

Universidade Federal de Alfenas

Linguagens Formais e Autômatos

Aula 08 – Minimização de AFDs

humberto@bcc.unifal-mg.edu.br



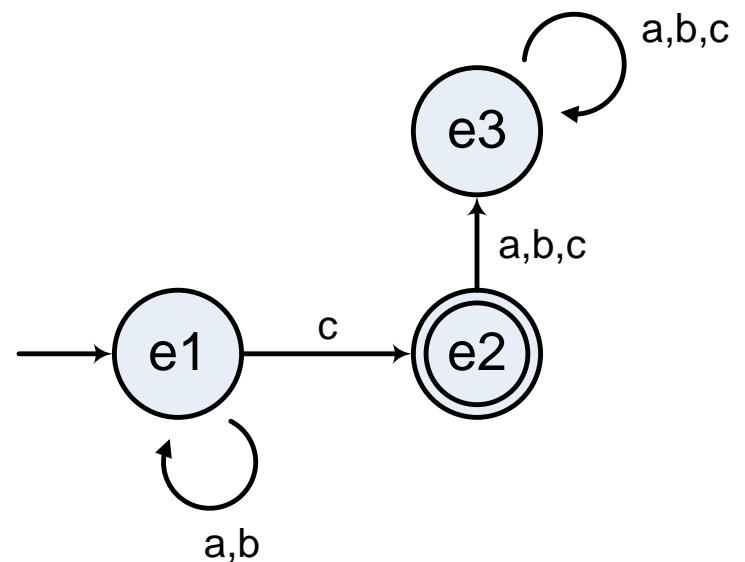
Últimas aulas...

- Linguagens Formais vs Linguagens Naturais

Últimas aulas...

- Linguagens Formais vs Linguagens Naturais
- Gramáticas
- Autômato Finito Determinístico

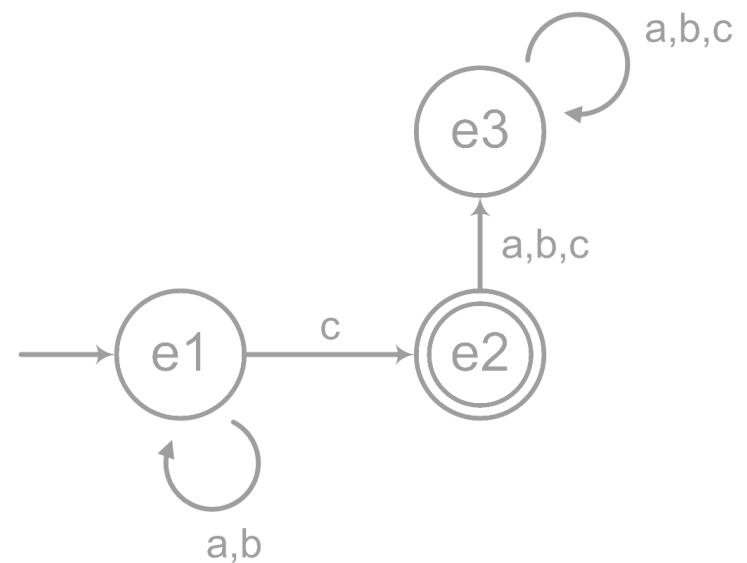
$$M_1 = (E, \Sigma, \delta, i, F)$$



Últimas aulas...

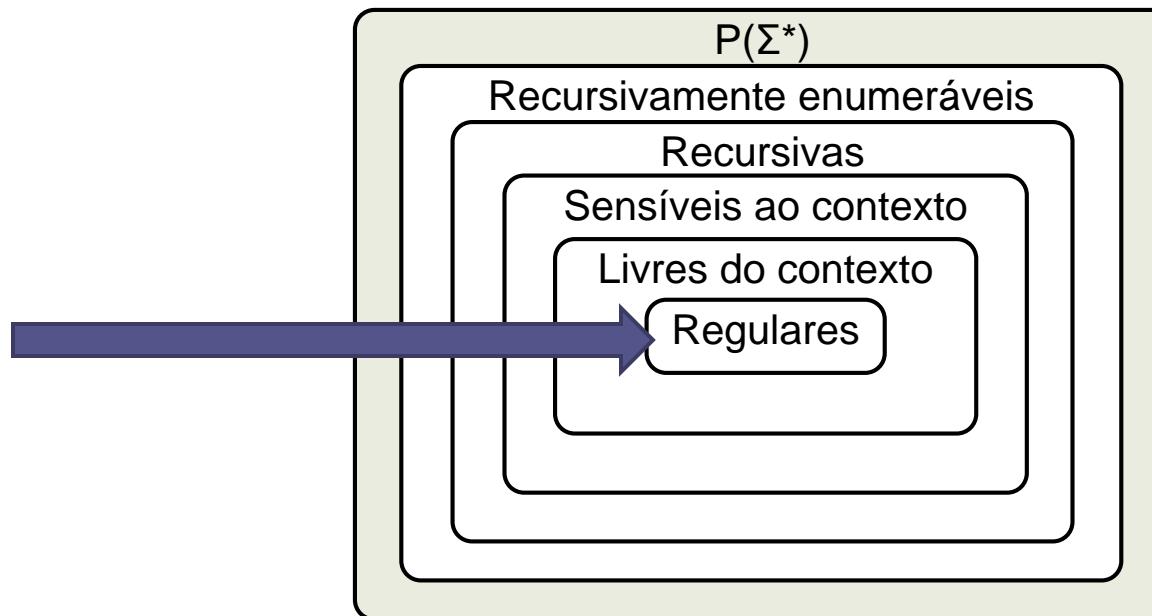
- Linguagens Formais vs Linguagens Naturais
- Gramáticas
- Autômato Finito Determinístico
- Resolução de exercícios

$$M_1 = (E, \Sigma, \delta, i, F)$$



Autômatos Finitos (AFs)

- Linguagens que os AFDs reconhecem:
 - Linguagens regulares...



Autômato Finito Determinístico

- Dois AFDs são ditos equivalentes se, e somente se:

Autômato Finito Determinístico

- Dois AFDs são ditos equivalentes se, e somente se:

$$L(M_1) = L(M_2)$$

Autômato Finito Determinístico

- **Algumas perguntas surgem** do fato de existir equivalência entre autômatos:

Autômato Finito Determinístico

- Algumas perguntas surgem do fato de existir equivalência entre autômatos:

Existe AFD mínimo para reconhecer uma linguagem específica?

Autômato Finito Determinístico

- Algumas perguntas surgem do fato de existir equivalência entre autômatos:

Existe AFD mínimo para reconhecer uma linguagem específica?

Podemos construir um AFD, a partir de dois AFDs M_1 e M_2 , que reconheça:

$$L(M_1) \cup L(M_2)?$$

$$L(M_1) \cap L(M_2)?$$

$$L(M_1) - L(M_2)?$$

$$L(M_1)^*?$$

Autômato Finito Determinístico

Por que alcançar um AFD mínimo pode ser visto como uma vantagem?

Autômato Finito Determinístico

- Definição de AFD mínimo:

Um AFD M é dito um AFD mínimo para a linguagem $L(M)$ se
nenhum AFD para $L(M)$ contém menor número de estados que M .

Autômato Finito Determinístico

- Algoritmo genérico para alcançarmos um AFD mínimo:

Autômato Finito Determinístico

- Algoritmo genérico para alcançarmos um AFD mínimo:
 1. Eliminar os estados inalcançáveis;

Autômato Finito Determinístico

- Algoritmo genérico para alcançarmos um AFD mínimo:
 1. Eliminar os estados inalcançáveis;
 2. Substituir cada grupo de estados equivalentes por um único estado.

Autômato Finito Determinístico

- Algoritmo genérico para alcançarmos um AFD mínimo:
 1. Eliminar os estados inalcançáveis;
 2. Substituir cada grupo de estados equivalentes por um único estado.

Como eliminar estados inalcançáveis?

Autômato Finito Determinístico

- Algoritmo genérico para alcançarmos um AFD mínimo:
 1. Eliminar os estados inalcançáveis;
 2. Substituir cada grupo de estados equivalentes por um único estado.

Como eliminar estados inalcançáveis?

Como identificar estados equivalentes?

Autômato Finito Determinístico

- Eliminando estados inalcançáveis:
 1. Busca em grafos (pode ser utilizado a busca em profundidade)

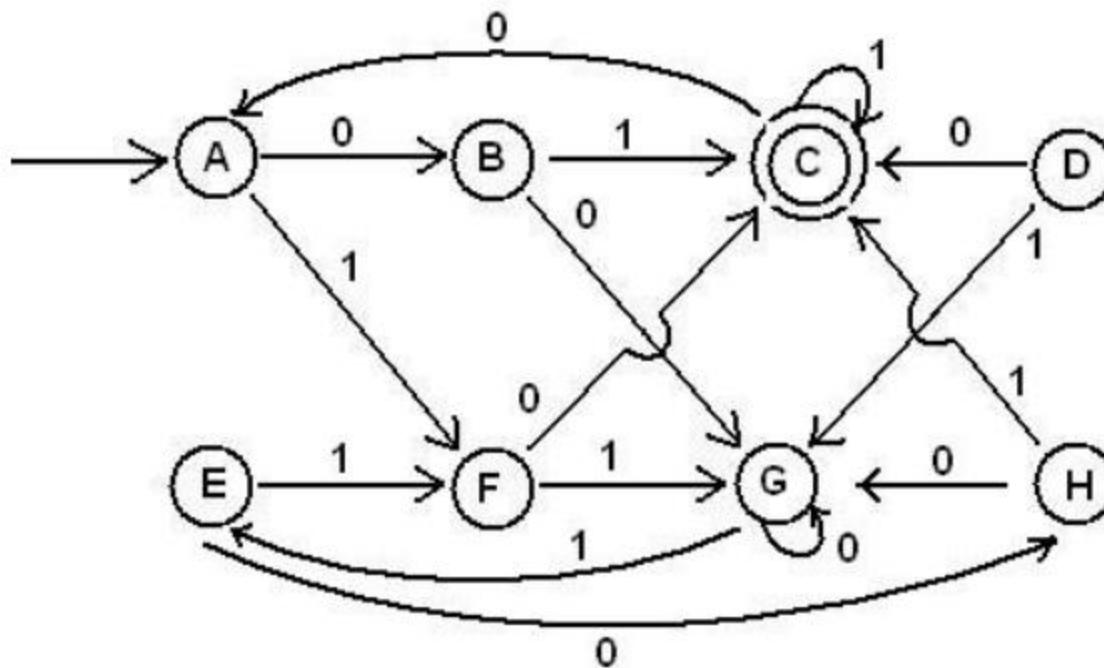
Autômato Finito Determinístico

- Eliminando estados inalcançáveis:
 1. Busca em grafos (pode ser utilizado a busca em profundidade)
- http://www.bcc.unifal-mg.edu.br/~humberto/disciplinas/2010_2_grafos/index.php
 - Consulte a vídeo aula sobre busca em profundidade em grafos para entender como eliminar estados inalcançáveis.
 - Ao final da busca em profundidade, os vértices que ainda estiverem no estado “Branco” são inalcançáveis.

Autômato Finito Determinístico

- Eliminando estados inalcançáveis:

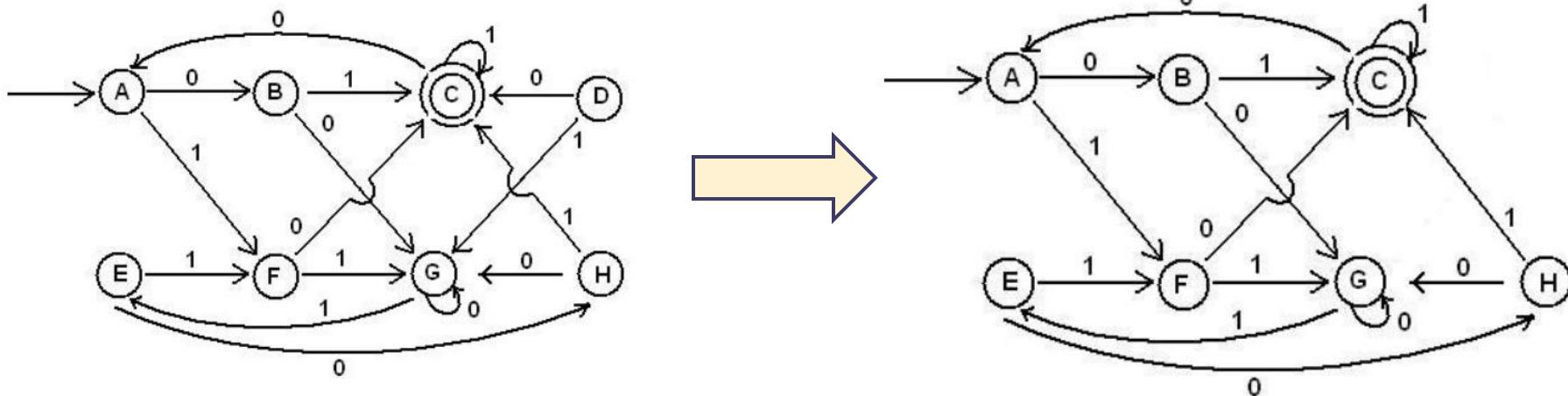
Supondo o seguinte AFD, elimine os estados inacessíveis...



Autômato Finito Determinístico

- Eliminando estados inalcançáveis:

Supondo o seguinte AFD, elimine os estados inacessíveis...

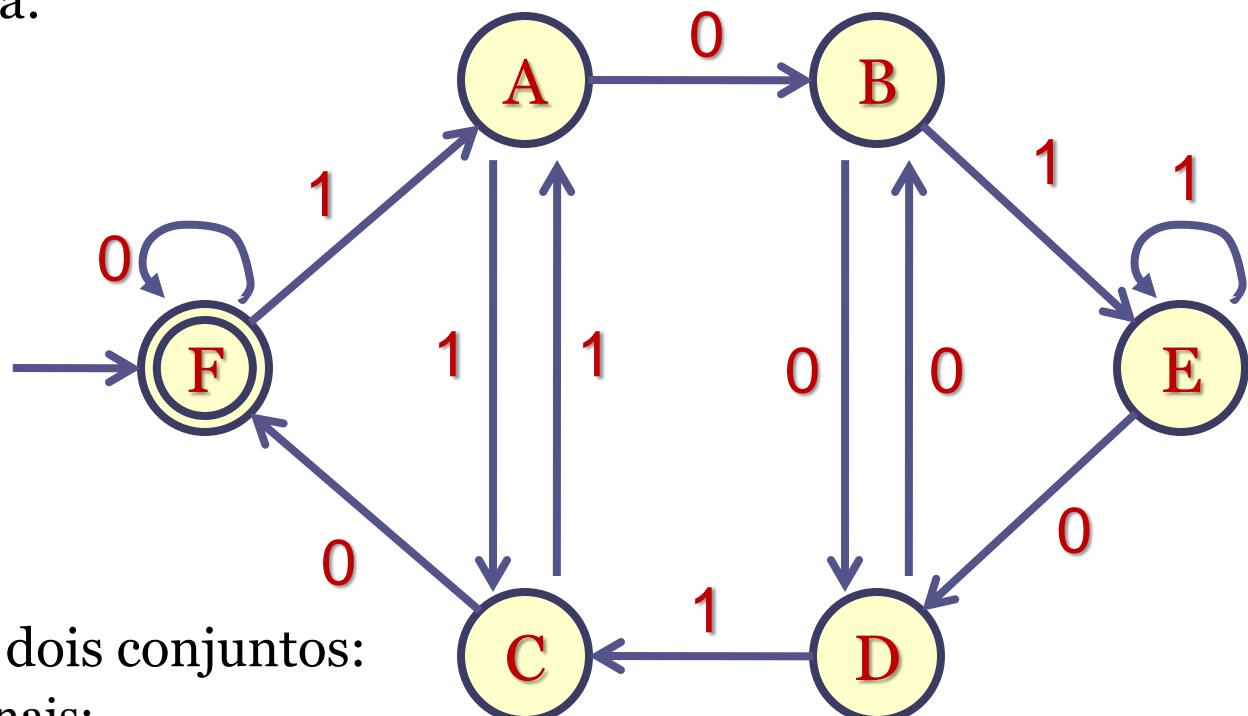


Autômato Finito Determinístico

- Para identificar estados equivalentes ($e \approx e'$):
 - Particionar o conjunto de estados em conjuntos de equivalência:

Autômato Finito Determinístico

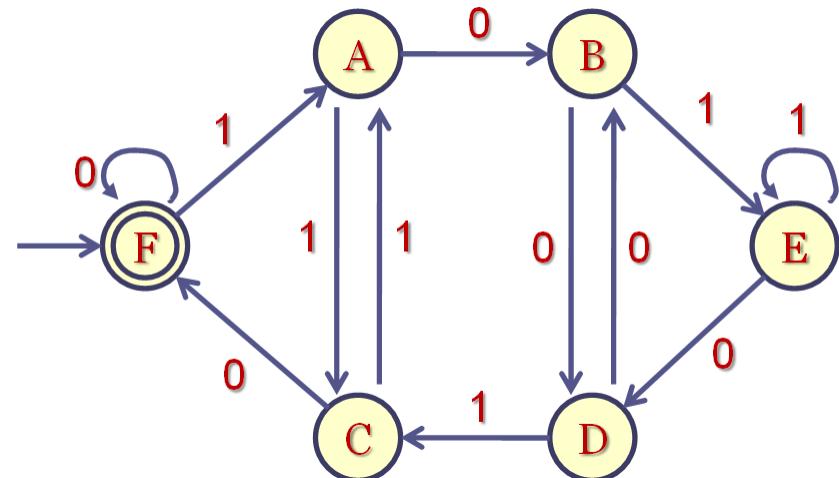
- Para identificar estados equivalentes ($e \approx e'$):
 - Particionar o conjunto de estados em conjuntos de equivalência:



- A princípio dois conjuntos:
 - Estados finais;
 - Estados não finais;

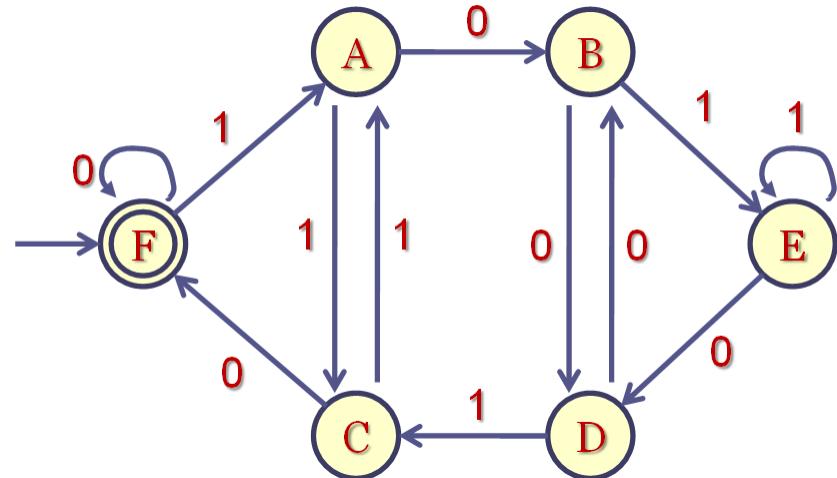
Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G1: {F}
 - G2: {A,B,C,D,E}



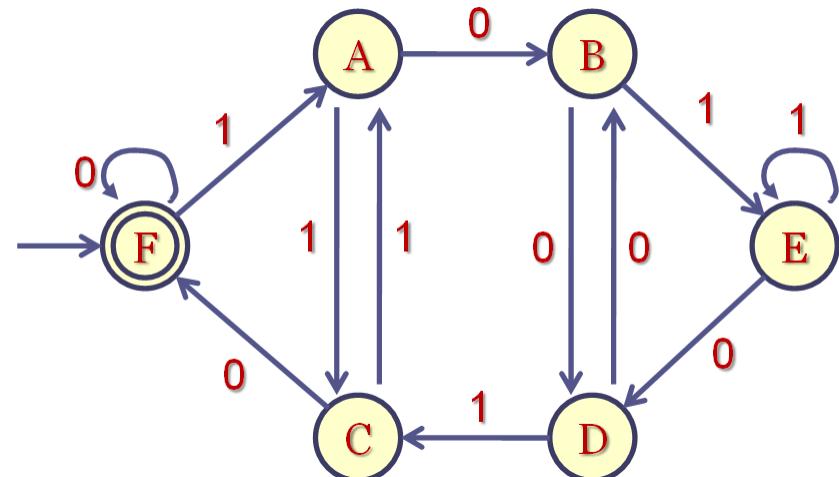
Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,B,C,D,E}
- As transições de cada estado levem a computação para qual grupo?



Autômato Finito Determinístico

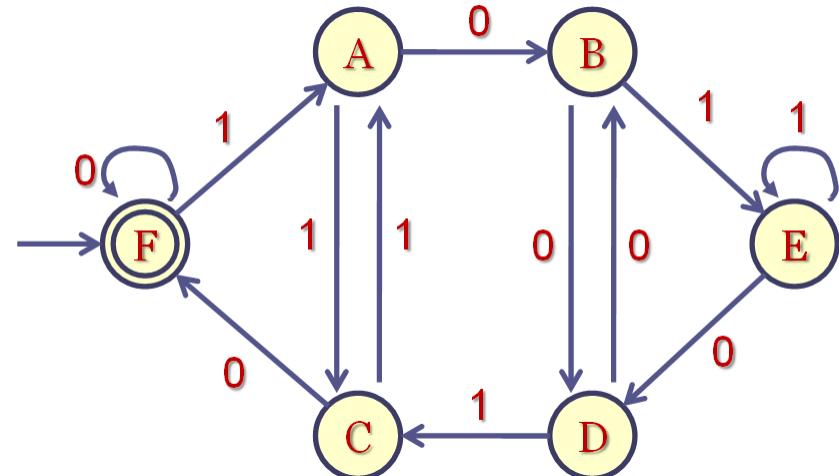
- Dois grupos
 - G1: {F}
 - G2: {A,B,C,D,E}



	0	1
A	G2	G2
B	G2	G2
C	G1	G2
D	G2	G2
E	G2	G2
F	G1	G2

Autômato Finito Determinístico

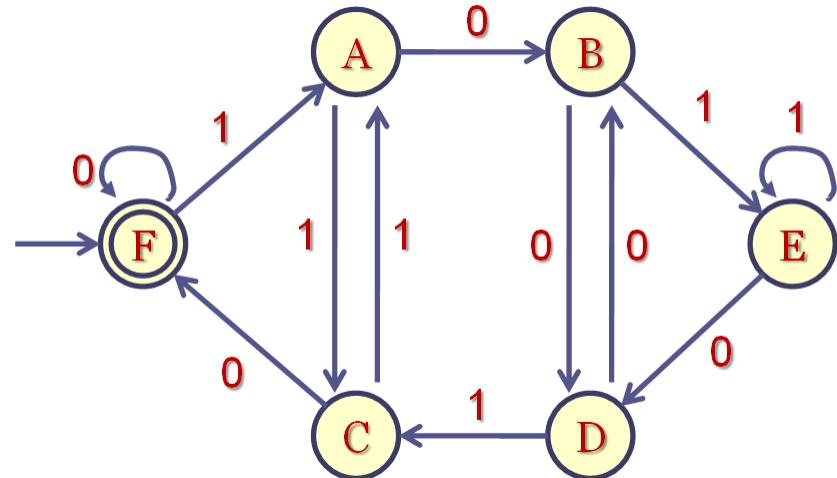
- Dois grupos
 - $G_1: \{F\}$
 - $G_2: \{A, B, C, D, E\}$



	0	1
A	G_2	G_2
B	G_2	G_2
C	G_1	G_2
D	G_2	G_2
E	G_2	G_2
F	G_1	G_2

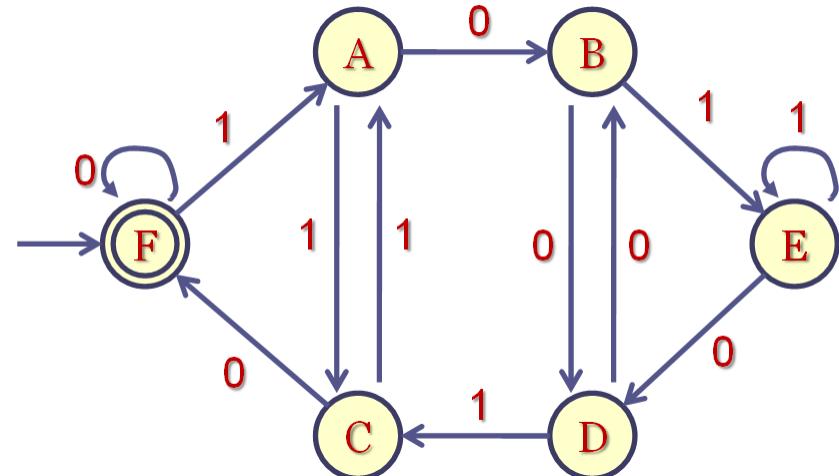
Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,B,D,E}
 - G₃: {C}
- As transições de cada estado levem a computação para qual grupo?



Autômato Finito Determinístico

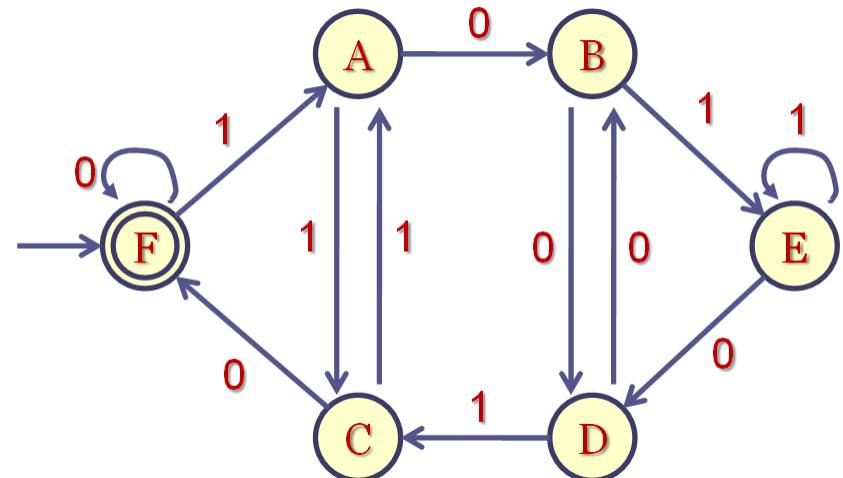
- Dois grupos
 - G1: {F}
 - G2: {A,B,D,E}
 - G3: {C}



	0	1
A	G2	G3
B	G2	G2
C	G1	G2
D	G2	G3
E	G2	G2
F	G1	G2

Autômato Finito Determinístico

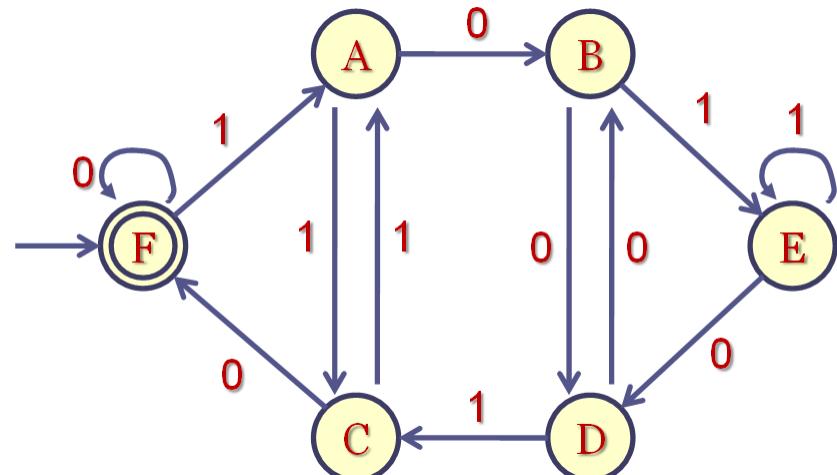
- Dois grupos
 - $G_1: \{F\}$
 - $G_2: \{A, B, D, E\}$
 - $G_3: \{C\}$



	0	1
A	G_2	G_3
B	G_2	G_2
C	---	---
D	G_2	G_3
E	G_2	G_2
F	---	---

Autômato Finito Determinístico

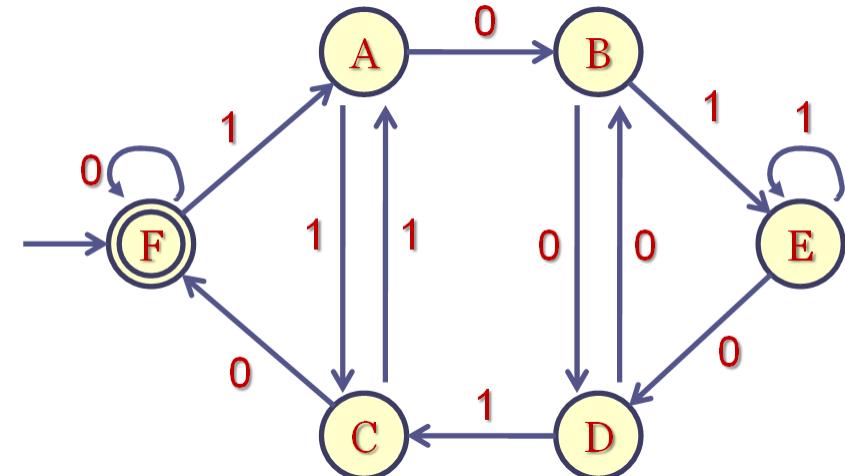
- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}



	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - $G_1: \{F\}$
 - $G_2: \{A,D\}$
 - $G_3: \{C\}$
 - $G_4: \{B,E\}$

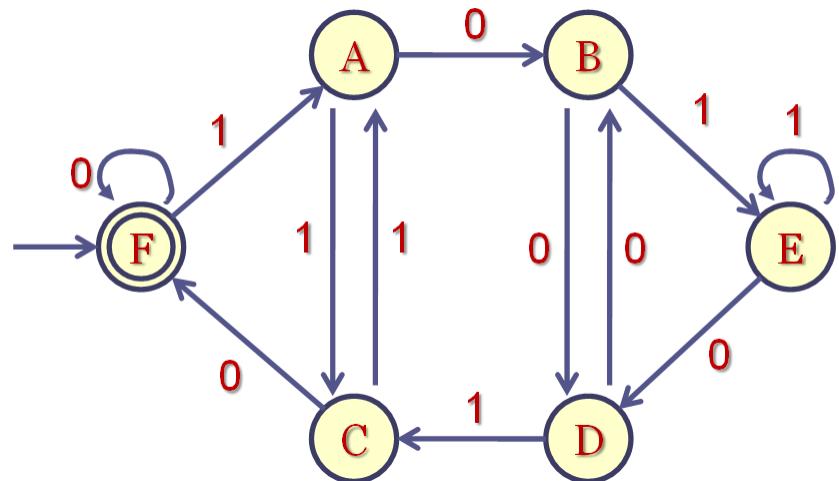


Não houve
mudança nesta
última iteração.
Isso indica o fim
do laço repetitivo!

	0	1
A	G_4	G_3
B	G_2	G_4
C	---	---
D	G_4	G_3
E	G_2	G_4
F	---	---

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

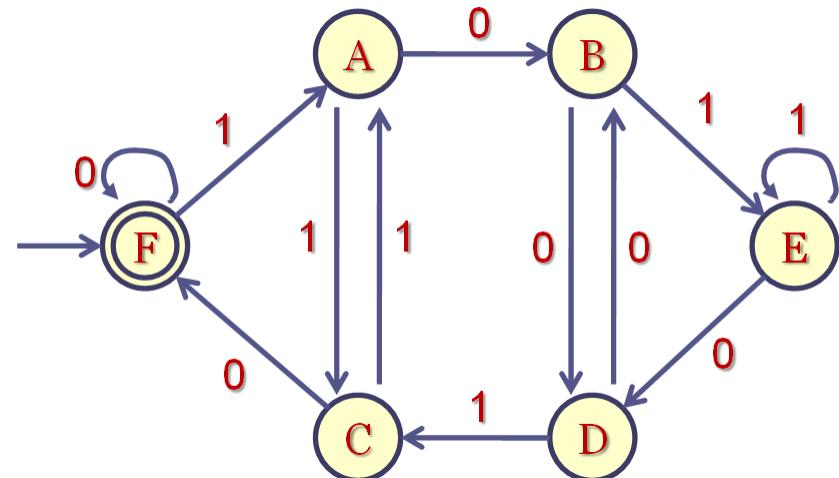


Cada conjunto será um estado no AFD mínimo.

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

Utilizaremos o último quadro para criar as transições do AFD mínimo.

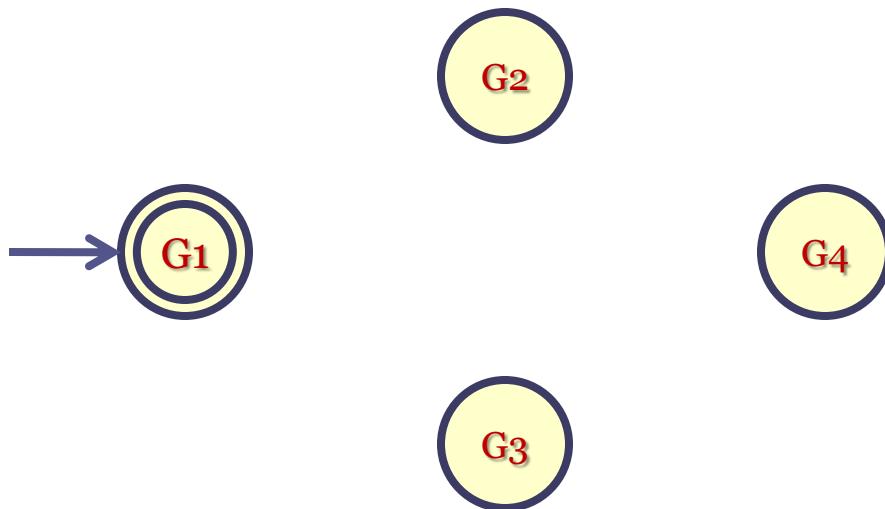


	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

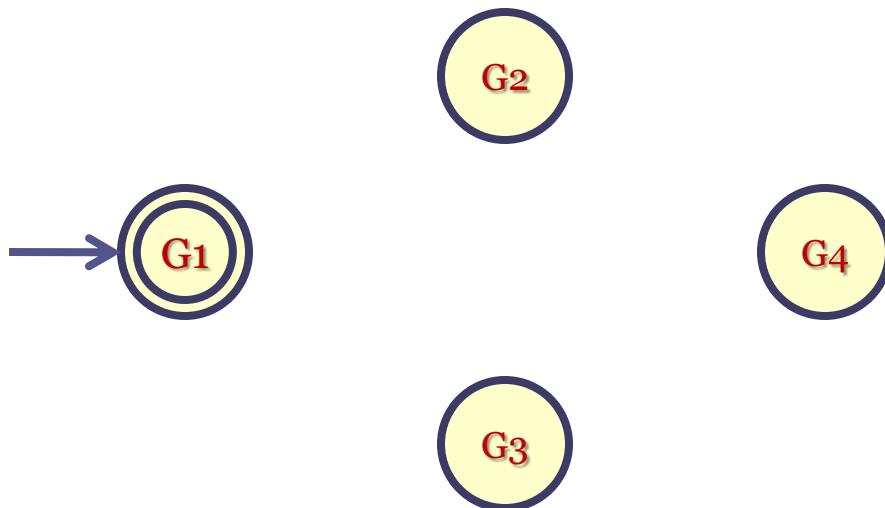
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

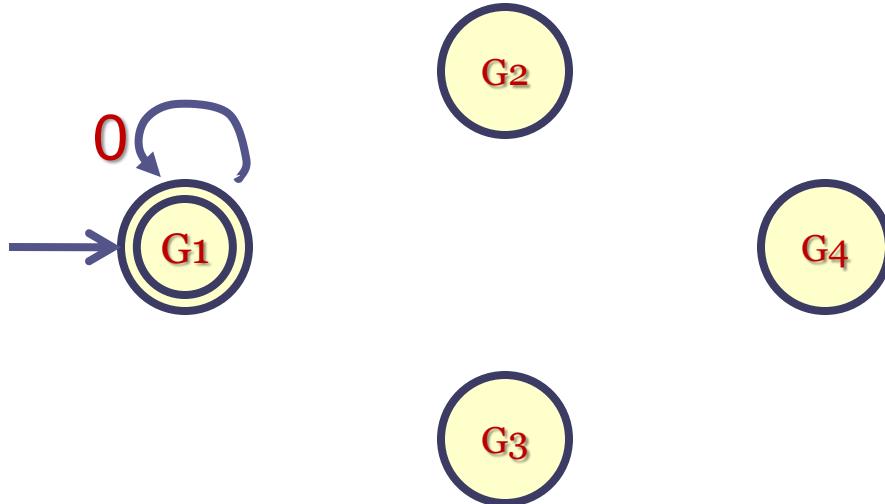


Quando elementos do grupo G₁ vão processar a símbolo *o*, para qual grupo a computação é levada?

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

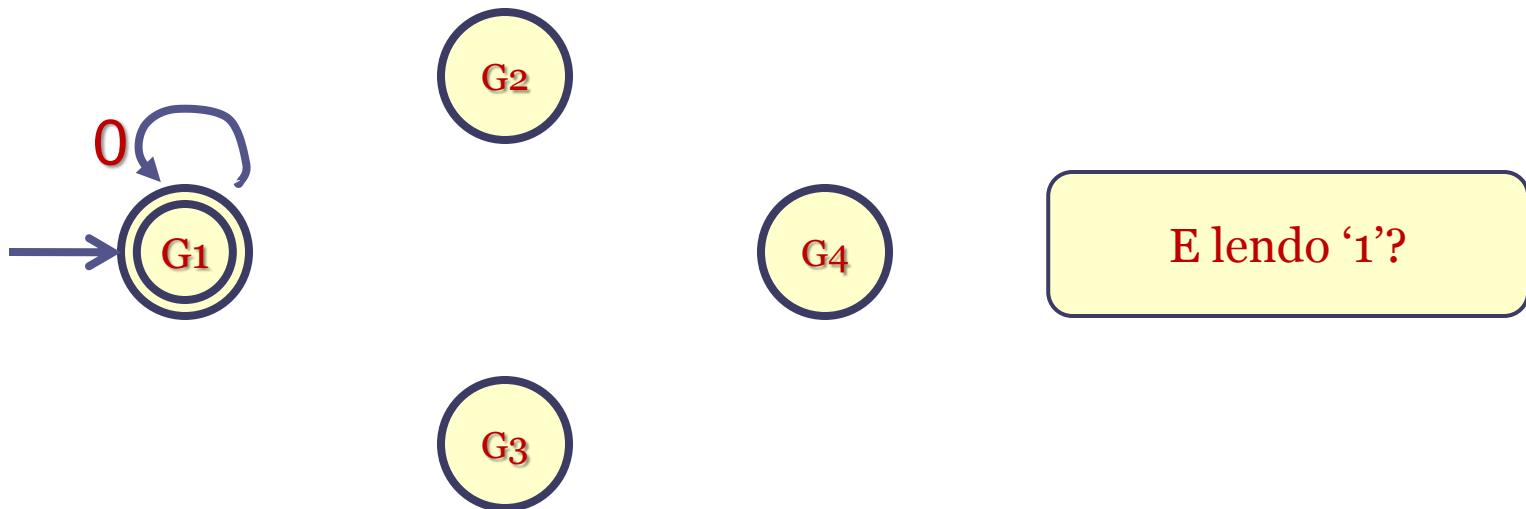
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

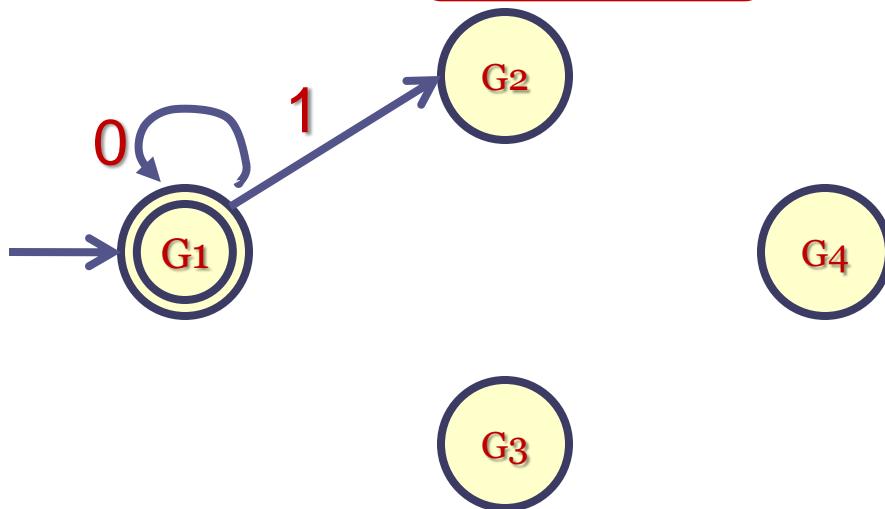
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

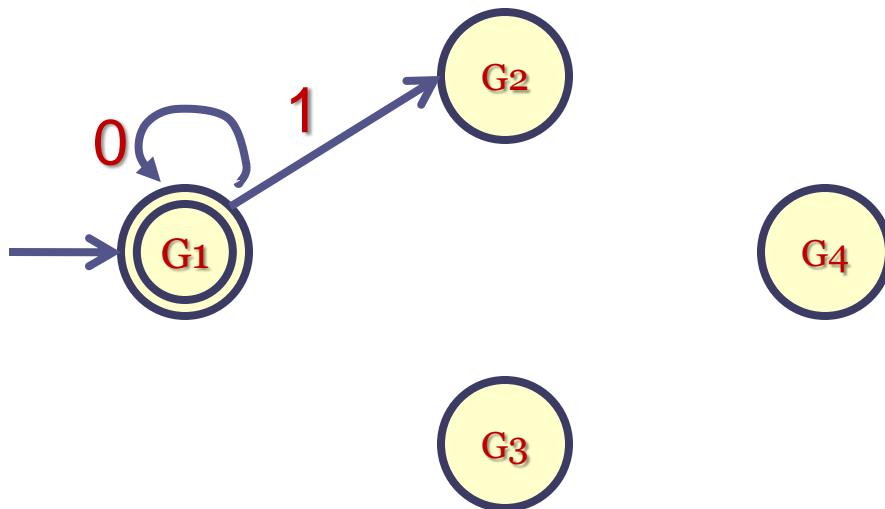
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

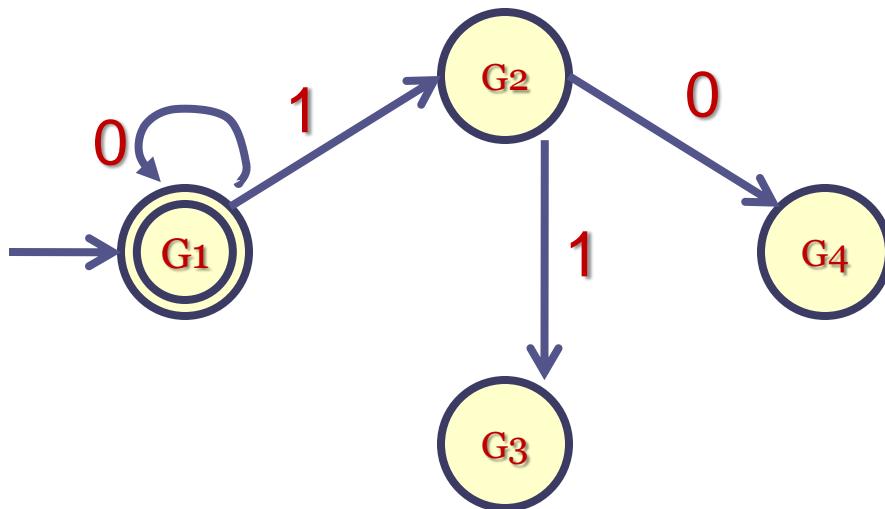


Para onde vão as transições do grupo G₂?

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

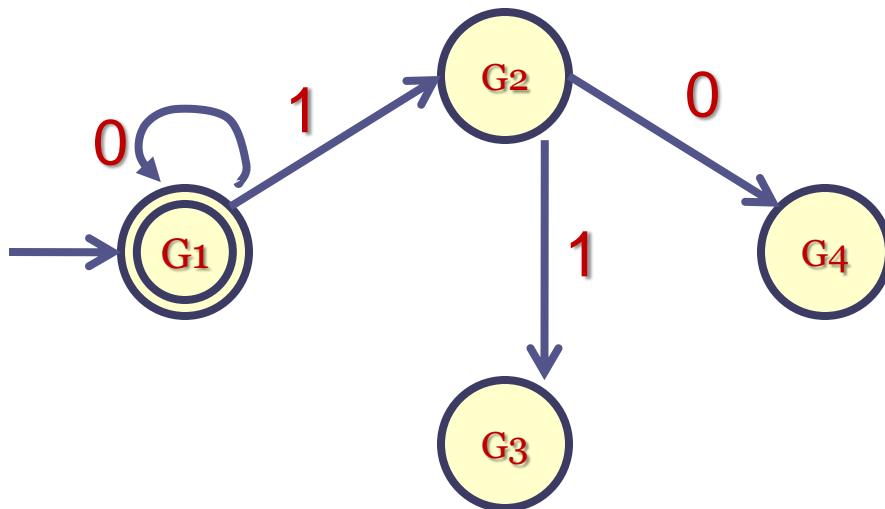
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

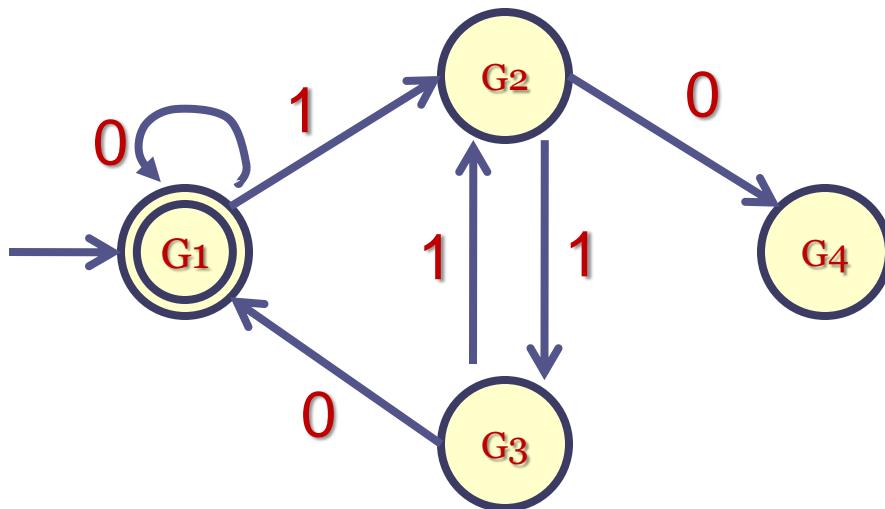


Para onde vão as transições do grupo G₃?

Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

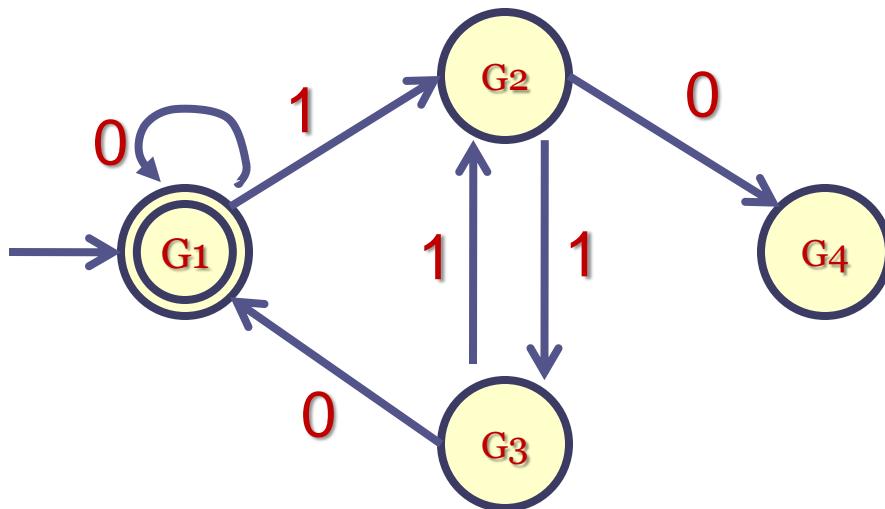
	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂

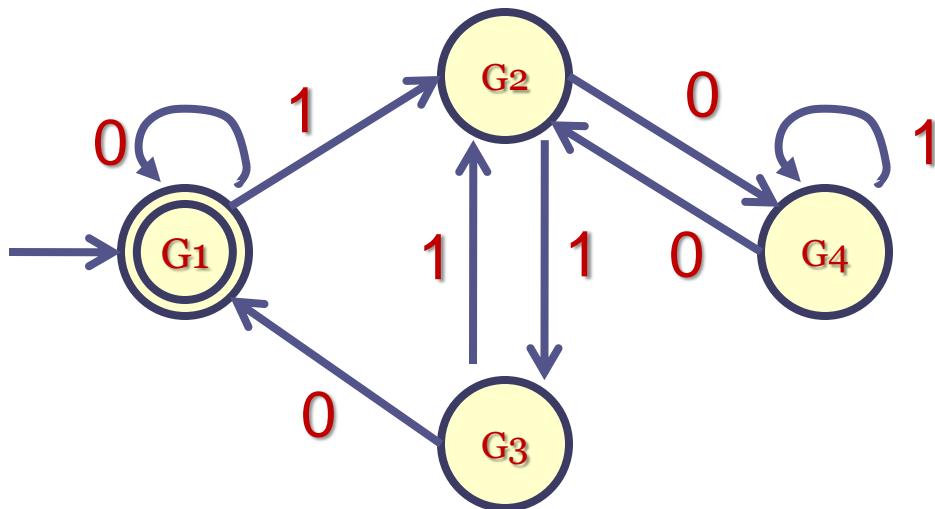


Para onde vão as transições do grupo G₄?

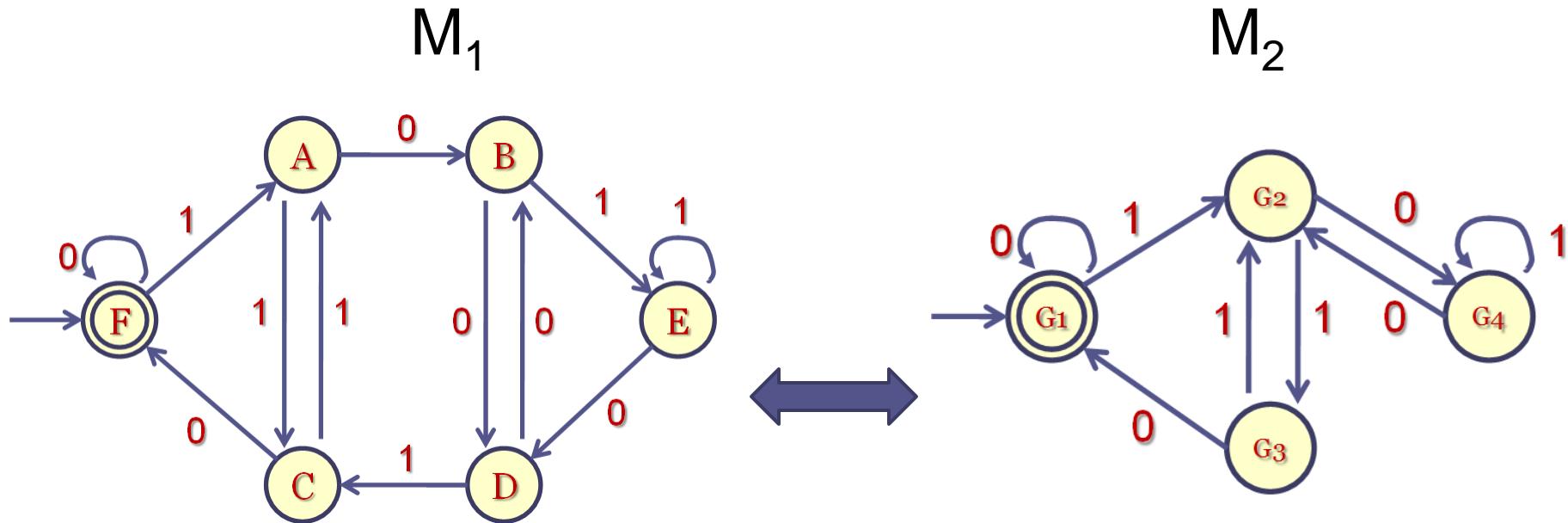
Autômato Finito Determinístico

- Dois grupos
 - G₁: {F}
 - G₂: {A,D}
 - G₃: {C}
 - G₄: {B,E}

	0	1
A	G ₄	G ₃
B	G ₂	G ₄
C	G ₁	G ₂
D	G ₄	G ₃
E	G ₂	G ₄
F	G ₁	G ₂



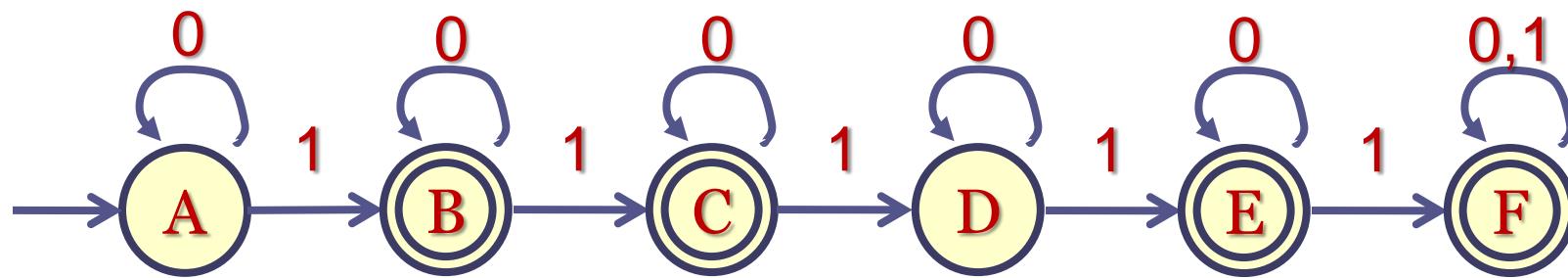
Autômato Finito Determinístico



$$L(M_1) = L(M_2)$$

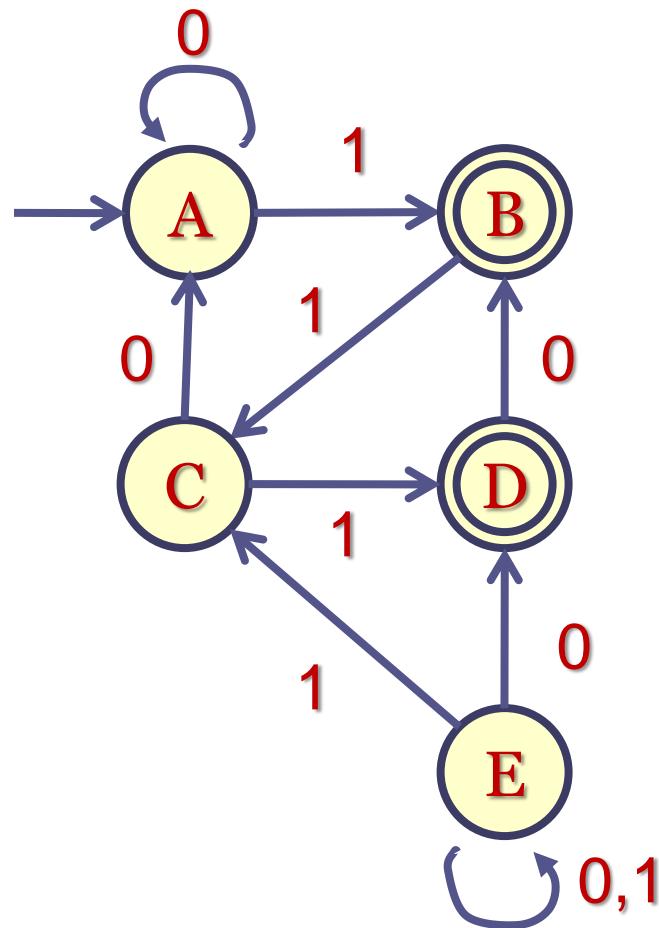
Exercício 01

- Faça a minimização do seguinte AFD:



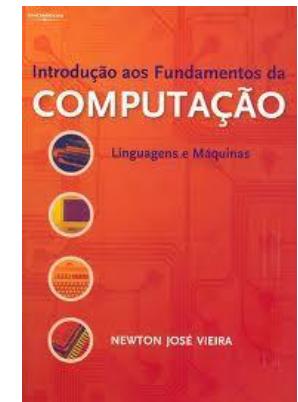
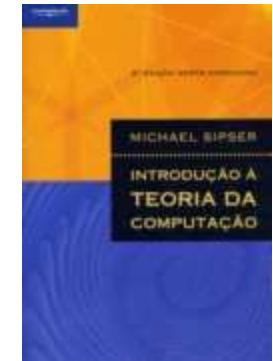
Exercício 02

- Faça a minimização do seguinte AFD:



Leitura para próxima aula

- SIPSER, Michael. Introdução à Teoria da Computação. 2a ed.: São Paulo, Thomson, 2007.
 - 1.1 Linguagens Regulares
 - As operações regulares
- VIEIRA, Newton José. Introdução aos Fundamentos da Computação: Linguagens e Máquinas. 1a ed.: Rio de Janeiro: Thomson, 2006.
 - 2.2.3 Algumas propriedades dos AFDs



Bibliografia

- SIPSER, Michael. Introdução à Teoria da Computação. 2a ed.:São Paulo, Thomson, 2007.
- VIEIRA, Newton José. Introdução aos Fundamentos da Computação: Linguagens e Máquinas. 1a ed.: Rio de Janeiro: Thomson, 2006.

