

# Universidade Federal de Alfenas

## Linguagens Formais e Autômatos

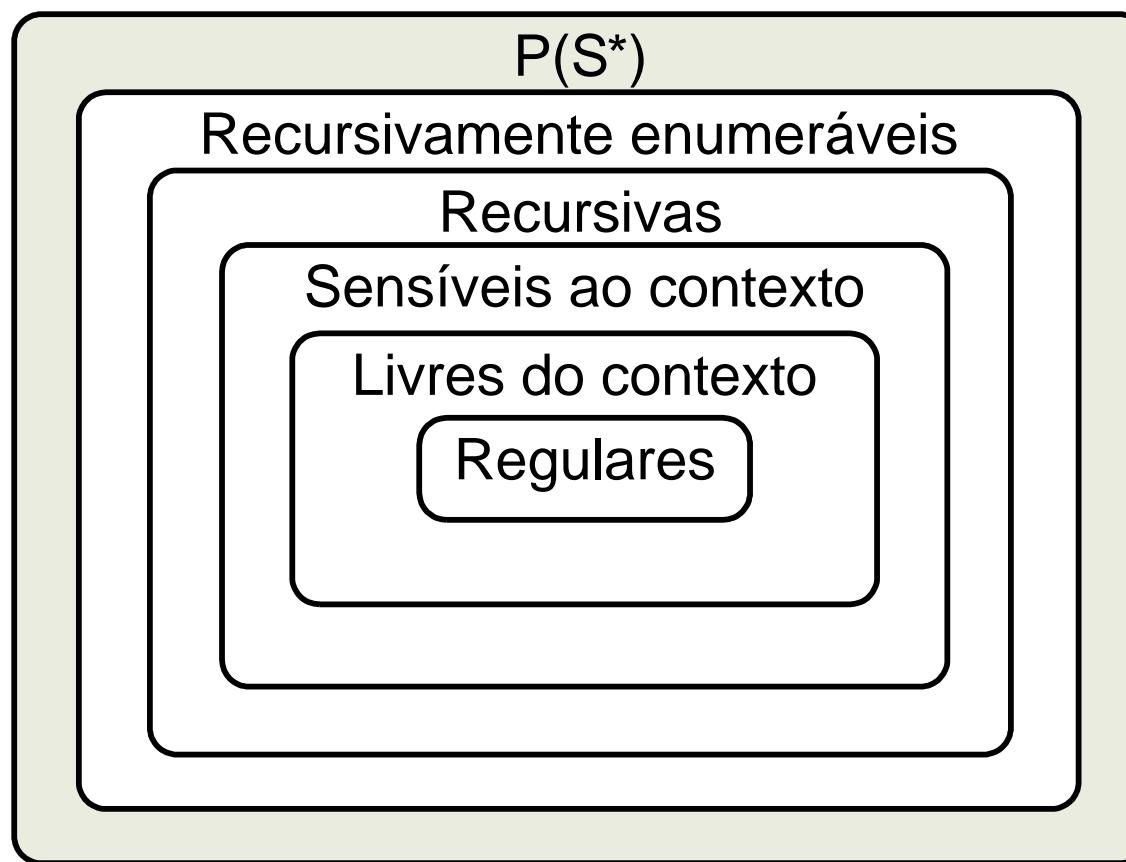
Aula 13 – Autômato com Pilha

[humberto@bcc.unifal-mg.edu.br](mailto:humberto@bcc.unifal-mg.edu.br)



# Última aula

- **Linguagens Livres do Contexto**

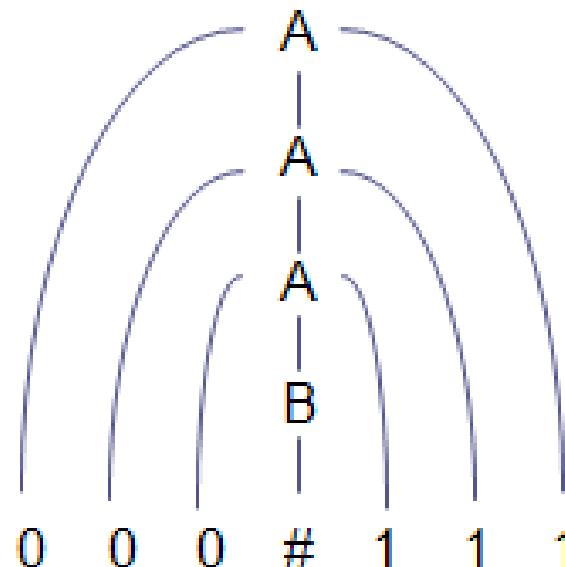


# Última aula

- Gramáticas Livres do Contexto

$$\begin{array}{l} A \rightarrow 0A1 \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow \# \end{array}$$

- Cadeia:
  - 000#111

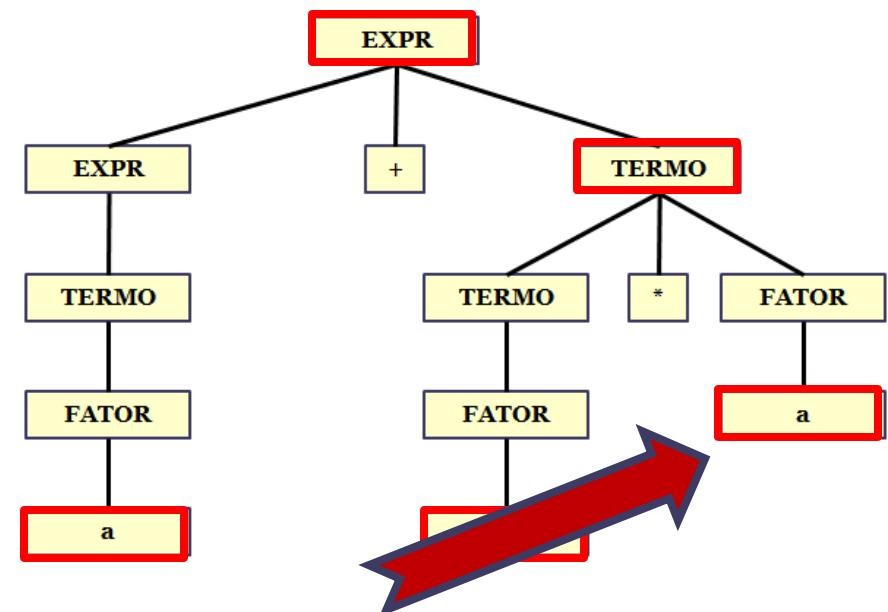
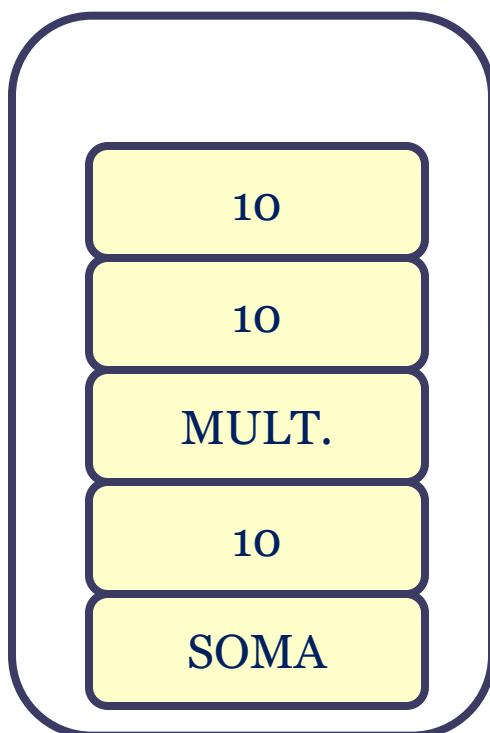


# Última aula

$$\begin{array}{lcl} \langle \text{EXPR} \rangle & \rightarrow & \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle \\ \langle \text{TERMO} \rangle & \rightarrow & \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle \\ \langle \text{FATOR} \rangle & \rightarrow & ( \langle \text{EXPR} \rangle ) \mid a \end{array}$$

- Relação com compiladores e arquitetura...

PILHA



# Autômatos com Pilha (APs)



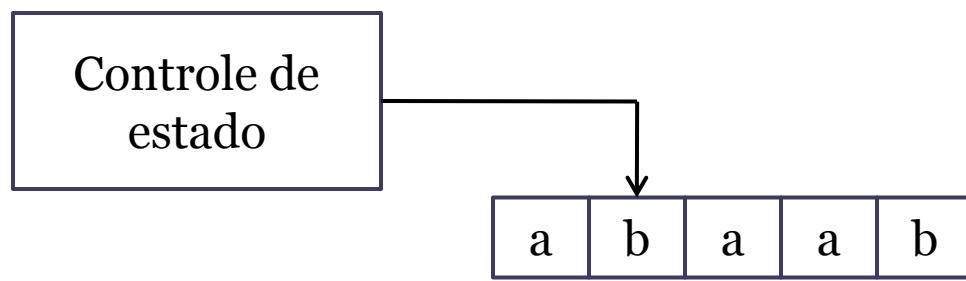
# Autômato com Pilha

- Semelhante ao autômato finito determinístico, mas com uma componente adicional:
  - A pilha!

# Autômato com Pilha

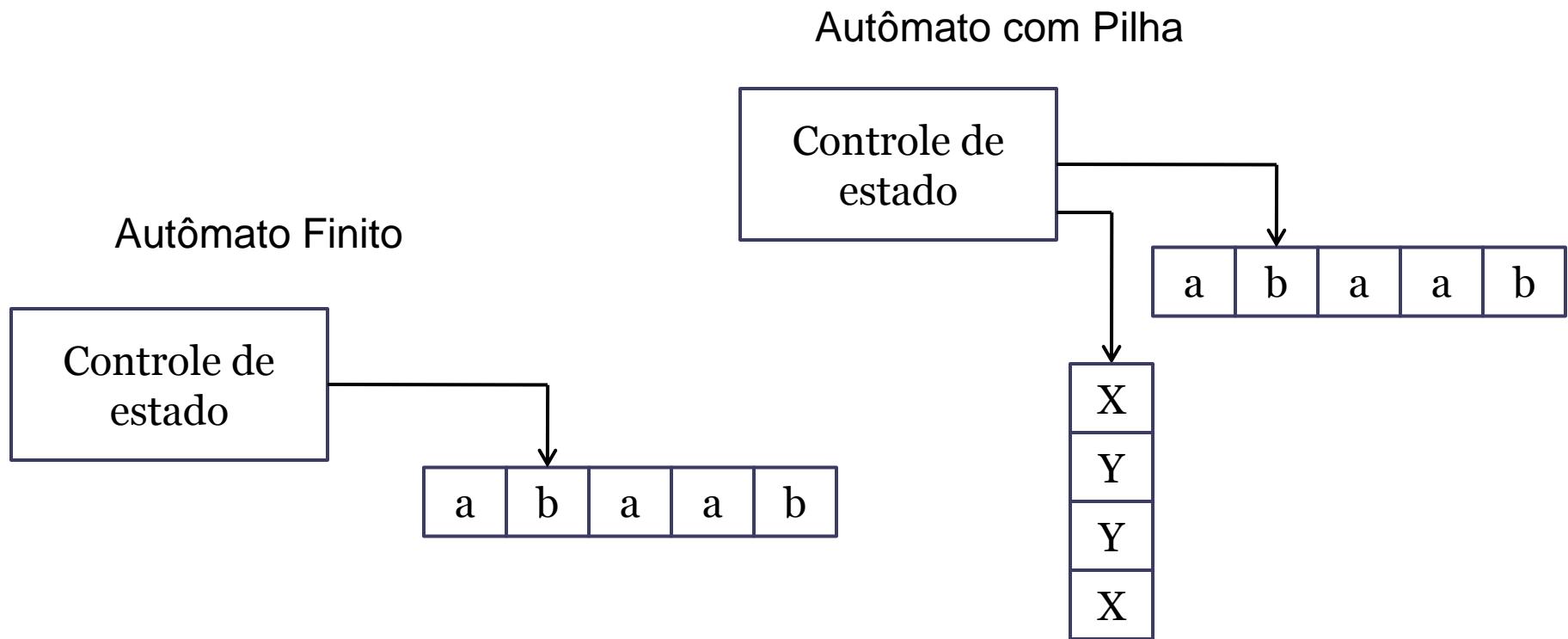
- Semelhante ao autômato finito determinístico, mas com uma componente adicional:
  - A pilha!

## Autômato Finito



# Autômato com Pilha

- Semelhante ao autômato finito determinístico, mas com uma componente adicional:
  - A pilha!

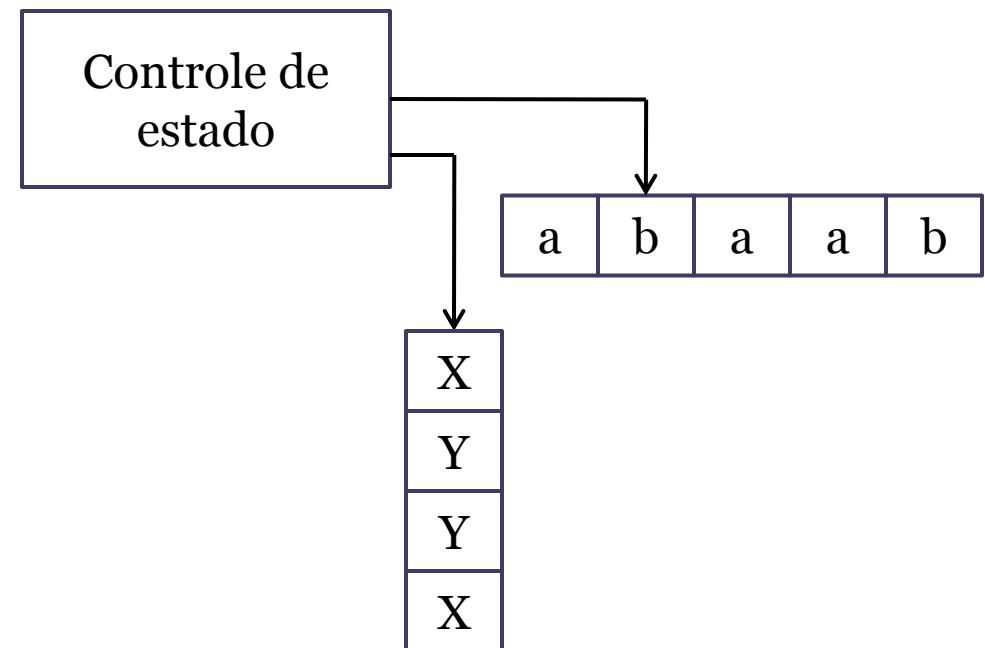


# Autômato com Pilha

- Um autômato com **pilha (AP)** pode escrever símbolos sobre a fita e lê-los de volta mais tarde;

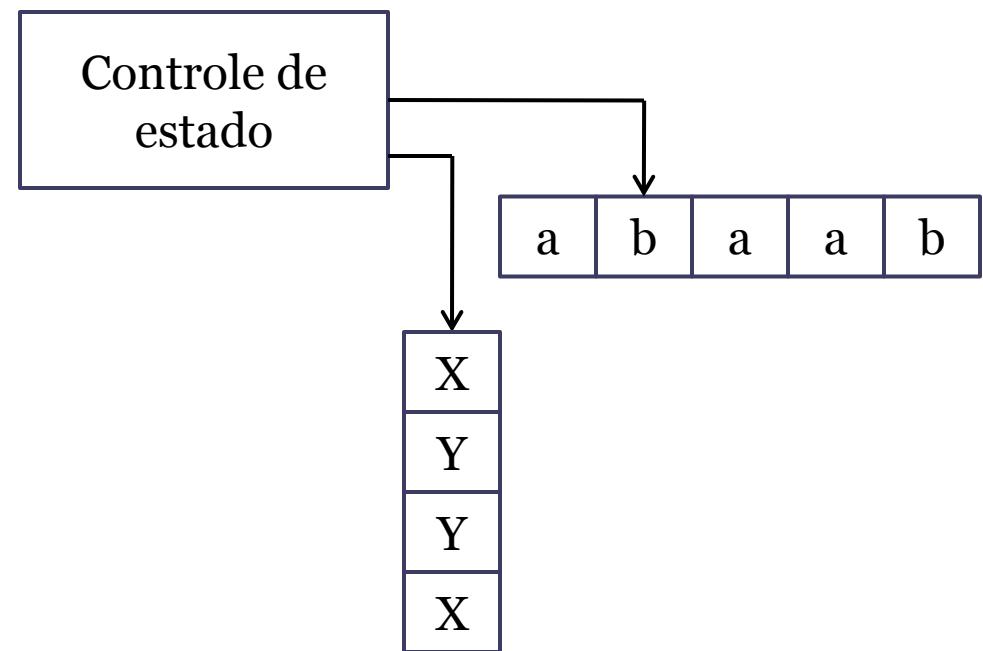
# Autômato com Pilha

- Um autômato com pilha (AP) pode escrever símbolos sobre a fita e lê-los de volta mais tarde;
- **Escrever um símbolo “empurra para baixo” todos os outros símbolos sobre a pilha;**



# Autômato com Pilha

- Em qualquer momento, o símbolo no topo da pilha pode ser lido e removido;
  - O restante dos símbolos da pilha “**volta a subir**”;
  - Política: LIFO
    - *Last in, first out!*



# Autômato com Pilha

- **Nos APs, a fila possui utilidade** porque ela pode conter uma quantidade ilimitada de informação;

# Autômato com Pilha

- Nos APs, a fila possui utilidade porque ela pode conter uma quantidade ilimitada de informação;
- Relembrando: um **AFD é incapaz de reconhecer**  $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$ 
  - *Ele não é capaz de reconhecer porque possui memória limitada em torno do seu conceito de estado.*

# Autômato com Pilha

- Nos APs, a fila possui utilidade porque ela pode conter uma quantidade ilimitada de informação;
- Relembrando: um AFD é incapaz de reconhecer  $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$ 
  - *Ele não é capaz de reconhecer porque possui memória limitada em torno do seu conceito de estado.*
- Já os **APs podem armazenar elementos em uma quantidade ilimitada** (em sua pilha);
  - Isso **amplia sua capacidade** de reconhecimento.

# Autômato com Pilha

- **Mecanismo informal** para reconhecer a linguagem  $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$  utilizando uma pilha:
  - Leia símbolos da entrada. A medida que cada 0 é lido, empilhe-o. Assim que 1's são vistos, desempilhe um 0 da pilha para cada 1 lido. Se a leitura da entrada termina exatamente quanto a pilha fica vazia de 0's, aceite a entrada. Se a pilha fica vazia enquanto 1's permanecem ou se os 1's terminam enquanto a pilha ainda contém 0's ou se quaisquer 0's aparecem na entrada seguindo 1's, rejeite a entrada.

# Poder computacional dos APs



# Autômato com Pilha

- Os autômatos com pilha **podem ser não-determinísticos**;

# Autômato com Pilha

- Os autômatos com pilha podem ser não-determinísticos;
- Os **APs não-determinísticos não são equivalentes em poder se comparados aos APs determinísticos**, diferentemente da relação que existia entre AFNs e AFDs;

# Autômato com Pilha

- Os autômatos com pilha podem ser não-determinísticos;
- Os APs não-determinísticos não são equivalentes em poder se comparados aos APs determinísticos, diferentemente da relação que existia entre AFNs e AFDs;
- Nos nossos estudos, **vamos focar nos APs não-determinísticos porque estes reconhecem as linguagens livres do contexto;**

# Formalismo Matemático



# Autômato com Pilha

Um *autômato a pilha* é uma 6-upla  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ , onde  $Q, \Sigma, \Gamma$ , e  $F$  são todos conjuntos finitos, e

1.  $Q$  é o conjunto de estados,
2.  $\Sigma$  é o alfabeto de entrada,
3.  $\Gamma$  é o alfabeto da pilha,
4.  $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$  é a função de transição,
5.  $q_0 \in Q$  é o estado inicial, e
6.  $F \subseteq Q$  é o conjunto de estados de aceitação.

# Autômato com Pilha

- Antes de desenharmos um autômato...
- Escrevermos " $a,b \rightarrow c$ " para indicar que quando a máquina está lendo o símbolo  $a$  da palavra de entrada ela pode substituir  $b$  no topo da pilha por um  $c$ .

# Autômato com Pilha

- Antes de desenharmos um autômato...
- Escrevermos " $a,b \rightarrow c$ " para indicar que quando a máquina está lendo o símbolo  $a$  da palavra de entrada ela pode substituir  $b$  no topo da pilha por um  $c$ .
- $a$ ,  $b$  ou  $c$  podem ser símbolos vazios:

# Autômato com Pilha

- Antes de desenharmos um autômato...
- Escrevermos " $a,b \rightarrow c$ " para indicar que quando a máquina está lendo o símbolo  $a$  da palavra de entrada ela pode substituir  $b$  no topo da pilha por um  $c$ .
- $a$ ,  $b$  ou  $c$  podem ser símbolos vazios:
  - **Se  $a$  é vazio:** a máquina **pode fazer a transição sem consumir um símbolo** da palavra e entrada;

# Autômato com Pilha

- Antes de desenharmos um autômato...
- Escrevermos " $a,b \rightarrow c$ " para indicar que quando a máquina está lendo o símbolo  $a$  da palavra de entrada ela pode substituir  $b$  no topo da pilha por um  $c$ .
- $a$ ,  $b$  ou  $c$  podem ser símbolos vazios:
  - Se  $a$  é vazio: a máquina pode fazer a transição sem consumir um símbolo da palavra e entrada;
  - Se  $b$  é vazio: a máquina **pode fazer a transição sem desempilhar** nenhum símbolo da pilha;

# Autômato com Pilha

- Antes de desenharmos um autômato...
- Escrevermos " $a,b \rightarrow c$ " para indicar que quando a máquina está lendo o símbolo  $a$  da palavra de entrada ela pode substituir  $b$  no topo da pilha por um  $c$ .
- $a$ ,  $b$  ou  $c$  podem ser símbolos vazios:
  - Se  $a$  é vazio: a máquina pode fazer a transição sem consumir um símbolo da palavra e entrada;
  - Se  $b$  é vazio: a máquina pode fazer a transição sem desempilhar nenhum símbolo da pilha;
  - **Se  $c$  é vazio:** a máquina **pode fazer a transição sem empilhar** nenhum símbolo na pilha.

# Autômato com Pilha

AP que reconhece a linguagem

$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ . Suponha que  $M_1$  seja  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$  onde

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

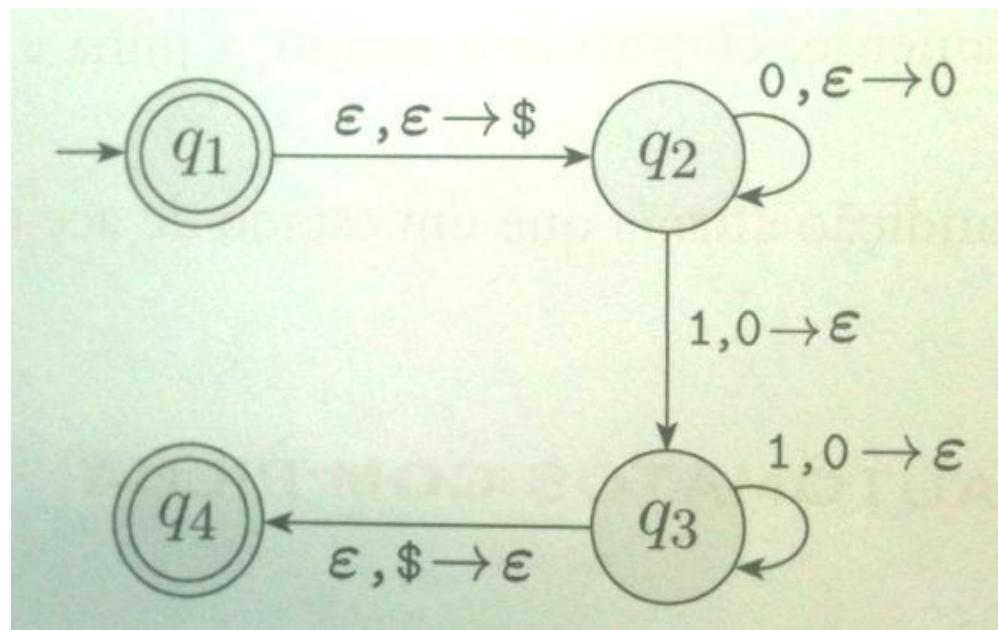
$$\Gamma = \{0, \$\},$$

$$F = \{q_1, q_4\}, e$$

$\delta$  seja dada pela seguinte tabela, na qual uma entrada em branco significa  $\emptyset$ .

# Autômato com Pilha

- $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

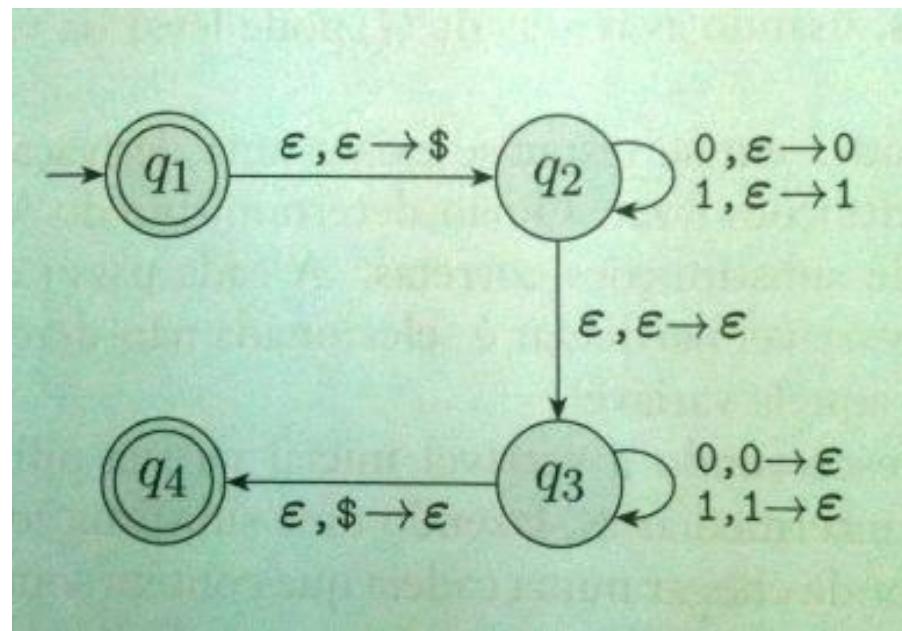


# Autômato com Pilha

- Exercício:
  - crie um AP que reconheça a linguagem
    - $\{ ww^R \mid w \in \{ 0, 1 \}^* \}$

# Autômato com Pilha

- $\{ w w^R \mid w \in \{ 0, 1 \}^* \}$



# Próxima aula

- Teoria da computabilidade

# Bibliografia

- SIPSER, Michael. Introdução à Teoria da Computação. 2a ed.:São Paulo, Thomson, 2007.
- VIEIRA, Newton José. Introdução aos Fundamentos da Computação: Linguagens e Máquinas. 1a ed.: Rio de Janeiro: Thomson, 2006.

