa (15) é eficiente para este problema. Note-se que a precisão da estimativa aumenta com o número de medições.

## 5 Estimadores lineares de variância mínima

O método da máxima verosimilhança não requer uma descrição para  $\theta$  mas precisa de uma descrição probabilística de todas as perturbações. Nesta secção e na próxima iremos analisar dois métodos de estimação de parâmetros que requerem um mínimo de descrição estocástica: o método linear da variância mínima e o método dos mínimos

quadrados. O método linear da variância mínima baseia-se nos primeiro e segundo momentos estatísticos do parâmetro e das perturbações. O método dos mínimos quadrados abandona toda a necessidade de informação estocástica e trata o problema da estimação como um problema de optimização determinística.

Até agora tentámos obter soluções gerais para os melhores estimadores possíveis em vários problemas não nos preocupando com a estrutura desses estimadores, apenas com a seu carácter óptimo. Nesta secção vamos considerar o melhor estimador linear, ainda que ele possa não ser o estimador óptimo para um dado problema. A vantagem dos estimadores lineares é a sua facilidade de implementação e de avaliação. Consideremos *estimadores lineares* da forma

$$\hat{\theta} = b + Az \quad (27)$$

isto é, impomos a restrição de que o estimador seja uma combinação linear pesada das observações. As observações são uma função linear de  $\theta$  da forma

$$z = H\theta + n \quad (28)$$

em que  $z$  e  $n$  são vectores e  $H$  é uma matriz conhecida (matriz das observações). Os dois primeiros momentos de  $\theta$  e de  $n$  são dados por

$$E\{\theta\} = \mu_\theta, \quad \text{var}\{\theta\} = V_\theta \quad (29)$$

$$E\{n\} = 0, \quad \text{var}\{n\} = V_n \quad (30)$$

O parâmetro  $\theta$  e o ruído são incorrelacionados. O objectivo é determinar  $b$  e  $A$  por forma a minimizar a variância do erro. Estes estimadores são os melhores estimadores lineares no sentido de minimizar a variância do erro. Note-se contudo que os estimadores de variância mínima *não* são, em geral, estimadores lineares. Como resultado, o estimador linear de variância mínima não é óptimo no sentido em que pode existir um estimador não-linear que produz variâncias de erro menores. Existe, no entanto, uma classe de problemas para os quais o estimador de variância mínima linear é óptimo: trata-se de problemas em que  $p(\theta|z)$  é gaussiana [3].

Vamos impor adicionalmente que o estimador de variância mínima linear seja não-enviesado. Prova-se que a estimativa de variância mínima linear é dada por [3]

$$\hat{\theta}_{lmv} = (H^T V_n^{-1} H + V_\theta^{-1})^{-1} (H^T V_n^{-1} z + V_\theta^{-1} \mu_\theta) \quad (31)$$

Nos casos em que não existe conhecimento prévio das características de  $\theta$  podemos usar o resultado anterior admitindo uma matriz de variância infinita  $V_\theta$ , ou seja,

$$V_\theta^{-1} = 0, \quad \mu_\theta = 0 \quad (32)$$

resultando a seguinte simplificação

$$\hat{\theta}_{lmv} = (H^T V_n^{-1} H)^{-1} H^T V_n^{-1} z \quad (33)$$

Este estimador é usualmente conhecido pela sigla BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) [4]. Note-se que para o estimador BLUE apenas se exige que o vector de ruído tenha média nula e matriz de covariância  $V_n$  conhecida (a fdp de  $n$  pode ser arbitrária).

Nalguns problemas assume-se que as amostras de ruído  $n_i$  são incorrelacionadas e identicamente distribuídas com médias nulas e variâncias  $\sigma^2$ . Nesse caso ainda é possível simplificar mais o resultado (33) por forma a obter

$$\hat{\theta}_{lmv} = (H^T H)^{-1} H^T z \quad (34)$$

## 6 Estimador de mínimos quadrados

Vimos na secção anterior que o estimador de variância mínima linear requeria apenas o primeiro e segundo momentos de  $\theta$  e de  $n$ . Nesta secção consideramos o método dos mínimos quadrados (least squares), o qual não usa qualquer informação estocástica mas trata a estimação de parâmetros como um problema de optimização determinística. Consideremos de novo o seguinte modelo das observações

$$z = H\theta + n \quad (35)$$

em que  $z$  é um vector de dimensão  $N$  e  $\theta$  tem dimensão  $K$  normalmente com  $K \ll N$ .

O problema consiste em determinar uma estimativa  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  de modo a que o índice de desempenho quadrático

$$J = \frac{1}{2} (z - H\hat{\theta})^T W (z - H\hat{\theta}) \quad (36)$$

seja minimizado. A matriz de ponderação  $W$  considera-se positiva definida e simétrica podendo ser usada para atribuir diferentes custos a cada um dos erros  $(z - H\hat{\theta})_i$ . O estimador que minimiza  $J(\hat{\theta})$  designa-se de *estimador de mínimos quadrados*. Este método é conhecido por *mínimos quadrados ponderados* devido ao uso da matriz  $W$ . Uma condição necessária para o estimador de mínimos quadrados é

$$\left. \frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \right|_{\hat{\theta} = \hat{\theta}_{ls}} = 0 \quad (37)$$

Prova-se que o estimador de mínimos quadrados é dado por [3], [4]

$$\hat{\theta}_{ls} = (H^T W H)^{-1} H^T W z \quad (38)$$

e o erro LS mínimo é [4]

$$J_{\min} = z^T (W - W H (H^T W H)^{-1} H^T W) z \quad (39)$$

Como caso particular, se  $W$  for a matriz identidade, obtém-se o estimador de mínimos quadrados (não ponderados)

$$\hat{\theta}_{ls} = (H^T H)^{-1} H^T z \quad (40)$$

## 7 Estimação bayesiana

Consideremos o seguinte exemplo.

### Exemplo 4:

Pretende-se medir uma tensão  $a$  em determinado instante. Partindo de considerações físicas sabemos que  $-V \leq a \leq V$ . A medição encontra-se corrompida por ruído modelizado como uma variável aleatória (v.a.) independente, gaussiana,  $n \sim N(0, \sigma_n^2)$ . A variável observada é  $r = a + n$ . A fdp que governa o processo de observação é  $p_{R|A}(r|a)$  com

$$p_{R|A}(r|a) = p_N(r - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[ -\frac{(r - a)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (41)$$

O problema consiste em observar  $r$  e estimar  $a$ . Este exemplo ilustra o conceito de problema de estimação estatística ou Bayesiana.

Na estimação bayesiana assume-se que  $\theta$  é uma v.a cuja realização particular se pretende estimar. A sua implementação é baseada directamente no teorema de Bayes. O modelo do problema genérico de estimação bayesiana engloba as seguintes quatro componentes [1], [2], [3], [4]:

- *espaço do parâmetro* - conjunto de valores que o parâmetro  $\theta$  (a ser estimado) pode assumir.
- *aplicação probabilística do espaço do parâmetro no espaço das observações* - trata-se da lei de probabilidade que define o efeito de  $\theta$  nas observações.
- *espaço das observações* - é um espaço de dimensão finita constituído pelos valores que as observações podem tomar. Genericamente é um vector  $\mathbf{Z}$ .

- *regra de estimação* - após observar  $\mathbf{Z}$ , pretende-se estimar  $\theta$ . Designamos essa estimativa por  $\hat{\theta}(\mathbf{Z})$ . A aplicação do espaço das observações numa estimativa é chamada regra de estimação.

O modelo de estimação está representado na Fig. 2 [1].

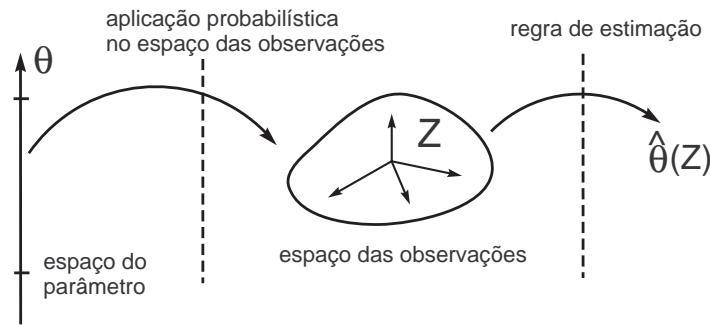


Figura 2: Modelo de estimação bayesiana

Dado o parâmetro  $\theta$  e a sua estimativa  $\hat{\theta}$  define-se o erro da estimativa por

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \quad (42)$$

e o custo de estimar  $\theta$  com um erro  $\tilde{\theta}$  é dado pela *função de custos*  $C(\tilde{\theta})$ . Algumas funções de custos encontram-se representadas na Fig. 3.

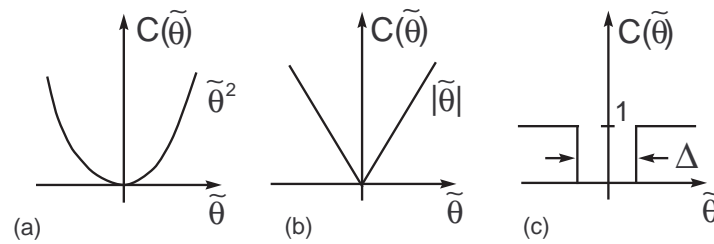


Figura 3: Funções de custos típicas: (a) erro quadrático, (b) erro absoluto, (c) erro uniforme

Na Fig. 3(a) a função de custos é simplesmente o erro quadrático

$$C(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^2 \quad (43)$$

Trata-se de uma função de custos que penaliza essencialmente os erros elevados. Na Fig. 3(b) a função de custos é o valor absoluto do erro

$$C(\tilde{\theta}) = |\tilde{\theta}| \quad (44)$$

e na Fig. 3(c) atribui-se um custo zero a todos os erros menores (em módulo) que  $\Delta/2$  e um custo igual a 1 a todos os outros erros

$$C(\tilde{\theta}) = \begin{cases} 0, & |\tilde{\theta}| \leq \Delta/2 \\ 1, & |\tilde{\theta}| > \Delta/2 \end{cases} \quad (45)$$

Em geral, a escolha de uma função de custos resulta de um compromisso entre a satisfação do utilizador e a facilidade de derivação analítica do estimador óptimo. Felizmente, em muitos problemas de interesse a mesma estimativa será óptima para uma classe grande de funções de custos.

Depois de termos especificado a função de custos e a probabilidade a priori do parâmetro  $\theta$ , podemos escrever uma expressão para o *risco*

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tilde{\theta}) p_{\theta,z}(\theta, z) dz d\theta \quad (46)$$

Define-se estimativa bayesiana como a estimativa que minimiza o risco. É fácil obter estimativas bayesianas para as funções de custos da Fig. 3.

## 7.1 Estimador de variância mínima

Para a função de custos quadrática, o risco corresponde ao erro quadrático médio

$$R_{mv} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 p_{\theta,z}(\theta, z) dz d\theta \quad (47)$$

Mas, usando a regra de Bayes obtém-se

$$p_{\theta,z}(\theta, z) = p_{\theta|z}(\theta|z) p_z(z) \quad (48)$$

pelo que

$$R_{mv} = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta dz \quad (49)$$

Para minimizar  $R_{mv}$  basta minimizar o integral interior. Derivando o integral interior em ordem a  $\hat{\theta}$  e igualando a zero chega-se a

$$\hat{\theta}_{mv} = E\{\theta|z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta \quad (50)$$

Trata-se da *média da fdp a posteriori* (ou *média condicional*). Este estimador chama-se de variância mínima ou MMSE (minimum mean square error).

A forma da equação (50) não é computacionalmente conveniente dado que a fdp  $p(\theta|z)$  em geral não é fácil de calcular. Se exprimirmos  $p(\theta|z)$  através da regra de Bayes

$$p(\theta|z) = \frac{p(z|\theta)p(\theta)}{p(z)} \quad (51)$$

obtemos

$$\hat{\theta}_{mv} = \frac{1}{p(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(z|\theta)p(\theta) d\theta \quad (52)$$

em que

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z|\theta)p(\theta) d\theta \quad (53)$$

### Exemplo 5:

Determinar a estimativa de variância mínima para o parâmetro  $\theta$  baseado na observação escalar  $z = \ln \theta + n$  com

$$p(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (54)$$

$$p(n) = \begin{cases} \exp(-n), & n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (55)$$

Tem-se

$$p(z|\theta) = p_n(z - \ln \theta) = \begin{cases} \exp[-(z - \ln \theta)], & z \geq \ln \theta \\ 0, & z < \ln \theta \end{cases} \quad (56)$$

e

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z|\theta)p(\theta) d\theta = \begin{cases} \exp(-z)/2, & z > 0 \\ \exp(z)/2, & z \leq 0 \end{cases} \quad (57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(z|\theta)p(\theta) d\theta = \begin{cases} \exp(-z)/3, & z > 0 \\ \exp(2z)/3, & z \leq 0 \end{cases} \quad (58)$$

e por conseguinte

$$\hat{\theta}_{mv} = \begin{cases} 2/3, & z > 0 \\ 2 \exp(z)/3, & z \leq 0 \end{cases} \quad (59)$$



## 7.2 Critério do valor absoluto

Para determinar a estimativa de Bayes para o critério do valor absoluto na Fig. 3(b) escrevemos

$$R_{abs} = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\theta} - \theta| p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta dz \quad (60)$$

Para minimizar o integral interior fazemos

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta \quad (61)$$

Diferenciando  $I(z)$  em ordem a  $\hat{\theta}$  e igualando o resultado a zero obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta \quad (62)$$

Logo,  $\hat{\theta}_{abs}$  é a *mediana da fdp a posteriori (ou mediana condicional)*  $p_{\theta|z}(\theta|z)$ .

### Exemplo 6:

Para ilustrar a determinação de estimativas usando o critério do valor absoluto consideremos o problema do Exemplo 5. Usando os resultados aí obtidos podemos escrever  $p(\theta|z)$  como

$$p(\theta|z) = \frac{p(z|\theta)p(\theta)}{p(z)} = \begin{cases} 2\theta, & 0 \leq \theta \leq 1; z \geq 0 \\ 2 \exp(-2z)\theta, & 0 \leq \theta \leq \exp(z); z \leq 0 \end{cases} \quad (63)$$

Para  $z \geq 0$ ,  $\hat{\theta}_{abs}$  é definido por

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} 2\theta d\theta = \hat{\theta}_{abs}^2 \quad (64)$$

ou  $\hat{\theta}_{abs} = 1/\sqrt{2}$ . Para  $z \leq 0$ ,  $\hat{\theta}_{abs}$  é definido por

$$\exp(-2z) \int_0^{\hat{\theta}_{abs}} 2\theta d\theta = \exp(-2z) \hat{\theta}_{abs}^2 = 1/2 \quad (65)$$

ou  $\hat{\theta}_{abs} = \exp(z)/\sqrt{2}$ .

## 7.3 Estimadores MAP

Para a função de custos uniforme da Fig. 3(c) o risco de Bayes é dado por

$$R_{unf} = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) \left[ 1 - \int_{\hat{\theta}_{unf}-\Delta/2}^{\hat{\theta}_{unf}+\Delta/2} p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta \right] dz \quad (66)$$

Para minimizar  $R_{unf}$  teremos de maximizar o integral interior. O caso particular de maior interesse é aquele em que  $\Delta$  é um valor arbitrariamente pequeno mas não nulo. Usando a Fig. 4 verifica-se que quando  $\Delta$  é pequeno a melhor escolha para  $\hat{\theta}$  é o valor de  $\theta$  para o qual a fdp a posteriori atinge o máximo. Designamos, por isso, a estimativa óptima de  $\theta$  por estimativa de máximo a posteriori (ou estimativa MAP).

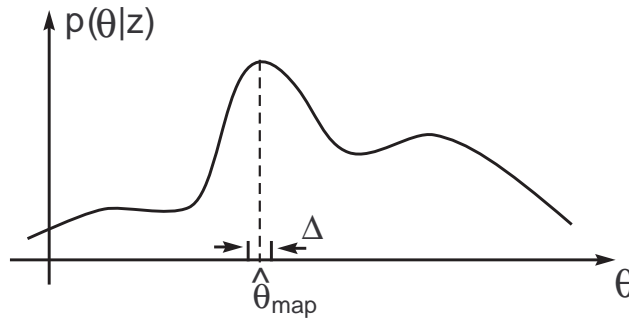


Figura 4: Obtenção da estimativa MAP a partir da fdp a posteriori

Para obter  $\hat{\theta}_{map}$  teremos de localizar a posição do máximo de  $p(\theta|z)$  (*moda condicional ou a posteriori*). No entanto, dado que o logaritmo é uma função monótona, podemos determinar de forma equivalente a posição do máximo de  $\ln p_{\theta|z}(\theta|z)$ . Para certos problemas esta solução é a mais conveniente. Se o máximo for interior ao intervalo admissível de  $\theta$  e se  $\ln p_{\theta|z}(\theta|z)$  tiver uma primeira derivada contínua então uma condição necessária, mas não suficiente, para a ocorrência dum máximo é dada por

$$\left. \frac{\partial p_{\theta|z}(\theta|z)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \quad (67)$$

ou, de forma equivalente, por

$$\left. \frac{\partial \ln p_{\theta|z}(\theta|z)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0 \quad (68)$$

Podemos re-escrever a expressão de  $p_{\theta|z}(\theta|z)$  usando (8) de modo a separar o papel do vector observado  $z$  e do conhecimento a priori, isto é

$$p_{\theta|z}(\theta|z) = \frac{p_{z|\theta}(z|\theta)p_{\theta}(\theta)}{p_z(z)} \quad (69)$$

Aplique-se algoritmos; fica

$$\ln p_{\theta|z} = \ln p_{z|\theta}(z|\theta) + \ln p_{\theta}(\theta) - \ln p_z(z) \quad (70)$$

Para a estimação MAP interessa apenas determinar o valor de  $\theta$  para o qual o membro esquerdo é máximo. Uma vez que o último termo do membro direito não é uma função de  $\theta$  podemos considerar apenas a função

$$l(\theta) \equiv \ln p_{z|\theta}(z|\theta) + \ln p_\theta(\theta) \quad (71)$$

O primeiro termo dá a dependência probabilística de  $z$  em  $\theta$  e o segundo descreve o conhecimento a priori.

A equação MAP pode ser descrita como

$$\left. \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left. \frac{\partial \ln p_{z|\theta}(z|\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} + \left. \frac{\partial \ln p_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (72)$$

#### Exemplo 7:

Consideremos de novo o problema de estimação do exemplo 5. A fdp  $p(z|\theta)$  foi aí determinada. O produto  $p(z|\theta)p(\theta)$  vale

$$p(z|\theta)p(\theta) = \begin{cases} \exp[-(z - \ln \theta)], & 0 \leq \theta \leq 1; z > \ln \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (73)$$

Assim, para  $z < 0$  tem-se

$$p(z|\theta)p(\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-z), & 0 \leq \theta \leq \exp(z) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (74)$$

e para  $z \geq 0$  vale

$$p(z|\theta)p(\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-z), & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (75)$$

Maximizando o produto  $p(z|\theta)p(\theta)$  em ordem a  $\theta$  conduz a

$$\hat{\theta}_{map} = \begin{cases} \exp(z), & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases} \quad (76)$$

#### Exemplo 8:

Considere as observações  $z_i = \theta + n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , do parâmetro  $\theta$ . Assume-se que  $\theta$  é uma v.a. gaussiana,  $N(0, \sigma_\theta^2)$  e que os ruídos  $n_i$  são v.a. gaussianas independentes  $N(0, \sigma_n^2)$ . Determinar as estimativas de  $\theta$  de variância mínima, MAP e de critério do valor absoluto.

Tem-se

$$p(z|\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[ -\frac{(z_i - \theta)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (77)$$

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp \left( -\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2} \right) \quad (78)$$

Para determinar  $\hat{\theta}_{mv}^2$  precisamos de calcular  $p(\theta|z)$ . Uma hipótese consiste em calcular  $p_z(z)$  e substituir em (69) mas este procedimento é moroso. É mais fácil considerar que  $p(\theta|z)$  é uma fdp em  $\theta$  para qualquer valor de  $z$ . Por isso,  $p(z)$  apenas contribui para a constante necessária para fazer

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta|z}(\theta|z) d\theta = 1 \quad (79)$$

Por outras palavras,  $p(z)$  é apenas uma constante de normalização de  $p(\theta|z)$ . Assim

$$p(\theta|z) = \frac{\left( \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \theta)^2}{\sigma_n^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_\theta^2} \right] \right\}}{p(z)} \quad (80)$$

Re-arranjando o expoente, completando o quadrado e absorvendo termos independentes apenas de  $z_i^2$  na constante  $\gamma(z)$ , ficamos com

$$p(\theta|z) = \gamma(z) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_p^2} \left[ \theta - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right) \right]^2 \right\} \quad (81)$$

Atendendo a que se trata de uma fdp gaussiana em  $\theta$ , a quantidade  $\gamma(z)$  funciona como um factor de normalização, isto é

$$\gamma(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \quad (82)$$

em que

$$\sigma_p^2 = \left( \frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{N}{\sigma_n^2} \right)^{-1} = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}{N\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \quad (83)$$

é a variância da fdp a posteriori. Como  $p(\theta|z)$  é uma fdp gaussiana, de acordo com (50) a estimativa  $\hat{\theta}_{mv}$  é a média condicional

$$\hat{\theta}_{mv} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right) \quad (84)$$

Note-se que as observações  $z_i$  entram na fdp a posteriori apenas através da sua soma. Por isso

$$l(z) = \sum_{i=1}^N z_i \quad (85)$$

é uma *estatística suficiente*.

A regra de estimação usa a informação disponível numa forma intuitivamente lógica. Se  $\sigma_\theta^2 \ll \sigma_n^2/N$ , o conhecimento a priori é muito melhor que o contido os dados observados e a estimativa é muito próxima da média a priori (neste caso igual a zero). Por outro lado, se  $\sigma_\theta^2 \gg \sigma_n^2/N$ , o conhecimento é de pouca utilidade e a estimativa usa essencialmente os dados recebidos. No limite,  $\hat{\theta}_{mv}$  é apenas a média aritmética dos  $z_i$

$$\lim_{\sigma_\theta^2 \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{mv} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (86)$$

A estimativa MAP para este caso obtém-se facilmente a partir de (81). Como a pdf é gaussiana em  $\theta$  o valor máximo ocorre na média condicional e

$$\hat{\theta}_{map} = \hat{\theta}_{mv} \quad (87)$$

Dado que a mediana da pdf a posteriori ocorre na média tem-se igualmente

$$\hat{\theta}_{abs} = \hat{\theta}_{mv} = \hat{\theta}_{map} \quad (88)$$

A equação anterior mostra que, para o Exemplo 5, as três funções de custos da Fig. 3 conduzem à mesma estimativa. Esta invariância à escolha da função de custos obviamente útil devido à frequente dificuldade na escolha de  $C(\tilde{\theta})$ .

Existem algumas relações simples entre estimadores que podemos desenvolver facilmente. Se a fdp a posteriori  $p_{\theta|z}(\theta|z)$  for simétrica, então  $\hat{\theta}_{mv} = \hat{\theta}_{abs}$  pois a média condicional e a mediana são iguais. Note-se que é preciso restringirmo-nos a um parâmetro escalar. Se, para além de simétrica, a densidade  $p_{\theta|z}(\theta|z)$  for unimodal, então  $\hat{\theta}_{mv} = \hat{\theta}_{map}$ . Dado que a fdp gaussiana é simultaneamente simétrica e unimodal, todos estes estimadores serão iguais se  $p_{\theta|z}(\theta|z)$  for gaussiana.

Embora existam condições para as quais os três estimadores bayesianos são iguais, obviamente existem muitos casos em que o não são. Uma situação na qual os estimadores da variância mínima e MAP são diferentes é se  $p_{\theta|z}(\theta|z)$  for simétrica mas bimodal.

## Referências

- [1] H. Van Trees - “*Detection, Estimation, and Modulation Theory*”, (vol. 1), Wiley, N. York, 1968.

- [2] A. Sage, J. Melsa - *“Estimation Theory with Applications to Communications and Control”*, McGraw-Hill, N. York, 1971.
- [3] J. Melsa, D. Cohn, *“Decision and Estimation Theory”*, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1978.
- [4] S. Kay - *“Fundamentals of Statistical Signal Processing. Estimation Theory”*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

## IV - Sistemas Lineares em Espaço de Estados

### 1 Sistemas lineares

Um sistema é um modelo de um objecto ou de um conjunto de objectos. Um modelo é essencialmente uma idealização de um objecto que retém as suas características mais importantes mas que é mais fácil de estudar.

Se a saída do sistema no instante  $t_1$  só depende das entradas aplicadas em  $t_1$  o sistema diz-se *sem memória*. Se, pelo contrário, a saída depender não só das entradas aplicadas em  $t_1$  mas também das entradas aplicadas antes e/ou depois de  $t_1$ , o sistema diz-se *dinâmico*.

Iremos considerar essencialmente sistemas em que a relação entrada-saída é uma equação diferencial (sistemas contínuos) ou uma equação às diferenças (sistemas discretos). O sistema é linear ou não-linear dependendo de estas equações serem ou não lineares. Os sistemas físicos são *causais*, isto é, se um sistema está em repouso não poderá haver uma saída anterior à aplicação da entrada.

Seja  $u(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente, a entrada e a saída de um sistema. A relação entre ambas é dada por  $y(t) = \mathcal{T}[u(t)]$  em que  $\mathcal{T}$  é um operador. O sistema é linear se, para quaisquer entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , e quaisquer escalares  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , se tiver

$$\mathcal{T}[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{T}[u_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{T}[u_2(t)]. \quad (1)$$

Um sistema linear diz-se *invariante no tempo* (SLIT) ou *estacionário* se os seus parâmetros não variarem com o tempo, isto é, se  $y(t) = \mathcal{T}[u(t)]$ , então  $\mathcal{T}[u(t - \tau)] = y(t - \tau)$ .

A saída de um sistema linear é dada pelo integral de convolução

$$y(t) = h(t, \tau) \star u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (2)$$

em que  $h(t, \tau)$  é a resposta do sistema no instante  $t$  a um impulso de Dirac aplicado no instante  $\tau$  (*resposta impulsional*) e  $\star$  é o operador convolução.

Nos SLITs o integral de convolução é dado por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

A resposta de um SLIT pode ser dada na frequência utilizando a transformada de Fourier

$$Y(f) = H(f)U(f), \quad (4)$$

em que  $Y(f) = TF[y(t)]$  e  $H(f) = TF[h(t)]$  é a *função de transferência* do sistema.

## 2 Espaço de estados

Na determinação da resposta de um sistema linear pela operação de convolução as condições iniciais do sistema linear devem ser zero, isto é, o integral de convolução produz apenas a resposta forçada do sistema. Vamos, agora, considerar uma descrição alternativa do sistema que nos permite entrar em conta com as condições iniciais.

O *estado* de um sistema dinâmico é a menor colecção de números a especificar no instante  $t = t_0$  que permite determinar de forma única o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ , desde que todas as entradas sejam conhecidas para  $t \geq t_0$ . Esses números são chamados *variáveis de estado* (o seu conjunto é referido por *vector de estado*,  $\mathbf{X}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ).

O *espaço de estados* é definido por um espaço  $n$ -dimensional no qual as variáveis de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são coordenadas. O número de variáveis de estado usado na descrição de um sistema é a *ordem* do sistema. Se o número de variáveis de estado for o mínimo possível o vector de estado tem *ordem mínima*. Por exemplo, para um sistema descrito por uma equação diferencial de ordem  $n$  são necessárias  $n$  condições iniciais para determinar a saída do sistema. Logo, a ordem mínima do sistema é  $n$ .

Em sistemas lineares a dependência funcional da saída relativamente ao estado e às entradas é linear. Para sistemas MIMO (multiple-input multiple-output) tem-se

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^p d_{ij}(t)u_j(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (5)$$

em que  $p$  é o número de entradas e  $q$  o número de saídas do sistema.

Do mesmo modo, as equações de estado podem ser escritas como

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^p g_{ij}(t)u_j(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

e formam um conjunto de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Definindo as matrizes  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  e  $D(t)$  como



$$\begin{aligned}
C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}(t) & \dots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}_{(q \times n)} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1p}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1}(t) & \dots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}_{(q \times p)} \\
F(t) &= \begin{bmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{bmatrix}_{(n \times n)} & G(t) &= \begin{bmatrix} g_{11}(t) & \dots & g_{1p}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t) & \dots & g_{np}(t) \end{bmatrix}_{(n \times p)}
\end{aligned} \tag{7}$$

podemos escrever as equações (5) e (6) em notação matricial como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t). \tag{8}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{9}$$

Para sistemas invariantes no tempo as matrizes C, D, F e G são constantes.

### 3 Representação de SLITs em espaço de estado

As três realizações canônicas a seguir apresentadas permitem determinar as equações de estado e de saída, respectivamente (8) e (9), a partir de uma equação diferencial escalar do tipo genérico

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k} u^{(n-1-k)}(t) \tag{10}$$

onde  $y^{(n)}(t)$  designa a derivada de ordem  $n$  de  $y(t)$ .

#### 3.1 primeira realização canónica

Admitamos que o SLIT é descrito por uma equação diferencial escalar da forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_0u(t) \tag{11}$$

Tendo em conta que, para condições iniciais nulas, a transformada de Laplace (TL) de  $y^{(i)}(t)$  é  $s^iY(s)$ , em que  $Y(s)$  é a TL de  $y(t)$ , a função de transferência do sistema é

$$H(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}. \tag{12}$$

O sistema descrito por (11) é equivalente a um sistema vectorial de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. Faça-se

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) \\
x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) \\
&\vdots \\
x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t) \\
\dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = -\sum_{k=1}^n a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + b_0 u(t) \\
&= -\sum_{k=1}^n a_{k-1} x_k(t) + b_0 u(t)
\end{aligned} \tag{13}$$

Seja agora  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ , onde  $T$  significa transposto. O sistema de equações (13) pode ser escrito na forma matricial como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}u(t) \tag{14}$$

onde [1], [2]

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

O vector  $\mathbf{x}(t)$  é o vector de estado do SLIT e (14) é a *equação de estado* do sistema. Note-se que o vector de estado  $\mathbf{x}(t)$  que escolhemos não é a única escolha possível. Qualquer transformação linear não-singular de  $\mathbf{x}(t)$  dá outro vector de estado. A saída  $y(t)$  relaciona-se com o vector de estado pela equação

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{16}$$

onde

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \tag{17}$$

A equação (16) é chamada *equação de saída* do sistema. As equações (14) e (16) caracterizam completamente o sistema. Para obter a solução do sistema em termos

do vector de estado para qualquer  $t \geq t_0$  basta especificar as condições (iniciais)  $\mathbf{x}(t_0)$  e a entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ . Esta realização é designada por primeira realização canónica [1]. A sua implementação através de um computador analógico é apresentada na Fig. 1. No circuito os elementos  $1/s$  correspondem a integradores e os triângulos a amplificadores com ganhos indicados no interior.

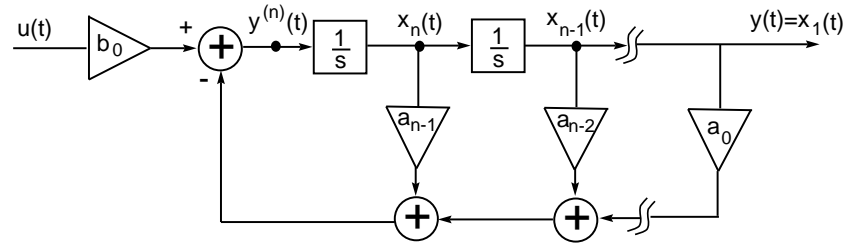


Figura 1: Primeira realização canónica do SLIT

### Exemplo 1:

Determine o vector de estado do sistema descrito pela seguinte equação diferencial escalar

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 11y = u.$$

Solução:

Fazendo

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y} = -5x_3 - 11x_2 - 6x_1 + u$$

vem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

### 3.2 segunda e terceira realizações canônicas

Consideremos agora a generalização da equação (11), isto é, admitamos que o SLIT é descrito pela equação diferencial escalar

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + b_0u(t). \quad (18)$$

A função de transferência correspondente é

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (19)$$

Prova-se em [1] que se fizermos a seguinte escolha de variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) + a_{n-1}y(t) - b_{n-1}u(t) \\ &\vdots \\ x_i(t) &= \dot{x}_{i-1}(t) + a_{n-i+1}y(t) - b_{n-i+1}u(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) + a_1y(t) - b_1u(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0y(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (20)$$

as matrizes da equação de estado (8) são

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

A equação de saída é (16) com  $\mathbf{C}$  dada por (17). Referimo-nos a esta realização como a segunda realização canónica. O computador analógico correspondente é apresentado na Fig. 2.

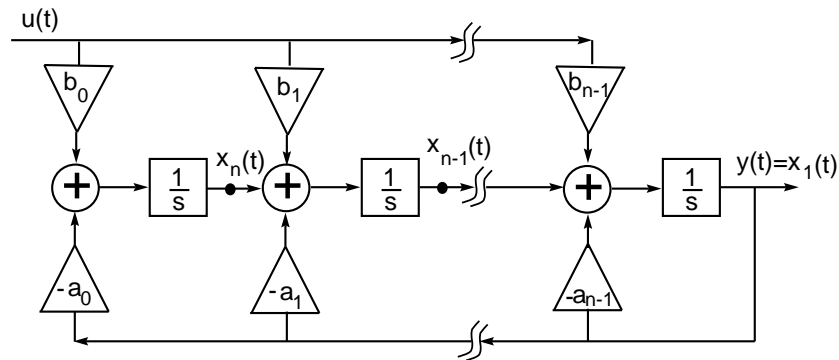


Figura 2: Segunda realização canônica do SLIT

Existe uma alternativa a esta realização que consiste em expandir (19) em frações parciais [1]

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i}, \quad (23)$$

onde os  $\lambda_i$  são as raízes do denominador de  $H(s)$ , que se assume serem distintas, e os  $\alpha_i$  são os resíduos correspondentes. O computador analógico correspondente é apresentado na Fig. 3.

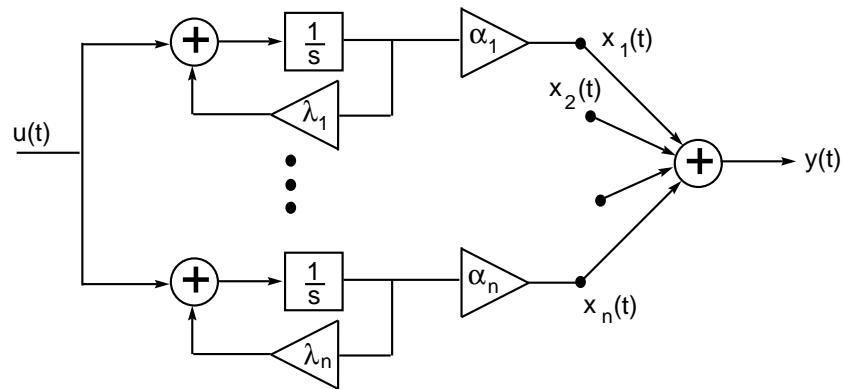


Figura 3: Terceira realização canônica do SLIT

As figuras mostram que se obteve um conjunto de sub-sistemas em que as suas saídas são as variáveis de estado. A matriz  $\mathbf{F}$  é, por isso, diagonal

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

e os elementos da matriz  $\mathbf{G}$  são os resíduos

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (25)$$

A saída  $y(t)$  é a soma das variáveis de estado

$$y(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) = \mathbf{1}^T \mathbf{x}(t) \quad (26)$$

onde  $\mathbf{1}^T = [1 \ 1 \dots 1]$ .

Esta realização é conhecida por terceira realização canónica. A realização para raízes repetidas não foi aqui abordada, podendo ser encontrada, por exemplo, em [1].

## 4 Modelo de estado em processos com espectros racionais

Para gerar um processo estacionário com um espectro de potência racional da forma

$$S_y(\omega) = \frac{k}{d_{2n}\omega^{2n} + d_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots d_0} \quad (27)$$

basta que  $u(t)$  seja uma função-amostra de ruído branco e  $t_0 = -\infty$ . Neste caso, o vector de estado  $\mathbf{x}(t)$  é uma função-amostra de um processo estocástico vectorial e  $y(t)$  é uma componente deste processo.

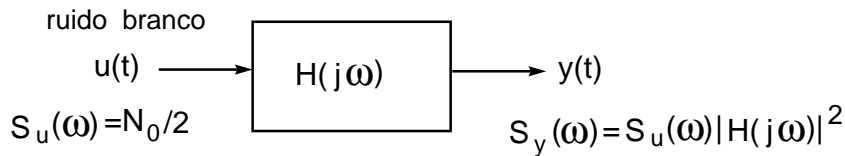


Figura 4: Geração de um processo com espectro racional

De facto, a função de transferência do SLIT é dada por (10) com  $s = j\omega$  ( $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular), isto é

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (28)$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$ , pelo que

$$S_y(\omega) = S_u(\omega) |H(j\omega)|^2$$

$$= \frac{\mathcal{N}_0}{2} H(j\omega) H(-j\omega). \quad (29)$$

**Exemplo 2:**

Admita que o processo aleatório com densidade espectral de potência

$$S_y(\omega) = \frac{16}{\omega^4 - 4\omega^2 + 16}$$

é gerado fazendo passar ruído branco com densidade espectral de potência unitária através de um sistema linear. Determine a função de transferência do sistema e a equação de estado.

Solução:

$$n = 2$$

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned} H(s)H(-s) &= \frac{b_0^2}{(s^2 + a_1 s + a_0)(s^2 - a_1 s + a_0)} \\ &= \frac{b_0^2}{s^4 + (2a_0 - a_1^2)s^2 + a_0^2} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= 1 \cdot H(j\omega)H(-j\omega) \\ &= \frac{b_0^2}{\omega^4 - (2a_0 - a_1^2)\omega^2 + a_0^2} \end{aligned}$$

pelo que

$$b_0 = 4$$

$$2a_0 - a_1^2 = 4$$

$$a_0^2 = 16$$

donde

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 2$$

(a solução  $a_1 = -2$  conduz a pólos no semi-plano complexo direito, ou seja, a um sistema instável). Finalmente

$$H(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4},$$

pelo que, a equação de estado é, de acordo com (19)-(15) e (28)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u.$$

## 5 Modelo de tempo discreto

A implementação dos processos de tempo contínuo discutidos anteriormente exige a montagem de circuitos eléctricos (computadores analógicos), o que é pouco prático. Com a vulgarização do computador digital tornou-se possível simular os processos de tempo contínuo de forma aproximada recorrendo aos processos de tempo discreto. Este tipo de processos pode surgir de dois modos diferentes:

- a) uma sequência de eventos que ocorrem em instantes discretos do tempo;
- b) um processo de tempo contínuo que é amostrado num conjunto discreto de instantes.

Em ambos os casos pretende-se descrever o sistema da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k, \end{aligned} \tag{30}$$

onde  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$  é o vector de estado do processo no instante  $t_k$  e  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  é a sequência de entrada. Note-se a analogia com as equações de tempo contínuo em (8).

O caso b) é tão usual que merece uma análise mais detalhada. Consideremos que o processo de tempo contínuo é descrito por (8) onde  $\mathbf{u}(t)$  é ruído branco vectorial. A solução de (8) no instante  $t_{k+1}$  pode ser descrita por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t) dt \tag{31}$$

onde  $\Phi(t, t_0)$  é a *matriz de transição do sistema*. A primeira parcela do membro direito de (31) é a resposta livre do sistema e a segunda é a resposta forçada do sistema (dependente da entrada). A equação (31) pode ser escrita de forma abreviada como



$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (32)$$

onde  $\Phi_k$  é a *matriz de transição de estado* do estado  $\mathbf{x}_k$  para o estado  $\mathbf{x}_{k+1}$  e o *ruído da dinâmica*

$$\mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (33)$$

resulta da contribuição da entrada  $\mathbf{u}(t)$  para o vector de estado no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Demonstra-se [1] que a matriz de transição verifica as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) &= \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t, t) = \mathbf{I} \\ \Phi(t_2, t_0) &= \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \\ \Phi^{-1}(t, t_0) &= \Phi(t_0, t) \end{aligned} \quad (34)$$

## 5.1 matriz de transição para SLITs

Num sistema estacionário a matriz  $\mathbf{F}$  é invariante no tempo e a matriz de transição depende apenas do intervalo de tempo considerado, isto é

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) \quad (35)$$

podendo calcular-se de acordo com

$$\Phi(t - t_0) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}. \quad (36)$$

Apresenta-se, de seguida, dois métodos para a determinação da matriz de transição de estado em SLITs. Métodos alternativos são descritos, por exemplo, em [3].

### • Método I:

A matriz de transição pode calcular-se mediante desenvolvimento da exponencial de  $\mathbf{F}(t - t_0)$  em série, de acordo com

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \quad (37)$$

### Exemplo 3:

Dada a matriz

$$\mathbf{F} = \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determine a matriz de transição correspondente.

Solução:

Faça-se por simplicidade  $a = \omega_0(t - t_0)$ . Vem

$$\mathbf{F}(t - t_0) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & a^3 \\ -a^3 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \dots & -a + \frac{a^3}{3!} - \frac{a^5}{5!} + \dots \\ a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \dots &= \cos a \\ a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \dots &= \sin a \end{aligned}$$

logo

$$\Phi(t - t_0) = \begin{bmatrix} \cos[\omega_0(t - t_0)] & -\sin[\omega_0(t - t_0)] \\ \sin[\omega_0(t - t_0)] & \cos[\omega_0(t - t_0)] \end{bmatrix}$$

• **Método II:**

A exponencial de  $\mathbf{F}(t - t_0)$  pode ser determinada pelo método da transformada de Laplace.

Seja  $\Delta t = t - t_0$ . De (34) tira-se

$$\dot{\Phi}(\Delta t) = \mathbf{F}\Phi(\Delta t). \quad (38)$$

Dado que  $\Phi(0) = \mathbf{I}$  e aplicando transformadas de Laplace obtém-se

$$s\Phi(s) - \mathbf{I} = \mathbf{F}\Phi(s)$$

pelo que,

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$$

ou, finalmente

$$\Phi(\Delta t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}]_{t=\Delta t}, \quad (39)$$

em que  $\mathcal{L}$  representa o operador transformada de Laplace.

**Exemplo 4:**

Dada a matriz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

determine a matriz de transição correspondente pelo método da transformada de Laplace.

Solução (vide tabela de TL em Apêndice):

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \beta \end{bmatrix} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\beta)} \\ 0 & \frac{1}{s+\beta} \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \\ 0 & e^{-\beta t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\Delta t}) \\ 0 & e^{-\beta\Delta t} \end{bmatrix}.$$

## 5.2 caracterização do ruído da dinâmica

A matriz de covariância de  $\mathbf{w}_k$  em (32) é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} = E\left\{\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t) dt\right]\right. \\ &\quad \left. \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau\right]^T\right\} \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) \mathbf{G}(t) E\{\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(\tau)\} \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) dt d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

em que  $E\{\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(\tau)\}$  é a matriz de covariância do vector da entrada  $\mathbf{u}(t)$ . No caso em que as diversas componentes de  $\mathbf{u}(t)$  são ruídos brancos, independentes e estacionários,

tem-se  $E\{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(\tau)\} = \mathbf{Q}_u(t, \tau)\delta(t - \tau)$  em que a matriz  $\mathbf{Q}_u(t, \tau)$  é diagonal, isto é,  $\mathbf{Q}_u(t, \tau) = \mathbf{Q}_u = \text{diag}\{q_{11}, q_{22}, \dots, q_{pp}\}$ . As propriedades da função delta de Dirac,  $\delta(t - \tau)$ , são usadas para efectuar a integração em  $t$ , na equação (40), obtendo-se

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}_u \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau. \quad (41)$$

Este resultado embora seja correcto é, em geral, difícil de utilizar. Um resultado mais simples, embora menos exacto, pode ser obtido quando o sistema é estacionário (SLIT) e o intervalo de amostragem é suficientemente pequeno para que os modelos discreto e contínuo descrevam essencialmente os mesmos processos. Nesse caso, a matriz de transição de estado é

$$\Phi_k = \Phi(\Delta t) \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k \quad (42)$$

que corresponde a usar apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento em série (37).

A matriz de covariância de  $\mathbf{w}_k$  pode então ser bem aproximada por [5]

$$\mathbf{Q}_k = E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} \approx \mathbf{G} \mathbf{Q}_u \mathbf{G}^T \Delta t. \quad (43)$$

### Exemplo 5:

O modelo de tempo contínuo do processo de Gauss-Markov integrado é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

correspondendo ao circuito da Fig. 5.

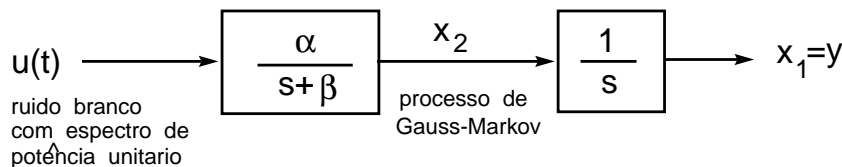


Figura 5: Geração de um processo de Gauss-Markov integrado

Determinar o modelo de estado em tempo discreto.

**Solução:**

Tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

em que  $\Phi_k$  foi calculado anteriormente, valendo

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\Delta t}) \\ 0 & e^{-\beta\Delta t} \end{bmatrix}$$

onde  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ . Para  $\beta\Delta t \ll 1$  podemos aproximar a matriz de transição de estado por

$$\Phi_k \approx I + F\Delta t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 - \beta\Delta t \end{bmatrix}$$

Por outro lado,  $E\{u(t)u(\tau)\} = Q_u\delta(t - \tau)$ , pelo que  $Q_u = 1$  e

$$\mathbf{Q}_k \approx \mathbf{G}\mathbf{Q}_u\mathbf{G}^T\Delta t = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix} \Delta t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \Delta t.$$

## 6 Modelo de estado em processos não-estacionários

Os exemplos seguintes incluem alguns processos que podem ser modelados em termos de variáveis de estado. A existência de estacionariedade e, por conseguinte, de espectro de potência, não são condições necessárias. O único requerimento é o de que o processo se possa de algum modo relacionar com o ruído branco através de uma equação diferencial [6].

### 1 - processo de Wiener (movimento browniano)

O processo de Wiener é definido como o integral do ruído branco gaussiano com condição inicial nula. Logo, o modelo de estado propriado é de primeira ordem

$$\dot{y}(t) = w(t), \quad y(0) = 0$$

onde  $w(t)$  é ruído branco gaussiano de densidade espectral de potência  $q_c$ , ou seja,  $E\{w(t)w(\tau)\} = q_c\delta(t-\tau)$ . Na Fig. 6 apresenta-se o diagrama de blocos correspondente.

O processo de tempo discreto equivalente é

$$y_{k+1} = y_k + w_k,$$

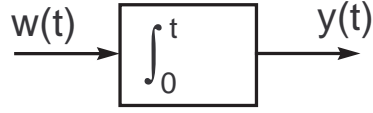


Figura 6: Geração de um movimento browniano

em que a variância do ruído  $w(t)$  é  $q_k = q_c(t_{k+1} - t_k)$ .

## 2 - desvio aleatório [random bias]

Uma constante aleatória satisfaz a equação diferencial

$$\dot{y}(t) = 0, \quad y(0) = a_0$$

A condição inicial  $a_0$  é uma variável aleatória cuja distribuição é suposto conhecer-se. O diagrama de blocos associado é dado na Fig. 7 e o processo discreto equivalente é

$$y_{k+1} = y_k.$$

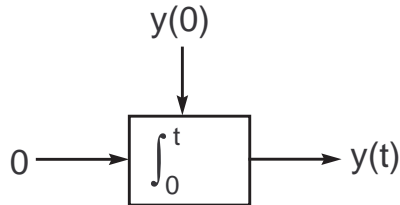


Figura 7: Geração de uma constante aleatória

## 3 - rampa aleatória

Um processo de rampa aleatória com valor inicial e inclinação aleatórios pode ser escrito como

$$y(t) = a_0 + a_1 t$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são variáveis aleatórias. A equação diferencial correspondente é

$$\ddot{y}(t) = 0, \quad y(0) = a_0, \quad \dot{y}(0) = a_1$$

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem pelo que vector de estado do processo  $y(t)$  tem duas componentes. Usando a primeira realização canónica obtém-se a seguinte equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O diagrama de blocos correspondente é representado na Fig. 8.

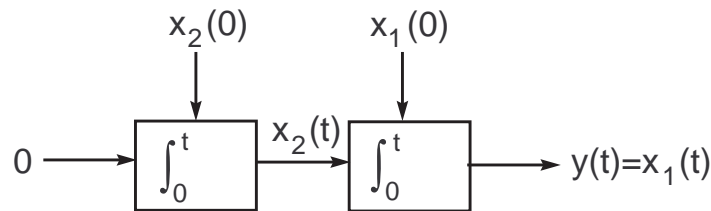


Figura 8: Geração de uma rampa aleatória

O processo discreto equivalente é

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k.$$

## 7 Processos ARMA

Por vezes os processos são intrinsecamente discretos não se encontrando associados à evolução de quaisquer processos de tempo contínuo. A sua relação entrada-saída pode ser descrita por uma equação às diferenças cuja forma geral é

$$\begin{aligned} & y(k+n) + \alpha_{n-1}y(k+n-1) + \dots + \alpha_0y(k) \\ &= \beta_m w(k+m) + \beta_{m-1}w(k+m-1) + \dots + \beta_0w(k), \end{aligned} \quad (44)$$

com  $m = n-1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . A equação (44) é chamada *modelo ARMA* (autoregressive moving average) do processo  $y(k)$ . Tal como no modelo de tempo contínuo podemos imaginar  $y(k)$  como a resposta do sistema linear a uma dada sequência de entrada  $w(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Não podemos, em geral, escrever uma expressão analítica para a saída mas podemos pensar no modelo ARMA como a transformação de uma sequência de entrada branca numa sequência colorida correspondente.

### 7.1 processos auto-regressivos

Um processo auto-regressivo ou AR, de ordem  $n$ , é representado pela seguinte equação às diferenças

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + w(k), \quad (45)$$

onde  $w(k)$  é uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas, independentes, de médias nulas, e identicamente distribuídas

$$\begin{aligned} E\{w(k)\} &= 0 \\ E\{w(k)w(j)\} &= \begin{cases} \sigma^2, & k = j \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

$$p_{w(k)}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-w^2/2\sigma^2)$$

A Fig. 9 mostra um circuito para gerar processos auto-regressivos. Os blocos indicados por  $\Delta$  são elementos de atraso.

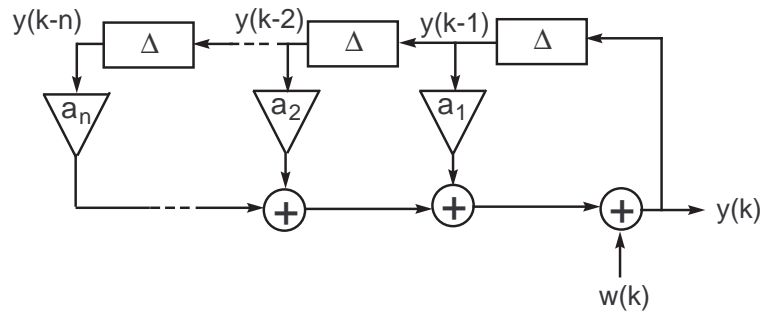


Figura 9: Geração de um processo auto-regressivo

A resposta de um sistema linear discreto e invariante no tempo é dado pela convolução

$$\begin{aligned} y(k) &= w(k) * h(k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)h(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)w(k-m) \end{aligned} \quad (47)$$



em que  $h(k)$  é a resposta impulsional do sistema, isto é, a resposta a um impulso unitário em  $t = 0$  ( $w(0) = 1$ ,  $w(k) = 0$ ,  $\forall k \neq 0$ ).

A função de transferência é

$$H(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \exp(-j2\pi mf), \quad |f| < 1/2 \quad (48)$$

e a densidade espectral de potência é dada por

$$S_y(f) = \sigma^2 |H(f)|^2 \quad (49)$$

Demonstra-se [4] que a densidade espectral de potência de  $y(k)$  é igual a

$$S_y(f) = \frac{\sigma^2}{|1 - \sum_{i=1}^n a_i \exp(-j2\pi fi)|^2}, \quad |f| < 1/2 \quad (50)$$

A equação (45) pode ser facilmente reduzida a um modelo de estado fazendo

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= y(k-1) \\ x_{2,k} &= y(k-2) \\ &\vdots \\ x_{n,k} &= y(k-n) \end{aligned} \quad (51)$$

de onde resulta

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (52)$$

$$y(k) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \mathbf{x}_k + w(k).$$

## 7.2 processos de média móvel

Um processo de média móvel ou MA [moving average], de ordem  $n$ , é representado pela seguinte equação às diferenças

$$y(k) = w(k) + c_1 w(k-1) + \dots + c_n w(k-n) \quad (53)$$

onde as variáveis aleatórias  $w(k)$  verificam as condições (46).

A Fig. 10 mostra um circuito para gerar processos de média móvel.

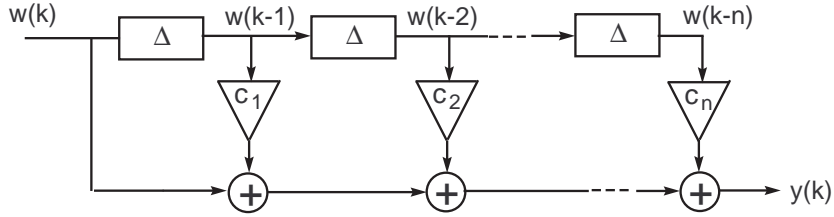


Figura 10: Geração de um processo de média móvel

Demonstra-se [4] que a função de transferência do circuito é

$$H(f) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i \exp(-j2\pi f i), \quad |f| < 1/2 \quad (54)$$

pelo que a densidade espectral de potência de  $y(k)$  é dada por

$$S_y(f) = \sigma^2 |1 + \sum_{i=1}^n c_i \exp(-j2\pi f i)|^2, \quad |f| < 1/2 \quad (55)$$

Para reduzir (53) a um modelo de estado basta fazer

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= w(k-1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (56)$$

$$x_{n,k} = w(k-n)$$

pelo que,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (57)$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \mathbf{x}_k + w(k).$$

## Apêndice - Tabela de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} \frac{d^{n-k} f(t)}{dt^{n-k}} \Big _{t=0}$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
$\int_0^\infty f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n \ (n \geq 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$u(t-a)$ (escalão)	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$u(t) - u(t-a)$ (impulso rectangular)	$\frac{1}{s} (1 - e^{-as})$
$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a-b} (ae^{-at} - be^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$t^n a^{-at} \ (n \geq 0)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sen at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{-at} \sen bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\frac{1}{\omega \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega t} \sen (\omega t \sqrt{1-\xi^2})$	$\frac{1}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$

## Referências

- [1] H. L. Van Trees - “*Detection, Estimation, and Modulation Theory*” (part I), Wiley, N. York, 1968.
- [2] J. D’Azzo and C. Houpis - “*Linear Control System Analysis and Design: conventional and modern*”, McGraw-Hill, Tokyo, 1975.

- [3] K. Ogata, *“State Space Analysis of Control Systems”*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [4] K. Shanmugan and A. Breipohl, *“Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis”*, Wiley, N. York, 1988.
- [5] A. Gelb (ed.), *“Applied Optimal Estimation”*, MIT Press, Cambridge, Ms, 1986.
- [6] R. Brown and P. Hwang, *“Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering”*, third edition, Wiley, N. York, 1997.

# V - Filtragem de Kalman

## 1 Formas quadráticas

Dada uma matriz real simétrica  $\mathbf{A}(n \times n)$  e um vector real  $\mathbf{x}(n \times 1)$  a expressão

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ji} = a_{ij}) \quad (1)$$

é chamada *forma quadrática real* em  $x_i$ . As formas quadráticas podem classificar-se de acordo com:

- Se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , então é uma f. q. *definida positiva*.
- Se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , então é uma f. q. *semi-definida positiva*.
- Se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , então é uma f. q. *semi-definida negativa*.
- Se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , então é uma f. q. *definida negativa*.
- Se  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  puder tomar qualquer sinal então é uma f. q. *indefinida*.

Uma matrix real simétrica  $\mathbf{A}$  diz-se definida ou semi-definida, positiva ou negativa, ou indefinida, de acordo com a forma quadrática que origina.

O critério de Sylvester [1]-[2] pode ser utilizado para verificar se uma matriz real simétrica  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  é definida ou semi-definida positiva.

A matriz  $\mathbf{A}$  é definida positiva sse

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad |\mathbf{A}| > 0 \quad (2)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é semi-definida positiva sse

$$a_{ii} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \dots \quad |\mathbf{A}| = 0 \quad (3)$$

Note-se que a forma quadrática  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  é semi-definida (ou definida) negativa se a matriz  $-\mathbf{A}$  for semi-definida (ou definida) positiva.

**Exemplo:**

Classifique as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$|\mathbf{A}| = 17 > 0, \quad a_{11} = 10 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6 > 0$$

pelo que  $\mathbf{A}$  é definida positiva.

$$|\mathbf{B}| = 0$$

$$b_{11} = 1 > 0, \quad b_{22} = 4 > 0, \quad b_{33} = 9 > 0$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

pelo que  $\mathbf{B}$  é semi-definida positiva.

## 2 Vectores aleatórios

Considere o vector aleatório

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

de dimensão  $m$  em que  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  são variáveis aleatórias. A lei de probabilidade para as variáveis aleatórias do tipo vectorial (vectores aleatórios) é especificada em termos da função de distribuição conjunta

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = P[(X_1 \leq x_1) \dots (X_m \leq x_m)] \quad (5)$$

ou pela função densidade de probabilidade (fdp) conjunta que é a derivada da função de distribuição

$$p_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m}. \quad (6)$$

Da fdp conjunta obtém-se as fdps marginais

$$p_{X_1}(x_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{m-1 \text{ integrais}} p_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m$$

e

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{m-2 \text{ integrais}} p_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) dx_3 \dots dx_m.$$

Note-se que a fdp marginal de qualquer sub-conjunto de  $m$  variáveis aleatórias se obtém por integração das variáveis não incluídas nesse conjunto.

A lei de probabilidade para vectores aleatórios pode ser especificada de forma concisa usando notação vectorial. O vector média de  $\mathbf{X}(t)$  é definido por

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_m) \end{bmatrix} \quad (7)$$

e a matriz de covariância  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  é uma matriz  $m \times m$  semi-definida ou definida positiva dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{X}} &= E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} - \mu_{\mathbf{X}}\mu_{\mathbf{X}}^T \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $\sigma_{ij} = E\{X_i X_j\} - \mu_{X_i} \mu_{X_j}$ . As componentes de  $\mathbf{X}$  dizem-se incorrelacionadas quando  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , e independentes se

$$p_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i). \quad (9)$$

Um vector aleatório  $\mathbf{X}$  é gaussiano se a sua fdp for da forma

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{X}}) \right] \quad (10)$$

Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz de  $(k \times m)$  e  $\mathbf{X}$  é um vector gaussiano caracterizado pela fdp (10), então  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  é um vector gaussiano de dimensão  $k$  com

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T\end{aligned}\tag{11}$$

• **funções de um vector aleatório**

Sejam os vectores aleatórios  $\mathbf{X}$  ( $n \times 1$ ) e  $\mathbf{Y}$  ( $n \times 1$ ) definidos pela fdps conjuntas  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  e  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ . Admitamos que as componentes de  $\mathbf{Y}$  se relacionam com as componentes de  $\mathbf{X}$  através de  $Y_i = g_i(\mathbf{X})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se as funções  $g_i(\mathbf{X})$  forem invertíveis, isto é, se for possível exprimir as componentes  $X_i$  como funções do vector  $\mathbf{Y}$ , ou seja  $X_i = g_i^{-1}(\mathbf{Y})$ , então a fdp conjunta de  $\mathbf{Y}$  é dada por

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}}(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1}, \dots, x_n = g_n^{-1})|J|,\tag{12}$$

onde o jacobiano da transformação é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}.\tag{13}$$

### 3 Desigualdades de Chebychev e de Chernoff

A *desigualdade de Chebychev* é aplicável em situações em que se pretende calcular a probabilidade de ocorrência de uma variável aleatória  $X$  da qual se conhece apenas a média  $\mu_X$  e a variância  $\sigma_X^2$  (isto é, a função densidade de probabilidade é desconhecida). A desigualdade é

$$P\{|X - \mu_X| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}\tag{14}$$

Esta igualdade embora seja facilmente aplicável conduz, em geral, a aproximações pouco precisas. Uma alternativa que leva a aproximações mais rigorosas é a desigualdade de Chernoff [3]

$$P(X \geq \epsilon) \leq \min \exp(-t\epsilon + \ln E\{e^{tX}\})\tag{15}$$

A desvantagem desta aproximação é que requer a determinação de  $E\{e^{tX}\}$  e, por conseguinte, um maior conhecimento da distribuição de  $X$ .



## 4 Processos de Gauss-Markov

Os processos de Gauss-Markov constituem uma classe de processos aleatórios que podem ser gerados pela passagem de ruído branco gaussiano através de circuitos lineares simples. Têm muitas aplicações em Engenharia porque se ajustam com razoável precisão a um número elevado de processos físicos e caracterizam-se por uma descrição matemática bastante simples.

Um processo do tipo contínuo ou discreto,  $\mathbf{x}(t)$ , chama-se *Markov de primeira ordem* se para qualquer  $k$  e  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  se tiver

$$p[\mathbf{x}(t_k)|\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_{k-1})] = p[\mathbf{x}(t_k)|\mathbf{x}(t_{k-1})] \quad (16)$$

em que  $p(\cdot|\cdot)$  é a função densidade de probabilidade de  $\mathbf{x}(t_k)$  condicionada ao conjunto de observações  $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_{k-1})$ . A equação (14) significa que o processo  $\mathbf{x}(t_k)$  depende apenas do valor assumido imediatamente no passado,  $\mathbf{x}(t_{k-1})$ . Se o processo contínuo  $\mathbf{x}(t)$  for Markov de primeira ordem, pode ser associado à equação diferencial estocástica

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \beta\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t) \quad (17)$$

onde  $\mathbf{w}(t)$  é ruído branco (para processos de Markov de primeira ordem discretos, a relação associada é uma equação às diferenças de primeira ordem).

### Exemplo:

Mostre que o movimento browniano, definido pela equação às diferenças  $x_{k+1} = x_k + w_{k+1}$  é um processo de Markov.

Solução :

Seja

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + w_1$$

$$x_2 = x_1 + w_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + w_n$$

em que  $w_1, w_2, \dots$  são variáveis aleatórias gaussianas independentes, de média nula e variância  $\sigma^2$ . Designe  $N(m, \sigma^2)$  uma v.a. gaussiana de média  $m$  e variância  $\sigma^2$ . Então

$$\begin{aligned}
p(x_1|x_0) &= N(0, \sigma^2) \\
p(x_2|x_0, x_1) &= N(x_1, \sigma^2) \\
&\vdots \\
p(x_n|x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= N(x_{n-1}, \sigma^2)
\end{aligned}$$

Logo,  $p(x_n|x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1})$ .

Um processo de Markov que é simultaneamente gaussiano, como o movimento browniano, designa-se por *processo de Gauss-Markov*.

## 5 Cadeias de Markov

Quando as v.a.  $x(n)$  só podem tomar um conjunto finito de valores a sequência de Markov  $x(0), x(1), \dots, x(n) \dots$  é designada de cadeia de Markov e os valores de  $x(n)$  são referidos por *estados* da cadeia. Para definir uma cadeia de Markov é suficiente especificar as probabilidades  $P\{x(n) = j\}$  e  $P\{x(n+1) = k|x(n) = j\}$ . Estas últimas probabilidades designam-se de *probabilidades de transição*. Uma cadeia de Markov diz-se *homogénea* (ou com probabilidades de transição estacionárias) se  $P\{x(n+1) = k|x(n) = j\}$  for independente de  $n$ . As probabilidades de transição de estado podem arranjar-se numa *matriz de transição*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{q1} & p_{q2} & \cdots & p_{qq} \end{bmatrix} \quad (18)$$

em que  $q$  é a dimensão da cadeia (número de estados) e  $p_{jk}$  é a probabilidade de transição do estado  $j$  para o estado  $k$ . Por conseguinte, a soma dos elementos de uma linha da matriz  $P$  é sempre igual a 1.

As cadeias de Markov homogéneas podem ser representadas por diagramas de transição de estado como se mostra na figura seguinte.

Seja o vector de probabilidades de estado no instante  $n$

$$w^{(n)} = [w_1^{(n)} w_2^{(n)} \cdots w_q^{(n)}] \quad (19)$$

O vector de probabilidades de estado no instante  $n+k$  é dado por

$$w^{(n+k)} = w^{(n)} P^k \quad (20)$$

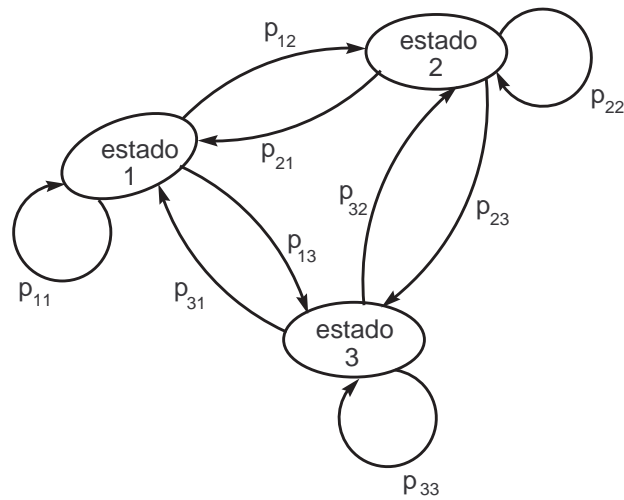
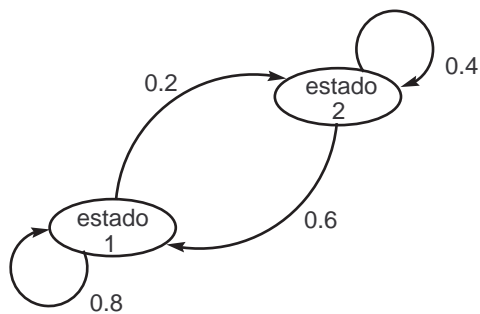


Figura 1: Exemplo de diagrama de transição de uma cadeia de Markov homogênea

**Exemplo:**

Considere o seguinte diagrama de transição de estados.



Admitindo que  $w^{(0)} = [0.1 \ 0.9]$  determine  $w^{(3)}$  e  $w^{(10)}$ .

Solução:

Tem-se

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

pelo que

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}, \quad w^{(3)} = w^{(0)} P^3 = [0.7448 \quad 0.2552] \quad (22)$$

e,

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad w^{(10)} = w^{(0)} P^{10} = [0.75 \quad 0.25] \quad (23)$$

O valor assintótico de  $P$  quando  $n \rightarrow \infty$  pode obter-se facilmente da equação

$$P^\infty = P^\infty P \quad (24)$$

A solução deste sistema de equações é indeterminada obtendo-se  $p_{11} = 3p_{12}$  e  $p_{21} = 3p_{22}$ . No entanto, tendo em conta que  $p_{11} + p_{12} = 1$  e  $p_{21} + p_{22} = 1$ , obtém-se

$$P^\infty = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (25)$$

## 6 Geração de números aleatórios

### 6.1 números com distribuição uniforme

Para implementar programas de simulação de sistemas dinâmicos há necessidade de gerar sequências de ruído branco gaussiano. Vamos aqui descrever um método básico para a geração de sequências de números aleatórios através de uma fórmula recursiva.

A geração de números aleatórios em computador inicia-se com uma fórmula para produzir números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo  $]0, 1]$ . Aplicando transformações convenientes à sequência distribuída uniformemente podemos obter sequências de números aleatórios com distribuições e propriedades arbitrárias [8].

Um dos métodos preferidos para a geração de números aleatórios, designado por método congruencial, usa a seguinte fórmula recursiva [8], [9]

$$X(k) = [\alpha X(k-1)] \text{ modulo } M, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

onde  $\alpha$  é um inteiro entre 1 e  $M$ , em que  $M$  é um número primo ou uma potência inteira de um número primo,  $p^m$ . A geração de números aleatórios começa com a utilização da “semente” inicial  $X(0)$ . A equação produzirá inteiros uniformemente distribuídos entre 1 e  $M$ . Dividindo  $X(k)$  por  $M$  podemos gerar valores do intervalo  $]0, 1[$ , isto é,  $U(k) = X(k)/M$ , onde  $U(k)$  é uma sequência uniformemente distribuída em  $]0, 1[$ . Se  $M$  for muito grande e  $\alpha$  for convenientemente escolhido os números na sequência parecerão aleatórios (independentes) e a sequência terá um período máximo de  $M - 1$ .

### 6.2 números com distribuição gaussiana

Seja agora  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2]^T$  um vector aleatório em que as componentes são v.a. independentes distribuídas uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ . Iremos provar que as componentes do vector  $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2]^T$  com

$$\begin{aligned} Y_1 &= [-2 \ln(X_1)]^{1/2} \cos(2\pi X_2) \\ Y_2 &= [-2 \ln(X_1)]^{1/2} \sin(2\pi X_2) \end{aligned} \quad (27)$$

são v.a. gaussianas, independentes, de média nula e variância unitária. Sejam  $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$  e  $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ . Por inversão obtém-se

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1^{-1}(Y_1, Y_2) = \exp\left(-\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2}\right) \\ X_2 &= g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{Y_2}{Y_1}. \end{aligned}$$

O jacobiano da transformação, definido em (13), é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right)$$

Como  $p_{\mathbf{X}}(X_1, X_2) = \Pi(X_1 - 1/2)\Pi(X_2 - 1/2)$ , tem-se, devido a (12)

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) &= p_{\mathbf{X}}(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1})|J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

pelo que  $Y_1$  e  $Y_2$  são duas v.a. gaussianas independentes de média nula e variância unitária. Este algoritmo, que permite obter um par de v.a. gaussianas a partir de um par de v.a. distribuídas uniformemente é conhecido por método de Box-Muller. Note-se que (27) produz números distribuídos no intervalo  $] -\infty, +\infty[$ . Se  $m$  for o menor número real positivo que pode ser representado num dado computador, então o algoritmo produzirá números no intervalo  $] -a, a[$  com  $a = (-2 \ln m)^{1/2}$ .

Apresentamos, de seguida, um programa em Pascal que permite gerar números pseudo-aleatórios com distribuição gaussiana de média nula e variância unitária utilizando o método de Box-Muller. O gerador uniforme apresenta um período  $> 10^7$ . Este algoritmo encontra-se descrito em [10]. Outros algoritmos são propostos, por exemplo, em [8] ou [9].

```
Const mp=64;
```

```
Var gauss1, gauss2, twopi: double;
```

```

mm, nn: array[1..6] of 1..99;
tt: array[1..6] of double;
start: boolean;
j, npontos: integer;

```

```

Function uniforme: double;
{gera numeros aleatorios com distribuicao uniforme em ]0, 1[}
var i, k, kd, soma: integer;
    nc: array[1..6] of integer;
    ranf: double;

```

```

begin

```

```

    if start then begin

```

```

        mm[1]:= 59;
        mm[2]:= 47;
        mm[3]:= 62;
        mm[4]:= 38;
        mm[5]:= 45;
        mm[6]:= 23;
        nn[1]:= 25;
        nn[2]:= 8;
        nn[3]:= 31;
        nn[4]:= 45;
        nn[5]:= 20;
        nn[6]:= 17;
        tt[1]:= exp(-6*ln(2));
        tt[2]:= exp(-12*ln(2));
        tt[3]:= exp(-18*ln(2));
        tt[4]:= exp(-24*ln(2));
        tt[5]:= exp(-30*ln(2));
        tt[6]:= exp(-36*ln(2));
        start:= false;

```

```

    end;

```

```

    for i:= 1 to 6 do begin

```

```

        soma:= 13-i;
        kk:= 0;
        for k:= 7-i to 6 do kk:= kk+nn[k]*mm[soma-k];
        if i>1 then kk:= kk+kd;
        kd:= kk div mp;
        nc[i]:= kk-kd*mp;

```

```

    end;

```

```

    ranf:= 0;

```

```

    for i:= 1 to 6 do begin

```

```

        nn[i]:= nc[7-i];
        ranf:= ranf+nn[i]*tt[i];

```

```

    end;

```

```

    Uniforme:= ranf;
end;

Procedure Gauss;
{gera numeros aleatorios com distribuicao gaussiana de media 0 e variancia 1}
var x1, x2: double;

begin
    x1:= sqrt(-2.0*ln(Uniforme));
    x2:= twopi*Uniforme;
    gauss1:= x1*cos(x2);
    gauss2:= x1*sin(x2);
end;

begin
    twopi:= 8.0*arctan(1.0);
    start:= true;
    for j:= 1 to npontos do Gauss;
end.

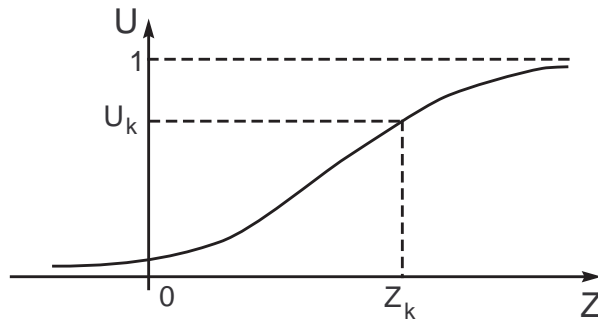
```

## 6.3 números com uma distribuição arbitrária

### 6.3.1 método da transformação (analítico)

Consideremos a transformação  $Y = F_Z(z)$  em que  $F_Z(z)$  é a função de distribuição cumulativa da v.a.  $Z$ . Pode demonstrar-se [8] que  $Y$  apresenta uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Podemos aproveitar este facto para gerar números aleatórios com fdp  $p_Z(z)$  usando  $Z = F_Z^{-1}(Y)$ , em que  $Y$  é uniformemente distribuída:

- Gerar  $U$  uniformemente distribuído em  $[0, 1]$ ;
- Gerar  $Z = F_Z^{-1}(U)$  de acordo com a figura;  $Z$  obedece à fdp  $p_Z(z)$ .



**Exemplo:**

Determinar um algoritmo para gerar v.a. distribuídas exponencialmente usando o método analítico.

Solução:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda z), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (28)$$

Logo

$$F_Z(z) = 1 - \exp(-\lambda z), \quad z \geq 0 \quad (29)$$

e fazendo  $U = F_Z(z)$  obtém-se  $U = 1 - \exp(-\lambda z)$ , com  $z \geq 0$  ou

$$z = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \quad (30)$$

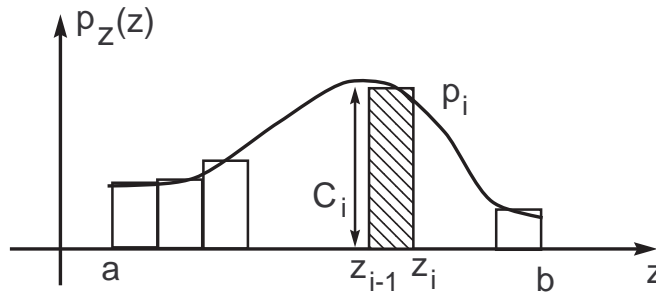
Como  $U$  é uniforme em  $[0, 1]$  facilmente se conclui que  $1 - U$  é também uniforme no mesmo intervalo, pelo que se pode poupar uma subtracção se considerarmos

$$z = -\frac{1}{\lambda} \ln U \quad (31)$$

Embora a sequência gerada em (31) não seja a mesma que a gerada por (30), elas são estatisticamente equivalentes.

### 6.3.2 método da transformação (empírico)

Quando a transformação inversa de v.a. não pode ser expressa em forma fechada, podemos utilizar algoritmos de busca empírica para implementar o método da transformação [8]. Se  $Z$  for uma v.a. contínua, a fdp é quantizada de acordo com a figura



Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_N$  as probabilidades das  $N$  células da distribuição quantizada uniformemente. Podemos usar o seguinte algoritmo para gerar amostras da v.v  $Z$ :

- Gerar  $U$  uniformemente distribuído em  $[0, 1]$ ;



- Seja  $F_i = \sum_{j=1}^i p_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , com  $F_0 = 0$ ;
- Determinar o menor valor de  $i$  que satisfaz

$$F_{i-1} < U \leq F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

- Gerar  $Z = z_{i-1} + (U - F_{i-1})/C_i$ .

O último passo é usado para obter um valor interpolado de  $Z$  no intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$ .

## 7 Estimação recursiva

Vimos na secção 3.3 do Capítulo IV (Estimadores lineares de variância mínima) que a determinação do parâmetro  $\theta$  é uma operação *linear* sobre todos os dados das observações (*estimação em bloco* ou *batch*). De seguida, iremos considerar a forma *recursiva* do estimador linear que se aplica a variáveis aleatórias gaussianas.

Num filtro recursivo não há necessidade de guardar as observações passadas para se poder calcular as estimativas presentes. Este conceito é ilustrado no seguinte exemplo.

### Exemplo:

Considere-se o problema de estimar a constante escalar  $x$ , baseado em  $k$  observações ruidosas  $z_i = x + v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , em que se assume que  $v_i$  é uma sequência branca. Usando os resultados da secção 3.3 do Capítulo IV obtém-se a seguinte estimativa não-enviesada, de variância mínima

$$\hat{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i. \quad (33)$$

Quando se dispuser de mais uma observação,  $z_{k+1}$ , poder-se-á calcular uma nova estimativa

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z_i. \quad (34)$$

Mas, esta expressão pode ser manipulada por forma a evidenciar a estimativa anterior

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{k}{k+1} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i \right) + \frac{1}{k+1} z_{k+1} = \frac{k}{k+1} \hat{x}_k + \frac{1}{k+1} z_{k+1}. \quad (35)$$

Quer dizer, usando (35) em vez de (34) podemos evitar o armazenamento das observações dado que toda a informação prévia se encontra contida na estimativa anterior,  $\hat{x}_k$ . Trata-se da forma *recursiva* do estimador.

## 7.1 Filtro de Kalman discreto

Uma solução recursiva para o problema da estimação linear foi dada pela primeira vez por R. E. Kalman em 1960. Cada *iteração* (correspondente a um valor do índice temporal  $k$ ) consta de dois passos [4], [6]: a **predição**, em que se estima  $\mathbf{x}_k$  usando o conjunto de observações passadas  $\mathbf{Z}_{k-1} = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k-1}\}$  e a **filtragem**, em que se estima  $\mathbf{x}_k$  baseado na estimativa de predição e na presente observação,  $\mathbf{z}_k$ .

Começamos por assumir que o processo aleatório a ser estimado pode ser modelado na forma (**modelo da dinâmica**)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Considera-se que a observação (medição) do processo ocorre em instantes discretos de acordo com a relação linear (**modelo das observações**)

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (37)$$

onde:

$\mathbf{x}_k = (n \times 1)$  vector de estado em  $t = t_k$

$\Phi_k = (n \times n)$  matriz de transição de estado de  $t_k$  para  $t_{k+1}$

$\mathbf{w}_k = (n \times 1)$  vector de ruído da dinâmica

$\mathbf{z}_k = (m \times 1)$  vector das observações em  $t = t_k$

$\mathbf{H}_k = (m \times n)$  matriz das observações

$\mathbf{v}_k = (m \times 1)$  vector de ruído (erro) das observações em  $t = t_k$ .

Assume-se que  $\mathbf{v}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  é uma sequência branca gaussiana com matriz de covariância conhecida e com uma correlação cruzada nula relativamente à sequência de  $\mathbf{w}_k$ . As matrizes de covariância de  $\mathbf{w}_k$  e de  $\mathbf{v}_k$  são dadas por

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T\} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \\ E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T\} &= \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ \mathbf{0}, & i \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T\} = \mathbf{0}, \quad \forall i, k.$$

A dedução das equações do filtro de Kalman discreto que faremos adiante segue essencialmente [4].

Sejam  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1}\}$  e  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k\}$  respectivamente as estimativas de  $\mathbf{x}_k$  nos passos de predição e de filtragem da iteração  $k$ , e  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$  os erros de estimação correspondentes, isto é

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{x}}(k|k). \quad (40)$$

Admitamos que as estimativas de filtragem e de predição se relacionam através da seguinte combinação linear

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k. \quad (41)$$

Substituindo (41) em (40) fica

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k. \end{aligned}$$

Usando (37) obtém-se

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{K}'_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k [\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k] - \mathbf{x}_k.$$

A utilização de (39) e o reagrupamento dos termos conduz a

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = [\mathbf{K}'_k + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k - \mathbf{I}] \mathbf{x}_k + \mathbf{K}'_k \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k. \quad (42)$$

Para que as estimativas de predição e de filtragem sejam não-enviesadas é necessário que  $E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\} = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\} = 0$ . Como, por definição,  $E\{\mathbf{v}_k\} = 0$ , então a expressão no interior dos parêntesis rectos em (42) deverá ser nula, ou seja

$$\mathbf{K}'_k = \mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k, \quad (43)$$

obtendo-se para (42)

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (44)$$

e a estimativa de filtragem em (41) vale

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]. \quad (45)$$

A quantidade  $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  designa-se de processo de inovações [7]. Trata-se de uma sequência de ruído branco gaussiano de média nula.

### 7.1.1 matriz de covariância da filtragem

A matriz de covariância do erro da filtragem, definida por

$$\mathbf{P}(k|k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)\} \quad (46)$$

pode ser determinada usando (44)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k][(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k]^T\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_kE\{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T\}\mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (47)$$

Note-se que as v.a.  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)$  e  $\mathbf{v}_k$  são independentes e, portanto, incorrelacionadas. Defina-se agora a matriz de covariância do erro da predição como

$$\mathbf{P}(k|k-1) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\} \quad (48)$$

Atendendo a (38) obtém-se para (47)

$$\mathbf{P}(k|k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k]\mathbf{P}(k|k-1)[\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k]^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T. \quad (49)$$

### 7.1.2 matriz do ganho de Kalman

O critério de escolha da matriz óptima  $\mathbf{K}_k$  (matriz de ganho de Kalman) consiste em minimizar a função de custos [4]

$$J = \text{traço}[\mathbf{P}(k|k)], \quad (50)$$

em que  $\text{traço}(\mathbf{A})$ , onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada, é a soma dos elementos da diagonal principal.

A minimização da função de custos corresponde a igualar a zero a derivada do  $\text{traço}$  de  $\mathbf{P}(k|k)$  em ordem à matriz  $\mathbf{K}_k$ , ou seja

$$\frac{d[\text{traço} \mathbf{P}(k|k)]}{d\mathbf{K}_k} = 0 \longrightarrow \mathbf{K}_k \text{ (óptimo)} \quad (51)$$

A derivada de um escalar  $s$  em ordem a uma matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  é definida por

$$\frac{ds}{d\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{ds}{da_{11}} & \frac{ds}{da_{12}} & \cdots \\ \frac{ds}{da_{21}} & \frac{ds}{da_{22}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Além disso, iremos fazer uso das seguintes fórmulas de diferenciação matricial

$$\frac{d[\text{traço}(\mathbf{AXB})]}{d\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T, \quad (53)$$

$$\frac{d[\text{traço}(\mathbf{ACA}^T)]}{d\mathbf{A}} = 2\mathbf{AC}, \quad (54)$$

em que  $\mathbf{AXB}$  é uma matriz quadrada e  $\mathbf{C}$  é uma matriz simétrica.

Para poder aplicar os resultados (53)-(54) na resolução da equação (51) é necessário expandir previamente o membro direito de (49). O resultado é

$$\frac{d[\text{traço} \mathbf{P}(k|k)]}{d\mathbf{K}_k} = -2[\mathbf{H}_k \mathbf{P}(k|k-1)]^T + 2\mathbf{K}_k[\mathbf{H}_k \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k], \quad (55)$$

pelo que, igualando a zero se obtém o *ganho de Kalman*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (56)$$

É possível simplificar a equação (49) por forma a obter-se

$$\mathbf{P}(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}(k|k-1). \quad (57)$$

No entanto, em cálculos numéricos a expressão (49), designada de forma estabilizada ou de Joseph, é preferível a (57) por ser melhor condicionada, isto é, por ser menos sensível a erros numéricos (devidos, por exemplo, ao cálculo aproximado de  $\mathbf{K}_k$ ) [4].

### 7.1.3 equações da predição

Aplicando o operador média condicional a (36) obtém-se

$$E\{\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_k\} = \Phi_k E\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k\} + E\{\mathbf{w}_k\},$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}(k|k). \quad (58)$$

A matriz de covariância do erro da predição é, por definição

$$\mathbf{P}(k+1|k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k+1|k)\}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - x_{k+1} \\
 &= \Phi_k \hat{\mathbf{x}}(k|k) - [\Phi_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}_k] \\
 &= \Phi_k \tilde{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{w}_k
 \end{aligned}$$

pelo que

$$P(k+1|k) = E\{[\Phi_k \tilde{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{w}_k][\Phi_k \tilde{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{w}_k]^T\}$$

e tendo em conta (38) e (46)

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \Phi_k E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)\}\Phi_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

ou seja,

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \Phi_k \mathbf{P}(k|k) \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (59)$$

#### 7.1.4 resumo das equações do filtro de Kalman discreto

Passo de filtragem:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}(k|k)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) \longrightarrow \mathbf{P}(k|k) \text{ eq. (49)}$$

ganho de Kalman:  $\mathbf{K}_k$  eq. (56).

Passo de predição:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) \longrightarrow \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \text{ eq. (58)}$$

$$\mathbf{P}(k|k) \longrightarrow \mathbf{P}(k+1|k) \text{ eq. (59)}.$$

O ganho de Kalman, eq. (56), não depende das observações pelo que pode ser calculado previamente à actuação do filtro.

O estabelecimento das condições iniciais do filtro de Kalman discreto consiste em atribuir os seguintes valores

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}(0|-1)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}(0|-1). \quad (60)$$

O funcionamento do filtro de Kalman encontra-se descrito no esquema seguinte. São também representados os modelos de geração do vector de estado (modelo da dinâmica) e das observações.

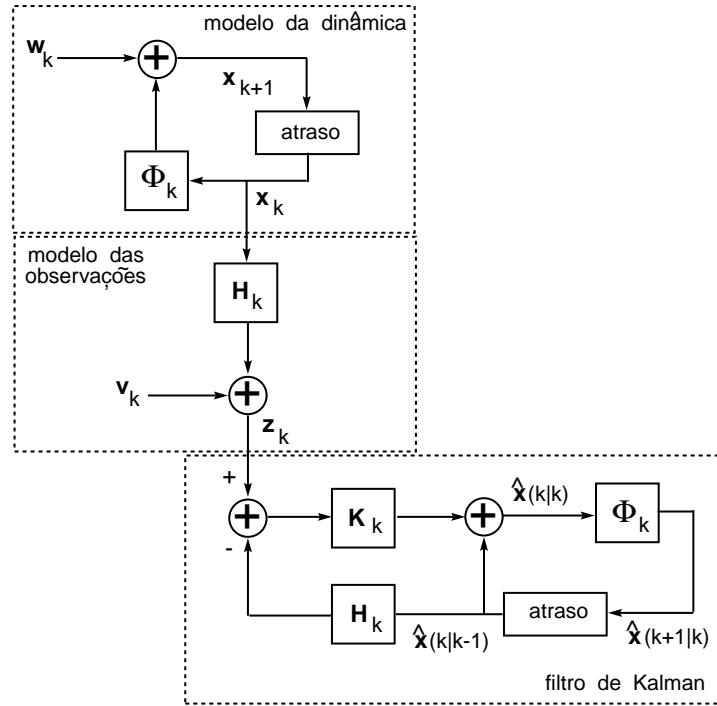


Figura 2: Funcionamento do filtro de Kalman: modelos da dinâmica, das observações e do estimador

### 7.1.5 modelo da dinâmica com entradas determinísticas

Em certos casos, o modelo da dinâmica (36) contém também um vector de entrada determinístico (conhecido),  $\mathbf{u}_k$ , isto é

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k + \Lambda_k \mathbf{u}_k. \quad (36')$$

Nesses casos há que modificar o passo da predição por forma a incluir a entrada determinística. Para o efeito, a equação (58) deverá ser substituída por

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}(k|k) + \Lambda_k \mathbf{u}_k, \quad (58')$$

mantendo-se as restantes equações do filtro de Kalman inalteradas.

#### Exemplo:

Considere o processo de Wiener  $x(t)$  com  $E\{x(t_1)x(t_2)\} = q_c \min\{t_1, t_2\}$ . A equação às diferenças correspondente é

$$x_{k+1} = x_k + w_k, \quad x_0 = 0,$$

em que  $w_k$  é uma sequência branca gaussiana de variância  $q = q_c \Delta t$  onde  $\Delta t$  é o intervalo de discretização. As observações ruidosas de  $x_k$  são dadas por

$$z_k = x_k + v_k,$$

em que  $v_k$  é uma sequência branca gaussiana de variância  $r$ .

Determine as equações do filtro de Kalman discreto para este problema. Quais os valores assintóticos da variância do erro de estimação nos passos de filtragem e de predição ?

Solução:

O filtro de Kalman discreto para este problema é escalar (ou de primeira ordem) dado que o vector de estado é escalar.

Tem-se

$$\Phi_k = 1$$

$$\mathbf{H}_k = 1$$

$$\mathbf{Q}_k = q$$

$$\mathbf{R}_k = r$$

As condições iniciais do problema são

$$\hat{x}(0|-1) = 0$$

$$\hat{P}(0|-1) = 0$$

O valor inicial de  $P(0|-1)$  significa o conhecimento perfeito do valor do estado no instante inicial ( $x_0 = 0$ ).

a) Passo de filtragem:

$$K_k = \frac{P(k|k-1)}{P(k|k-1) + r}$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + \frac{P(k|k-1)}{P(k|k-1) + r} [z_k - \hat{x}(k|k-1)]$$

$$= \frac{r}{P(k|k-1) + r} \hat{x}(k|k-1) + \frac{P(k|k-1)}{P(k|k-1) + r} z_k$$



$$\begin{aligned}
P(k|k) &= (1 - K_k)^2 P(k|k-1) + r K_k^2 \\
&= \frac{r P(k|k-1)}{r + P(k|k-1)}
\end{aligned}$$

b) Passo de predição:

$$\hat{x}(k+1|k) = \hat{x}(k|k)$$

$$P(k+1|k) = P(k|k) + q.$$

Na figura seguinte mostra-se a evolução temporal de uma função-amostra do processo de Wiener em que  $q = 0.01$  (curva a cheio). As observações correspondem à linha a ponteados onde o ruído das observações é uma sequência branca gaussiana de variância  $r = 0.5$ . O sinal estimado pelo filtro de Kalman é representado a tracejado.

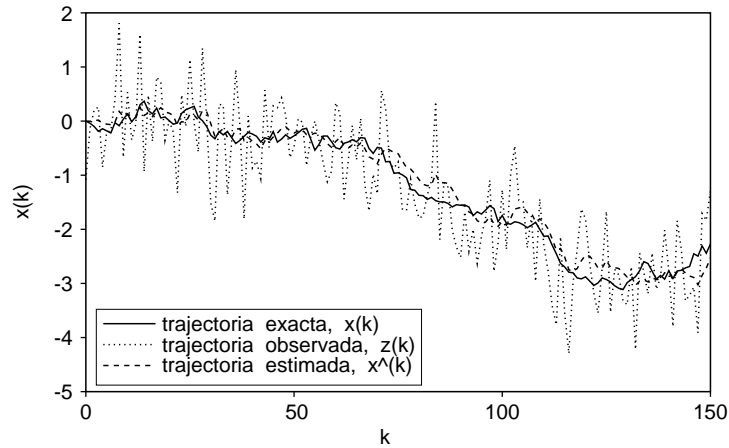


Figura 3: Função-amostra de movimento browniano, observações e estimativas

Para determinar o valor assintótico de  $P(k|k)$  (quando  $k \rightarrow \infty$ ) faz-se

$$P(k|k) = P(k-1|k-1) = P_\infty$$

pelo que

$$P(k|k) = \frac{r P(k|k-1)}{r + P(k|k-1)} = \frac{r [P(k-1|k-1) + q]}{r + P(k-1|k-1) + q},$$

ou seja

$$P_\infty = \frac{r(P_\infty + q)}{r + P_\infty + q},$$

de onde se tira

$$P_{\infty} = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4qr}.$$

O valor assintótico de  $P(k+1|k)$  é, por conseguinte,  $P_{\infty} + q$ .

As evoluções temporais das variâncias dos erros de estimação da filtragem e da predição são exibidas na figura seguinte para  $q = 0.01$  e  $r = 0.5$ .

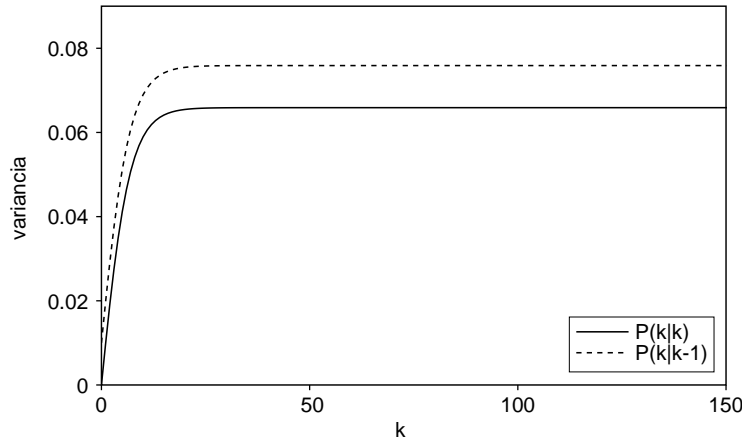


Figura 4: Evolução das variâncias dos erros de estimação nos passos de filtragem e de predição

### Exemplo:

O movimento browniano integrado é caracterizado por

$$\ddot{y}(t) = w(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

em que  $w(t)$  é ruído branco gaussiano com densidade espectral de potência  $S_w(\omega) = q_c$ . As observações ruidosas de  $y_k$  são dadas por  $z_k = y_k + v_k$ , em que  $v_k$  é uma sequência branca gaussiana de variância  $r$ . Determine as equações do filtro de Kalman discreto para este problema.

Solução:

O modelo de estado contínuo é

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = w(t),$$

pelo que a equação da dinâmica é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G w(t).$$

A equação às diferenças correspondente é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \Phi_k \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \Gamma_k w_k$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_k &= e^{\mathbf{F}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{F}^2(\Delta t)^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A sequência  $\Gamma_k \mathbf{w}_k$  é gaussiana branca com matriz de covariância

$$\begin{aligned} Q_k &= E\{\Gamma_k w_k (\Gamma_k w_k)^T\} \\ &= \Gamma_k E\{w_k w_k^T\} \Gamma_k^T = G q_c G^T \Delta t \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} Q_k &= q_c \Delta t \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

em que  $q = q_c \Delta t$ .

A equação das observações é

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + v_k.$$

Logo,  $\mathbf{H}_k = [1 \ 0]$ .

As condições iniciais do problema são

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(0|-1) &= [0 \ 0]^T \\ \hat{\mathbf{P}}(0|-1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

a) Passo de filtragem:

Faça-se por facilidade

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

O ganho de Kalman é

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left( [1 \ 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{p_{11} + r} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \frac{1}{p_{11} + r} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} (z_k - [1 \ 0]\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|k-1) \\ \hat{x}_2(k|k-1) \end{bmatrix} + \frac{z_k - x_1(k|k-1)}{p_{11} + r} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k|k) &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{p_{11} + r} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} [1 \ 0] \right) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{p_{11} + r} \begin{bmatrix} rp_{11} & rp_{12} \\ rp_{12} & p_{22}(p_{11} + r) - p_{12}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Passo de predição:

Seja por facilidade

$$\mathbf{P}(k|k) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k|k) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|k) + \hat{x}_2(k|k)\Delta t \\ \hat{x}_2(k|k) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1|k) &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} + 2f_{12}\Delta t + f_{22}(\Delta t)^2 & f_{12} + f_{22}\Delta t \\ f_{12} + f_{22}\Delta t & f_{22} + q \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

### 7.1.6 Comportamento assintótico

Quando as matrizes incluídas nos modelos da dinâmica e das observações são constantes no tempo e os ruídos da dinâmica e das observações são estacionários ( $Q$  e  $R$  não dependem do tempo), o processo de filtragem pode atingir o regime estacionário (steady state) em que as matrizes de covariância  $P(k|k-1)$  e  $P(k|k)$  são constantes.

A *observabilidade completa* é uma condição suficiente para a existência de uma solução de regime estacionário. A *controlabilidade completa* assegura que a solução de regime estacionário é única [4].

Consideremos a equação da dinâmica

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma \tilde{w}_k \quad (61)$$

e a equação das observações

$$z_k = H x_k + v_k \quad (62)$$

A controlabilidade completa do modelo da dinâmica é equivalente a ter-se [4]

$$\text{rank}[\Gamma \mid \Phi\Gamma \mid \Phi^2\Gamma \mid \dots \mid \Phi^{N-1}\Gamma] = N \quad (63)$$

em que  $N$  é dimensão do vector de estado.

A observabilidade completa do sistema dinâmico é equivalente a ter-se [4]

$$\text{rank}[H^T \mid \Phi^T H^T \mid (\Phi^T)^2 H^T \mid \dots \mid (\Phi^T)^{N-1} H^T] = N \quad (64)$$

Exemplo:

Consideremos o problema de filtragem de Kalman anterior em que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad 0]$$

Obtém-se para a controlabilidade

$$\text{rank}[\Gamma \mid \Phi\Gamma] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & \Delta t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

e para a observabilidade

$$\text{rank}[H^T \mid \Phi^T H^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} = 2$$

Como  $N = 2$ , o sistema dinâmico é completamente controlável e completamente observável o que permite ao filtro de Kalman atingir o regime estacionário.

Um resultado importante é o seguinte [6]. Se o sistema dinâmico é completamente controlável e completamente observável, e se  $P(0|-1)$  for uma matriz semi-definida ou definida positiva, então o filtro de Kalman é assintoticamente estável. Como consequência, o efeito da estatística inicial  $P(0|-1)$  é esquecido quando o número de iterações (ou seja, de observações)  $k$  tende para infinito. Este resultado é importante dado que  $P(0|-1)$  é normalmente insuficientemente conhecido. Os erros numéricos de  $P(k|k)$  tendem a desaparecer quando  $k \rightarrow \infty$  e, portanto, as matrizes de covariância do erro de estimação tornam-se assintoticamente independentes do valor inicial  $P(0|-1)$ .

## 7.2 Filtragem não-linear

Na secção anterior analisámos o problema da estimação de estado recursiva tendo obtido no filtro de Kalman a solução óptima para modelos lineares da dinâmica e das observações, respectivamente as eqs. (36) e (37). Se a condição inicial para o vector de estado,  $\hat{\mathbf{x}}(0|-1)$ , for gaussiana, o problema da propagação da f.d.p. *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ , em que  $\mathbf{Z}_k$  é a sequência das observações passadas e actual, reduz-se à propagação de funções gaussianas, as quais são caracterizadas pela média  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k\}$  e pela matriz de covariância  $\mathbf{P}(k|k) = E\{[\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}_k][\hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}_k]^T\}$ , de acordo com (45) e (49). Prova-se [4] que o filtro de Kalman é um estimador óptimo no sentido de minimizar os erros quadráticos médios. Um facto notável é que o filtro de

Kalman permite avaliar a qualidade das suas próprias estimativas através das matrizes de covariância da predição  $\mathbf{P}(k|k-1)$  e da filtragem  $\mathbf{P}(k|k)$ . Estas podem ser calculadas previamente à utilização do filtro.

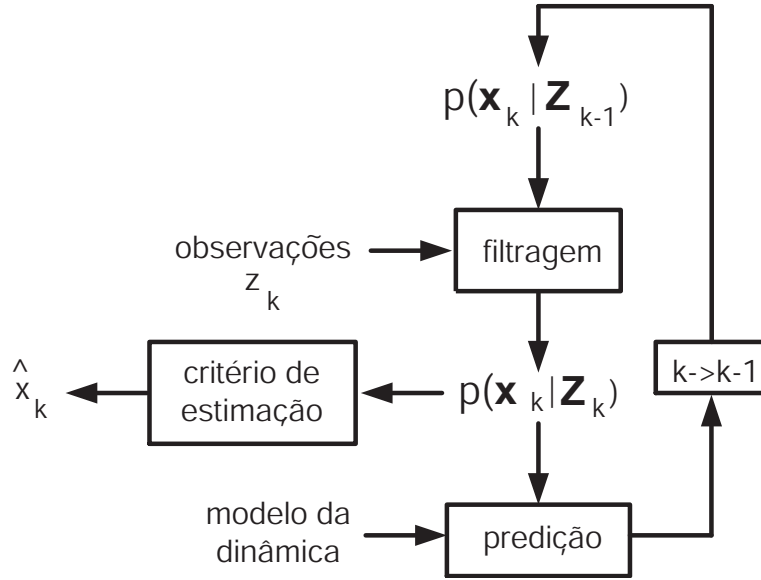


Figura 5: Esquema de funcionamento do filtro não-linear

Quando as equações (36) e/ou (37) não são lineares, ou quando a condição inicial  $\hat{\mathbf{x}}(0|-1)$  não é gaussiana, o problema da estimação óptima de estado torna-se imensamente mais complicado. O filtro de Kalman deixa de ser aplicável dado que a f.d.p.  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  não é mais gaussiana. A solução exacta do *filtro não-linear* consiste em propagar iterativamente  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ , de acordo com a Fig. 4. As fdps  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1})$  e  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  são as densidades de probabilidade de predição e de filtragem respectivamente.

Os passos da predição e da filtragem consistem na determinação das f.d.p.

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (65)$$

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k) = \frac{1}{c_k} p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}) \quad (66)$$

em que  $c_k$  é uma constante de normalização.

A estimativa do vector de estado resulta da aplicação de um critério de estimação (como sejam o critério MAP ou da média condicional) à densidade de filtragem.

A propagação das densidades de predição (65) e de filtragem (66) é, em geral, uma tarefa incomportável do ponto de vista computacional dado que as funções são, em geral, não gaussianas. O melhor que se consegue é actualizar o filtro usando uma aproximação conveniente para  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$ . A aproximação escolhida depende do problema pelo que não há uma solução universal como na filtragem linear.

Existem dois tipos de abordagem ao problema da filtragem não-linear:

(i) as não-linearidades dos modelos da dinâmica e das observações são linearizadas por desenvolvimento em série de Taylor em torno das estimativas mais recentes do vector de estado retendo-se apenas o termo linear;

(ii) a f.d.p.  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k)$  é substituída por uma outra função que a aproxime (represente) convenientemente, mas que seja definida por um pequeno número de parâmetros fáceis de calcular em cada iteração.

O primeiro tipo de abordagem conduz ao *filtro de Kalman generalizado* [extended Kalman filter], o qual é de fácil aplicação e funciona bem na generalidade dos problemas, embora não seja óptimo e apresente, por vezes, problemas de convergência. O segundo tipo de abordagem quando realizável produz, em geral, melhores resultados, mas está dependente da natureza do problema. Dada a complexidade e especificidade deste tipo de soluções iremos abordar apenas o filtro de Kalman generalizado.

### 7.2.1 Filtro de Kalman linearizado

Consideremos que uma classe de problemas de estimação não-linear de estado pode ser definida pelas seguintes equações não-lineares da dinâmica (de tempo contínuo) e das observações (em tempo discreto)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad t \geq t_0, \quad (67)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t_k)] + \mathbf{v}_k, \quad (68)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  ( $n \times 1$ ) é o vector de estado,  $\mathbf{w}(t)$  é um processo de ruído branco gaussiano, de média nula e covariância  $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)\} = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau)$ ,  $\mathbf{z}_k$  ( $m \times 1$ ) é o vector das observações e  $\mathbf{v}_k$  é uma sequência branca gaussiana definida como em (38). As condições iniciais do problema de estimação correspondem a assumir-se uma estimativa gaussiana para o vector de estado no instante  $t_0$ , isto é,  $\mathbf{x}(t_0) \sim N(\hat{\mathbf{x}}(t_0), \mathbf{P}_0)$ .

Suponhamos que geramos uma trajectória determinística de *referência* (ou *nominal*),  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , com  $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$  conhecido, que satisfaz  $d\bar{\mathbf{x}}(t)/dt = \mathbf{f}[\bar{\mathbf{x}}(t)]$  e defina-se o *desvio* (*perturbação* ou *variação*) relativamente à trajectória nominal [6]

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (69)$$

O processo  $\Delta\mathbf{x}(t)$  obedece à equação diferencial

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] - \mathbf{f}[\bar{\mathbf{x}}(t)] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (70)$$

com condição inicial  $\Delta\mathbf{x}(t_0) \sim N(\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0), \hat{\mathbf{P}}_0)$ .



Se os desvios da trajectória de referência forem pequenos em sentido quadrático médio, a expansão em série de Taylor dá

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] - \mathbf{f}[\bar{\mathbf{x}}(t)] \approx \mathbf{F}(t)\Delta\mathbf{x}(t) \quad (71)$$

onde

$$\mathbf{F}(t) = \left[ \frac{\partial f_i[\bar{\mathbf{x}}(t)]}{\partial x_j} \right] \quad (72)$$

é uma matriz ( $n \times n$ ) das derivadas parciais calculada ao longo da trajectória de referência. Obtemos, assim, uma equação linear aproximada para (70), designada por equação de perturbação

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (73)$$

a qual pode ser discretizada no tempo

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (74)$$

em que  $\Phi_k$  é a matriz de transição de estado correspondente à equação (73) e  $\mathbf{w}_k$  é uma sequência branca gaussiana, de média nula, e matriz de covariância  $\mathbf{Q}_k$  definida em (40) do capítulo V. Expressões aproximadas para  $\Phi_k$  e  $\mathbf{Q}_k$  são dadas em (42) e (43) do mesmo capítulo, isto é

$$\Phi_k \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(k\Delta t)\Delta t \quad (75)$$

$$\mathbf{Q}_k \approx \mathbf{G}(k\Delta t)\mathbf{Q}(k\Delta t)\mathbf{G}^T(k\Delta t)\Delta t \quad (76)$$

Relativamente à equação das observações defina-se a observação nominal como

$$\bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{h}[\bar{\mathbf{x}}(t_k)] \quad (77)$$

e o desvio da observação por

$$\Delta\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k. \quad (78)$$

Desenvolvendo  $\mathbf{z}_k$  em série de Taylor relativamente a  $\bar{\mathbf{z}}_k$  e aproveitando apenas o primeiro termo obtém-se para (68)

$$\Delta\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (79)$$

onde

$$\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial h_i[\bar{\mathbf{x}}(t_k)]}{\partial x_j} \right] \quad (80)$$

é uma matriz  $(m \times n)$ .

Em resumo. Partimos do sistema de equações não-lineares (67)-(68) e obtivemos por linearização em torno de  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  o sistema linearizado no tempo (74), (79). O filtro de Kalman é directamente aplicável a este sistema linearizado. Note-se que em vez de estado e de observação falamos, agora, de desvio de estado e desvio de observação. O *filtro de Kalman linearizado* assume uma trajectória nominal determinística,  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ . Em cada iteração a estimativa de estado resulta de

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \bar{\mathbf{x}}_k + \Delta \hat{\mathbf{x}}(k|k). \quad (81)$$

### 7.2.2 Filtro de Kalman generalizado

O filtro de Kalman linearizado (EKF=extended Kalman filter) produz, em geral, maus resultados porque utiliza uma estratégia de cadeia aberta para escolher a trajectória de referência  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ . Quando  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  é pré-calculado não existe nenhuma forma de forçar a trajectória de referência a permanecer próxima de  $\mathbf{x}(t)$ , e esta é uma exigência que deve ser cumprida sob pena de ocorrer divergência do filtro.

Em vez de considerarmos uma trajectória de referência pré-definida, podemos efectuar em cada iteração o desenvolvimento em série das não-linearidades dos modelos da dinâmica e das observações relativamente à estimativa mais recente do vector de estado e reter apenas os termos lineares. Surgem assim as seguintes derivadas

$$\mathbf{F}_k = \left[ \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)} \quad (n \times n) \quad (82)$$

$$\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \quad (m \times n) \quad (83)$$

A solução obtida para o problema da estimação é o filtro de Kalman generalizado cujas equações são as seguintes [6], [7].

• **Passo de filtragem:**

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]) \quad (84)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}(k|k-1) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (85)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}(k|k-1). \quad (86)$$

O ganho de Kalman é

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}_k^T[\mathbf{H}_k\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}. \quad (87)$$

• **Passo de predição:**

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = f[\hat{\mathbf{x}}(k|k)] \quad (88)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}_k\mathbf{P}(k|k)\mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (89)$$

O filtro é inicializado estipulando  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}(0|-1)$  e  $\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}(0|-1)$ .

O filtro de Kalman generalizado lineariza as não-linearidades dos modelos da dinâmica e das observações em torno de cada nova estimativa logo que ela é disponibilizada, isto é, a estimativa da predição  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  para actualização do passo da filtragem na iteração  $k$  e a estimativa da filtragem  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  para a actualização do passo da predição na iteração  $k+1$ .

No caso em que a equação da dinâmica (67) é linear tem-se

$$\mathbf{F}_k = \Phi_k. \quad (90)$$

No caso em que a equação das observações (68) é linear, isto é,

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (91)$$

a matriz  $H_k$  em (85)-(86) refere-se à matriz indicada em (91) e não em (83). Note-se que, se as equações da dinâmica e das observações forem lineares as equações do filtro de Kalman generalizado reduzem-se às do filtro de Kalman linear. A comparação das equações do filtro de Kalman generalizado com as do filtro de Kalman indica uma diferença importante; os ganhos  $\mathbf{K}_k$  em (87) são, na prática, variáveis aleatórias que dependem das estimativas  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  e  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  através das matrizes  $\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{H}_k$ . Por consequência, os ganhos de Kalman têm de ser calculados em tempo real; não podem ser pré-calculados antes das observações porque dependem delas. Além disso, a sequência de matrizes de covariância  $\mathbf{P}(k|k-1)$  e  $\mathbf{P}(k|k)$  são também aleatórias dependendo da evolução temporal de  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ .

Dado que as matrizes  $\mathbf{P}(k|k-1)$  e  $\mathbf{P}(k|k)$  são apenas aproximações às verdadeiras matrizes de covariância do erro da predição e da filtragem, o desempenho do filtro real deverá ser verificado por simulação de Monte Carlo. Não há qualquer garantia de que a estimativa obtida se encontre próxima da verdadeira estimativa óptima. No entanto, verifica-se que o filtro de Kalman generalizado produz “boas” estimativas num número significativo de aplicações práticas, nomeadamente se o erro inicial e os ruídos

não forem muito elevados, pelo que deve ser dos primeiros métodos a ser testado em problemas de filtragem não-linear.

**Exemplo:**

Considere que  $x(t)$  é um movimento browniano (processo de Wiener) caracterizado por  $\dot{x}(t) = w(t)$  com  $x(0) = 0$ , em que  $w(t)$  é ruído branco gaussiano com  $E\{w(t)w(\tau)\} = q_c\delta(t - \tau)$ . As observações ruidosas são

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_k \\ \sin x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k}]^T$  é uma sequência branca gaussiana, de média nula, e  $E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{R}_k$  com  $\mathbf{R}_k = r\mathbf{I}$ . Determine as equações do filtro de Kalman generalizado para este problema.

Solução:

A equação da dinâmica de tempo discreto é linear:  $x_{k+1} = x_k + w_k$ . As observações são não lineares com  $\mathbf{h}(x_k) = [\cos x_k \ \sin x_k]^T$  pelo que

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cos x}{\partial x} \\ \frac{\partial \sin x}{\partial x} \end{bmatrix}_{x=\hat{x}(k|k-1)} = \begin{bmatrix} -\sin \hat{x}(k|k-1) \\ \cos \hat{x}(k|k-1) \end{bmatrix}$$

Passo de filtragem:

$$\mathbf{K}_k = \frac{P(k|k-1)}{P(k|k-1) + r} [-\sin \hat{x}(k|k-1) \ \cos \hat{x}(k|k-1)]$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + \frac{P(k|k-1)}{P(k|k-1) + r} [z_{2,k} \cos \hat{x}(k|k-1) - z_{1,k} \sin \hat{x}(k|k-1)]$$

$$P(k|k) = \frac{P(k|k-1)r}{P(k|k-1) + r}$$

Passo de predição:

$$\hat{x}(k+1|k) = \hat{x}(k|k)$$

$$P(k+1|k) = P(k|k) + q_k$$

em que  $q_k = q_c \Delta t$ .

**Exemplo:**

Consideremos o problema de seguimento da trajectória de um corpo móvel em  $\mathbb{R}^2$ .

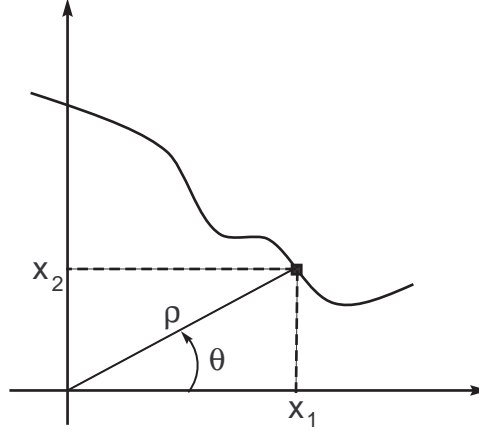


Figura 6: Trajectória típica em  $\mathbb{R}^2$

A equação da dinâmica é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (92)$$

em que  $w_1(t)$  e  $w_2(t)$  são ruídos brancos gaussianos independentes, de média nula e variância  $q_c$ . O modelo da dinâmica em tempo discreto é

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_\Phi \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{1,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_\Gamma \begin{bmatrix} w_{1,k} \\ w_{2,k} \end{bmatrix}$$

com

$$Q_k = E\{w_k w_k^T\} \approx G Q_c G^T \Delta t = q_c \Delta t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As observações do móvel são realizadas por um radar que determina a distância ao alvo ( $\rho$ ) e o azimuth ( $\theta$ ), pelo que o modelo das observações considerado é

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2} \\ \arctan_2 \frac{x_{2,k}}{x_{1,k}} \end{bmatrix}}_{h(x_k)} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix}$$

em que  $\arctan_2$  indica a função arco tangente de 4 quadrantes

$$\arctan_2 \frac{y}{x} = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{primeiro quadrante} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{segundo quadrante} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{terceiro quadrante} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{quarto quadrante} \end{cases}$$

em que  $\arctan$  é a função arco tangente usual (definida em  $]-\pi, +\pi[$ ).

A covariância do ruído das observações vale

$$R_k = E\{v_k v_k^T\} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

O problema é não linear devido ao modelo das observações. A linearização de  $h(x_k)$  consiste em obter

$$H_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\hat{x}(k|k-1)}$$

Logo

$$H_k = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_1(k|k-1)}{\sqrt{\hat{x}_1^2(k|k-1) + \hat{x}_2^2(k|k-1)}} & \frac{\hat{x}_2(k|k-1)}{\sqrt{\hat{x}_1^2(k|k-1) + \hat{x}_2^2(k|k-1)}} \\ -\frac{\hat{x}_2(k|k-1)}{\hat{x}_1^2(k|k-1) + \hat{x}_2^2(k|k-1)} & \frac{\hat{x}_1(k|k-1)}{\hat{x}_1^2(k|k-1) + \hat{x}_2^2(k|k-1)} \end{bmatrix}$$

Para este problema, a equação da dinâmica é linear pelo que  $F_k = \Phi_k$ .

A Figura 7 mostra as trajectórias correcta, observada e estimada, referentes a 500 iterações, usando o filtro de Kalman generalizado com as seguintes condições iniciais

$$\hat{x}_1(0|-1) = \hat{x}_2(0|-1) = 500$$

$$P(0|-1) = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix}$$

Os valores elevados dos elementos da diagonal principal de  $P(0|-1)$  indicam o desconhecimento total da posição inicial do móvel.

Os parâmetros usados foram  $q_c \Delta t = 400$ ,  $r_1 = 5000$  e  $r_2 = 0.01$ .

Note-se que foi possível, neste caso, obter uma boa estimativa da trajectória mesmo na situação em que a dinâmica do movimento do móvel não é “bem” descrita pelo modelo da dinâmica (92). De facto, verifica-se que os filtros de Kalman (linear e generalizado) são robustos em muitas situações de desadaptação do modelo da dinâmica relativamente à trajectória verdadeira.

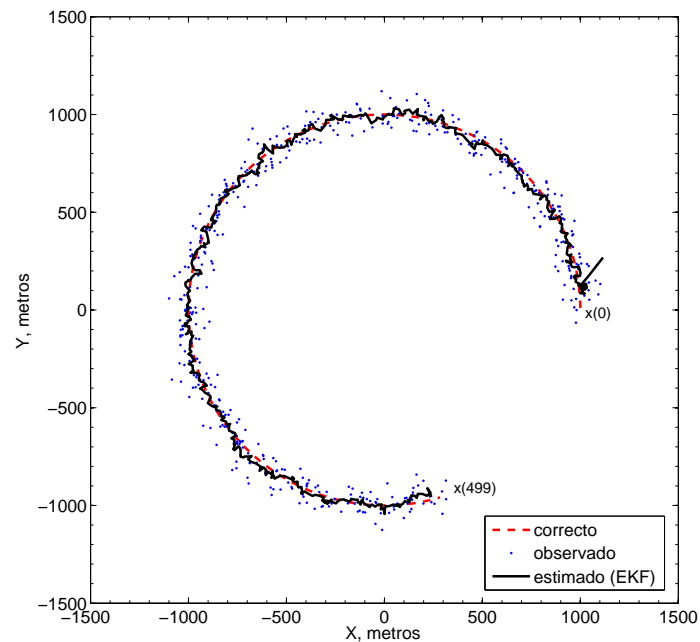


Figura 7: Trajetórias correcta, observada e estimada

## Referências

- [1] K. Ogata, “*State Space Analysis of Control Systems*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [2] G. Strang, “*Linear Algebra and Its Applications*”, Academic, N. York, 1976.
- [3] K. Shanmugan, A. Breipohl, “*Random Signals, Detection, Estimation and Data Analysis*”, Wiley, N. York, 1988.
- [4] A. Gelb (edt.), “*Applied Optimal Estimation*”, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [5] J. Melsa, D. Cohn, “*Decision and Estimation Theory*”, McGraw-Hill, Tokyo, 1978.
- [6] A. H. Jazwinski, “*Stochastic Processes and Filtering Theory*”, Academic, N. York, 1970.
- [7] B. Anderson and J. Moore, “*Optimal Filtering*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
- [8] M.C. Jeruchim, P. Balaban, K. S. Shanmugan, “*Simulation of Communication Systems*”, 2.nd edition, Plenum, N. York, 2000.

- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.), *“Handbook of Mathematical Functions”*, Dover, N. York, 1970.
- [10] K. H. Senne, “Machine Independent Monte Carlo Evaluation of the Performance of Dynamic Stochastic Systems”, K. H. Senne, *J. Stochastics*, vol. I, pp. 215-238, Gordon and Breach, 1974.



## VI - GPS

### 1 Transmissão de Sinais de GPS

#### 1.1 Satélites de GPS

A figura mostra um diagrama funcional simplificado do conteúdo de um satélite de GPS [5].

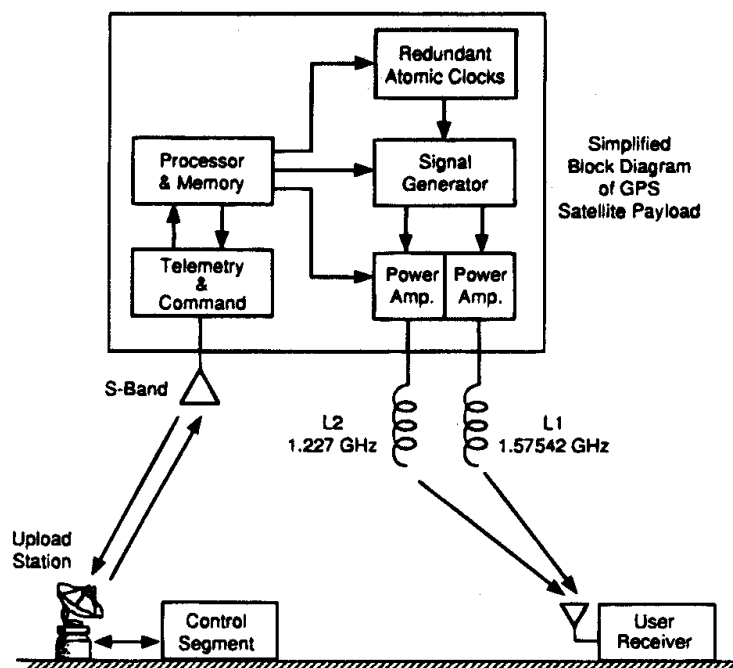


Figura 1: Esquema simplificado da carga de um satélite de GPS

A estação de controlo em terra envia para o satélite a informação da efeméride relativa à órbita do satélite e à posição exacta na órbita em função do tempo. É igualmente incluída uma correcção ao relógio de satélite que calibra o desvio do tempo relativamente ao tempo do sistema GPS. Estes dados são enviados para o satélite através de um sistema de telemetria e comando na banda S.

Uma das chaves para o desempenho do GPS é a estabilidade dos relógios de satélite. São utilizados vários relógios atômicos de césio e/ou rubídio.

Os parâmetros aproximados dos satélites de GPS são [1]:

Raio orbital: 26561.75 Km.

Velocidade orbital (circular): 3.8704 Km/s.

Velocidade angular:  $1.454 \times 10^{-4}$  rad/s.

Excentricidade:  $e=0$  (nominal), geralmente  $e < 0.02$ .

Período: 12 h.

Inclinação do plano da órbita:  $55^\circ$  nominal.

Distância ao receptor em terra:  $\geq 20183$  Km (satélite no zénite) e  $\leq 25783$  Km (satélite na linha de horizonte).

A figura seguinte mostra uma trajectória elíptica típica para os satélites de GPS. Os 3 elementos orbitais que definem a órbita são:

$a$  = semi – eixo maior da elipse

$e$  = excentricidade da elipse

$\tau$  = instante de passagem pelo perigeu

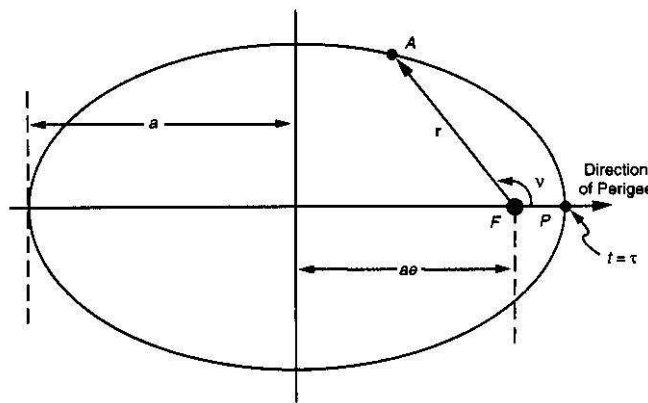


Figura 2: Elementos orbitais keplerianos que definem a órbita do satélite

## 1.2 Selecção das frequências de L1 e L2

Os satélites de GPS transmitem duas portadoras:  $L1$  com frequência 1.57542 GHz e  $L2$  com frequência 1.22760 GHz. Os sinais de GPS são polarizados circularmente (RHCP=right-hand circularly polarized). As portadoras são moduladas por códigos de

espalhamento de espectro [spread spectrum] com sequências de ruído pseudo-aleatório [PRN=pseudo-random noise] diferentes para cada satélite. Todos os satélites utilizam as mesmas frequências para os sinais  $L1$  e  $L2$  mas os sinais não interferem significativamente entre si devido aos códigos de espalhamento de espectro. Trata-se de uma técnica de multiplexagem conhecida por acesso múltiplo por divisão no código [CDMA=code division multiple access]. O receptor de GPS para poder aceder à informação de um dado satélite tem de replicar a sequência PRN do referido satélite.

A utilização das frequências  $L1$  e  $L2$  permite medir o atraso da propagação dos sinais na ionosfera, dado que este atraso é aproximadamente uma função do inverso do quadrado da frequência, isto é,  $\tau = A/f^2$ , em que  $A$  depende das condições da ionosfera. Assim, há um atraso  $\Delta\tau = \tau_{L2} - \tau_{L1}$  na chegada da portadora  $L2$  relativamente a  $L1$  que pode ser medido experimentalmente [5]

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{A}{f_{L2}^2} - \frac{A}{f_{L1}^2} \\ &= \left[ \left( \frac{f_{L1}}{f_{L2}} \right)^2 - 1 \right] \frac{A}{f_{L1}^2} = \frac{1}{1.54573} \frac{A}{f_{L1}^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Logo, o atraso na ionosfera para  $L1$  é

$$\tau_{L1} = A/f_{L1}^2 = 1.54573\Delta\tau.$$

Os receptores de frequência única ( $L1$ ) têm de estimar o atraso ionosférico usando parâmetros de modelação que são transmitidos na mensagem de navegação.

A selecção das frequências  $L1$  e  $L2$  resulta de um compromisso entre diversos tipos de degradação dos sinais:

- i) perdas por propagação;
- ii) atrasos de grupo na ionosfera;
- iii) ruído de canal.

Admitindo como válido o modelo de propagação em espaço livre as perdas de transmissão são dadas por

$$L_s = \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2, \quad (2)$$

em que  $d$  é a distância satélite-receptor ( $20183 \leq d \leq 25783$  Km) e  $\lambda$  é o comprimento de onda do sinal. Por conseguinte, as perdas aumentam com o quadrado da frequência dos sinais.

O atraso de grupo na ionosfera varia com o inverso do quadrado da frequência valendo tipicamente [5]

20 – 1500 ns	a	$\approx 400$ MHz [UHF]
2 – 150 ns	a	1 – 2GHz [banda L]
$\approx 0 - 15$ ns	a	4 – 6 GHz [banda C]

O ruído de canal (exterior ao receptor) é essencialmente de origem não-terrestre (galáctica) para frequências da banda UHF ou inferiores como se mostra na figura seguinte [2]. Por exemplo, para 400 MHz a temperatura equivalente de ruído é de  $\approx 150^\circ$  K diminuindo para  $\approx 10^\circ$  K a 1.5 GHz.

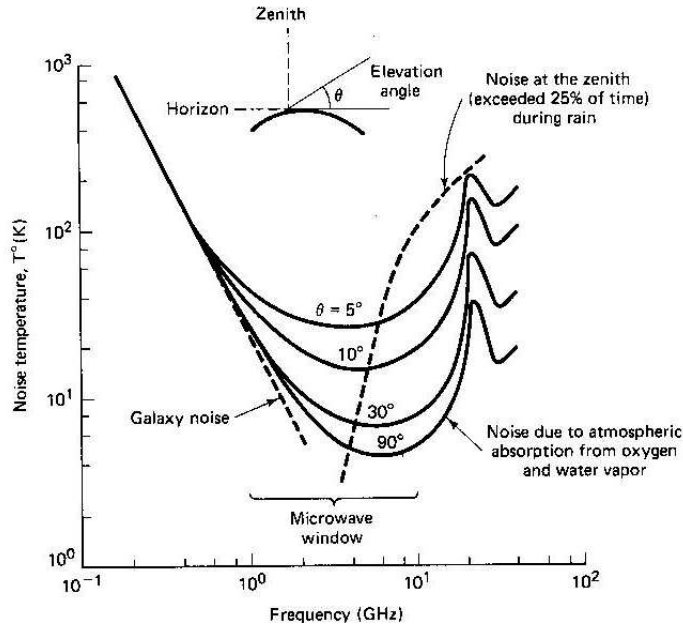


Figura 3: Temperatura de ruído do céu

Por outro lado, a atenuação atmosférica para uma onda polarizada circularmente, devida à chuva, é dada pela expressão [7]

$$\gamma = K R_i^\alpha \quad (\text{dB/Km}) \quad (3)$$

onde  $R_i$  é a precipitação em milímetros/hora e os parâmetros  $K$  e  $\alpha$  valem

freq. em GHz	K	$\alpha$
1 GHz	$3.70 \times 10^{-5}$	0.897
2 GHz	$1.46 \times 10^{-4}$	0.944
4 GHz	$6.21 \times 10^{-4}$	1.099
6 GHz	$1.65 \times 10^{-3}$	1.288
8 GHz	$4.25 \times 10^{-3}$	1.319

As atenuações correspondentes para  $R_i = 100$  mm/hora são

freq. em GHz	$\gamma$ (dB/Km)
1	$\approx 0$
2	0.01
4	0.10
6	0.62
8	1.85

A banda L proporciona assim o melhor compromisso entre a atenuação em espaço livre e o ruído de canal. Além disso, houve que disponibilizar duas janelas na frequência, com larguras de banda de  $\approx 20$  MHz, suficientemente afastadas para efeito de correcção ionosférica.

A figura da página seguinte mostra a estrutura de sinais de um satélite de GPS. Cada uma das portadoras é um múltiplo (coerente) de um relógio-mestre a 10.23 MHz

$$L1 = 1575.42 \text{ MHz} = 154 \times 10.23 \text{ MHz}$$

$$L2 = 1227.6 \text{ MHz} = 120 \times 10.23 \text{ MHz}$$

De igual forma, todos os sinais de relógio para os códigos e dados de navegação são obtidos coerentemente a partir do relógio-mestre. Note-se que a frequência deste relógio não é exactamente igual a 10.23 MHz por se ter incluído uma correcção dos efeitos relativísticos. O desvio  $\Delta f/f_0$  é de  $-4.467 \times 10^{-10}$ .

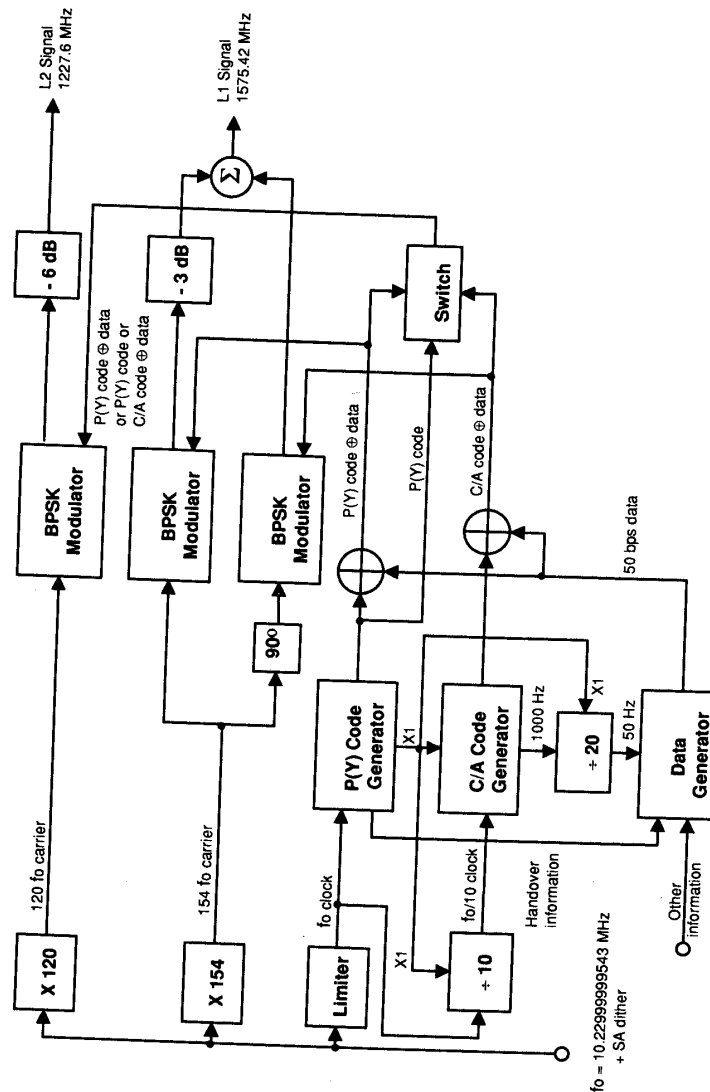


Figura 4: Estrutura de geração de sinais dos satélites GPS

### 1.3 Estrutura da mensagem de navegação

Uma sequência de dados (*mensagem de navegação*) é sobreposta aos códigos C/A e P(Y) à taxa de 50 bits/segundo. Os dados incluem a informação mais recente sobre o comportamento dos relógios de satélite e os últimos parâmetros orbitais (constantes de efeméride). Os dados incluem também mensagens especiais definindo as actuais intensidades dos sinais e outra informação sobre o funcionamento dos satélites [health

status]. Esta informação é frequentemente actualizada pelo segmento de controlo de terra.

A sequência de dados é dividida em *tramas* [frames] de 30 segundos, cada uma contendo 1500 bits de informação como se mostra na figura 5. Cada trama é dividida em cinco *sub-tramas* de 6 segundos com 300 bits correspondendo a 10 palavras de 30 bits. Os últimos 6 bits de cada palavra são usados para correcção de erros (parity checking) o que permite ao receptor a capacidade para detectar e corrigir erros de bit durante a desmodulação. É utilizado um código de Hamming  $(n, k) = (32, 26)$ .

A sub-trama 1 contém os parâmetros de correcção do relógio de satélite que definem os erros actuais e as taxas de crescimento do erro de relógio. Contém ainda informação sobre a precisão espacial esperada para os dados dos satélites através do índice URA [user range accuracy]. O índice varia entre 0 (precisão máxima) e 15 (em que não se efectua uma previsão da precisão dos dados cabendo ao receptor utilizar estes por sua conta e risco). As sub-tramas 2 e 3 contêm constantes das efemérides que definem a órbita actual do satélite.

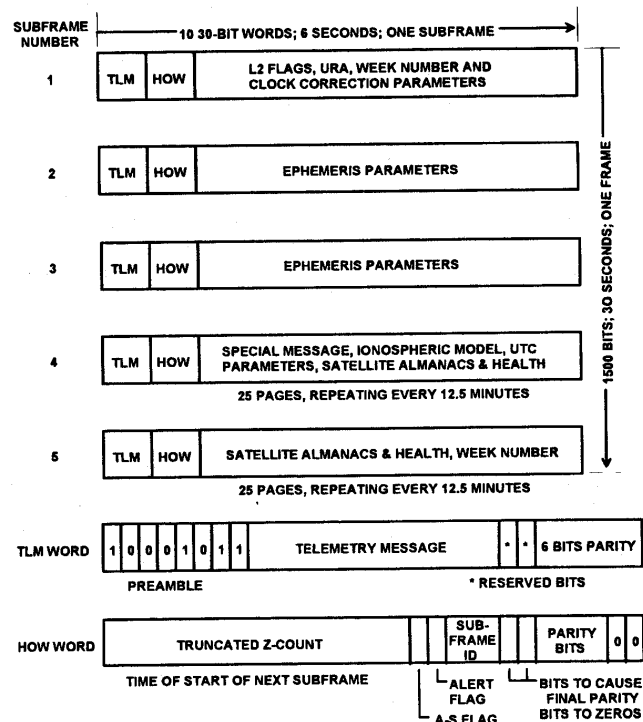


Figura 5: Formato simplificado da trama e da sub-trama de GPS

As sub-tramas 4 e 5 são sub-comutadas 25 vezes cada, pelo que uma mensagem completa de dados requer a transmissão de 25 tramas completas. As 25 versões das sub-tramas 4 e 5 designam-se por *páginas* 1 a 25 de cada sub-trama. A sub-trama 4 contém mensagens de navegação, um modelo de correcção ionosférica e algumas páginas o

almanaque e a informação do estado de funcionamento [health status] dos satélites 25 a 32. A sub-trama 5 contém o almanaque e o health status dos primeiros 24 satélites da constelação. O almanaque é semelhante às efemérides mas existem algumas diferenças importantes. O almanaque contém menos parâmetros e, por conseguinte, define uma órbita menos precisa que a efeméride. Além disso, o almanaque que é emitido por cada satélite define as órbitas para todos os satélites operacionais da constelação.

Em cada trama sucessiva de 30 segundos é enviado o almanaque referente a um satélite ou dois satélites diferentes da constelação nas sub-tramas 4 e 5. Assim, no intervalo de 12.5 minutos, cada satélite informa o receptor da localização no espaço de todos os outros satélites da constelação. A informação do almanaque não é usada directamente na navegação por pseudo-distâncias. Serve essencialmente para determinar quais os satélites que se encontram presentemente acima do horizonte e quais os quatro que apresentam melhor localização no sentido de fornecer a solução da equação de navegação com erros mais reduzidos.

## 1.4 Caracterização do sinal C/A

O sinal L1 transmitido pelo satélite  $i$  é dado por

$$\begin{aligned} S_{L1i}(t) = & \sqrt{2}AXG_i(t)D_i(t)\cos(\omega_1t + \phi_i) \\ & + AXP_i(t)D_i(t)\sin(\omega_1t + \phi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

em que  $\omega_1$  é a frequência de L1,  $\phi_i$  representa um pequeno ruído de fase devido a instabilidades nos osciladores e  $A^2$  e  $A^2/2$  são as potências dos sinais C/A e P(Y), respectivamente. A elevada estabilidade dos osciladores na frequência é obtida usando relógios atómicos de célio e/ou rubídio. (Os relógios dos satélites mais recentes têm estabilidades de longo prazo da ordem de  $3 \times 10^{-14}$ ).

O código C/A, designado por  $XG_i(t)$ , é um código de Gold de amplitude  $\pm 1$  e período 1023 bits (chips) correspondendo a 1 ms e a uma taxa de 1.023 Mbps. O tempo de chip é  $T_G \approx 9.78 \times 10^{-7}$  s. O código P, designado por  $XP_i(t)$ , é uma sequência PRN de  $\pm 1$  com uma taxa de 10.23 Mbps e um período de exactamente uma semana. O tempo de chip é  $T_P \approx 9.78 \times 10^{-8}$  s. Cada satélite transmite sequências diferentes de códigos C/A e P. Os dados binários  $D_i(t)$  têm uma amplitude de  $\pm 1$  e um ritmo de 50 bps.

A figura 6 ilustra a geração dos códigos C/A (códigos de Gold) através de 2 registos de deslocamento com dez células cada (G1 e G2). Cada registo gera um sinal PRN de comprimento (período)  $2^{10} - 1 = 1023$  chips. É costume indicar as ligações dos registos de deslocamento (shift-registers) através de polinómios da forma



$$1 + \sum X^i,$$

onde  $x^i$  significa que a saída da célula  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) do registo é usada como entrada do somador módulo-2 (ou exclusivo) e 1 significa que a saída do somador se encontra ligada à primeira célula. Os dois geradores são iguais para todos os satélites

$$G1(X) = 1 + X^3 + X^{10}$$

$$G2(X) = 1 + X^2 + X^3 + X^6 + X^8 + X^9 + X^{10}. \quad (5)$$

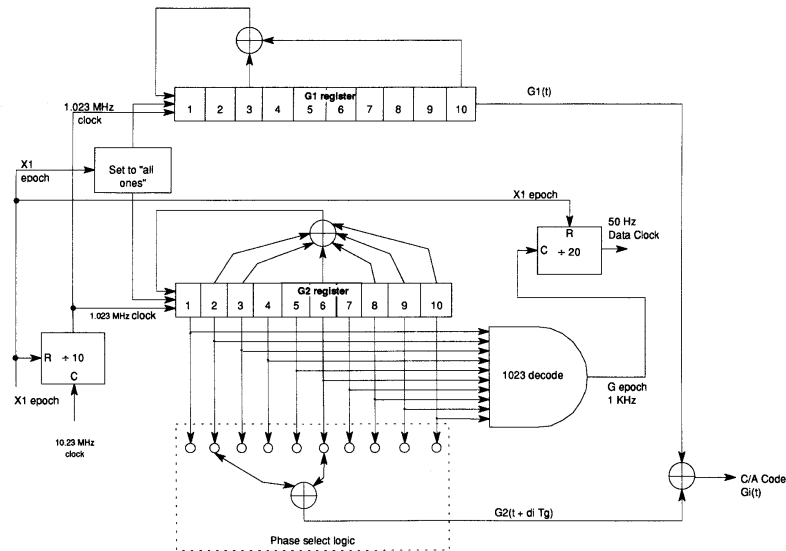


Figura 6: Gerador do código C/A

Vários atrasos (um diferente por cada satélite) são obtidos no gerador G2 usando diferentes combinações das saídas de 2 células como entradas de um somador módulo-2 (circuito de selecção da fase [phase select logic]). Os diversos atrasos encontram-se indicados na tabela da Fig. 7. Note-se que é possível gerar um número elevado de códigos de Gold mediante a escolha de diferentes atrasos no circuito de selecção de fase. No entanto, só os códigos de Gold com as melhores propriedades foram escolhidos para o segmento do espaço.

Code-Phase Assignments and Initial Code Sequences for C/A-Code and P-Code

SV PRN Number	C/A-Code Tap Selection	C/A-Code Delay (Chips)	P-Code Delay (Chips)	First 10 C/A-Chips (Octal)*	First 12 P-Chips (Octal)
1	2 ⊕ 6	5	1	1440	4444
2	3 ⊕ 7	6	2	1620	4000
3	4 ⊕ 8	7	3	1710	4222
4	5 ⊕ 9	8	4	1744	4333
5	1 ⊕ 9	17	5	1133	4377
6	2 ⊕ 10	18	6	1455	4355
7	1 ⊕ 8	139	7	1131	4344
8	2 ⊕ 9	140	8	1454	4340
9	3 ⊕ 10	141	9	1626	4342
10	2 ⊕ 3	251	10	1504	4343
11	3 ⊕ 4	252	11	1642	“
12	5 ⊕ 6	254	12	1750	“
13	6 ⊕ 7	255	13	1764	“
14	7 ⊕ 8	256	14	1772	“
15	8 ⊕ 9	257	15	1775	“
16	9 ⊕ 10	258	16	1776	“
17	1 ⊕ 4	469	17	1156	“
18	2 ⊕ 5	470	18	1467	“
19	3 ⊕ 6	471	19	1633	“
20	4 ⊕ 7	472	20	1715	“
21	5 ⊕ 8	473	21	1746	“
22	6 ⊕ 9	474	22	1763	“
23	1 ⊕ 3	509	23	1063	“
24	4 ⊕ 6	512	24	1706	“
25	5 ⊕ 7	513	25	1743	“
26	6 ⊕ 8	514	26	1761	“
27	7 ⊕ 9	515	27	1770	“
28	8 ⊕ 10	516	28	1774	“
29	1 ⊕ 6	859	29	1127	“
30	2 ⊕ 7	860	30	1453	“
31	3 ⊕ 8	861	31	1625	“
32	4 ⊕ 9	862	32	1712	“
33†	5 ⊕ 10	863	33†	1745	“
34†	4 ⊕ 10	950‡	34	1713‡	“
35†	1 ⊕ 7	947	35	1134	“
36†	2 ⊕ 8	948	36	1456	“
37†	4 ⊕ 10	950‡	37	1713‡	4343

\*In the octal notation for the first 10 chips of the C/A-code as shown in this column, the first digit (1) represents a “1” for the first chip and the last three digits are the conventional octal representation of the remaining 9 chips. For example, the first 10 chips of the SV PRN number 1 C/A-code are 1100100000.

†PRN codes 33 through 37 are reserved for other uses (e.g., ground transmitters).

‡C/A-codes 34 and 37 are identical.

Figura 7: Ligações usadas pelo gerador de código C/A

A saída do gerador de código C/A é da forma

$$XG_i(t) = G1(t)G2(t + N_iT_G), \quad (6)$$

em que  $T_G = 1/(1.023 \times 10^6)$  s é o tempo de chip. Por exemplo, para o satélite no. 25 o atraso do gerador G2 é de  $N_i = 513$  chips, originado pelas ligações das células 5 e 7 ao somador módulo-2 no circuito de selecção da fase. As primeiras 32 linhas da Tabela referem-se a satélites. As restantes 5 linhas referem-se nomeadamente a transmissores em terra.

Nota: a multiplicação indicada em (6) é compatível com o circuito da página anterior dado que a saída do circuito se faz através de um somador módulo-2 (ou exclusivo)

e se assume que ao bit 0 corresponde a tensão +1 e ao bit 1 a tensão -1.

## 1.5 Espectro de potência do sinal C/A

### 1.5.1 espectro de potência de um sinal aleatório binário

Considere-se o sinal aleatório binário da forma

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_c) \quad (7)$$

em que  $A_k = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ , com  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , são variáveis aleatórias (v.a.) binárias independentes com funções densidade de probabilidade

$$p_A(a) = p_0 \delta(a - \alpha_0) + p_1 \delta(a - \alpha_1) \quad (8)$$

com  $p_0 = \text{prob}(\alpha_0)$  e  $p_1 = \text{prob}(\alpha_1)$ . A média é dada por

$$m_A = \int a p_A(a) da \quad (9)$$

variância é dada por

$$\sigma_A^2 = \int (a - m_A)^2 p_A(a) da \quad (10)$$

e  $p(t)$  é um impulso de sinalização. As v.a.  $A_k$  ocorrem com um ritmo  $1/T_c$ , em que  $T_c$  é a duração de chip. Prova-se que o espectro de potência de  $X(t)$  é dado por

$$G_X(f) = \underbrace{\sigma_A^2 \frac{|P(f)|^2}{T_c}}_{\text{espectro contínuo}} + \underbrace{\frac{m_A^2}{T_c^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| P\left(\frac{m}{T_c}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T_c}\right)}_{\text{espectro discreto}} \quad (11)$$

em que  $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$  é a transformada de Fourier de  $p(t)$ . Se  $m_A = 0$  o espectro de potência fica reduzido à sua componente contínua.

Numa primeira aproximação podemos admitir que o código C/A é um sinal binário aleatório com  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = -1$  (símbolos equiprováveis) e

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_c}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T_c/2 \\ 0, & |t| > T_c/2 \end{cases} \quad (12)$$

A densidade espectral de potência correspondente é

$$G_X(f) = T_c \text{sinc}^2(fT_c) \quad (13)$$

O sinal C/A a transmitir é igual ao produto do código C/A pela mensagem de navegação seguido da multiplicação pela portadora sinusoidal (de frequência  $f_c =$

1.57542 GHz). A duração de bit da mensagem de navegação,  $T_b = 1/50 = 20$  ms, é muito maior que a duração de chip do código,  $T_c = 10^{-3}/1023 \approx 10^{-6}$  s, pelo que a multiplicação do sinal de código pela mensagem de navegação praticamente não altera o espectro de potência  $G_X(f)$ . Assim, o espectro de potência do sinal modulado é

$$\begin{aligned} G_s(f) &\approx G_X(f) * \frac{A_c^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \\ &= \frac{A_c^2}{4} G_X(f + f_c) + \frac{A_c^2}{4} G_X(f - f_c) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \frac{A_c^2 T_c}{4} \left( \text{sinc}^2[(f + f_c)T_c] + \text{sinc}^2[(f - f_c)T_c] \right) \quad (15)$$

em que  $A_c$  é a amplitude da portadora. A largura de banda (entre nulos) do sinal modulado é  $2/T_c = 2.046$  MHz.

O espectro de potência do sinal militar P(Y) é dado igualmente por (15), embora a frequência da portadora possa ser diferente (consoante a banda é L1 ou L2). A duração de chip é  $T_c = 10^{-3}/10230 \approx 10^{-7}$  s. Em consequência, a largura de banda (entre nulos) do sinal modulado é  $2/T_c = 20.46$  MHz.

### 1.5.2 espectro de potência de um sinal PRN

Os cálculos efectuados atrás referem-se a um sinal binário aleatório com média nula e potência unitária. No entanto, os sinais PRN utilizados em GPS são periódicos e replicáveis (determinísticos). Nesse caso, a função de autocorrelação é definida por

$$R_X(\tau) = \frac{1}{NT_c} \int_0^{T_c} X(t)X(t - \tau) dt \quad (16)$$

em que  $NT_c$  é o período do sinal. Como  $X(t - kNT_c) = X(t)$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , então

$$\begin{aligned} R_X(\tau + kNT_c) &= \frac{1}{NT_c} \int_0^{NT_c} X(t)X(t - \tau - kNT_c) dt \\ &= R_X(\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

pelo que a função de autocorrelação de um sinal PRN é periódica com período igual ao período do próprio sinal.

Um sinal PRN obtém-se da correspondente sequência PRN  $A_k$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  através de

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_c) \quad (18)$$

em que  $A_k = (-1)^{b_k}$ , onde  $b_k$  é uma sequência de bits  $\dots b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, \dots$  com  $b_k = \{0, 1\}$  e  $p(t)$  é o pulso rectangular  $\Pi(t/T_c)$ .

Existem sequências PRN geradas por registos de deslocamento [shift-registers] com  $n$  células e realimentações lineares (como os registos que produzem os códigos C/A) que geram *sequências de comprimento máximo (ou m)*. O período dessas sequências é  $N = 2^n - 1$ , o que implica que o registo passa por todos os estados excepto o estado zero. As sequências PRN de comprimento máximo  $A_k$ , com  $A_k = \pm 1$ , verificam as seguintes propriedades [8]:

- a) Em cada período  $N$  (ímpar) o número de níveis 1 difere do número de níveis  $-1$  em exactamente uma unidade.
- b) A autocorrelação toma dois valores

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k A_{k+n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{N}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (19)$$

Admitamos que a sequência PRN do sinal (18) é de comprimento máximo e use-se (16). Para  $0 \leq \tau \leq T_c$ , a autocorrelação de  $X(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{NT_c} \int_0^{NT_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_c) \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l p(t - \tau - lT_c) dt \\ &= \frac{1}{NT_c} \left[ N\Delta + (T_c - \Delta) \sum_{k=1}^N A_k A_{k-1} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

em que  $\Delta = T_c - \tau$ . Tendo em conta (19) e a simetria par de  $R(\tau)$  obtém-se

$$R_x(\tau) = 1 - \frac{N+1}{N} \frac{|\tau|}{T_c}, \quad |\tau| \leq T_c \quad (21)$$

Para  $\tau > T_c$ , a autocorrelação de  $X(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{NT_c} \int_0^{NT_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_c) \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l p(t - \tau - lT_c) dt \\ &= \frac{1}{NT_c} \left[ D \sum_{k=1}^N A_k A_{k-m} + (T_c - D) \sum_{k=1}^N A_k A_{k-m-1} \right] \\ &= -\frac{1}{N} \end{aligned} \quad (22)$$

em que  $0 \leq D \leq T_c$  e  $m = 1, 2, \dots, N-1$ .

Resumindo

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{N+1}{N} \frac{|\tau|}{T_c}, & |\tau| < T_c \\ -\frac{1}{N}, & T_c \leq |\tau| \leq (N-1)T_c. \end{cases} \quad (23)$$

A Fig. 8 representa a função de autocorrelação dos sinais PRN.

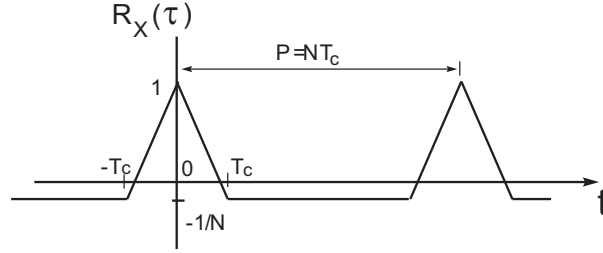


Figura 8: Função de autocorrelação dos sinais PRN

A função  $R_X(\tau)$  pode desenvolver-se em série de Fourier

$$R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n\tau/P), \quad (24)$$

em que

$$c_n = \frac{1}{NT_c} \int_{NT_c} R_X(\tau) \exp(-j2\pi n\tau/(NT_c)) d\tau \quad (25)$$

são os coeficientes de Fourier. Obtém-se

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{N^2} \\ c_n &= \frac{1}{NT_c} \int_{-NT_c/2}^{NT_c/2} \left[ \frac{N+1}{N} \Lambda\left(\frac{\tau}{T_c}\right) - \frac{1}{N} \right] \exp(-j2\pi n\tau/(NT_c)) d\tau \\ &= \frac{N+1}{N^2 T_c} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{\tau}{T_c}\right) \exp(-j2\pi n\tau/(NT_c)) d\tau - \frac{1}{NP} \int_{-NT_c/2}^{NT_c/2} \exp(-j2\pi n\tau/(NT_c)) d\tau \\ &= \frac{N+1}{N^2 T_c} \mathcal{F} \left\{ \Lambda\left(\frac{t}{T_c}\right) \right\}_{f=n/(NT_c)} - \frac{1}{N} \text{sinc}(n) \\ &= \frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

em que  $\mathcal{F}(\cdot)$  designa a transformada de Fourier. Logo, a densidade espectral de potência de  $X(t)$  é

$$G_X(f) = \frac{1}{N^2} \left[ \delta(f) + (N+1) \text{sinc}^2(fT_c) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{NT_c}\right) \right]. \quad (27)$$

Note-se que os sinais PRN exibem espectros de riscas ao contrário dos sinais puramente aleatórios (compare-se com (13)). A separação entre as riscas espectrais é de  $1/NT_c = 1$  kHz. Em (27), a função  $\text{sinc}^2(fT_c)$  funciona como envolvente do espectro de riscas.

Os códigos de Gold seleccionados para o sinal C/A são uma família de códigos formados pelo produto (ou soma módulo-2) de duas sequências PRN de comprimento máximo, com períodos iguais,  $N = 2^n - 1 = 1023$ , convenientemente emparelhadas. Os códigos de Gold apresentam funções de autocorrelação e espectros de potência parecidos com os das sequências de comprimento máximo, embora existam algumas diferenças:

a) A autocorrelação das sequências PRN de comprimento máximo tem um valor constante igual a  $-1/N$  nos intervalos entre os máximos da correlação. Os códigos de Gold apresentam flutuações na autocorrelação para esses intervalos.

b) A densidade espectral de potência dos códigos de Gold é de riscas com o mesmo espaçamento (de 1 KHz) que o das sequências PRN que lhes dão origem. No entanto, a altura das riscas espectrais não evolui de acordo com a função  $\text{sinc}^2(fT_c)$  (como em (27)), apresentando um comportamento mais complexo.

Atendendo a que as diferenças entre os espectros de potência dos códigos de Gold e das sequências PRN de comprimento máximo que lhes dão origem são pequenas, é conveniente e aproximadamente correcto admitir que os espectros de potência dos códigos C/A são descritos por (27).

Na Fig. 15 esquematiza-se o espectro de potência dos sinais de GPS incluídos nas bandas L1 e L2. A largura de banda do sinal P(Y) é dez vezes maior que a do sinal civil (isto é, aproximadamente igual a 20.46 MHz).

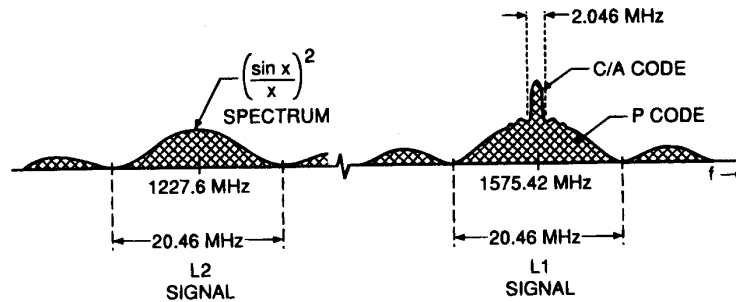


Figura 9: Densidade espectral de potência dos sinais GPS

## 2 Recepção e Processamento dos Sinais de GPS

### 2.1 Níveis de potência

Indica-se abaixo os níveis mínimos de potência para os três sinais de GPS. O nível de potência especificado para o receptor de GPS baseia-se numa antena de recepção com polarização linear e ganho de 3 dB.

código C/A L1	código P(Y) L1	códigos C/A ou P(Y) L2
-160.0 dBW	-163.0 dBW	-166.0 dBW

Como os satélites transmitem com polarização circular direita indica-se também os níveis de potência para uma antena típica com esta polarização e ganho unitário.

código C/A L1	código P(Y) L1	códigos C/A ou P(Y) L2
-159.6 dBW	-162.6 dBW	-165.2 dBW

A potência em dBW é dada por

$$P_{dBW} = 10 \log_{10}(P) \quad (28)$$

com 0 dBW correspondendo a 1 watt.

A tabela da Fig. 10 apresenta os parâmetros mais importantes da ligação satélite-receptor.

<i>Parameter</i>	<i>L1 P-Code</i>	<i>L1 C/A-Code</i>	<i>L2</i>
User minimum received power	-163.0 dBw	-160.0 dBw	-166.0 dBw
Users linear antenna gain	3.0 dB	3.0 dB	3.0 dB
Free-space propagation loss	184.4 dB	184.4 dB	182.3 dB
Total atmospheric loss	2.0 dB	2.0 dB	2.0 dB
Polarization mismatch loss	3.4 dB	3.4 dB	4.4 dB
Required satellite EIRP	+23.8 dBw	+26.8 dBw	+19.7 dBw
Satellite antenna gain @ 14.3° worst case BLK II off-axis angle	13.5 dB	13.4 dB	11.5 dB
Required minimum satellite antenna input power	+10.3 dBw 10.72W	+13.4 dBw 21.88W	+8.2 dBw 6.61W

Figura 10: Valores das potências dos sinais nas bandas L1 e L2

Em operação normal a densidade espectral de potência dos sinais de GPS é bastante inferior ao nível do espectro de potência do ruído térmico do receptor.



A densidade espectral de potência (unilateral) do ruído térmico à entrada do receptor é dada por  $\mathcal{N}_0 = kT_s$  W/Hz em que  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K é a constante de Boltzmann e  $T_s$  é a temperatura equivalente do ruído do sistema (antena+receptor) em graus Kelvin. Assim  $T_s = T_A + T_R$  em que  $T_A$  e  $T_R$  designam respectivamente a temperatura equivalente da antena e do receptor. Na Fig. 11 exemplifica-se a análise do ruído do front-end para um receptor típico de GPS.

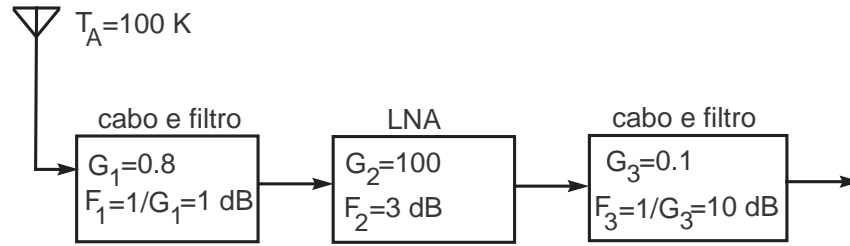


Figura 11: Análise de ruído do front-end do receptor de GPS

Assumindo uma potência recebida  $P_s = -160$  dBW, a relação portadora-ruído (carrier-to-noise density ratio) à entrada do receptor é

$$\left(\frac{C}{\mathcal{N}_0}\right)_i = \frac{P_s}{kT_A} = -160 \text{ dBW} - (-208.6 \text{ dBW/Hz}) = 48.6 \text{ dB} \cdot \text{Hz} \quad (29)$$

Para um receptor constituído por  $N$  blocos com ganhos  $G_1, G_2, \dots, G_N$ , funcionando à temperatura ambiente de  $18^\circ \text{ C}$ , ou seja,  $290$  Kelvin, a temperatura equivalente de ruído é [6]

$$T_R = T_{R,1} + \frac{T_{R,2}}{G_1} + \frac{T_{R,3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{R,N}}{G_1 G_2 \dots G_{N-1}} \quad (30)$$

em que a temperatura equivalente de cada bloco é

$$T_{R,i} = (F_i - 1) \cdot 290 \quad (31)$$

e  $F_i > 1$  é o factor de ruído (noise figure) do bloco. Para blocos passivos com perdas ( $G_i < 1$ ) tem-se  $F_i = 1/G_i$ .

Considere-se que a potência do sinal de GPS à entrada da antena do receptor é  $P_s = -160$  dBW. A temperatura equivalente do receptor, que inclui o cabo de ligação da antena ao pré-amplificador (LNA=low-noise amplifier), o pré-amplificador e o cabo de saída+filtro, é dada por [10]

$$T_R = \left(\frac{1}{G_1} - 1\right) \cdot 290 + \frac{(F_2 - 1) \cdot 290}{G_1} + \frac{\left(\frac{1}{G_3} - 1\right) \cdot 290}{G_1 G_2} = 466 \text{ K} \quad (32)$$

Usando os dados da figura obtém-se  $\mathcal{N}_0 = kT_s = 7.81 \times 10^{-21}$  W/Hz ou  $-201$  dBW/Hz. A relação portadora-ruído à saída do front-end é

$$\left(\frac{C}{\mathcal{N}_0}\right)_o = \frac{P_s}{k(T_A + T_R)} = -160 \text{ dBW} - (-201 \text{ dBW/Hz}) = 41 \text{ dB} \cdot \text{Hz} \quad (33)$$

Podemos entender a contribuição de  $T_R$  para o denominador de (33) como o de um gerador de ruído com densidade espectral de potência  $kT_R$  que se adiciona à antena e admitindo que os blocos que compõem o front-end são ideais (sem ruído). A diferença de valores entre (29) e (33) deve-se ao facto dos blocos da Fig. 11 não serem ideais, isto é, devido a ter-se  $T_R > 0$ .

Em geral, os receptores de GPS conseguem operar com relações portadora-ruído acima dos 30 dB·Hz.

Admitindo uma largura de banda  $B = 2$  MHz, a relação sinal-ruído à saída do circuito da Fig. 11 é dada por

$$\frac{P_s}{\mathcal{N}_0 B} = \frac{10^{-16}}{7.81 \times 2 \times 10^{-15}} = 6.4 \times 10^{-3} \quad (34)$$

ou  $-21.9$  dB. Isto é, a potência do ruído é cerca de 150 vezes maior que a do sinal.

## 2.2 Sinais de espalhamento de espectro

### 2.2.1 Esquemas de acesso múltiplo

Os sinais gerados por múltiplos utilizadores podem partilhar o mesmo canal se forem ortogonais. Dois sinais reais  $x(t)$  e  $y(t)$  são ortogonais se verificarem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \quad (35)$$

Esta definição está na base da multiplexagem de sinais no tempo (TDMA=time division multiple access). Usando a transformada de Fourier e o teorema do integral obtém-se para (35)

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df \quad (36)$$

Esta definição está na base da multiplexagem de sinais na frequência (FDMA=frequency division multiple access).

Existe uma terceira forma de tornar dois sinais  $f(t)$  e  $g(t)$  ortogonais. Basta que

$$x(t) = c_1(t)f(t) \quad (37)$$

$$y(t) = c_2(t)g(t) \quad (38)$$

em que  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  são dois códigos de espalhamento de espectro (ortogonais). Este conceito está na base da multiplexagem de sinais no código (CDMA=code division multiple access).

Os três esquemas de acesso múltiplo ao canal encontram-se esquematizados na Fig. 12.

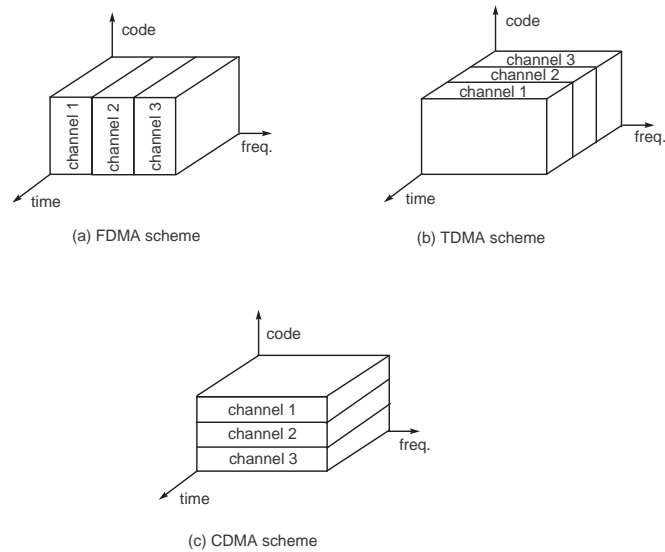


Figura 12: Esquemas de acesso múltiplo

No acesso múltiplo por divisão no código todos os utilizadores operam numa frequência nominal e usam *simultaneamente* toda a largura de banda disponível. Uma característica importante é que, contrariamente aos métodos FDMA e TDMA, exige-se uma coordenação mínima (no tempo ou na frequência) entre os diversos utilizadores.

### 2.2.2 Técnicas de espalhamento de espectro

As técnicas utilizadas em CDMA são chamadas de *espalhamento de espectro* (SS, *spread spectrum*). Um sistema diz-se de espalhamento de espectro se verificar as seguintes condições:

1. O sinal SS utiliza uma banda de transmissão muito maior que a largura de banda mínima requerida para transmitir os dados.
2. O espalhamento de espectro é efectuado através de um sinal de espalhamento (*sinal de código*) o qual é independente dos dados.
3. No receptor a recuperação dos dados originais é realizada por correlação do sinal SS com uma réplica sincronizada do sinal de código utilizado na transmissão.

As técnicas de espalhamento de espectro foram originalmente desenvolvidas para comunicações militares tendo por objectivos:

(i) minimizar a interferência intencional nas transmissões (jamming)  
(ii) ocultar os sinais transmitidos através do uso de densidades espectrais de potência abaixo do nível de ruído de canal.

Em comunicações civis as características mais importantes dos sinais SS são:

- (i) partilha simultânea da largura de banda do canal com outros utilizadores
- (ii) imunidade elevada ao efeito de desvanecimento (fading).

As duas técnicas de espalhamento de espectro mais frequentemente utilizadas são:

1. modulação por sequência directa (DS, direct sequence);
2. modulação por saltos na frequência (FH, frequency hopping).

### 2.2.3 modulação por sequência directa (DS)

O esquema da Fig. 13 representa um modulador DS para sinais digitais binários.

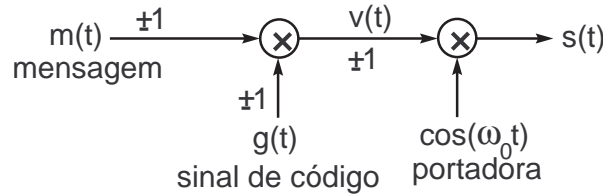


Figura 13: Modulador para sinais DS

O sinal  $m(t) = \pm 1$  é uma sequência binária representando a mensagem a transmitir,  $g(t) = \pm 1$  é o sinal de código que consiste numa sequência binária pseudo-aleatória (sequência PN) e  $\cos \omega_0 t$  é a portadora sinusoidal.

A sequência PN assemelha-se a um sinal aleatório para qualquer receptor excepto aquele a que se destina a transmissão (para o qual a sequência é determinística). A Fig. 14 exemplifica os sinais envolvidos. Note-se que a duração,  $T_c$ , do pulso (chip) do sinal  $g(t)$  é muito menor que a duração de bit, isto é,  $T_c \ll T_b$ , pelo que a largura de banda de  $v(t) = m(t)g(t)$  é bastante superior à de  $m(t)$ .

Tendo em conta que o espectro de potência de um sinal NRZ polar com tensões  $\pm A$  e duração de pulso  $T$  é dada por  $G(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$ , o efeito da multiplicação por  $g(t)$  sobre o espectro de potência de  $m(t)$  consiste no alargamento do espectro do sinal modulante de acordo com

$$G_v(f) = G_m(f) * G_g(f) \approx k G_g(f)$$

em que  $k$  é uma constante.

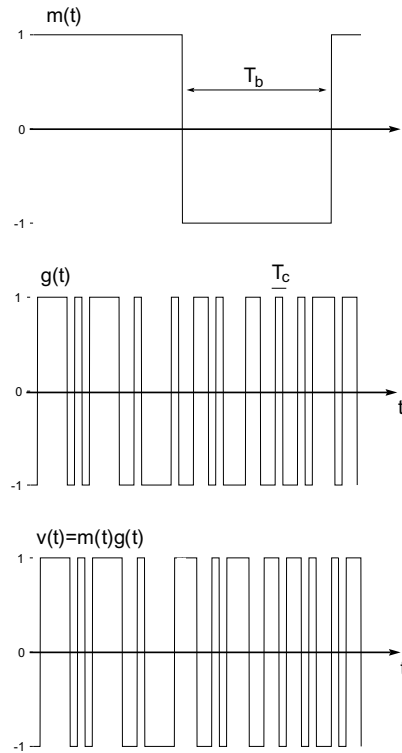


Figura 14: Geração de sinais de espalhamento do espectro

A largura de banda do sinal  $v(t)$  é aproximadamente igual à do sinal de código, ou seja,  $B \approx 1/T_c$  (medida entre nulos). A portadora modulada em PSK binário tem uma largura de banda  $2B$ . O espalhamento do espectro do sinal modulado pela sequência PN é evidenciado na Fig. 15.

#### 2.2.4 modulação por saltos na frequência (FH)

Nos sistemas de comunicação com espalhamento de espectro por saltos na frequência a largura de banda disponível é dividida num número elevado de sub-bandas contíguas (slots). Em cada intervalo de símbolo o sinal modulado (normalmente em M-FSK) ocupa uma ou mais sub-bandas como se ilustra na Fig. 16 (tipicamente o número de sub-bandas varia entre 32 e 500). A selecção desses slots é feita de forma pseudo-aleatória usando um gerador de sequências PN.

Um sistema de espalhamento de espectro por saltos na frequência diz-se lento (slow frequency hopping) se o intervalo de tempo entre saltos for maior ou igual à duração dos símbolos de M-FSK. Caso contrário o sistema de saltos de frequência diz-se rápido (fast frequency hopping). Na Fig. 17 esquematiza-se um transmissor para sinais FH/M-

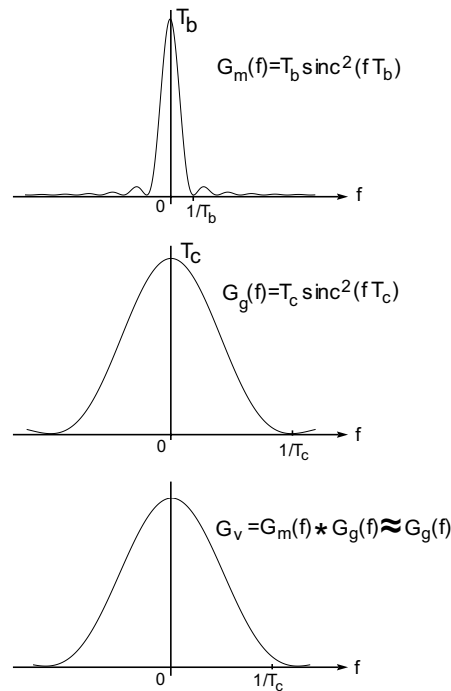


Figura 15: Espectros de potência de sinais de espalhamento de espectro

FSK.

No receptor o sinal é desmodulado usando um sintetizador de frequência controlado pela mesma sequência de código PN do transmissor obtendo-se um sinal de M-FSK sem espalhamento de espectro. A detecção de símbolo é, em seguida, assegurada por um detector não-coerente.

Quando se utiliza a técnica FH em CDMA cada utilizador possui um padrão diferente de saltos de frequência. A ortogonalidade dos códigos significa, neste caso, que não existem dois ou mais utilizadores a transmitir simultaneamente numa dada janela de frequências. Na prática, tal não é completamente verdade pelo que resulta alguma

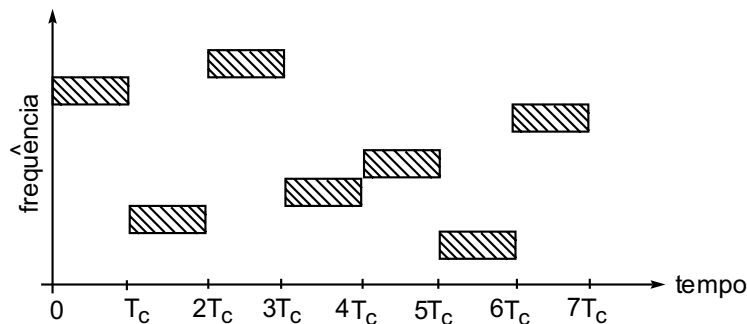


Figura 16: Exemplo de distribuição de frequências para sinais SS-FH

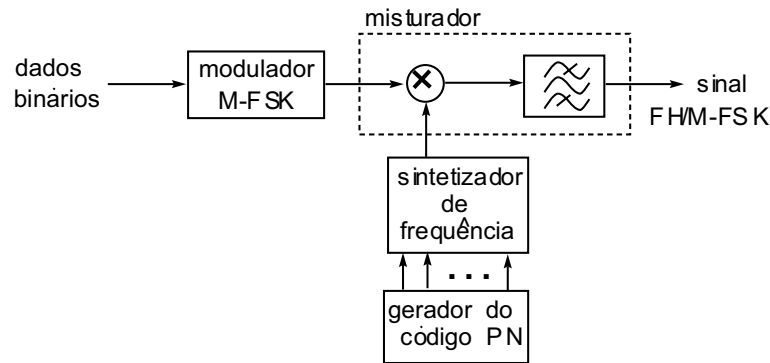


Figura 17: Esquema de modulação de sinais SS-FH

interferência que aumenta com o número de utilizadores.

### 2.3 Aquisição de código/frequência

A aquisição é um processo de sincronização grosseira que produz estimativas do atraso do código PRN e do desvio de frequência Doppler da portadora. Esta informação é usada para inicializar as malhas de seguimento do receptor.

Um tempo de aquisição curto do código e da portadora é muito importante, especialmente em ambientes em que os satélites são frequentemente visíveis durante pequenos períodos de tempo (como, por exemplo, em cenários de canyon urbano). Nesse caso, é desejável um tempo de aquisição de alguns segundos para evitar permanecer continuamente na fase de aquisição.

O espaço de busca (ver Fig. 18) tem de cobrir toda a gama de incerteza tanto no código como no desvio de frequência Doppler. A selecção de um percurso através do espaço de busca depende da dinâmica do receptor e dos requerimentos em termos da velocidade de aquisição e da fiabilidade. Tipicamente, a frequência Doppler é inicialmente ajustada ao valor esperado e o código é testado para todos os atrasos possíveis. Se esta operação falhar, a busca é continuada no próximo intervalo de Doppler, com a sequência de valores da frequência a testar alternando acima e abaixo da frequência Doppler inicial.

O esquema de aquisição mais frequentemente usado é o circuito da Fig. 19. O sinal de GPS é convertido para banda de base e correlacionado com o código gerado localmente no intervalo de duração  $T$ . Este intervalo deve ser suficientemente longo para que a relação sinal-ruído de saída seja suficiente para se obter uma boa detecção da mensagem de navegação, mas suficientemente curto para garantir que a presença de dados e a frequência Doppler residual não causam grande degradação no desempenho.

Seja o sinal recebido dado por

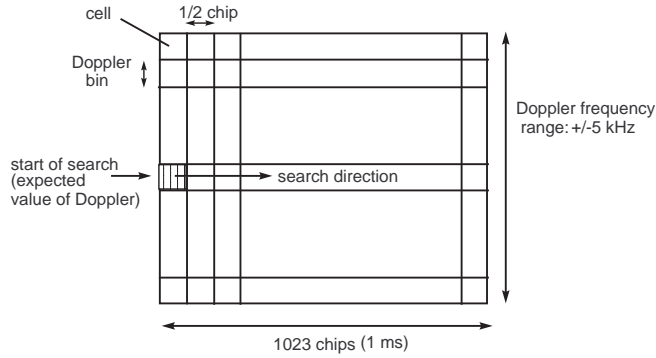


Figura 18: Grelha para a busca de atraso de código/frequência Doppler na etapa de aquisição

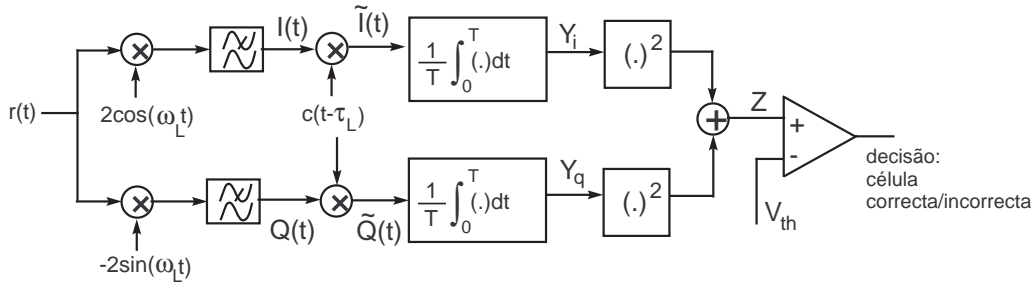


Figura 19: Esquema para a aquisição de sinais de GPS

$$r(t) = Ac(t - \tau)d(t - \tau) \cos(\omega_i t + \phi) + n(t) \quad (39)$$

em que  $c(t)$  é o código de espalhamento de espectro,  $\tau$  é o atraso do código (desconhecido),  $d(t) = \pm 1$  são dados de navegação,  $\omega_i = \omega_0 + \omega_D$  é a frequência da portadora (desconhecida) que inclui a frequência nominal da portadora ( $\omega_0$ ) e o desvio de frequência Doppler ( $\omega_D$ ),  $\phi$  é uma fase desconhecida, e  $n(t)$  é AWGN com densidade espectral de potência  $\mathcal{N}_0/2$ . Seja  $\omega_L = \omega_0 + \hat{\omega}_D$  a frequência do oscilador local do receptor, em que  $\hat{\omega}_D$  indica a estimativa da frequência Doppler. Heterodinando o sinal de RF para banda de base e filtrando passa-baixo, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = Ac(t - \tau)d(t - \tau) \begin{bmatrix} \cos((\omega_i - \omega_L)t + \phi) \\ \sin((\omega_i - \omega_L)t + \phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_i(t) \\ n_q(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$



em que  $n_i(t)$  e  $n_q(t)$  são as componentes em fase e em quadratura de  $n(t)$ . As suas densidades espectrais de potência são, por conseguinte, iguais a  $\mathcal{N}_0$ . O processo indicado em (40) é designado em inglês por *carrier wipeoff* dado que o sinal deixa de estar modulado pela portadora. A frequência de saída do sinal complexo  $I(t) + jQ(t)$ , dada por  $\omega_i - \omega_L = \omega_D - \hat{\omega}_D$ , é a diferença entre a verdadeira frequência Doppler e a estimativa corrente produzida pelo receptor.

De seguida, multiplicamos as componentes em banda de base pela réplica local da sequência de código (com atraso  $\tau_L$ ) para obter

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}(t) \\ \tilde{Q}(t) \end{bmatrix} = Ac(t - \tau)c(t - \tau_L)d(t - \tau) \begin{bmatrix} \cos((\omega_i - \omega_L)t + \phi) \\ \sin((\omega_i - \omega_L)t + \phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{n}_i(t) \\ \tilde{n}_q(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Este processo é designado em inglês de *code wipeoff*.

Os sinais  $\tilde{I}(t)$  e  $\tilde{Q}(t)$  são integrados no intervalo  $[0, T]$ , conduzindo a

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ Y_q \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{I}(t) \\ \tilde{Q}(t) \end{bmatrix} dt, \quad (42)$$

Admitamos sincronização perfeita da portadora:  $\omega_L = \omega_i$ . Fica

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ Y_q \end{bmatrix} = \frac{A}{T} \int_0^T c(t - \tau)c(t - \tau_L) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} N_i \\ N_q \end{bmatrix} \quad (43)$$

em que  $N_i$  a  $N_q$  são v.a. gaussianas independentes de média nula e variância

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}_i(t)\tilde{n}_i(\lambda)\} dt d\lambda \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}_q(t)\tilde{n}_q(\lambda)\} dt d\lambda \\ &= \frac{\mathcal{N}_0}{T} \end{aligned} \quad (44)$$

Finalmente

$$Y_i = AR_c(\tau_L - \tau) \cos \phi + N_i \quad (45)$$

$$Y_q = AR_c(\tau_L - \tau) \sin \phi + N_q \quad (46)$$

$$(47)$$

A relação sinal-ruído de pós-integração é dada por

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{N}\right)_0 &= \frac{\overline{Y_i^2} + \overline{Y_q^2}}{\overline{N_i^2} + \overline{N_q^2}} = \frac{A^2 T R_c^2 (\tau_L - \tau)}{2\mathcal{N}_0} \\
&= \left(\frac{C}{\mathcal{N}_0}\right) T R_c^2 (\tau_L - \tau)
\end{aligned} \tag{48}$$

A quantidade

$$Z = Y_i^2 + Y_q^2 \tag{49}$$

é uma v.a com distribuição qui-quadrado não-centrada com 2 graus de liberdade e fdp [4]

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 R_c^2 (\tau_L - \tau) + z}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\sqrt{z} \frac{A R_c (\tau_L - \tau)}{\sigma^2}\right), \quad z \geq 0 \tag{50}$$

em que  $I_0(x)$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero.

Para  $|\tau_L - \tau| > T_c$ , (50) simplifica para

$$p_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right), \quad z \geq 0 \tag{51}$$

isto é,  $Z$  é uma v.a. com distribuição de qui-quadrado centrada com 2 graus de liberdade.

O critério de decisão na Fig. 19 é:

- $Z \geq V_{th} \rightarrow$  célula correcta
- $Z < V_{th} \rightarrow$  célula incorrecta

Para obter aquisição, o procedimento anterior tem de testado com um conjunto grande de atrasos do código  $\tau_L$  no intervalo correspondente a um período (1 ms), e também para um número grande de possíveis estimativas da frequência Doppler,  $\hat{f}_D$ , com  $f_L = f_0 + \hat{f}_D$ , assumindo que estes parâmetros se mantêm inalterados durante cada intervalo de integração de duração  $T$ .

Como resultado, o tempo de aquisição é proporcional ao número de células, que é definido como o produto do número de atrasos de código pelo número de saltos na frequência da portadora. Para receptores com pequenas velocidades a gama de frequências Doppler devido ao movimento dos satélites não excede  $\pm 5$  kHz. O incremento da frequência no algoritmo de busca é da ordem de  $1/(2T)$  a  $2/(3T)$ , pelo que o número máximo de células a testar aumenta com a duração da integração (correlação).

Para GPS C/A, um valor típico para o número de células é de 42966 para saltos de meio chip no atraso de código (2046 saltos para o código C/A) e incrementos de 500 Hz na frequência da portadora. Note-se que, na prática, o número de células a testar pode ser substancialmente inferior ao número total de células do espaço de busca dado que o processo de aquisição termina quando é encontrada uma célula que verifica as condições do critério de decisão.

Tendo em conta o critério de decisão, a probabilidade de decisão correcta (escolha da célula correcta) é

$$\begin{aligned}
 P_d &= \text{Prob}\{Z \geq V_{th} | \tau_L \approx \tau\} \\
 &= \int_{V_{th}}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 R_c^2 (\tau_L - \tau) + z}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\sqrt{z} \frac{AR_c(\tau_L - \tau)}{\sigma^2}\right) dz \\
 &= Q\left(\frac{AR_c(\tau_L - \tau)}{\sigma}, \frac{\sqrt{V_{th}}}{\sigma}\right), \quad V_{th} > 0
 \end{aligned} \tag{52}$$

em que  $|\tau_L - \tau| < T_c$  e  $Q(\cdot, \cdot)$  é a função Q de Marcum. O resultado (52) foi obtido no pressuposto de que existe sincronização perfeita da frequência. Quando tal não acontece verifica-se uma diminuição de  $P_d$ .

A probabilidade de falso alarme (escolha da célula incorrecta) é

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \text{Prob}\{Z \geq V_{th} | |\tau_L - \tau| > T_c\} \\
 &= \int_{V_{th}}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right) dz \\
 &= \exp\left(-\frac{V_{th}}{2\sigma^2}\right), \quad V_{th} > 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

As probabilidades de detecção correcta e de falso alarme encontram-se esquematizadas na Fig. 20. Verifica-se na figura que estas duas probabilidades crescem ou diminuem simultâneamente de acordo com o valor escolhido para o limiar  $V_{th}$ . No entanto, idealmente, dever-se-ia ter  $P_d \rightarrow 1$  e  $P_{fa} \rightarrow 0$ . Na prática, tal consegue-se em parte, se em vez de tomarmos uma decisão sobre a posição da célula correcta baseada apenas num valor da quantidade  $Z$ , basearmos a decisão num conjunto de  $N$  valores de  $Z$ , isto é,  $Z(1), Z(2), \dots, Z(N)$  obtidos em intervalos de tempo adjacentes.

Duas estratégias podem ser consideradas: (i) os resultados  $Z(k)$  são somados e é feita uma decisão final usando um limiar  $\gamma \neq V_{th}$  (**detector de Lozow**) [3]; ou (ii) para cada valor  $Z(k)$  toma-se uma decisão provisória usando o limiar  $V_{th}$ . Um

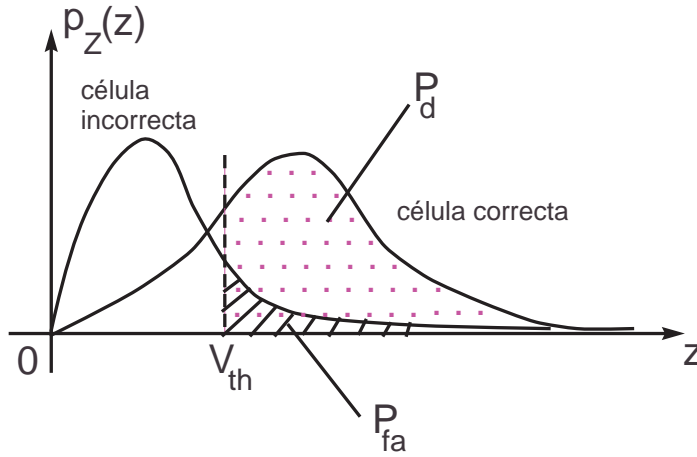


Figura 20: Probabilidades de detecção correcta de uma célula do espaço de busca e de falso alarme (detecção incorrecta)

mecanismo de confirmação, tal como os algoritmos de Tong ou de M-of-N [1], baseados nessas decisões provisórias, permite tomar uma decisão final. Ambos os algoritmos se baseiam na geração de várias amostras de integração com um período comum  $T$ .

No **detector de Tong** as saídas  $Z(k)$  são comparadas com o limiar  $V_{th}$ . Se  $Z(k) \geq V_{th}$ , o contador é incrementado de 1,  $C \rightarrow C + 1$ ; caso contrário, o contador é decrementado de 1,  $C \rightarrow C - 1$ . O contador é inicializado com  $C = B$ , em que tipicamente  $B = 1$ , ou  $B = 2$ . A busca acaba quando  $C = 0$  (o sinal é declarado ausente nessa célula) ou quando  $C = A$ , em que  $A$  é um valor pré-definido (nesse caso, o sinal é declarado presente). Quando o sinal é declarado ausente o processo de busca avança para a próxima célula. A selecção do parâmetro  $A$  resulta de um compromisso entre a velocidade da busca e a probabilidade da detecção, com um valor típico de  $A = 12$  para relações sinal-ruído baixas e de  $A = 8$  para relações sinal-ruído elevadas.

O **detector M-of-N** considera  $N$  amostras  $Z(k)$  e compara-as com o limiar  $V_{th}$  para cada célula. Se  $M$  ou mais dessas amostras excederem o limiar, o sinal é declarado presente. Caso contrário, o sinal é declarado ausente e a busca avança para a próxima célula. Valores típicos são  $M = 6$  e  $N = 10$ .

## 2.4 Seguimento de código/frequência

O objectivo da etapa de aquisição é o de obter estimativas grosseiras do atraso de código e da frequência Doppler dos sinais provenientes dos diversos satélites de GPS. Os erros das estimativas do atraso do código e da frequência Doppler devem ser os

seguintes:

- erro da estimativa do atraso de código:  $|\hat{\tau} - \tau| \leq T_c/4$
- erro da estimativa da frequência Doppler:  $|\hat{f}_D - f_D| \leq 1/(4T)$ .

Com estes valores de erro é possível terminar o modo de aquisição do receptor e iniciar o modo de seguimento (tracking) que consiste no fecho das malhas de seguimento de fase/frequência (PLL/FLL) e de seguimento de código (DLL=Delay Lock Loop) do receptor, permitindo o seu funcionamento em cadeia fechada.

Tradicionalmente, os receptores usam uma arquitectura super-heterodínica, onde são efectuadas duas conversões de frequência, como se mostra no exemplo da Fig. 21. Este é um receptor típico para sinais C/A, o qual inclui um amplificador de baixo ruído (LNA) de 36 dB de ganho com uma largura de banda de 50 MHz. A largura de banda final é de 2 MHz que é a largura do lobo principal do espectro de frequência do sinal C/A. O conversor analógico-digital (ADC) permite realizar o resto do processamento na forma digital. Esta arquitectura tem constituído a solução mais usual devido à inerente superioridade em termos de sensibilidade e de selectividade. No entanto, apresenta algumas desvantagens em termos de consumo e de área ocupada porque requer uso extensivo de componentes passivos com factor de selectividade elevado, e circuitos de frequência intermédia (IF). Hoje em dia, a arquitectura de conversão directa, mostrada na Fig. 22, está-se a tornar uma escolha conveniente devido à sua simplicidade em termos de arquitectura.

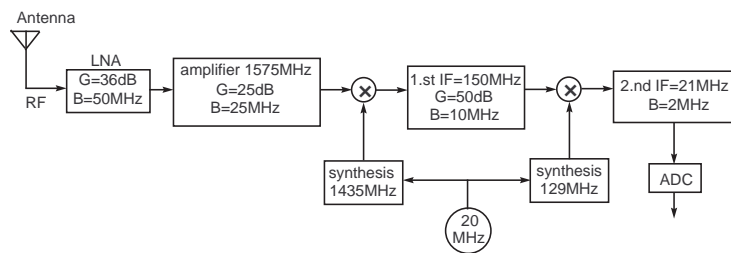


Figura 21: Estrutura da parte analógica do receptor super-heterodínico

A Fig. 23 esquematiza a arquitectura genérica de um receptor de GPS em modo de seguimento [1].

Os sinais de rádio-frequência (RF) de todos os satélites de GPS em linha-de- vista são recebidos por uma antena com polarização circular direita e cobertura quase hemisférica. Estes sinais de RF são amplificados por um pré-amplificador de baixo ruído (LNA=low noise amplifier) que estabelece efectivamente o factor de ruído [noise figure] do receptor. Estes sinais amplificados são heterodinados para uma frequência

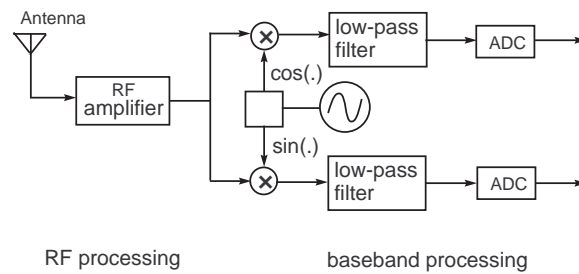


Figura 22: Estrutura da parte analógica do receptor por conversão directa (homodínica)

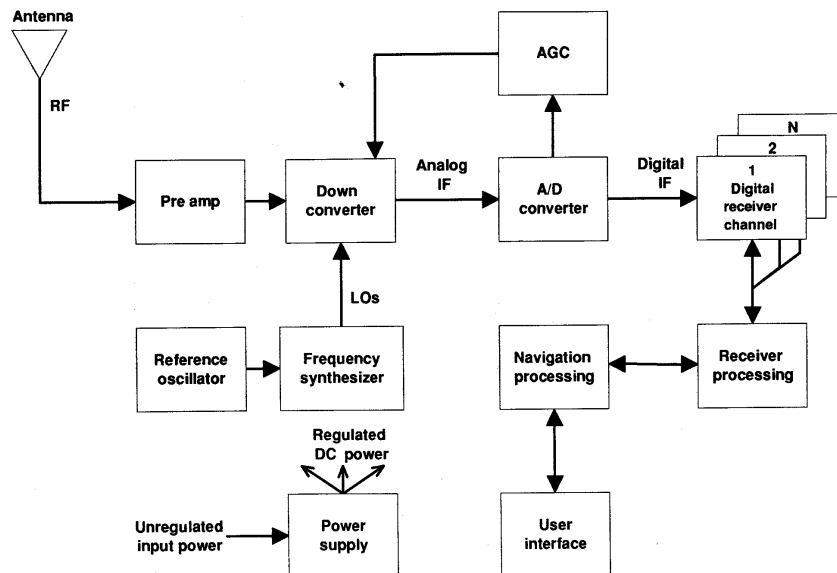


Figura 23: Diagrama de blocos de um receptor típico de GPS

intermédia (IF) usando misturadores ligados a osciladores locais. Estes são derivados de um oscilador de referência mediante o uso de um sintetizador de frequência. O processo de conversão analógico-digital (A/D) e o controlo automático de ganho são efectuados ao nível de IF. Os sinais digitalizados são, de seguida, processados por cada um dos N canais do receptor digital. Cada canal contém dois blocos de sincronização: a *malha de seguimento da portadora* [carrier tracking loop] e a *malha de seguimento de código* [code tracking loop]. O primeiro bloco efectua a desmodulação dos sinais IF digitalizados. O sinal resultante em banda de base é da forma código vezes mensagem de navegação. Este sinal passa então ao segundo bloco que efectua a medição da pseudo-distância através do alinhamento dos códigos P ou C/A e ao mesmo tempo “comprime” o espectro do sinal por forma a que a mensagem de navegação possa ser recuperada.

Na Fig. 24 esquematiza-se um canal genérico do receptor digital.

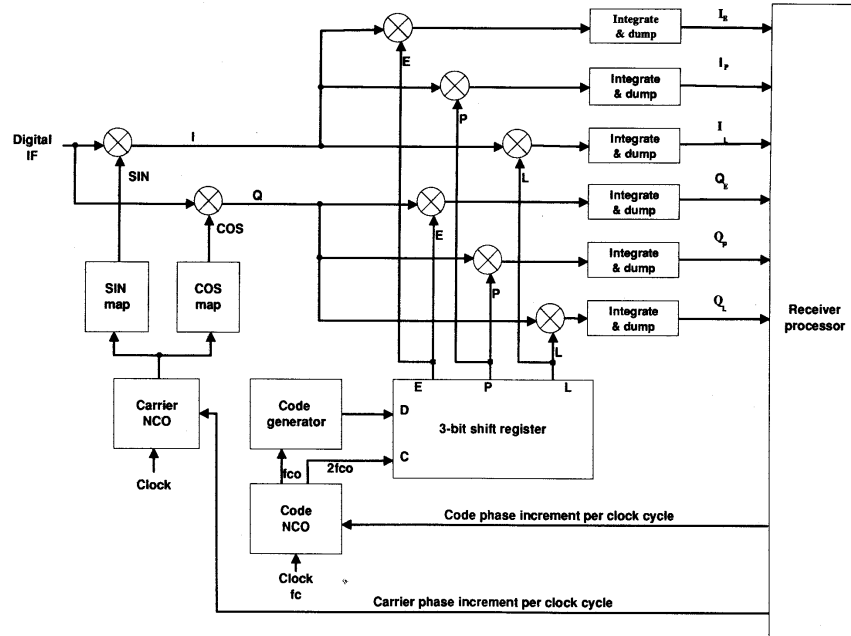


Figura 24: Diagrama de blocos de um canal do receptor da Fig. 23 (digital receiver channel)

### 2.4.1 Seguimento do código

A Fig. 25 mostra uma possível estrutura para uso no seguimento de código. Seja  $\hat{\tau}$  a estimativa corrente do atraso de código  $\tau$  e  $\Delta \leq T_c$  o *espaçamento early-late* entre os dois pares de correladores (correladores early e late). Quando  $\Delta = T_c$ , designamo-lo por *wide correlator*; quando  $\Delta \ll T_c$ , designamo-lo por *narrow correlator*. As saídas em fase e em quadratura dos correladores early são

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_E \\ Q_E \end{bmatrix} &= \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{I}_E(t) \\ \tilde{Q}_E(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} c(t - \hat{\tau} + \Delta/2) dt \end{aligned} \quad (54)$$

e as saídas dos correladores late são

$$\begin{bmatrix} I_L \\ Q_L \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} \tilde{I}_L(t) \\ \tilde{Q}_L(t) \end{bmatrix} dt$$

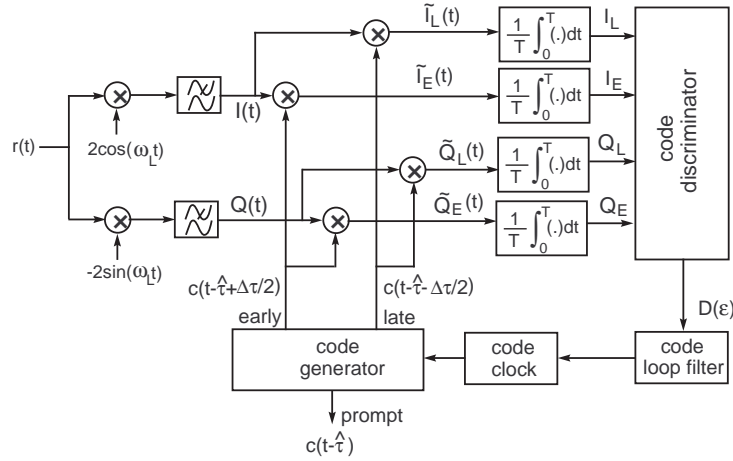


Figura 25: Esquema para o seguimento do código de sinais de GPS

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} c(t - \hat{\tau} - \Delta/2) dt \quad (55)$$

As saídas destes correladores são processadas por uma função de discriminação que gera um sinal que depende do erro  $\epsilon \equiv \hat{\tau} - \tau$ , de acordo com

$$D(\epsilon) = kf(\epsilon) \quad (56)$$

em que  $k$  é um factor de ganho e a função  $f(\cdot)$  depende do tipo de discriminador. Para evitar a dependência da fase da portadora, muitos receptores utilizam um DLL não coerente, em conjunto com funções discriminadoras apropriadas (para uma discussão detalhada sobre este tópico vide [1]). Para além dos DLLs não coerentes existem também DLLs coerentes em que a fase da portadora precisa de ser estimada. Um dos DLLs não coerentes mais conhecidos utiliza o discriminador early-late power (NELP=non-coherent early-late power), dado por

$$D(\epsilon) = (I_E^2 + Q_E^2) - (I_L^2 + Q_L^2) \quad (57)$$

Tendo em conta que o DLL inclui dois correladores complexos, o correlador early com saída  $I_E + jQ_E$ , e o correlador late com saída  $I_L + jQ_L$ , o discriminador em (57) mede a diferença de potências entre os dois correladores.

Considere-se o sinal recebido dado por (39). Seja

$$\begin{bmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = Ac(t - \tau)d(t - \tau) \begin{bmatrix} \cos(\omega_e t + \phi_e) \\ \sin(\omega_e t + \phi_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_i(t) \\ n_q(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$



em que  $\omega_e = \hat{\omega}_i - \omega_i = 2\pi(\hat{f}_D - f_D)$  é o erro de frequência da portadora e  $\phi_e = \hat{\phi} - \phi$  é o erro de fase. Tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_E \\ Q_E \end{bmatrix} &= \frac{Ad}{NT} \int_0^{NT} c(t - \tau) c\left(t - \hat{\tau} + \frac{\Delta}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos(\omega_e t + \phi_e) \\ \sin(\omega_e t + \phi_e) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} N_{i,E} \\ N_{q,E} \end{bmatrix} \\ &= AdR_c\left(\epsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{sinc}(f_e NT) \begin{bmatrix} \cos(\pi f_e NT + \phi_e) \\ \sin(\pi f_e NT + \phi_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{i,E} \\ N_{q,E} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

e os ruídos  $N_{i,E}$  e  $N_{q,E}$  são v.a. Gaussianas, independentes, de médias nulas e variâncias  $\sigma^2$ . De igual modo para os correladores late

$$\begin{bmatrix} I_L \\ Q_L \end{bmatrix} = AdR_c\left(\epsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \text{sinc}(f_e NT) \begin{bmatrix} \cos(\pi f_e NT + \phi_e) \\ \sin(\pi f_e NT + \phi_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{i,L} \\ N_{q,L} \end{bmatrix} \quad (60)$$

onde os ruídos  $N_{i,L}$  e  $N_{q,L}$  são v.a. Gaussianas, independentes, de médias nulas e variâncias  $\sigma^2$ .

Desprezando o efeito do ruído, a resposta do discriminador NELP é dada por

$$D(\epsilon) = A^2 \text{sinc}^2(f_e NT) \left[ R_c^2\left(\epsilon - \frac{\Delta}{2}\right) - R_c^2\left(\epsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (61)$$

A Fig. 26 ilustra as potências dos correladores para diferentes valores do erro de seguimento  $\epsilon$ . Essencialmente, o que o discriminador de código NELP faz, de acordo com (61), é medir a diferença de potências entre as saídas de dois correladores complexos. Esta diferença é então realimentada permitindo corrigir (avançar ou retardar) o gerador da sequência de código.

A Fig. 27 representa a resposta do discriminador NELP em função de  $\epsilon$  para diferentes espaçamentos early-late quando se assume que  $A = 1$  e  $f_e = 0$ . Note-se que a saída do discriminador é linear no intervalo  $-\Delta/2 < \epsilon < \Delta/2$ .

A sensibilidade do discriminador aos erros de seguimento do código depende do ganho do discriminador (para  $\epsilon = 0$ )

$$\begin{aligned} G_D &= \left. \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{4}{T_c} A^2 \text{sinc}^2(f_e NT) R_c\left(\frac{\Delta}{2}\right) \\ &= \frac{4A^2}{T_c} \text{sinc}^2(f_e NT) \left(1 - \frac{\Delta}{2T_c}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

o qual cresce à medida que o espaçamento early-late  $\Delta$  diminui. Os resultados obtidos com (62) requerem que os sinais recebidos tenham larguras de banda infinitas, o que

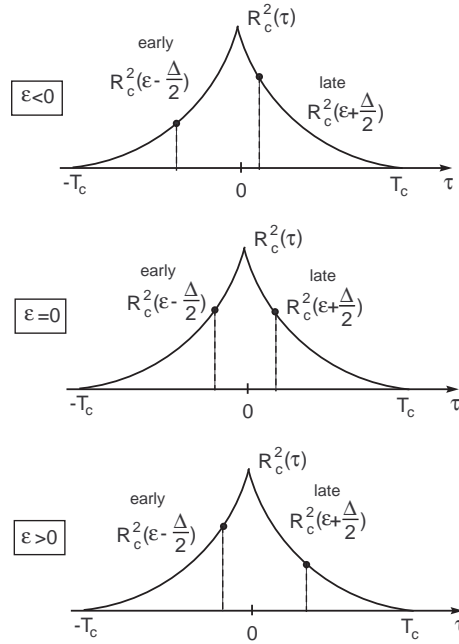


Figura 26: Potências dos correladores early e late para diferentes valores do erro de seguimento  $\epsilon$

não é praticável. Pode-se mostrar que, para receptores práticos, não há vantagem em diminuir  $\Delta$  abaixo de um certo valor (tipicamente  $0.1T_c$ ).

#### 2.4.2 Seguimento da fase/frequência

A Fig. 28 é um diagrama de blocos contendo apenas a malha de seguimento da portadora do receptor GPS. O discriminador da malha de seguimento da portadora pode ser um PLL [phase lock loop], um PLL de Costas (que é um circuito que tolera a presença de sinais de entrada modulados digitalmente), ou um FLL [frequency lock loop] também designado por AFC [automatic frequency control].

O PLL e a malha de Costas são os circuitos mais precisos mas são mais sensíveis a desvios na frequência. As saídas do PLL e da malha de Costas dependem dos erros de fase, enquanto que o FLL produz uma tensão de saída que é função do erro de frequência. Em geral, os receptores GPS utilizam o FLL durante o período de aquisição de sincronismo, em que a incerteza inicial da frequência é elevada (devido, por exemplo ao efeito Doppler), e transitam para a malha de Costas no período de seguimento.

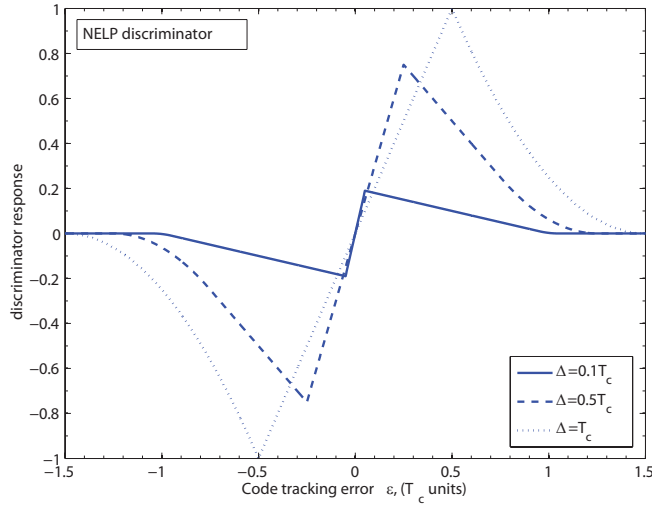


Figura 27: Resposta do discriminador NELP

### 3 Resolução da Equação de Navegação

#### 3.1 Sistemas de coordenadas

A posição de cada satélite é determinada usando coordenadas inerciais centradas na Terra [**ECI**=Earth-centered inertial coordinates] em que o plano xy coincide com o plano equatorial da Terra, o eixo dos xx mantém-se permanentemente fixo apontando para uma determinada posição da esfera celeste (equinócio vernal), o eixo dos yy é escolhido de modo a formar um sistema de coordenadas dextro e o eixo dos zz aponta para o pólo norte. As órbitas dos satélites são determinadas no sistema de coordenadas ECI e depois convertidas em coordenadas de um sistema centrado e fixo na Terra [**ECEF**=Earth-centered Earth-fixed] onde o eixo dos xx aponta na direcção de longitude  $0^\circ$  e o eixo dos yy na direcção de longitude  $90^\circ$  Este. As posições dos satélites são enviadas para o receptor na mensagem de navegação usando coordenadas ECEF.

Dado que a equação de navegação é, em geral, resolvida em coordenadas ECEF é usual transformar as coordenadas ECEF do receptor em latitude, longitude e altitude. Para efectuar esta transformação é necessário definir um modelo físico da Terra. O modelo físico que é utilizado é o *world geodetic system 1984 (WGS-84)*. Uma parte do WGS-84 é o modelo detalhado das irregularidades gravitacionais. Esta informação é necessária à obtenção precisa das efemérides dos satélites. Além disso, o WGS-84 fornece um modelo elipsoidal da forma da Terra em que o semi-eixo maior situado no plano do equador é  $a = 6378137.0$  m. e o semi-eixo menor (perpendicular ao plano equatorial) é  $b = 6356752.3142$  m. A excentricidade  $e$  e o achatamento  $f$  são dados

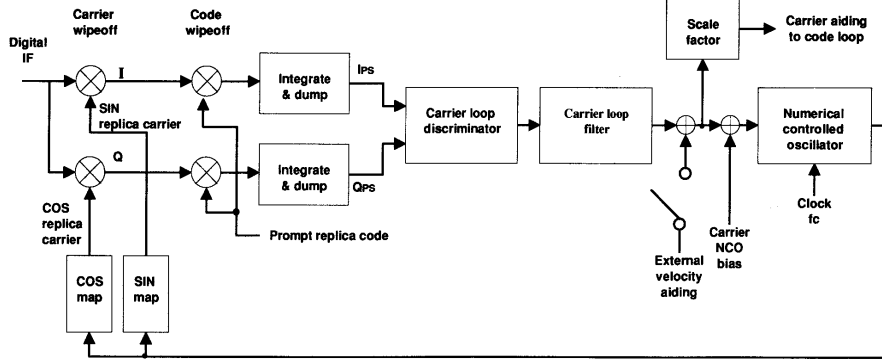


Figura 28: Diagrama de blocos da malha de seguimento da portadora de um receptor de GPS

por

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \approx 0.0818, \quad f = 1 - \frac{b}{a}. \quad (63)$$

É possível transformar as coordenadas ECEF de um ponto  $P = (x y z)$  em coordenadas relativas a um referencial local designado de Sistema de Coordenadas **ENU**, (East-North-Up). O plano constituído pelos eixos E-N é tangente à superfície da Terra no ponto de origem com coordenadas ECEF  $P_u = (x_u y_u z_u)$ , como se mostra na Fig. 29. A equação de transformação é [9], [10]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_u & \cos \theta_u & 0 \\ -\sin \phi_u \cos \theta_u & -\sin \phi_u \sin \theta_u & \cos \phi_u \\ \cos \phi_u \cos \theta_u & \cos \phi_u \sin \theta_u & \sin \phi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_u \\ y - y_u \\ z - z_u \end{bmatrix} \quad (64)$$

em que  $\phi_u$  e  $\theta_u$  são respectivamente a latitude e a longitude de  $P_u$ . Note-se que para  $z'(t) > 0$  o ponto P se encontra acima da linha do horizonte.

Podemos obter o ângulo de azimuth ( $\alpha$ ) e o ângulo de elevação ( $\epsilon$ ) do ponto P através de

$$\tan \alpha = \frac{x'}{y'} \quad (65)$$

$$\sin \epsilon = \frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} \quad (66)$$

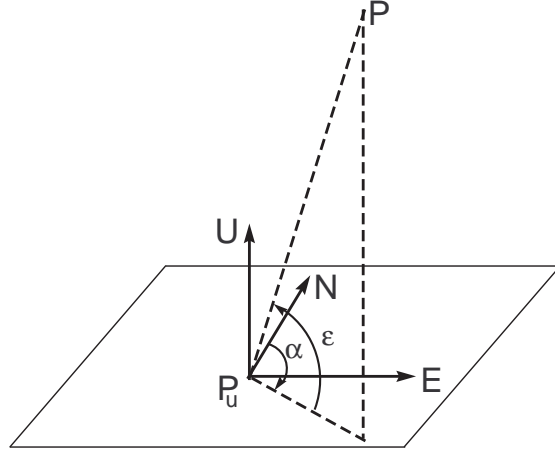


Figura 29: Definição do referencial local ENU

### 3.2 Conversão de coordenadas

Para um utilizador com coordenadas ECEF  $(x_u, y_u, z_u)$  a latitude  $\phi$ , a longitude  $\lambda$  e a altitude geodéticas  $h$  são dadas por [10]

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \phi \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan2 \left( \frac{y_u}{x_u} \right) \\ \arctan \left[ \frac{z_u}{p} \left( 1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1} \right] \\ \frac{p}{\cos \phi} - N \end{bmatrix} \quad (67)$$

em que  $\arctan2$  é a função arco-tangente de 4 quadrantes e

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \quad (68)$$

Note-se que a determinação da latitude e da altitude geodéticas através de (67) só pode ser efectuada de forma iterativa. Para tal estipula-se um valor inicial para  $\phi$  e procede-se ao cálculo de  $N$ ,  $h$  e  $\phi$  do modo recursivo até se obter os resultados desejados.

As coordenadas  $\lambda$ ,  $\phi$  e  $h$  podem ser convertidas em coordenadas cartesianas no sistema ECEF através de

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N(1-e^2)+h) \sin \phi \end{bmatrix} \quad (69)$$

A posição aproximada de um satélite de GPS em coordenadas ECEF é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Omega - \sin \theta \sin \Omega \cos \alpha \\ \cos \theta \sin \Omega + \sin \theta \cos \Omega \cos \alpha \\ \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (70)$$

em que

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + (t - t_0) \frac{360}{43082} \text{ graus} \quad [\text{latitude da órbita}] \\ \Omega &= \Omega_0 - (t - t_0) \frac{360}{86164} \text{ graus} \quad [\text{longitude do nó de ascensão}] \\ \alpha &= 55 \text{ graus} \quad [\text{inclinação do plano da órbita}] \\ R &= 26559.800 \text{ Km} \end{aligned} \quad (71)$$

O parâmetro  $\Omega$  é a longitude ECI onde o plano orbital intersecta o plano equatorial quando o satélite passa do hemisfério sul para o hemisfério norte (vide Fig. 30). O parâmetro  $\theta$  representa a posição do satélite no plano da órbita (medida a partir do plano equatorial). O parâmetro  $\alpha$  é a inclinação do plano orbital relativamente ao plano equatorial.

A tabela da Fig. 31 indica os parâmetros  $\Omega$  e  $\theta$  para a constelação de GPS optimizada relativos ao tempo de referência  $t_0$  (meia-noite de 1 de Julho de 1993) [9].

### 3.3 Determinação da posição do receptor

Por forma a determinar a posição do receptor  $(x_u, y_u, z_u)$  e o desvio de relógio do receptor relativamente ao relógio do sistema  $t_u$ , são efectuadas medições das pseudo-distâncias relativamente a  $M$  satélites (com  $M \geq 4$ ) resultando no sistema de equações

$$\rho_1 = \sqrt{(X_1 - x_u)^2 + (Y_1 - y_u)^2 + (Z_1 - z_u)^2} + ct_u + \epsilon_1$$

$$\rho_2 = \sqrt{(X_2 - x_u)^2 + (Y_2 - y_u)^2 + (Z_2 - z_u)^2} + ct_u + \epsilon_2$$

...

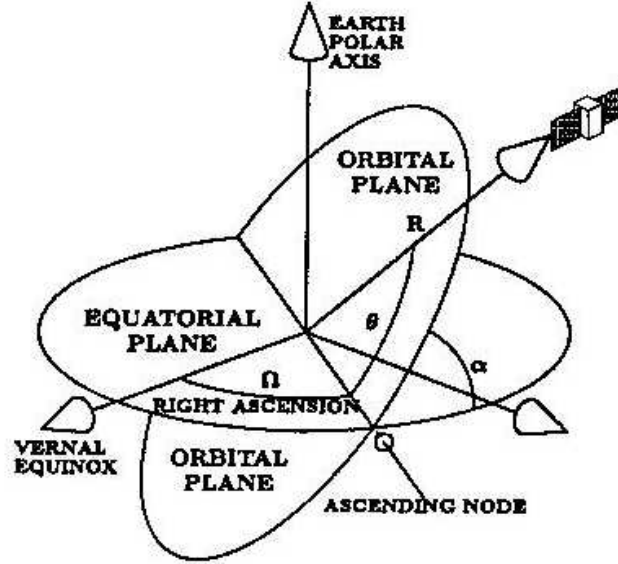


Figura 30: Coordenadas do satélite

$$\rho_M = \sqrt{(X_M - x_u)^2 + (Y_M - y_u)^2 + (Z_M - z_u)^2} + ct_u + \epsilon_M \quad (72)$$

em que  $\rho_i$  é a pseudo-distância,  $(X_i, Y_i, Z_i)$  designa a posição do satélite  $i$  e  $\epsilon_i$  é o erro associado à medição  $\rho_i$  devido ao cancelamento incompleto dos erros introduzidos pela ionosfera/troposfera, ruído térmico, etc. Em geral, os erros são considerados Gaussianos, independentes, de média nula, e com iguais variâncias.

Estas equações não-lineares podem ser resolvidas usando uma das seguintes técnicas: (1) soluções em forma fechada, como o algoritmo de Bancroft, (2) soluções iterativas baseadas em linearizações, ou (3) filtragem de Kalman. Uma desvantagem das soluções pontuais (correspondentes aos métodos (1) ou (2)) é que transportam uma quantidade limitada de informação de uma medição para a seguinte; por exemplo, não incluem informação sobre a dinâmica do movimento do utilizador. A utilização do filtro de Kalman permite resolver esta limitação.

### 3.4 Linearização da equação de navegação

As equações em (72) são da forma

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} + \tau_u \quad (73)$$

em que se desprezou os erros  $\epsilon_i$  e se fez  $\tau_u = ct_u$ . Usando estimativas aproximadas da posição do receptor  $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$  e do desvio de relógio  $\hat{\tau}_u$  podemos calcular uma

Satellite ID	$\Omega_0(^{\circ})$	$\theta_0(^{\circ})^a$
1	272.847	268.126
2	272.847	161.786
3	272.847	11.676
4	272.847	41.806
5	332.847	80.956
6	332.847	173.336
7	332.847	309.976
8	332.847	204.376
9	32.847	111.876
10	32.847	11.796
11	32.847	339.666
12	32.847	241.556
13	92.847	135.226
14	92.847	265.446
15	92.847	35.156
16	92.847	167.356
17	152.847	197.046
18	152.847	302.596
19	152.847	333.686
20	152.847	66.066
21	212.847	238.886
22	212.847	345.226
23	212.847	105.206
24	212.847	135.346

<sup>a</sup> $\theta_0$  is the value of  $\theta$  at the reference time  $t_0$ .  $\Omega_0$  is the value of  $\Omega$  at the reference time  $t_0$ . The reference time is midnight July 1, 1993.

Figura 31: Parâmetros  $\Omega_0$  e  $\theta_0$  da constelação de GPS relativos ao tempo de referência  $t_0$

pseudo-distância aproximada

$$\hat{\rho}_i = \sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2} + \hat{\tau}_u. \quad (74)$$

A posição e o desvio do relógio do receptor são desconhecidos mas podem ser bem aproximados pela estimativa e por uma componente incremental

$$\begin{aligned} x_u &= \hat{x}_u + \Delta x_u \\ y_u &= \hat{y}_u + \Delta y_u \\ z_u &= \hat{z}_u + \Delta z_u \\ \tau_u &= \hat{\tau}_u + \Delta \tau_u. \end{aligned} \quad (75)$$

Consideremos o seguinte desenvolvimento em série de Taylor



$$\rho_i = \hat{\rho}_i + \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{x}_u} \Delta x_u + \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{y}_u} \Delta y_u + \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{z}_u} \Delta z_u + \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial (\hat{\tau}_u)} \Delta \tau_u + \dots \quad (76)$$

A expansão é truncada após as derivadas parciais de primeira ordem para eliminar os termos não-lineares. As derivadas parciais valem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{x}_u} &= -\frac{x_i - \hat{x}_u}{\hat{r}_i} \\ \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{y}_u} &= -\frac{y_i - \hat{y}_u}{\hat{r}_i} \\ \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{z}_u} &= -\frac{z_i - \hat{z}_u}{\hat{r}_i} \\ \frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial \hat{\tau}_u} &= 1 \end{aligned} \quad (77)$$

onde

$$\hat{r}_i = \sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2}. \quad (78)$$

Substituindo (77) em (76) obtém-se

$$\hat{\rho}_i - \rho_i = \frac{x_i - \hat{x}_u}{\hat{r}_i} \Delta x_u + \frac{y_i - \hat{y}_u}{\hat{r}_i} \Delta y_u + \frac{z_i - \hat{z}_u}{\hat{r}_i} \Delta z_u - \Delta \tau_u. \quad (79)$$

Faça-se, agora, por facilidade

$$\begin{aligned} \Delta \rho_i &= \hat{\rho}_i - \rho_i \\ a_{xi} &= \frac{x_i - \hat{x}_u}{\hat{r}_i} \\ a_{yi} &= \frac{y_i - \hat{y}_u}{\hat{r}_i} \\ a_{zi} &= \frac{z_i - \hat{z}_u}{\hat{r}_i}. \end{aligned} \quad (80)$$

A equação (79) pode ser re-escrita como

$$\Delta \rho_i = a_{xi} \Delta x_u + a_{yi} \Delta y_u + a_{zi} \Delta z_u - \Delta \tau_u. \quad (81)$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial fazendo

$$\Delta\rho = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & -1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & -1 \\ a_{x3} & a_{y3} & a_{z3} & -1 \\ a_{x4} & a_{y4} & a_{z4} & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta v = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ \Delta \tau_u \end{bmatrix} \quad (82)$$

pelo que

$$\Delta\rho = H\Delta v \quad (83)$$

cuja solução é

$$\Delta v = H^{-1}\Delta\rho. \quad (84)$$

Após o vector  $\Delta v$  ser calculado as coordenadas do utilizador podem ser obtidas usando (75).

A solução (84) assume que se utiliza as observações de  $n = 4$  satélites. Se o número de satélites for  $n > 4$  a matriz  $H$  é da forma

$$H = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & -1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & -1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{xn} & a_{yn} & a_{zn} & -1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

e a solução da equação (83) não poderá ser (84). Nesse caso, o método dos mínimos quadráticos pode ser usado resultando

$$\Delta v = K\Delta\rho \quad (86)$$

em que a matriz pseudo-inversa

$$K = (H^T H)^{-1} H^T \quad (87)$$

depende apenas da geometria relativa do utilizador e dos satélites envolvidos no problema dos mínimos quadráticos. Os vectores  $\mathbf{a}_i = (a_{xi} \ a_{yi} \ a_{zi})$  obtidos com os elementos da matriz  $H$  são vectores unitários que apontam do ponto de linearização para a posição do satélite  $i$  (cosenos directores).

### 3.5 Diluição de Precisão

Nos casos em que a geometria utilizador/satélites pode ser considerada fixa a equação (83) traduz uma relação linear entre os erros das pseudo-distâncias e os erros de posicionamento e de desvio do relógio do receptor.

Os erros das pseudo-distâncias são considerados v.a. conjuntamente gaussianas de média nula. Logo, assumindo uma geometria fixa  $\Delta v$  é também um vector gaussiano de média nula e matriz de covariância

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\Delta v) &= E\{\Delta v \Delta v^T\} \\
 &= E\{K \Delta \rho (\Delta \rho)^T K^T\} \\
 &= E\{(H^T H)^{-1} H^T \Delta \rho (\Delta \rho)^T H (H^T H)^{-1}\} \\
 &= (H^T H)^{-1} H^T E\{\Delta \rho (\Delta \rho)^T\} H (H^T H)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{88}$$

Note-se que  $(H^T H)^{-1}$  é simétrica.

Admitamos que as componentes de  $\Delta \rho$  são identicamente distribuídas e independentes com uma variância igual ao quadrado do parâmetro UERE (comum aos vários satélites). Vem

$$E\{\Delta \rho (\Delta \rho)^T\} = I_{n \times n} \sigma_{UERE}^2 \tag{89}$$

que substituindo em (88) conduz a

$$\begin{aligned}
 \text{cov}\{\Delta v\} &= (H^T H)^{-1} H^T H (H^T H)^{-1} \sigma_{UERE}^2 \\
 &= (H^T H)^{-1} \sigma_{UERE}^2.
 \end{aligned} \tag{90}$$

As componentes da matriz  $(H^T H)^{-1}$  quantificam a forma como os erros das pseudo-distâncias se convertem em erros de  $\Delta v$ .

A matriz de covariância de  $\Delta v$  é dada por

$$\text{cov}(\Delta v) = \begin{bmatrix} \sigma_{xu}^2 & \sigma_{xuyu}^2 & \sigma_{xuzu}^2 & \sigma_{xu\tau u}^2 \\ \sigma_{xuyu}^2 & \sigma_{yu}^2 & \sigma_{yuzu}^2 & \sigma_{yu\tau u}^2 \\ \sigma_{xuzu}^2 & \sigma_{yuzu}^2 & \sigma_{zu}^2 & \sigma_{zu\tau u}^2 \\ \sigma_{xu\tau u}^2 & \sigma_{yu\tau u}^2 & \sigma_{zu\tau u}^2 & \sigma_{\tau u}^2 \end{bmatrix} \tag{91}$$

Os parâmetros DOP [dilution of precision] em GPS são definidos em termos do quociente das combinações das componentes da matriz  $\text{cov}(\Delta x)$  e do parâmetro UERE. O parâmetro mais geral é designado *diluição da precisão geométrica* (GDOP) e é definido por

$$\text{GDOP} = \frac{1}{\sigma_{UERE}} \sqrt{\sigma_{xu}^2 + \sigma_{yu}^2 + \sigma_{zu}^2 + \sigma_{\tau u}^2}. \tag{92}$$

Quer dizer, o erro rms da posição (incluindo a contribuição devida ao desvio de relógio do receptor) é  $\sqrt{\sigma_{xu}^2 + \sigma_{yu}^2 + \sigma_{zu}^2 + \sigma_{\tau u}^2} = \sigma_{UERE} \cdot \text{GDOP}$ , em que  $\sigma_{UERE}$  depende das características do receptor e do satélite (vide Tabela I) e GDOP é um factor de amplificação que depende exclusivamente da geometria receptor/satélites.

segmento	fonte de erro	erro de GPS $1\sigma$ (m)
espaço	estabilidade do relógio de satélite	1.1
	atraso de grupo de L1	0.3
controlo	erros das efemérides	0.8
utilizador	atraso ionosférico	7.0
	atraso troposférico	0.2
	ruído do receptor e resolução	0.1
	multipercurso	0.2
UERE	total	7.1

Tabela I - Erros típicos das pseudo-distâncias para o código GPS C/A

Se escrevermos a matriz  $(H^T H)^{-1}$  na forma

$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{com } h_{ij} = h_{ji} \quad (93)$$

obtém-se para (92)

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{traço}(H^T H)^{-1}} = \sqrt{h_{11} + h_{22} + h_{33} + h_{44}}. \quad (94)$$

A matriz  $(H^T H)^{-1}$  costuma designar-se por *matriz de GDOP*.

Outros parâmetros DOP que são usados para caracterizar a precisão das várias componentes da solução posição/tempo são a diluição de precisão da posição (PDOP) e a diluição de precisão do tempo (TDOP). Estes parâmetros são definidos em termos do parâmetro UERE dos satélites e dos elementos da matriz de covariância para a solução posição/tempo, de acordo com

$$\sqrt{\sigma_{xu}^2 + \sigma_{yu}^2 + \sigma_{zu}^2} = \text{PDOP} \cdot \sigma_{UERE}$$

$$\sigma_{\tau u} = c \cdot \text{TDOP} \cdot \sigma_{UERE}$$

em que os valores DOP podem ser expressos em termos das componentes de  $(H^T H)^{-1}$

$$\text{PDOP} = \sqrt{h_{11} + h_{22} + h_{33}}$$

$$\text{TDOP} = \sqrt{h_{44}/c}.$$

As diluições de precisão horizontal (HDOP) e vertical (VDOP) podem ser obtidas de forma análoga, mas nestes casos há que utilizar as coordenadas ENU. Os resultados são

$$\sqrt{\sigma_{Eu}^2 + \sigma_{Nu}^2} = \text{HDOP} \cdot \sigma_{UERE}$$

$$\sigma_{Uu} = \text{VDOP} \cdot \sigma_{UERE} \quad (95)$$

$$(96)$$

pelo que assumindo uma matriz GDOP equivalente a (93), com elementos  $\tilde{h}_{ij}$ , se obtém

$$\text{HDOP} = \sqrt{\tilde{h}_{11} + \tilde{h}_{22}}$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{\tilde{h}_{33}} \quad (97)$$

O conceito de GDOP é uma ferramenta poderosa em GPS. Os receptores usam um algoritmo baseado no parâmetros GDOP para seleccionar o melhor conjunto de satélites a observar entre o grupo de até 11 satélites em linha-de-vista. A precisão do posicionamento pode ser estimada como sendo a precisão inerente aos satélites (parâmetro UERE) multiplicada por um parâmetro de diluição de precisão que só depende da geometria dos satélites relativamente ao utilizador.

A valores baixos dos parâmetros GDOP ou PDOP correspondem bons arranjos da geometria dos satélites, como se ilustra na Fig. 32 [5]. O gráfico da figura foi obtido considerando uma distribuição uniforme de utilizadores ao longo do globo terrestre, os quais seleccionam os quatro melhores satélites que são visíveis pelo menos 5° acima do horizonte.

### 3.6 Solução usando filtragem de Kalman

O filtro de Kalman generalizado é frequentemente utilizado como alternativa ao método dos mínimos quadráticos na resolução da equação vectorial de navegação. As observações (pseudo-distâncias) são incorporadas em intervalos discretos de tempo (tipicamente 0.1 s. ou 1 s.) e o modelo das observações é linearizado relativamente à melhor

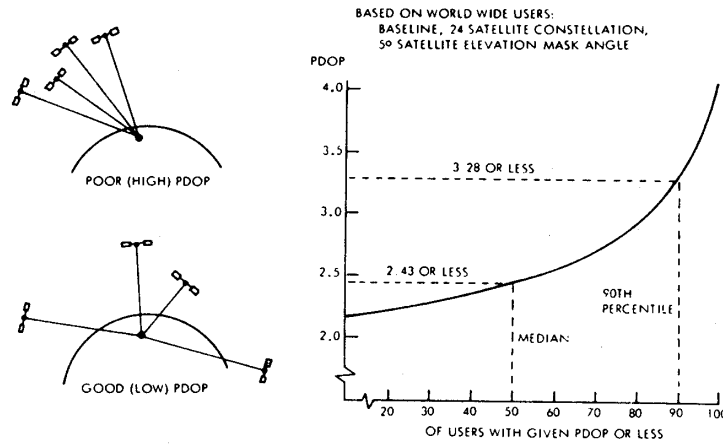


Figura 32: Exemplo da distribuição dos valores de PDOP pelos utilizadores uniformemente distribuídos à superfície terrestre

estimativa corrente do estado. O estado  $\mathbf{x}_k$  inclui três, seis, ou nove componentes de posição, velocidade e aceleração e, em geral, mais duas componentes do modelo de relógio do receptor [9].

### 3.6.1 Modelos P, PV e PVA

O número de componentes espaciais depende do modelo da dinâmica adoptado. Assim, para observadores (receptores) fixos, o *modelo P* (posição) é, muitas vezes, suficiente. A dimensão do vector de estado é igual a 5. Para observadores em movimento será conveniente utilizar o *modelo PV* (posição+velocidade) com vectores de estado de dimensão 8, ou até o *modelo PVA* (posição+velocidade+aceleração) para receptores dotados de grandes acelerações (aviões, mísseis, etc.). Nesse caso, a dimensão do vector de estado é igual a 11.

No modelo P cada coordenada é, frequentemente, modelada como um movimento browniano, de acordo com a Fig. 33.

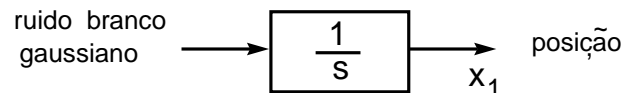


Figura 33: Modelo P para as coordenadas usando movimento browniano

No modelo PV cada coordenada pode ser modelada como um movimento browniano integrado (Fig. 34).

Finalmente, no modelo PVA poderíamos modelar cada coordenada como um movimento browniano duplamente integrado mas é mais apropriado usar um processo de Gauss-Markov de primeira ordem para caracterizar a aceleração [9] (vide Fig. 35).

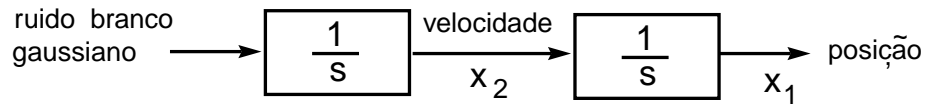


Figura 34: Modelo PV para as coordenadas usando movimento browniano integrado

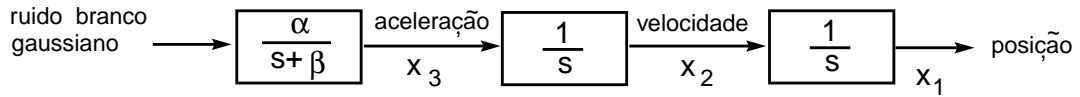


Figura 35: Modelo PVA para as coordenadas usando um processo de Gauss-Markov para a aceleração

Para além de assumir um dos três modelos, P, PV, ou PVA, há que caracterizar o desvio de relógio do receptor em termos de um modelo de estado.

### 3.6.2 Modelo de estado do relógio do receptor

Um modelo simples de relógio é definido por um vector de estado de dimensão 2 em que tanto a frequência como a fase apresentam variações do tipo movimento browniano em intervalos razoáveis de tempo. A Fig. 36 mostra o modelo de estado considerado em [9].

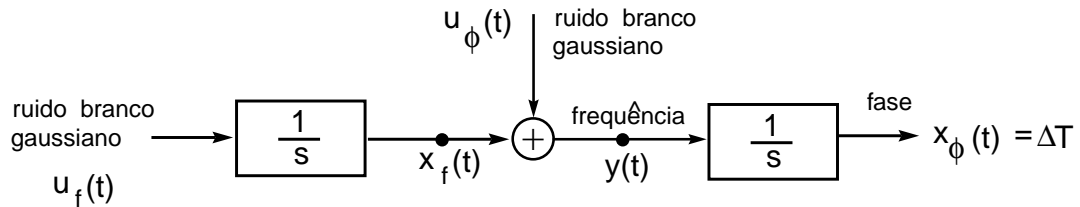


Figura 36: Modelo de estado do relógio

Os ruídos brancos  $u_\phi(t)$  e  $u_f(t)$  são independentes, têm médias nulas e são caracterizados pela matriz de covariância

$$\mathbf{Q}_u = \begin{bmatrix} q_\phi & 0 \\ 0 & q_f \end{bmatrix}. \quad (98)$$

em que  $q_f$  e  $q_\phi$  são respectivamente as densidades espectrais de potência de  $u_f(t)$  e de  $u_\phi(t)$ .

A equação da dinâmica é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\phi(t) \\ \dot{x}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\phi(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_\phi(t) \\ u_f(t) \end{bmatrix}.$$

A equação do modelo discreto no tempo correspondente é

$$\begin{bmatrix} x_{\phi, k+1} \\ x_{f, k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\phi, k} \\ x_{f, k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{\phi, k} \\ u_{f, k} \end{bmatrix} \quad (99)$$

em que a matriz de covariância de ruído é

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{Q}_u \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \approx \Phi \mathbf{Q}_u \Phi^T \Delta t \\ &= \begin{bmatrix} q_\phi \Delta t + \frac{q_f (\Delta t)^3}{3} & \frac{q_f (\Delta t)^2}{2} \\ \frac{q_f (\Delta t)^2}{2} & q_f \Delta t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (100)$$

As variâncias da matriz (98) são dadas por [9]

$$\begin{aligned} q_\phi &\approx \frac{h_0}{2} \\ q_f &\approx 2\pi^2 h_{-2}. \end{aligned} \quad (101)$$

em que  $h_0$  e  $h_{-2}$  são parâmetros da variância de Allan [11].

A tabela seguinte dá valores típicos de  $h_{-2}$  e  $h_0$  para vários tipos de relógios utilizados em receptores de GPS. Os números da tabela correspondem a desvios de relógio em medidos em segundos. Quando usados em desvios de relógio medidos em metros, os valores da tabela devem ser multiplicados pelo quadrado da velocidade da luz,  $c^2 = 9 \times 10^{16}$ .

tipo de oscilador	$h_0$	$h_{-2}$
cristal compensado em temperatura	$2 \times 10^{-19}$	$2 \times 10^{-20}$
cristal em forno	$8 \times 10^{-20}$	$4 \times 10^{-23}$
rubídio	$2 \times 10^{-20}$	$4 \times 10^{-29}$

### 3.6.3 Filtro de Kalman generalizado: modelos da dinâmica

A dimensão do modelo da dinâmica (linear) depende do modelo assumido: P, PV ou PVA.

1) modelo P:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad (102)$$



em que  $x_1, x_2, x_3$  são as coordenadas  $x_u, y_u$  e  $z_u$  do receptor, e  $x_4 = x_\phi$  e  $x_5 = x_f$  são as componentes do modelo do relógio. A matriz de covariância do ruído do modelo contínuo é diagonal com

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q & & & \mathbf{0} & \\ & q & & & \\ & & q & & \\ & & & q_\phi & \\ \mathbf{0} & & & & q_f \end{bmatrix}. \quad (103)$$

O modelo da dinâmica discreto no tempo para o vector de estado  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \dots x_{5,k}]^T$  é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \\ x_{4,k+1} \\ x_{5,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \\ x_{4,k} \\ x_{5,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \\ u_{5,k} \end{bmatrix} \quad (104)$$

em que a matriz de covariância do ruído da dinâmica é

$$\mathbf{Q}_k \approx \Phi \mathbf{Q} \Phi^T \Delta t = \Delta t \begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_\phi + \frac{q_f(\Delta t)^2}{3} & \frac{q_f \Delta t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q_f \Delta t}{2} & q_f \end{bmatrix}. \quad (105)$$

2) modelo PV:

A equação de estado do modelo contínuo no tempo correspondente à coordenada  $x_u$  é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_v \end{bmatrix} \quad (106)$$

em que a matriz de covariância do ruído é

$$\mathbf{Q} = q_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (107)$$

ou usando o modelo discreto no tempo

$$\begin{bmatrix} x_{1,1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{v,k} \end{bmatrix} \quad (108)$$

em que a matriz de covariância do ruído é

$$\mathbf{Q}_k = q_v \Delta t \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{3} & \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Seja o vector de estado  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \dots x_{8,k}]^T$ , em que  $x_{1,k}$  e  $x_{2,k}$  são, respectivamente, a posição e a velocidade relativamente à coordenada  $x_u$  do receptor,  $x_{3,k}$  e  $x_{4,k}$  representam a posição e a velocidade relativamente à coordenada  $y_u$ , etc. O modelo da dinâmica discreto no tempo é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \\ x_{4,k+1} \\ x_{5,k+1} \\ x_{6,k+1} \\ x_{7,k+1} \\ x_{8,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \Delta t & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & \Delta t & & \\ & & & & & 1 & & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 & \Delta t \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \\ x_{4,k} \\ x_{5,k} \\ x_{6,k} \\ x_{7,k} \\ x_{8,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{2,k} \\ 0 \\ u_{4,k} \\ 0 \\ u_{6,k} \\ u_{7,k} \\ u_{8,k} \end{bmatrix} \quad (110)$$

em que os elementos da matriz de covariância do ruído  $\mathbf{Q}_k$  são

$$\begin{aligned} q_{ii} &= q_v \frac{(\Delta t)^3}{3} \\ q_{i,i+1} &= q_{i+1,i} = q_v \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ q_{i+1,i+1} &= q_v \Delta t \quad \text{com : } i = 1, 3, 5 \\ q_{77} &= q_\phi \Delta t + \frac{q_f (\Delta t)^3}{3} \\ q_{78} &= q_{87} = \frac{q_f (\Delta t)^2}{2} \\ q_{88} &= q_f \Delta t \end{aligned} \quad (111)$$

sendo os restantes elementos de  $\mathbf{Q}_k$  nulos.

### 3) modelo PVA:

Neste modelo as posições  $x_u$ ,  $y_u$  e  $z_u$  são modeladas como processos de Gauss-Markov duplamente integrados. Assim, se  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  forem as variáveis de estado correspondentes à posição, velocidade e aceleração da coordenada  $x_u$  obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} u(t) \quad (112)$$

em que  $u(t)$  é um processo de ruído branco gaussiano de espectro de potência unitário e a matriz de covariância do ruído é

$$\mathbf{Q} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Exercício:

Mostre que a matriz de transição de estado correspondente à equação (112) é

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{\beta^2}(e^{-\beta\Delta t} + \beta\Delta t - 1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\Delta t}) \\ 0 & 0 & e^{-\beta\Delta t} \end{bmatrix}. \quad \diamond \quad (114)$$

O procedimento para a determinação do modelo da dinâmica discreto no tempo usando o vector de estado  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \dots x_{11,k}]^T$  é análogo ao dos modelos P e PV. Assumindo que os vectores  $[x_{i,k} \ x_{i+1,k} \ x_{i+2,k}]^T$ , com  $i = 1, 4, 7$ , e  $[x_{10,k} \ x_{11,k}]^T$ , correspondentes às coordenadas  $x_u$ ,  $y_u$ ,  $z_u$  e ao desvio de relógio  $\Delta T$ , são independentes entre si, a matriz de covariância do ruído da dinâmica do sistema,  $\mathbf{Q}_k$  ( $11 \times 11$ ), é diagonal por blocos.

### 3.6.4 Filtro de Kalman generalizado: modelo das observações

Enquanto que as equações da dinâmica do sistema são lineares qualquer que seja o modelo da dinâmica adoptado, a equação das observações

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t_k)] + \mathbf{v}_k \quad (115)$$

é não-linear. Em (115),  $\mathbf{z}_k = [\rho_{1,k} \dots \rho_{n,k}]^T$ , com  $n \geq 4$ , é o vector das pseudo-distâncias medidas e

$$\mathbf{h}[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_a)^2 + (\tilde{y}_1 - x_b)^2 + (\tilde{z}_1 - x_c)^2 + x_d} \\ \vdots \\ \sqrt{(\tilde{x}_n - x_a)^2 + (\tilde{y}_n - x_b)^2 + (\tilde{z}_n - x_c)^2 + x_d} \end{bmatrix} \quad (116)$$

em que  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{y}_i$  e  $\tilde{z}_i$  são as coordenadas do satélite  $i$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  e  $x_d$  são as componentes do vector de estado correspondentes, respectivamente a  $x_u$ ,  $y_u$ ,  $z_u$  e  $c\Delta T$ .

A matriz de covariância do ruído das observações é da forma diagonal

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{1,URE}^2 & & \mathbf{0} \\ & \sigma_{2,URE}^2 & \\ & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \sigma_{n,URE}^2 \end{bmatrix}. \quad (117)$$

No caso em que as variâncias de erro das diversas pseudo-distâncias são todas iguais a  $\sigma_{URE}^2$ , então  $\mathbf{R}_k = \sigma_{URE}^2 \mathbf{I}$ .

A matriz das observações do filtro de Kalman generalizado é

$$\mathbf{H}_k = \left[ \frac{\partial h_i[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]}{\partial x_j} \right]_{(n \times l)} \quad (118)$$

em que  $n$  é o número de satélites observados e  $l$  é a dimensão do vector de estado (dependente do modelo da dinâmica adoptado).

Os resultados a seguir referem-se ao modelo P.

Tem-se  $l = 5$ ,  $x_1 = x_u$ ,  $x_2 = y_u$ ,  $x_3 = z_u$  e  $x_4 = c\Delta T$ . Logo

$$\mathbf{H}_k = - \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xn} & a_{yn} & a_{zn} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (119)$$

em que

$$\begin{aligned} a_{xi} &= \frac{\tilde{x}_i - \hat{x}_u}{\hat{r}_i} \\ a_{yi} &= \frac{\tilde{y}_i - \hat{y}_u}{\hat{r}_i} \\ a_{zi} &= \frac{\tilde{z}_i - \hat{z}_u}{\hat{r}_i} \end{aligned} \quad (120)$$

onde

$$\hat{r}_i = \sqrt{(\tilde{x}_i - \hat{x}_u)^2 + (\tilde{y}_i - \hat{y}_u)^2 + (\tilde{z}_i - \hat{z}_u)^2} \quad (121)$$

e

$$[\hat{x}_u \ \hat{y}_u \ \hat{z}_u]^T = [\hat{x}_1(k|k-1) \ \hat{x}_2(k|k-1) \ \hat{x}_3(k|k-1)]^T. \quad (122)$$

Na Fig. 37 apresenta-se o fluxograma do filtro de Kalman generalizado aplicado à resolução da equação de navegação em GPS.

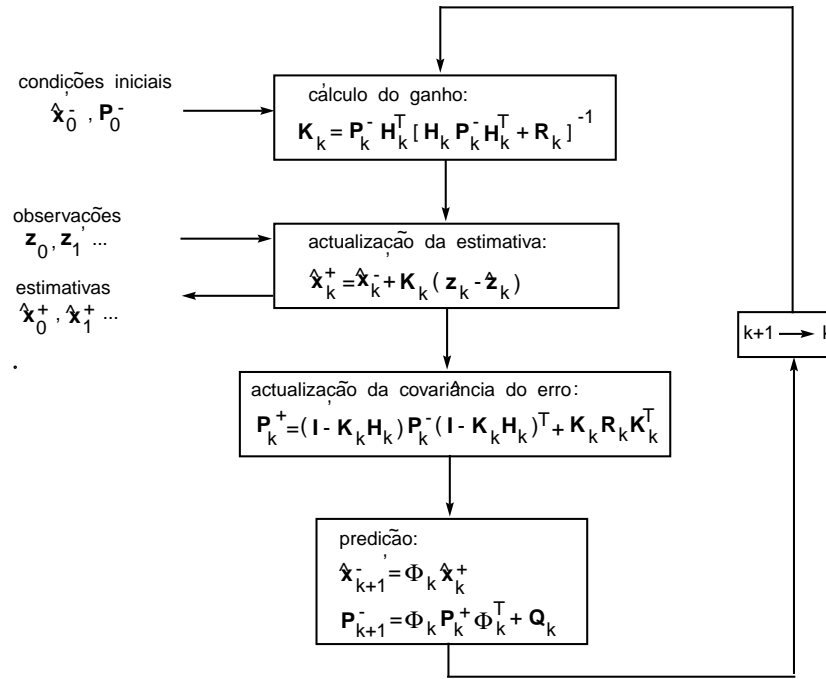


Figura 37: Fluxograma do filtro de Kalman generalizado aplicado à resolução da equação de navegação em GPS

Na figura considerou-se por facilidade

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \quad \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}(k|k)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}(k|k) \quad \mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{P}(k+1|k)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]$$

$$\mathbf{z}_k = [\rho_{1,k} \dots \rho_{n,k}]^T$$

## Referências

- [1] E. Kaplan, C. Hegarty, eds. - “*Understanding GPS. Principles and Applications*”, second edition, Artech House, Boston, MA, 2006.
- [2] W. Parkinson, J. J. Spilker, Jr. (eds.) - “*Global Positioning System: Theory and Applications*”, vol. I, AIAA, Washington DC, 1996.

- [3] J. Lozow - "Analysis of Direct P(Y)-Code Acquisition", *Navigation*, vol. 44, no. 1, Spring 1997, pp. 89-97.
- [4] J. Proakis - "*Digital Communications*", McGraw-Hill, Boston, 2001.
- [5] W. Parkinson, J. J. Spilker, Jr. (eds.) - "*Global Positioning System: Theory and Applications*", vol. I, AIAA, Washington DC, 1996.
- [6] B. Sklar - "*Digital Communications. Fundamentals and Applications*", B. Sklar, Prentice-Hall, 1988.
- [7] C. Salema - "*Feixes Hertzianos*", IST Press, Lisboa, 2.a edição, 2002.
- [8] R. L. Peterson, R. E. Ziemer, D. E. Borth - "*Introduction to Spread Spectrum Communications*", Prentice-Hall, 1995.
- [9] R. G. Brown and Patrick Y.C. Hwang, "*Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*", 3.rd edition, Wiley, N. York, 1997.
- [10] P. Misra, P. Enge - "*Global Positioning System. Signals, Measurements, and Performance*", Ganga-Jamuna, Lincoln, MS, 2004.
- [11] F. L. Walls and D. W. Allan, "An Introduction to Frequency Standards", *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, pp. 162-168, Janeiro de 1986.

## VII - Controlo de Tráfego Aéreo

### 1 Radares de vigilância

Em controlo de tráfego aéreo são utilizados dois tipos de radar: o *radar primário* (ou radar de busca) e o *radar secundário* (ou radar de vigilância secundária). O radar primário determina a distância ao alvo, azimuth e, nalguns casos, a elevação do sinal reflectido. O lobo principal do feixe da estação de radar em terra tem uma dispersão elevada em elevação (por exemplo, 40 graus) e baixa em azimuth (por exemplo, 2 graus). À medida que a antena roda em torno do seu eixo vertical, são transmitidos impulsos de rádio-frequência sendo recebidos de volta depois de reflectidos no alvo. O tempo de ida-e-volta permite determinar a distância ao alvo. O azimuth é determinado pelo ângulo do lobo principal do feixe emitido. A elevação do alvo por ser obtida por uma segunda antena dirigida segundo o ângulo de azimuth da primeira antena que faz uma busca segundo a elevação. Estes sistemas não são contudo comuns em aviação civil [1].

O radar primário pode detectar a posição de qualquer alvo que reflecta o sinal de rádio transmitido incluindo aviões, pássaros ou outros alvos. Em controlo de tráfego aéreo tal pode ser uma vantagem ou inconveniente. Os alvos não precisam de cooperar, eles precisam apenas de se encontrar dentro do raio de acção do radar para reflectir as ondas de rádio, mas ele só consegue indicar a posição dos alvos, não a sua identificação. Quando o radar primário é o único tipo de radar disponível, o controlador tem de identificar o alvo de uma forma indirecta (por exemplo, pedindo por rádio a posição aproximada da aeronave, mas este procedimento é pouco fiável).

Uma das mais significativas evoluções na tecnologia de controlo de tráfego aéreo foi o desenvolvimento dos sistemas de radares secundários ou radares de vigilância secundária (SSR=secondary surveillance radar). Nos radares secundários, o sinal transmitido da estação em terra (a 1030 MHz) desencadeia a transmissão de um sinal de resposta (a 1090 MHz) a partir de um transponder (receptor/transmissor) colocado no avião. O sistema permite essencialmente comunicações bi-direccionais ar-terra e opera em vários modos. Os modos A e C usam interrogações moduladas em PPM (pulse position modulation) com impulsos  $P_1$  e  $P_3$  de iguais amplitudes. Quando o intervalo

$P_1 - P_3$  é de  $8\mu s$  (interrogação em modo A), o transponder responde com o *código de identificação do avião* (ACID=aircraft identification code); se o intervalo for de  $21\mu s$  (modo C), a resposta conterá a altitude codificada do avião (vide Fig. 1). Para pequenas distâncias ao alvo, a intensidade do sinal pode ser suficiente para interrogar transponders via lobos laterais da antena de transmissão. Para evitar esta situação, as aeronaves interrogadas pelos lobos laterais são impedidas de responder através de uma técnica em que se transmite um impulso de interrogação  $P_2$  através de uma antena omnidireccional com uma potência ligeiramente maior que a dos lobos laterais. Os transponders são desenhados por forma a só responder se a potência do impulso  $P_1$  for maior que a do impulso  $P_2$ , o que não acontece para interrogações feitas pelos lobos laterais.

O modo S foi introduzido para reduzir ou eliminar algumas das limitações do funcionamento dos modos A e C. O endereço constituído por 24 bits permite identificar de modo não ambíguo mais de 16 milhões de aeronaves em todo o mundo.

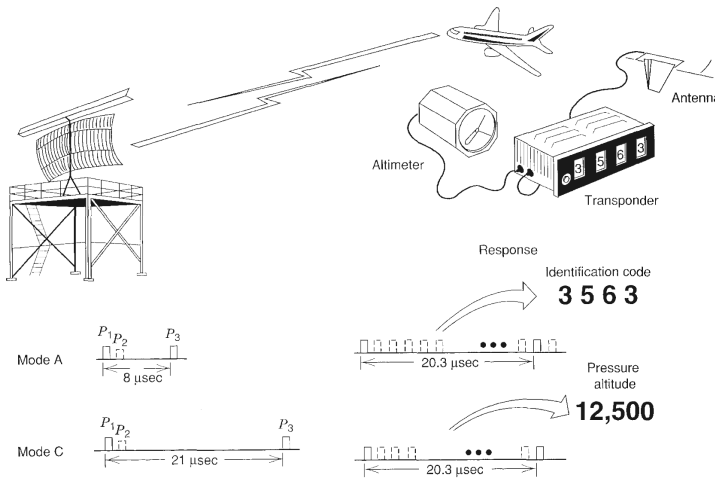


Figura 1: Modos A e C do radar secundário [1]

## 2 ADS-B

ADS-B é um acrónimo para Automatic Dependent Surveillance-Broadcast. O sistema ADS-B é uma tecnologia avançada de vigilância que combina um serviço de posicionamento por satélite, aviónica da aeronave e infraestrutura no sólo para permitir transmissão de informação entre o avião e o centro de controlo de tráfego aéreo (ATC)



[2]. Aviões equipados com ADS-B emitem continuamente informação, tal como identificação, posição corrente, altitude e velocidade. O ADS-B usa informação de um serviço de posicionamento, como por exemplo o GPS, para difundir a posição do avião, permitindo que a informação disponível seja mais actualizada e precisa que a proporcionada pelo sistema convencional de radar (o qual possui um factor de latência dado que se baseia em interrogações e respostas). O ADS-B pode também permitir ao avião receber vários tipos de informação, incluindo transmissões ADS-B de outros aviões equipados ou veículos. O ADS-B é automático porque não é requerido nenhum esquema externo de interrogação, mas é “dependente” porque depende das fontes internas de posicionamento e sistemas internos de transmissão para fornecer informação de vigilância ao ATC e igualmente a outros utilizadores.

Numa primeira fase, a implementação de um sistema ADS-B não substituirá completamente os radares primários ou secundários. Além disso, o ADS-B não exclui a necessidade de transponders. Estes são ainda necessários na presença de radares secundários, os quais serão mantidos como sistemas de reserva no caso de falha do ADS-B.

Os requisitos de desempenho para a aviónica ADS-B exigem que as aeronaves difundam informação com o grau de precisão e integridade necessários ao serviço de vigilância prestado pelo ATC. Um avião equipado ADS-B Out transmitirá a sua posição, velocidade e outros elementos uma vez por segundo. Os dados de radar, por outro lado, são fornecidos ao controlador de tráfego aéreo aproximadamente uma vez em cada 3-12 seconds, dependendo de o avião se encontrar em rota ou em percurso terminal. Esta melhoria na vigilância proporcionará ao ATC a capacidade acrescida de supervisionar e separar os aviões para além dos níveis actuais, mantendo os níveis de segurança. Desenvolvidos incrementais na capacidade, eficiência e procedimentos de tráfego aéreo baseados em tecnologia de radar não podem acomodar o aumento previsto nos serviços de vigilância e de separação entre aeronaves, os quais levariam a aumentos intoleráveis nos atrasos dos voos. Sem a existência do ADS-B, o acréscimo da procura de serviços poderia resultar no aumento da congestão e na negação de serviço por parte dos ATC a alguns utilizadores do espaço aéreo.

Dado que o ADS-B utiliza GPS como fonte de posicionamento, a sua precisão será melhor do que 30 metros e, quando melhorado com o WAAS (Wide Area Augmentation System), melhor do que 10 metros. Em comparação, a precisão do radar é variável, dependendo da distância da antena de radar ao alvo. Radares de vigilância secundária para percursos em rota, por exemplo, degradam-se de aproximadamente 75 metros à distância de 9 Km para mais de 660 metros para distâncias de 360 Km (200 nm) que é o máximo para o qual os radares secundários são tipicamente usados em controlo de tráfego aéreo. Neste caso, a precisão do ADS-B é 20 vezes melhor que a do radar

a funcionar para a distância máxima. Em radares de controlo de tráfego terminal, as gamas de erro vão dos 75 metros para a distância de 9 Km até 260 metros para distâncias de cerca de 110 Km (tipicamente o seu alcance máximo). Em comparação, o ADS-B é quase 8 vezes melhor em termos de precisão.

Em resumo, ao contrário do Radar, a precisão do ADS-B não se degrada significativamente com a distância ao alvo, com as condições atmosféricas ou com a altitude do alvo e os intervalos de actualização dos dados não dependem da velocidade de rotação ou da fiabilidade de antenas mecânicas. Em aplicações típicas, o avião equipado com ADS-B utiliza um receptor de GNSS (GPS, Galileo) para obter a sua posição correcta e combina essa posição com quaisquer outros dados disponíveis, como sejam velocidade, direcção, altitude e número de voo. Esta informação é então simultaneamente difundida para outros aviões dotados de ADS-B e para transponders localizados no sólo ou em satélites, os quais re-enviam a informação da posição da aeronave e outra informação adicional aos centros de ATC em tempo real, como se ilustra na Fig. 2.



Figura 2: Sistema ADS-B

### 3 TCAS

O sistema TCAS (Traffic Alert and Collision Avoidance System) é um sistema aerotransportado que opera independentemente do Sistema de Controlo de tráfego Aéreo.

O TCAS foi desenhado para informar o piloto da proximidade de aviões e para servir como última linha de defesa na prevenção de colisões no ar [3].

Existem dois níveis de TCAS:

TCAS I - é utilizado em aviões ligeiros e em linhas aéreas regionais. Este sistema emite mensagens (TA=Traffic Advisories) para ajudar os pilotos na aquisição visual de aviões intrusos. O TCAS I é obrigatório em aviões de 10 a 30 lugares, embora o TCAS II possa ser instalado alternativamente. O TCAS I indica a altitude relativa, distância e o ângulo de rota de aviões equipados com transponders dentro de uma distância seleccionada, geralmente até 40 milhas. Com símbolos codificados por cores e avisos acústicos (TA), o sistema assinala os aviões cuja rota constitui uma ameaça potencial. O TCAS I identifica problemas potenciais mas não oferece soluções em termos de qual a acção evasiva a tomar. Apesar disso, constitui ainda uma ferramenta valiosa porque fornece aos pilotos dados importantes que podem ser usados na determinação da melhor rota a seguir.

TCAS II - é um sistema mais sofisticado que fornece a informação do TCAS I, e analisa igualmente o trajecto projectado de voo do avião que se aproxima e emite mensagens de resolução (RA=Resolution Advisories) permitindo ao piloto resolver potenciais colisões aéreas. O TCAS II é internacionalmente obrigatório para aviões com mais de 30 lugares ou peso superior a 15000 kg. O TCAS II, para além de dispor de um display onde se visualiza o tráfego na vizinhança da aeronave, emite mensagens de resolução (RAs) quando necessário. O sistema determina a rota de cada avião e se este está a subir, a descer ou a voar horizontalmente. O TCAS II emite RA alertando os pilotos para subir ou descer quando necessário para evitar os outros aviões. Se ambas as aeronaves estiverem equipadas com TCAS II, as manobras evasivas dos dois aviões serão efectuadas de forma coordenada: os dois computadores geram RAs permitindo eliminar conflitos e assegurando que as acções dos pilotos minimizam em vez de exacerbar o perigo de colisão.

O funcionamento do sistema TCAS II resulta de um equilíbrio entre a protecção necessária contra colisões e a emissão desnecessária de avisos (TA e RA). Este equilíbrio depende do nível de sensibilidade do sistema mediante a selecção do espaço aéreo protegido em torno da aeronave equipada com sistema TCAS. Quanto maior for o nível de sensibilidade maior será o volume do espaço aéreo protegido mas o nível de alertas desnecessários aumentará igualmente. A forma dos limites do volume no plano horizontal depende de duas quantidades: o tau e o DMOD (Distance MODification). O tau vertical e os limites fixos de altitude determinam as dimensões verticais do volume protegido. Os vários tipos de rota de colisão são exemplificados na Fig. 3.

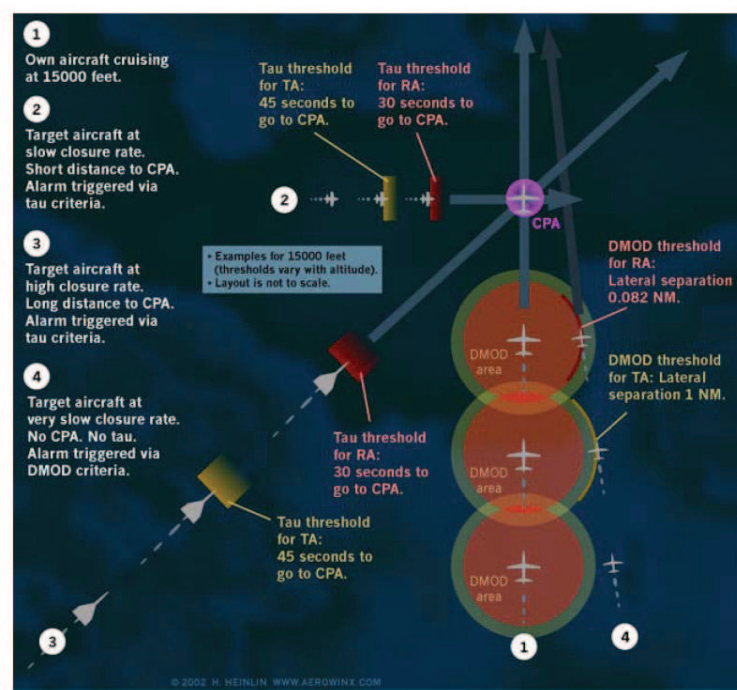


Figura 3: Diversos tipos de rotas de colisão no plano horizontal e correspondentes respostas do TCAS II [4]

O TCAS usa o tempo previsto para CPA (closest point of approach), em vez da distância, para determinar quando um aviso TA ou RA deve ser emitido. O TCAS usa o tempo de CPA para determinar o tau horizontal e o tempo previsto para que as trajetórias dos dois aviões sejam iguais para determinar o tau vertical. Por conseguinte, a dimensão do volume protegido depende da velocidade e da direcção da aeronave envolvida na possível colisão, conforme se mostra na Tabela I. As Fig. 4 e 5 mostram as separações entre aviões nos planos horizontal e vertical para accionamento dos alarmes TA e RA.

Em acontecimentos em que a taxa de aproximação (rate of closure) entre aeronaves é muito lenta um avião intruso pode-se aproximar muito sem atravessar os limiares de tau horizontal e portanto sem causar a emissão de um aviso TA ou RA. Por forma a fornecer protecção nessas condições, os limites de tau horizontal têm de ser modificados. Esta modificação é referida por DMOD. A Fig. 6 mostra as modificações que é preciso introduzir na Fig. 4 por forma a incluir o DMOD.

O TCAS II foi desenhado para fornecer protecção de risco de colisão (collision avoidance) no caso de duas quaisquer aeronaves que se aproximem horizontalmente a qualquer velocidade até 1200 nós e verticalmente até 10000 pés por minuto [3].

own altitude (feet)	SL	tau (seconds)	DMOD (nmi)	Altitude threshold (feet)
< 1000	2	20, <i>N/A</i>	0.30, <i>N/A</i>	850, <i>N/A</i>
1000 – 2350	3	25, 15	0.33, 0.20	850, 300
2350 – 5000	4	30, 20	0.48, 0.35	850, 300
5000 – 10000	5	40, 25	0.75, 0.55	850, 350
10000 – 20000	6	45, 30	1.00, 0.80	850, 400
20000 – 42000	7	48, 35	1.30, 1.10	850, 600
> 42000	7	48, 35	1.30, 1.10	1200, 700

Tabela I - Definição dos níveis de sensibilidade (SL) e dos limiares de alarme (TA, RA) [3]

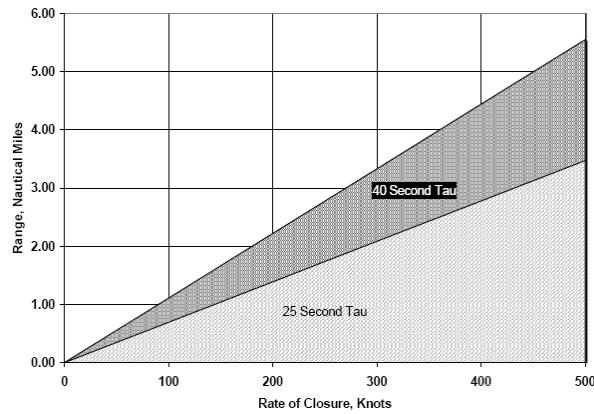


Figura 4: Distâncias em milhas náuticas para accionamento dos alarmes TA e RA em função da velocidade da aproximação ao ponto CPA para SL=5 [3]

## 4 Modelos de estado cinemáticos

Os modelos de estado cinemáticos são definidos fazendo uma derivada de determinada ordem da posição igual a zero. Na ausência de quaisquer entradas aleatórias elas produzem o movimento caracterizado por um polinómio no tempo. Estes modelos são designados de modelos polinomiais e os correspondentes filtros de estimação são chamados filtros polinomiais.

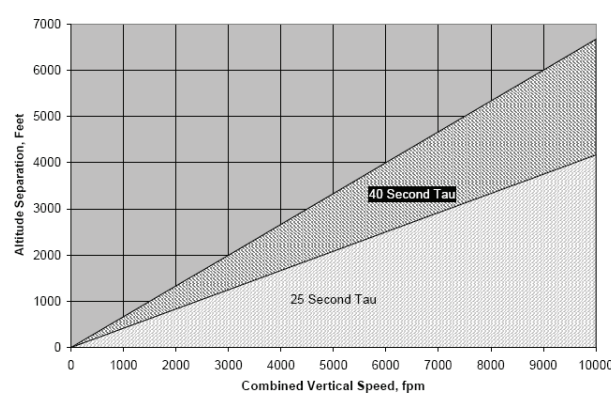


Figura 5: Separação de altitude em pés para accionamento dos alarmes TA e RA em função da velocidade vertical combinada em pés/minuto para  $SL=5$  [3]

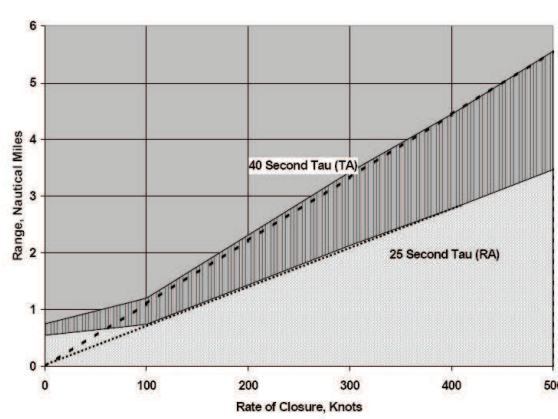


Figura 6: Distâncias em milhas náuticas para accionamento dos alarmes TA e RA em função da velocidade da aproximação ao ponto CPA para  $SL=5$  incluindo o parâmetro DMOD [3]

Em muitos casos o mesmo modelo é usado de forma independente para definir o movimento em cada uma das coordenadas (2 ou 3 coordenadas). Noutros casos, como em controlo de tráfego aéreo, pode-se usar dois modelos de terceira ordem (velocidade, aceleração e “jerk”) para o movimento horizontal e um modelo de segunda ordem (velocidade e aceleração) para o movimento vertical.

Em geral, o movimento ao longo de cada coordenada é assumido como desacoplado das outras coordenadas, pelo que a discussão dos modelos cinemáticos neste capítulo é feita considerando uma única coordenada genérica.

O conteúdo deste capítulo é largamente baseado em [5].

### 4.1 modelo de ruído branco (ou de 2.a ordem)

Num objecto movendo-se a velocidade constante numa coordenada genérica  $\xi$  verifica-se

$$\ddot{\xi}(t) = 0 \quad (1)$$

ou seja, a posição  $\xi(t)$  evolui na ausência de ruído de acordo com o polinómio  $\xi(t) = \xi(0) + vt$ . Na prática, a velocidade sofre, pelo menos, pequenas variações que podem ser descritas por um ruído branco contínuo no tempo  $\tilde{v}(t)$  com

$$\ddot{\xi}(t) = \tilde{v}(t) \quad (2)$$

e,

$$E[\tilde{v}(t)] = 0 \quad (3)$$

$$E[\tilde{v}(t)\tilde{v}(\tau)] = \tilde{q}(t)\delta(t - \tau) \quad (4)$$

Assumindo que o ruído é estacionário,  $\tilde{q}(t) = \tilde{q}$  (constante) e intensidade do processo de ruído  $\tilde{q}$  é igual à sua densidade espectral de potência, sendo um parâmetro de desenho do filtro de estimação baseado neste modelo de movimento.

O vector de estado correspondente a (2), que é bi-dimensional por cada coordenada (posição+velocidade), é igual a

$$x = [\xi \ \dot{\xi}]^T \quad (5)$$

Este modelo é designado de *modelo de aceleração de ruído branco* ou *modelo cinemático de segunda ordem*. Note-se que a velocidade neste modelo é um movimento browniano (ou processo de Wiener), ou seja, o integral do ruído branco.

O modelo de estado contínuo é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + G\tilde{v}(t) \quad (6)$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A equação de estado de tempo discreto com período de amostragem  $T$  é

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k) \quad (8)$$

onde a matriz de transição de estado é

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

e o processo de ruído de tempo discreto relaciona-se com o de tempo contínuo por

$$v(k) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} G \tilde{v}(kT + \tau) d\tau \quad (10)$$

Por conseguinte, usando (4) e tendo em conta que (vide secção 5.2 do capítulo IV)

$$\begin{aligned} Q &= E\{v(k)v^T(k)\} \\ &= \int_0^T \int_0^T \Phi(T-t) G E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}^T(\tau)\} G^T \Phi^T(T-\tau) dt d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

obtém-se

$$Q = \int_0^T \begin{bmatrix} T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} [T-\tau \quad 1] \tilde{q} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix} \tilde{q} \quad (12)$$

As variações da velocidade num intervalo de duração  $T$  são da ordem de  $\sqrt{Q_{22}} = \sqrt{\tilde{q}T}$ . Este valor pode servir de guia para a escolha da intensidade do processo de ruído, isto é, da densidade espectral de potência  $\tilde{q}$  do processo de ruído neste processo. Um modelo de velocidade quase constante corresponde a pequenos valores de  $\tilde{q}$  no sentido em que as variações da velocidade devem ser pequenas quando comparadas com a velocidade actual.

## 4.2 Modelo do movimento browniano (ou de 3.a ordem)

O movimento de um objecto com aceleração constante numa coordenada genérica  $\xi$  é descrito pela equação

$$\ddot{\xi}(t) = 0 \quad (13)$$

Normalmente a aceleração não é exactamente constante e as suas variações podem ser modelizadas por um ruído branco contínuo no tempo

$$\ddot{\xi}(t) = \tilde{v}(t) \quad (14)$$

Neste caso, a aceleração é um movimento browniano (ou processo de Wiener). A derivada da aceleração é designada em inglês por *jerk* (empurrão, solavanco) pelo que este modelo é também conhecido por *modelo de jerk de ruído branco*.

O vector de estado correspondente é



$$x = [\xi \ \dot{\xi} \ \ddot{\xi}]^T \quad (15)$$

e a equação de estado de tempo contínuo é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + G\tilde{v}(t) \quad (16)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A equação de estado de tempo discreto com período de amostragem  $T$  é

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k) \quad (18)$$

com matriz de transição de estado

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

e matriz de covariância

$$Q = E[v(k)v^T(k)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T^5 & \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{6}T^3 \\ \frac{1}{8}T^4 & \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{6}T^3 & \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix} \tilde{q} \quad (20)$$

As variações na aceleração num intervalo de tempo  $T$  são da ordem de  $\sqrt{Q_{33}} = \sqrt{\tilde{q}T}$ , o que permite dimensionar o valor da densidade espectral de potência  $\tilde{q}$ . Um modelo de aceleração quase constante é obtido escolhendo uma intensidade  $\tilde{q}$  pequena no sentido em que as variações da aceleração deverão ser pequenas quando comparadas com os níveis de aceleração actuais.

## 5 Filtros para modelos cinemáticos

A covariância da estimação de estado para sistemas invariantes no tempo (com coeficientes constantes nas equações de estado e das observações) converge, sob certas condições, para um valor em regime estacionário. Por conseguinte, podem ser obtidas expressões explícitas para o ganho do filtro e da matriz de covariância em regime estacionário.

Os filtros resultantes em regime estacionário para os modelos cinemáticos são conhecidos por filtros alfa-beta e alfa-beta-gama respectivamente para os modelos de segunda e terceira ordem.

A estimação da posição da aeronave é um problema de grande importância em Controlo de Tráfego Aéreo por permitir a gestão do tráfego por parte do controlo em terra a partir de medições (ruidosas) de Radar e a aplicação de técnicas de detecção de conflitos. Pode ser ainda utilizada em sistemas ADS-B a bordo da própria aeronave.

### 5.1 Filtro alfa-beta

O filtro em regime estacionário para o modelo cinemático a 2 dimensões é obtido da seguinte forma.

A equação de estado é

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k) \quad (21)$$

em que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

e o processo vectorial de ruído tem função de autocorrelação

$$E[v(k) \ v(j)]^T = Q\delta_{kj} \quad (23)$$

em que  $\delta_{kj} = 1$  para  $k = j$  e  $\delta_{kj} = 0$  para  $k \neq j$ .

Assume-se que só estão disponíveis as observações referentes à posição, isto é

$$z(k) = Hx(k) + w(k) \quad (24)$$

em que para o modelo de aceleração de ruído branco (modelo de segunda ordem) se tem

$$H = [1 \ 0] \quad (25)$$

A função de autocorrelação do ruído das observações é

$$E[w(k)w(j)] = R\delta_{kj} = \sigma_w^2\delta_{kj} \quad (26)$$

A matriz de covariância do erro de filtragem em regime estacionário será dada por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k|k) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz de covariância do erro de predição será

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(k+1|k) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

enquanto que o ganho do filtro alfa-beta será

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

O ganho do filtro é dado por (vide Cap. V, secção 7)

$$\begin{aligned} K &= P(k+1|k)H^T(HP(k+1|k)H^T + R)^{-1} \\ &= [g_1 \quad g_2]^T \end{aligned} \quad (30)$$

com

$$g_1 = \frac{m_{11}}{m_{11} + \sigma_w^2} \quad (31)$$

$$g_2 = \frac{m_{12}}{m_{11} + \sigma_w^2} = g_1 \frac{m_{12}}{m_{11}} \quad (32)$$

A matriz de covariância do erro de filtragem é dada por (vide Cap. V, secção 7)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} &= (I - KH)P(k+1|k) \\ &= \begin{bmatrix} (1 - g_1)m_{11} & (1 - g_1)m_{12} \\ (1 - g_1)m_{12} & m_{22} - g_2m_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

A matriz de covariância do erro de filtragem pode obter-se a partir de

$$P(k+1|k) = \Phi P(k|k)\Phi^T + Q \quad (34)$$

ou seja

$$P(k|k) = \Phi^{-1}[P(k+1|k) - Q](\Phi^{-1})^T \quad (35)$$

em que

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

A solução em regime estacionário para as matrizes de covariância do erro e os ganhos são obtidos do conjunto de equações não-lineares (31)-(35) usando (12) para a matriz de covariância do ruído do modelo de estado  $Q$ , o que dá

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} - 2m_{11}T + m_{22}T^2 - \frac{T^3}{3}\tilde{q} & m_{12} - m_{22}T + \frac{T^2}{2}\tilde{q} \\ m_{12} - m_{22}T + \frac{T^2}{2}\tilde{q} & m_{22} - T\tilde{q} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Comparando agora (33) com (37) tira-se

$$g_1 m_{11} = 2T m_{12} - T^2 m_{22} + \frac{T^3}{3} \tilde{q} \quad (38)$$

$$g_1 m_{12} = T m_{22} - \frac{T^2}{2} \tilde{q} \quad (39)$$

$$g_2 m_{12} = T \tilde{q} \quad (40)$$

A partir de (31) e de (32) tira-se

$$m_{11} = \frac{g_1}{1 - g_1} \sigma_w^2 \quad (41)$$

$$m_{12} = \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_w^2 \quad (42)$$

Entre as equações (39) e (40) pode isolar-se  $m_{22}$

$$m_{22} = \frac{g_1 m_{12}}{T} + \frac{T}{2} \tilde{q} = \left( \frac{g_1}{T} + \frac{g_2}{2} \right) m_{12} \quad (43)$$

Usando (40) a (43) obtemos para (38)

$$\frac{g_1^2}{1 - g_1} \sigma_w^2 = 2T \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_w^2 - T^2 \left( \frac{g_1}{T} + \frac{g_2}{2} \right) \frac{g_2}{1 - g_1} \sigma_w^2 + \frac{T^2}{3} \frac{g_2^2}{1 - g_1} \sigma_w^2 \quad (44)$$

o que simplifica para

$$g_1^2 - 2Tg_2 + Tg_1g_2 + \frac{T^2}{6}g_2^2 = 0 \quad (45)$$

Defina-se agora os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  como [5]

$$\alpha \equiv g_1 \quad (46)$$

$$\beta \equiv g_2 T \quad (47)$$

Em termos de  $\alpha$  e  $\beta$ , a equação (45) pode ser escrita como

$$\alpha^2 - 2\beta + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{6} = 0 \quad (48)$$

ou

$$\alpha = \sqrt{2\beta + \frac{\beta^2}{12}} - \frac{\beta}{2} \quad (49)$$

Define-se índice de manobragem (maneuvering index)  $\lambda$  através de [5]

$$\lambda^2 \equiv \frac{T^3 \tilde{q}}{\sigma_w^2} \quad (50)$$

Verifica-se que

$$\lambda^2 = \frac{\beta^2}{1 - \alpha} = \frac{\beta^2}{1 - \sqrt{2\beta + \beta^2/12} + \beta/2} \quad (51)$$

A equação anterior é equivalente a

$$\frac{\beta^4}{\lambda^4} - \frac{\beta^3}{\lambda^2} + \beta^2 \left( \frac{1}{6} - \frac{2}{\lambda^2} \right) - \beta + 1 = 0 \quad (52)$$

a qual pode ser resolvida numericamente.

O valor assintótico de  $\beta$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  pode tirar-se facilmente de (52) e corresponde a  $\beta = 3 - \sqrt{3} \approx 1.2679$ . Tendo em conta (49), o valor assintótico de  $\alpha$  vem dado por  $\alpha = 1$ .

De acordo com (50) o índice de manobragem é proporcional ao quociente da

- incerteza do movimento - dada pelo valor rms  $\sqrt{T^3 \tilde{q}/3}$  (vide (12))
- incerteza da observação - dada pelo valor rms do ruído  $\sigma_w$ .

Os ganhos  $\alpha$  e  $\beta$  encontram-se representados na Fig. 7 em função do índice de manobragem. Note-se que os dois ganhos  $\alpha$  e  $\beta$  não podem ser dimensionados independentemente; ambos dependem do índice de manobragem  $\lambda$ . Um valor grande de  $\lambda$  dará um peso elevado à última observação e consequentemente pouco peso às observações passadas, resultando numa fraca redução do ruído das observações. Um valor baixo de  $\lambda$  reduz significativamente o efeito do ruído mas torna o filtro pouco sensível a mudanças rápidas de trajectória como se ilustra na Fig. 8. Esta mostra o seguimento de uma trajectória com diversos valores de  $\lambda$  para  $T = 1$  s e  $\sigma_w^2 = 4 \times 10^4$  m<sup>2</sup>.

Uma vez obtidas as componentes do vector do ganho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) \equiv \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta/T \end{bmatrix} \quad (53)$$

as equações do filtro alfa-beta são

Predição:

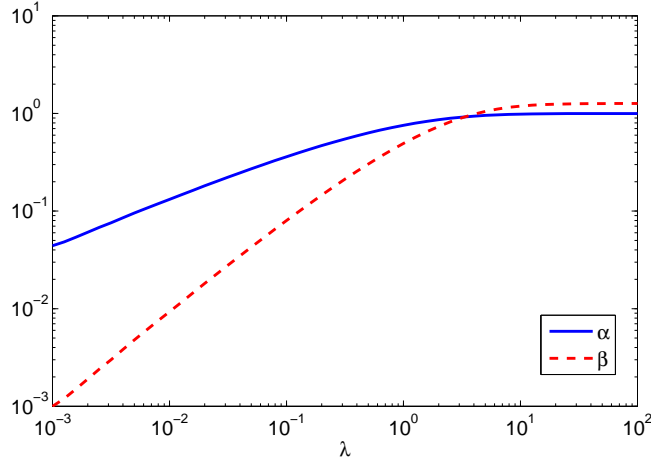


Figura 7: Coeficientes do ganho do filtro alfa-beta para o modelo de aceleração de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|k-1) \\ \hat{x}_2(k|k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k-1|k-1) \\ \hat{x}_2(k-1|k-1) \end{bmatrix} \quad (54)$$

Filtragem:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|k) \\ \hat{x}_2(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k|k-1) \\ \hat{x}_2(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta/T \end{bmatrix} [z - \hat{x}_1(k|k-1)] \quad (55)$$

O filtro alfa-beta-gama para modelos de aceleração de terceira ordem poder-se-ia obter de modo análogo ao do filtro alfa-beta. Nesse caso o ganho do filtro em regime estacionário seria dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K(k) \equiv \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta/T \\ \gamma/(2T^2) \end{bmatrix} \quad (56)$$

As relações entre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são dados em [5].

## 5.2 Limitações dos filtros

Os filtros alfa-beta e alfa-beta-gama são simplificações do filtro de Kalman em que os ganhos são fixos (pré-definidos). Em consequência, os filtros não são óptimos durante o período transitório inicial ou quando os ruídos forem não-estacionários.

As aeronaves civis apresentam dois modos básicos de voo: o movimento uniforme e o modo de manobra. O primeiro modo refere-se ao voo horizontal em linha recta com uma velocidade e direcção constantes e o segundo refere-se a viragens ou subidas/descidas.

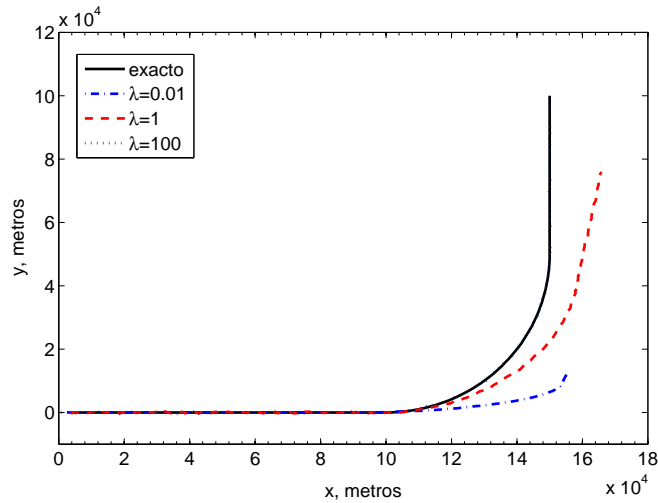


Figura 8: Trajectória de um móvel e a sua estimativa usando o filtro alfa-beta com  $\sigma_w^2 = 4 \times 10^4 \text{ m}^2$ ,  $T = 1 \text{ s}$  e diversos valores do índice de manobra

Um bom algoritmo de seguimento em sistemas de ATC deve permitir estimativas precisas e fiáveis do estado da aeronave em ambos os modos de voo. Estes dois requerimentos são, infelizmente, conflitantes. Os filtros alfa-beta e alfa-beta-gama não podem proporcionar um bom compromisso entre os dois requerimentos conflitantes: um filtro com índice de manobra elevado é necessário durante as monobras por forma a ter uma resposta rápida mas apenas um filtro com baixo índice de manobra permite uma significativa redução do ruído das observações durante o movimento uniforme [6].

## 6 Modelos híbridos

O problema do seguimento de alvos múltiplos através do uso de múltiplos sensores (MTMST=multiple tracking multiple sensor tracking) tem particular importância tanto em aplicações militares como civis. Em sistemas civis de controlo de tráfego as trajectórias estimadas são usadas para verificar a separação entre pares de alvos com a finalidade de manter as condições de segurança (prevenção de colisões) e a regularidade do tráfego aéreo. Os problemas de MTMST envolvem a estimação de parâmetros de valor contínuo como as posições dos alvos, velocidades e acelerações, e o teste de hipóteses discretas relativo ao modelo da dinâmica que governa cada um dos alvos. Logo, é natural colocar o problema de MTMST como um problema de estimação híbrida, isto é, estimação de processos estocásticos parcialmente observados com valores discretos e contínuos. Os sistemas híbridos são caracterizados por [7]:

1. Estado (consistindo em componentes cinemáticas e outras) que evolui de acordo com um modelo de equação diferencial estocástica (ou às diferenças).
2. Modelo governado por um processo estocástico discreto. Trata-se de um número finito de modelos possíveis (cada um correspondendo a um modo de comportamento), que são sujeitos a comutações de um modelo para outro de acordo com um conjunto de probabilidades de transição (abordagem de modelo dinâmico múltiplo).

A abordagem de modelo discreto múltiplo baseia-se no facto de um alvo não poder ser caracterizado em todo o tempo por um único modelo, mas um conjunto finito de modelos poder adequadamente descrever o seu comportamento em diferentes regimes. A abordagem de modelo múltiplo para sistemas com comutação de modelos assume que o sistema é modelizado pela equação às diferenças

$$x(k) = F[M(k)]x(k-1) + v[k-1, M(k)] \quad (57)$$

com medições ruidosas

$$z(k) = H[M(k)]x(k) + w[k, M(k)] \quad (58)$$

em que  $M(k)$  designa o modelo no instante  $k$  - em efeito durante o período de amostragem que acaba em  $k$ . Estes sistemas dizem-se lineares por saltos. Assume-se que o modo no instante  $k$  é um dos  $r$  modos possíveis

$$M(k) \in \{M_j\}_{j=1}^r \quad (59)$$

O vector de valor contínuo  $x(k)$  é, por vezes, referido por *estado de base* e a variável discreta  $M(k)$  por *estado modal*. Tal significa que a estrutura do sistema e/ou as estatísticas dos ruídos poderão diferir de modelo para modelo. Assumindo  $r$  modelos distintos, o número de sequências diferentes de modos até ao instante  $k$  é da forma  $r^k$ . Por exemplo, se os modelos pertencerem ao conjunto  $\{A, B\}$  e se  $k = 2$ , as sequências de modelos possíveis serão:  $(A, A)$ ,  $(A, B)$ ,  $(B, A)$  e  $(B, B)$ . Quer dizer, o número de sequências distintas cresce exponencialmente com o tempo. Deste modo, como cada sequência de modelos deverá dispôr de um filtro apropriado (filtro adaptado), o número de filtros necessário para estimar o estado do sistema irá crescer exponencialmente, o que torna o problema da filtragem óptima não implementável. É, por conseguinte, necessário recorrer a técnicas de filtragem sub-óptimas como sejam as técnicas GPB (generalized pseudo-Bayesian) ou IMM (interacting multiple model).

As técnicas GPB combinam as sequências dos modelos que diferem apenas nos modelos "mais antigos". O GPB de primeira ordem, designado GPB1, considera apenas



os modelos possíveis no último período de amostragem. O modelo de segunda ordem, GPB2, considera todos os modelos possíveis nos dois últimos períodos de amostragem. Estes algoritmos requerem o funcionamento em paralelo de  $r$  e  $r^2$  filtros, respectivamente. Finalmente, o algoritmo IMM é conceptualmente similar ao GPB2, mas requer apenas  $r$  filtros em paralelo. Dado que o algoritmo apresenta aproximadamente o mesmo desempenho do algoritmo GPB2 mas é computacionalmente menos exigente, iremos considerar apenas esta solução.

## 6.1 Algoritmo IMM

São os seguintes os objectivos principais a alcançar com a aplicação do algoritmo IMM:

- Reduzir tanto quanto possível os erros de estimação durante o movimento uniforme;
- Manter o valor máximo do erro de estimação durante a manobra menor que as medições fornecidas pelo radar (ou pelo GPS);
- Fornecer indicação correcta e actualizada do modo de voo, especialmente a detecção rápida da manobra.

Na abordagem usando o algoritmo IMM, a estimativa de estado no instante  $k$  é calculada para qualquer possível modelo actual mediante o uso de  $r$  filtros.

Começamos por assumir que o processo de mudança de modelo (modo) é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição de modo conhecidas

$$p_{ij} \equiv P\{M(k) = M_j | M(k-1) = M_i\} \quad (60)$$

Considera-se que estas probabilidades de transição são invariantes no tempo e independentes do estado, isto é, a cadeia de Markov é homogénea.

Seja  $Z^k = \{z(0), z(1), \dots, z(k)\}$  o conjunto de observações (medições) passadas e presentes. Cada iteração (ciclo) do algoritmo consiste nas seguintes operações [5]-[9]:

### 1. Cálculo das probabilidades de mistura ( $i, j = 1, \dots, r$ ).

A probabilidade de o modo  $M_i$  ter estado activo em  $k-1$  dado que  $M_j$  está activo no instante  $k$ , condicionado em  $Z^{k-1}$ , é dada por

$$\begin{aligned} \mu_{i|j}(k-1|k-1) &\equiv P\{M_i(k-1) | M_j(k), Z^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{\bar{c}_j} P\{M_j(k) | M_i(k-1), Z^{k-1}\} P\{M_i(k-1) | Z^{k-1}\} \end{aligned} \quad (61)$$

Trata-se das probabilidades de mistura, que podem escritas na forma

$$\mu_{i|j}(k-1|k-1) = \frac{1}{\bar{c}_j} p_{ij} \mu_i(k-1), \quad i, j = 1, \dots, r \quad (62)$$

em que as constantes de normalização são

$$\bar{c}_j = \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_i(k-1), \quad j = 1, \dots, r \quad (63)$$

e

$$\mu_i(k-1) = P\{M_i(k-1)|Z^{k-1}\}, \quad i = 1, \dots, r \quad (64)$$

são as probabilidades de cada estado (calculadas na iteração anterior).

## 2. Mistura ( $j = 1, \dots, r$ )

Partindo das estimativas do vector de estado produzidas pelos  $r$  filtros de Kalman na iteração anterior,  $\hat{x}_i(k-1|k-1)$ , calcula-se a entrada para o filtro de Kalman adaptado ao modo  $M_j(k)$  de acordo com

$$\hat{x}_{0j}(k-1|k-1) = \sum_{i=1}^r \hat{x}_i(k-1|k-1) \mu_{i|j}(k-1|k-1), \quad j = 1, \dots, r \quad (65)$$

A covariância correspondente é

$$\begin{aligned} P_{0j}(k-1|k-1) &= \sum_{i=1}^r \mu_{i|j}(k-1|k-1) \left\{ P_i(k-1|k-1) \right. \\ &\quad + [\hat{x}_i(k-1|k-1) - \hat{x}_{0j}(k-1|k-1)] \\ &\quad \cdot [\hat{x}_i(k-1|k-1) - \hat{x}_{0j}(k-1|k-1)]^T \Big\} \end{aligned} \quad (66)$$

para  $j = 1, \dots, r$ .

## 3. Filtragem ( $j = 1, \dots, r$ )

A estimativa (65) e a covariância (66) são usadas como entradas para o filtro adaptado ao modo  $M_j(k)$  o qual utiliza as observações  $z(k)$  para gerar  $\hat{x}_j(k|k)$  e  $P_j(k|k)$  usando as equações usuais dos passos da predição e da filtragem do filtro de Kalman.

As funções de verosimilhança correspondentes aos  $r$  filtros

$$\Lambda_j(k) = p[z(k)|M_j(k), Z^{k-1}] \quad (67)$$

são calculadas usando a condição de mistura inicial (65) e a covariância associada (66). As funções  $\Lambda_j(k)$  são uma medida da probabilidade de o modelo  $M_j$  ser o modelo correcto no instante  $k$ , sendo calculadas como

$$\Lambda_j(k) = p[z(k)|M_j(k), \hat{x}_{0j}(k-1|k-1), P_{0j}(k-1|k-1)], \quad j = 1, \dots, r \quad (68)$$

ou,

$$\Lambda_j(k) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|S_j(k)|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} r_j^T(k) S_j^{-1}(k) r_j(k) \right] \quad (69)$$

em que  $m$  é dimensão do vector  $z(k)$ ,  $r_j(k)$  é o resíduo (processo de inovações)

$$r_j(k) = z(k) - H_j(k) \hat{x}_j(k|k-1) \quad (70)$$

e  $H_j(k)$  é a matriz das observações.

A matriz de covariância do resíduo é

$$S_j(k) = H_j(k) P_j(k|k-1) H_j^T(k) + R_j(k) \quad (71)$$

onde  $R_j(k)$  é a matriz de covariância do ruído das observações.

#### 4. Actualização das probabilidades dos modos ( $j = 1, \dots, r$ )

A actualização é feita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mu_j(k) &\equiv P\{M_j(k)|Z^k\} \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \bar{c}_j, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (72)$$

em que  $c$  é a constante de normalização

$$c = \sum_{j=1}^r \Lambda_j(k) \bar{c}_j \quad (73)$$

### 5. Estimativa e combinação das covariâncias

A estimativa do vector de estado é uma soma ponderada das estimativas de  $r$  filtros de Kalman, de acordo com

$$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \hat{x}_j(k|k) \quad (74)$$

A matriz de covariância dos erros correspondente é

$$P(k|k) = \sum_{i=1}^r \mu_j(k) \{P_j(k|k) + [\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}(k|k)][\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}(k|k)]^T\} \quad (75)$$

Note-se que este resultado é válido apenas para efeito de saída não sendo parte da estrutura recursiva do algoritmo.

Finalmente, o modo (modelo) estimado no instante  $k$  é o modo que apresenta a probabilidade mais elevada, isto é [8]

$$\hat{M}(k|k) = \arg \max_j \mu_j(k) \quad (76)$$

O esquema de uma iteração do algoritmo IMM é exibido na Fig. 9 para dois modos (estados).

## 6.2 Aplicação em Controlo de Tráfego Aéreo

A mudança de direcção numa aeronave civil segue usualmente um padrão conhecido por volta coordenada (coordinated turn) [6]. Uma volta coordenada é uma mudança de direcção efectuada com uma taxa de viragem constante (taxa de mudança de ângulo constante) e a velocidade constante.

Em controlo de tráfego aéreo as aeronaves civis apresentam dois modos básicos de voo [5]:

- *movimento uniforme* - voo em linha recta e altitude constante com velocidade e direcção fixas, e
- *manobra* - mudança de direcção ou subida/descida.

Os modos de voo no **plano horizontal** podem ser modelizados por:

- modelo cinemático de segunda ordem (velocidade quase constante) para um movimento uniforme;

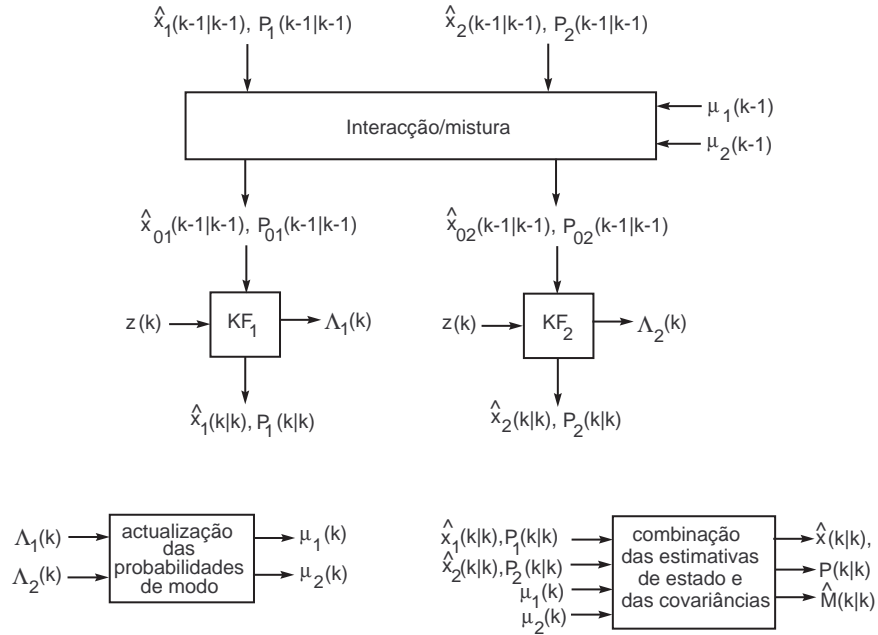


Figura 9: Iteração (ciclo) do algoritmo IMM para dois modos (estados)

- modelo de volta quase coordenada para a manobra.

O modelo de velocidade quase constante é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(k-1) \\ v_2(k-1) \end{bmatrix}}_{v(k-1)} \quad (77)$$

em que  $T$  é o intervalo de amostragem (tipicamente  $3 \leq T \leq 12$  segundos para aplicações de radar);  $x(k)$  é o estado do avião, definido por

$$x(k) = [\xi(k) \quad \dot{\xi}(k) \quad \eta(k) \quad \dot{\eta}(k)]^T \quad (78)$$

em que  $\xi(k)$  e  $\eta(k)$  designam as coordenadas cartesianas no plano horizontal e  $v(k)$  é um ruído branco gaussiano de média nula usado para modelizar pequenas acelerações, turbulência, mudança no vento, etc. O ruído é caracterizado pela matriz de covariância  $Q$ , a qual é um parâmetro de desenho.

A mudança de direcção numa aeronave civil segue usualmente um padrão conhecido por volta coordenada (coordinated turn) [6]. Uma volta coordenada é uma mudança de direcção efectuada com uma taxa de viragem constante (taxa de mudança de ângulo

constante) e a velocidade constante. Embora a mudança de direcção num avião civil não seja exactamente “coordenada” porque a velocidade em relação ao sólo é a velocidade no ar mais a velocidade do vento, ela pode ser convenientemente descrita por uma volta coordenada adicionada a uma pequena quantidade de ruído que representa o erro do modelo. Tal modelo é necessariamente não-linear se a taxa de mudança de ângulo não for constante. Aumentando o vector de estado (78) de mais uma componente - a taxa de viragem  $\omega$ , isto é

$$x(k) = [\xi(k) \quad \dot{\xi}(k) \quad \eta(k) \quad \dot{\eta}(k) \quad \omega(k)]^T \quad (79)$$

o modelo de volta quase coordenada é dado por

$$\begin{aligned} x(k) = & \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos \omega T}{\omega} & 0 \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T & 0 \\ 0 & \frac{1-\cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1) \\ & + \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v(k-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned} \quad (80)$$

em que  $u$  é a entrada de controlo para a taxa de viragem.

Admitindo que apenas as medições da posição estão disponíveis por forma a reflectir a tecnologia de radar correntemente em uso em ATC, obtém-se a seguinte equação de navegação

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k) \quad (81)$$

Embora as medições de radar sejam feitas em coordenadas polares, elas podem ser convertidas para coordenadas cartesianas mediante

$$z_1 = r \cos \theta \quad (82)$$

$$z_2 = r \sin \theta \quad (83)$$

em que  $z = [z_1 \ z_2]^T$ ;  $r$  e  $\theta$  são respectivamente as medições de distância e de azimuth. A aproximação à covariância destes erros de medição é dada por [5]-[6]

$$R = E\{w(k)w^T(k)\} \approx \frac{\sigma_r^2 - r^2\sigma_\theta^2}{2} \begin{bmatrix} b + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & b - \cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad (84)$$

em que  $\sigma_r^2$  e  $\sigma_\theta^2$  são respectivamente as variâncias das medições da distância (em metros quadrados) e do azimuth (em radianos quadrados) e

$$b = \frac{\sigma_r^2 + r^2\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2 - r^2\sigma_\theta^2} \quad (85)$$

Em simulação, os vectores de ruído  $w(k) = [w_1(k) w_2(k)]^T$  podem ser gerados tendo em conta (84) e o resultado do Anexo A. A aproximação (84) é boa quando  $r\sigma_\theta^2/\sigma_r < 0.4$ . Para radares ATC  $\sigma_\theta$  é da ordem de  $0.1^\circ$ . Tendo em conta as equações da dinâmica (77) e (80), a equação das observações (81), e admitindo como válido o modelo markoviano da transição de modos de voo (60), o comportamento cinemático das aeronaves civis é convenientemente descrito por sistemas estocásticos híbridos.

O algoritmo IMM é um natural candidato em problemas de seguimento em ATC. O algoritmo, ilustrado na Fig. 9 para dois modos, apresenta uma configuração modular em que vários filtros de estimação de estado, adaptados a cada um dos modos, operam em paralelo, trocando informação em cada instante de amostragem; um sub-algoritmo calcula a probabilidade actual de a aeronave se encontrar em cada um dos modos possíveis. Uma estimativa global do estado da aeronave é calculada usando as últimas probabilidades de modo. Os filtros adaptados a cada modo (filtros de Kalman ou de Kalman generalizado) são escolhidos de acordo com cada situação encontrada durante o voo. A operação do algoritmo IMM pode ser intuitivamente explicada da seguinte forma [6]:

1. consiste num filtro de Kalman de baixo ganho (para o movimento quase uniforme) e num ou mais filtros de ganho elevado (para situações de manobra);
2. estes filtros interagem (trocam informação) com pesos variáveis no tempo - as probabilidades de mistura;
3. a estimativa final é uma combinação (média ponderada) das estimativas de cada filtro, em que os pesos são as probabilidades de modo;
4. os pesos para a interacção e combinação baseiam-se no modelo que se ajusta melhor aos dados.

Mais detalhes sobre a implementação do algoritmo IMM para seguimento em ATC podem ser encontrados em [6]. Foram consideradas duas implementações (IMM2 e IMM3) de acordo com

1. Um modelo de velocidade quase constante com intensidade de ruído suficiente para modelizar possíveis viragens lentas e pequenas acelerações lineares e um modelo de viragem quase coordenada com a taxa de viragem considerada como uma variável aleatória. Esta implementação é designada de IMM2.
2. Um modelo de velocidade quase constante com intensidade de ruído suficiente para modelizar possíveis viragens lentas e pequenas acelerações lineares e dois modelos de viragem quase coordenada com taxas de viragem consideradas como variáveis aleatórias diferentes. Esta implementação é designada de IMM3.

Os parâmetros de desenho considerados nas duas implementações vêm indicados na Tabela seguinte [5]-[6].

Parâmetros (graus/s)	IMM2	IMM3(CT1)	IMM3(CT2)
média da taxa de viragem $\bar{\omega}$	6.0	3.0	9.0
desvio padrão	4.0	2.0	3.0

Foram usadas as seguintes matrizes de transição de probabilidades de modo para a cadeia de Markov em (60)

$$[p_{ij}]_{\text{IMM2}} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$[p_{ij}]_{\text{IMM3}} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.025 & 0.025 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.05 & 0.25 & 0.70 \end{bmatrix} \quad (87)$$

A dificuldade com o modelo de volta quase coordenada proposto em (79)-(80) é que a taxa de viragem  $\omega$  não é, em geral, conhecida e tem de ser estimada. O problema de filtragem torna-se então não linear recorrendo-se a um filtro de Kalman generalizado para resolver o problema definido em (80)-(81). Em [8] propõe-se uma abordagem alternativa em que  $\hat{\omega}$  é obtida a partir das estimativas da velocidade e da aceleração nas coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ , de acordo com

$$\hat{\omega}(k) = \text{sign} \{ \hat{\xi}(k) \hat{\ddot{\eta}}(k) - \hat{\ddot{\xi}}(k) \hat{\eta}(k) \} \sqrt{\frac{[\hat{\ddot{\xi}}(k)]^2 + [\hat{\ddot{\eta}}(k)]^2}{[\hat{\dot{\xi}}(k)]^2 + [\hat{\dot{\eta}}(k)]^2}} \quad (88)$$

A implementação de Hwang-Tomlin considera o vector de estado

$$x(k) = [\xi(k) \quad \dot{\xi}(k) \quad \ddot{\xi}(k) \quad \eta(k) \quad \dot{\eta}(k) \quad \ddot{\eta}(k)]^T \quad (89)$$

a equação da dinâmica de tempo discreto para o modo de velocidade constante (CV) assume um modelo de aceleração de 2.a ordem, sendo dado por [8]-[10]



$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k-1) + \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_{cv}(k) \quad (90)$$

enquanto que para o modo de volta coordenada (CT) a dinâmica assume um modelo de aceleração de 3.a ordem, sendo dado por [8]-[10]

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1) + \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v_{ct}(k) \quad (91)$$

Em [8] sugere-se a utilização de um filtro passa-baixo para “alisar” as estimativas  $\hat{\omega}(k)$  obtidas através de (88).

Os modelos das observações devem ter em conta a natureza dos dispositivos utilizados, como sejam o radar ou o GPS (usando, por exemplo, o sistema ADS-B). Neste último caso, estão também, em geral, disponíveis, para além das medições das posições nas coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ , as velocidades segundo as duas direcções, e o intervalo de amostragem típico entre observações é  $T = 1$  segundo. O modelo das observações será então dado por

$$z(k) = Hx(k) + w_i(t), \quad i = \{cv, ct\} \quad (92)$$

com

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

## Anexo A

Considere-se o problema da geração de um vector de ruído gaussiano da forma  $U = [u_1, \dots, u_M]$ , com média  $E\{U\} = \mathbf{0}$  e matriz de covariância  $Q$ , a partir do vector de ruído  $W = [w_1, \dots, w_M]$ , com componentes gaussianas independentes, de médias nulas e variâncias unitárias. Tem-se

$$U = [u_1, \dots, u_{2M+1}]^T = GW \quad (94)$$

ou,

$$u_k = \sum_{i=1}^M g_{ki} w_i \quad (95)$$

tal que

$$q_{jk} = E\{u_j u_k\} = E\left\{\sum_{i=1}^M g_{ji} w_i \sum_{l=1}^M g_{kl} w_l\right\} \quad (96)$$

em  $q_{jk}$  são os elementos de  $Q$ . O problema consiste em determinar a matriz  $G$  dos coeficientes  $g_{jk}$  a partir de

$$\begin{aligned} Q = E\{UU^T\} &= E\{GWW^T G^T\} \\ &= GE\{WW^T\}G^T \\ &= GG^T \end{aligned} \quad (97)$$

A matriz de covariância pode ser escrita em termos dos seus valores e vectores próprios de acordo com [11]

$$Q = V\Lambda V^T \quad (98)$$

em que  $V$  é uma matriz cujas colunas são os vectores próprios ortonormados de  $Q$

$$V = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(M)} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (99)$$

e  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  é uma matriz diagonal com os valores próprios de  $Q$ . Comparando (97) com (98) conduz à expressão desejada para  $G$

$$G = V\Lambda^{1/2} = V\text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_M}\} \quad (100)$$

ou,

$$G = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(M)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_M^{(1)} & v_M^{(2)} & \cdots & v_M^{(M)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_M} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Logo,

$$g_{ki} = v_k^{(i)} \sqrt{\lambda_i} \quad (102)$$

e as componentes de ruído pretendidas são

$$u_k = \sum_{i=1}^M (v_k^{(i)} \sqrt{\lambda_i}) w_i. \quad (103)$$

## Referências

- [1] M. Kayton and W. Fried, “Avionics Navigation Systems”, second edition, Wiley, N. York, 1997.
- [2] “Automatic dependent surveillance - Broadcast (ADS-B) out performance requirements to support air traffic control (ATC) service”, Docket FAA-2007-29305, FAA, Washington, D.C., Oct. 2007.
- [3] “Introduction to TCAS II”, version 7, U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Novembro de 2000.
- [4] <http://aerowinx.de/>
- [5] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li, “*Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*”, Artech, Boston, 1993.
- [6] X. R. Li, Y. Bar-Shalom, “Design of an Interacting Multiple Model Algorithm for Air Traffic Control Tracking”, IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 1, pp. 186-194, Setembro de 1993.
- [7] E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom, J. Dayan, “Interacting Multiple Model Methods in Target Tracking: A Survey”, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 34, pp. 103-123, Janeiro de 1998.

- [8] I. Hwang, J. Hwang, C. Tomlin, “Flight-Mode-Based Aircraft Conflict Detection using a Residual-Mean Interacting Multiple Model Algorithm”, Proc. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Austin, TX, Agosto de 2003.
- [9] I. Hwang, “Air Traffic Surveillance and Control Using Hybrid Estimation and Protocol-Based Conflict Resolution”, PhD Thesis, Stanford University, Dezembro de 2003.
- [10] K. Roy, B. Levy, C. Tomlin, “Target Tracking and Estimated Time of Arrival (ETA) Prediction for Arrival Aircraft”, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Keystone, CO, Agosto de 2006.
- [11] C. W. Therrien, “Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing”, Prentice-Hall, 1992.