

8. MODELAGEM DE FONTES CHAVEADAS: MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

Middlebrook e Cuk (1976, 1977) desenvolveram uma técnica para obter um modelo de variáveis médias no espaço de estado, resultando em um modelo linear para o estágio de potência, incluindo o filtro de saída, modelo este válido para pequenas perturbações, fazendo-se a linearização em torno do ponto de operação.

Por variáveis médias entende-se o valor médio de cada variável considerada (normalmente corrente no indutor e tensão no capacitor), valor médio calculado a cada período de comutação. Ou seja, o modelo não é capaz de representar o *ripple* da corrente ou da tensão, mas representa a evolução do valor médio destas variáveis. As realimentações necessárias à operação em malha fechada não devem conter sinais de alta frequência, ou seja, devem ser devidamente filtradas, de maneira que o modelo reproduza de maneira fiel o comportamento do sistema.

Caso o *ripple* de alta frequência não seja suficientemente atenuado, sua presença no circuito pode levar a funcionamentos não previstos pelo modelo e que, portanto, não podem ser explicados por este.

A figura 8.1 mostra um diagrama de blocos do sistema (domínio do tempo), enquanto em 8.2 tem-se uma representação em termos de funções de transferência (domínio da frequência).

Cada bloco do sistema mostrado na figura 8.2 pode ser representado por uma função de transferência. Os pequenos sinais causadores, ou resultados, da perturbação são indicados por uma letra no formato v , d , i .

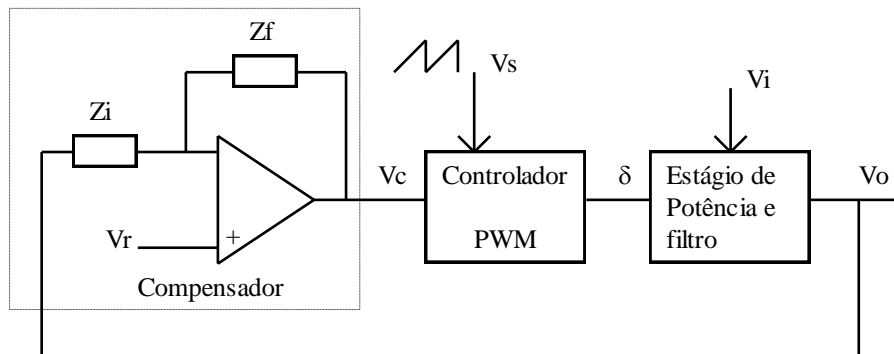
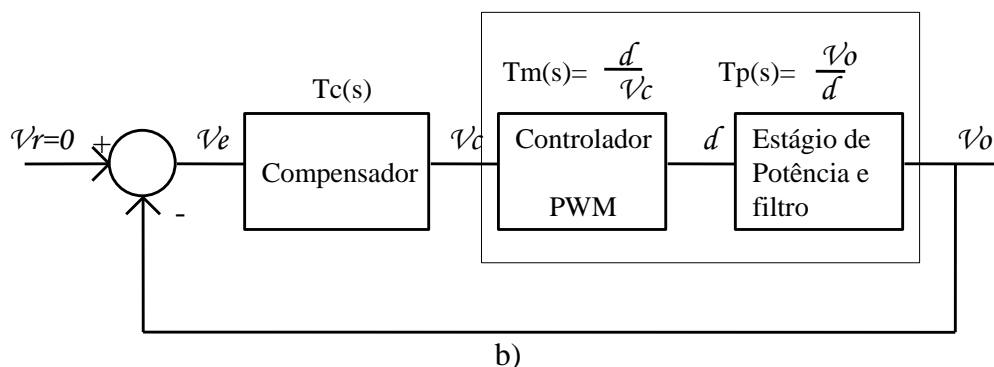


Figura 8.1 Diagrama de blocos do conversor.

$$T1(s) = \frac{V_o}{V_c}$$



b)

Figura 8.2 Funções de transferências do conversor.

8.1 Linearização do estágio de potência usando valores médios das variáveis de estado para obter $v_o(s)/d(s)$

O objetivo deste estudo é obter uma função de transferência para pequenos sinais entre a tensão de saída (v_o) e o ciclo de trabalho (δ), em torno de seus pontos de operação, V_o e D , respectivamente.

Quando for indicada a variável em tipo maiúsculo (V_o , por exemplo), refere-se ao valor médio da variável. Quando for indicado v_o , indica-se apenas o componente alternado, relativo à perturbação, e quando se expressar a variável em tipo minúsculo (v_o), refere-se à soma de V_o com v_o .

A análise que se segue refere-se à operação no modo contínuo.

a) Passo 1: Descrição no espaço de estado

Operando no modo contínuo, existem apenas duas configurações topológicas para o circuito, uma quando a chave controlada está conduzindo e outra quando está bloqueada e o diodo está conduzindo.

Durante cada subintervalo, o circuito (linear) é descrito através de seu vetor de estado, \mathbf{x} , o qual é composto pelas correntes dos indutores e pelas tensões sobre os capacitores. É possível incluir no modelo as resistências de indutores e capacitores, assim como algumas não idealidades dos interruptores. Normalmente, por sua importância no comportamento dinâmico, o elemento parasita incluído é a resistência série equivalente do capacitor.

Seja V_i a tensão de entrada do conversor. A_1 e A_2 são matrizes de estado, quadradas, com a mesma dimensão do número de variáveis de estado, e B_1 e B_2 são vetores.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \cdot V_i \quad \text{durante } \delta \cdot \tau \quad (8.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \cdot V_i \quad \text{durante } (1 - \delta) \cdot \tau \quad (8.2)$$

Para um conversor tipo *buck*, *boost* ou *buck-boost* tem-se apenas duas variáveis de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Geralmente a variável de saída (tipicamente a tensão aplicada à carga) pode ser escrita em termos apenas das variáveis de estado:

$$v_o = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x} \quad \text{durante } \delta \cdot \tau \quad (8.3)$$

$$v_o = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x} \quad \text{durante } (1 - \delta) \cdot \tau \quad (8.4)$$

onde C_1 e C_2 são vetores transpostos.

b) Passo 2: Mediar a descrição das variáveis de estado usando o ciclo de trabalho (δ)

Para produzir uma descrição média das variáveis em um período de chaveamento, as equações correspondentes às duas variações topológicas são ponderadas em relação ao tempo, resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_1 \cdot \delta + \mathbf{A}_2 \cdot (1 - \delta)] \cdot \mathbf{x} + [\mathbf{B}_1 \cdot \delta + \mathbf{B}_2 \cdot (1 - \delta)] \cdot \mathbf{V}_i \quad (8.5)$$

$$v_o = [\mathbf{C}_1 \cdot \delta + \mathbf{C}_2 \cdot (1 - \delta)] \cdot \mathbf{x} \quad (8.6)$$

Passo 3: Introdução de pequena perturbação e separação de componentes CC e CA
As variáveis serão decompostas em:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \chi \\ v_o &= V_o + v_o \\ \delta &= D + d \end{aligned} \quad (8.7)$$

Em geral, $v_i = V_i + v_i$. Entretanto, como o objetivo aqui é obter uma função entre v_o e δ , consideraremos a tensão de entrada sem variação, de modo que $v_i = V_i$.

Usando as equações precedentes e reconhecendo que $\dot{\mathbf{X}} = 0$, tem-se:

$$\dot{\chi} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{A} \cdot \chi + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{V}_i] \cdot d \quad (8.8)$$

Há ainda termos contendo produtos de χ e d , os quais serão desprezados, visto serem o produto de duas variações as quais, por definição, são pequenas.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot D + \mathbf{A}_2 \cdot (1 - D) \quad (8.9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cdot D + \mathbf{B}_2 \cdot (1 - D) \quad (8.10)$$

O comportamento em regime permanente pode ser obtido da equação (8.8), fazendo-se nulos os termos variáveis no tempo e as perturbações, resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_i &= 0 \\ \mathbf{X} &= -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_i \end{aligned} \quad (8.11)$$

A expressão apenas para a componente alternada é:

$$\dot{\chi} = \mathbf{A} \cdot \chi + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{V}_i] \cdot d \quad (8.12)$$

Analogamente,

$$V_o + v_o = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C} \cdot \chi + [(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{X}] \cdot d \quad (8.13)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cdot D + \mathbf{C}_2 \cdot (1 - D) \quad (8.14)$$

Das equações precedentes, em regime permanente tem-se:

$$V_o = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \quad (8.15)$$

$$v_o = \mathbf{C} \cdot \chi + [(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{X}] \cdot d \quad (8.16)$$

De 8.15 e 8.11 obtém-se a relação entrada/saída, em regime permanente, é dada por:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (8.17)$$

Passo 4: Transformação da equação CA para o domínio da frequência para obter a função de transferência

Aplicando a transformada de Laplace à equação (8.12) tem-se:

$$s \cdot \chi(s) = \mathbf{A} \cdot \chi(s) + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot V_i] \cdot d(s) \quad (8.18)$$

ou,

$$\chi(s) = [s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot V_i] \cdot d(s) \quad (8.19)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade.

A função de transferência buscada é expressa por:

$$T_p(s) = \frac{v_o(s)}{d(s)} = \mathbf{C} \cdot [s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot V_i] + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{X} \quad (8.20)$$

Observe que, além das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , é preciso conhecer o vetor \mathbf{X} , o qual corresponde aos valores médios de regime permanente para as variáveis de estado. Este vetor deve ser escrito como função dos valores CC das entradas (por exemplo, a tensão V_i) e da largura de pulso, D .

8.2 Função de transferência $\delta(S)/v_c(S)$ de um modulador MLP a partir de onda dente de serra

A tensão de controle, $v_c(t)$, que é a tensão de erro modificada pelo compensador, é comparada com uma onda periódica, $v_s(t)$, a qual determina a frequência do sinal MLP. Esta onda tem um valor máximo V_s , conforme ilustra a figura 8.3.

A tensão de controle, que varia entre 0 e V_s , é formada por um nível CC e uma componente alternada (por hipótese, senoidal):

$$v_c(t) = V_c + u_e(t) \quad (8.21)$$

$$u_e(t) = a \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (8.22)$$

A figura 8.3 mostra as ondas estudadas:

O sinal $\delta(t)$ pode ser expresso como:

$$\delta(t) = 1 \quad \text{se } v_c(t) \geq v_s(t) \quad (8.23)$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{se } v_c(t) < v_s(t)$$

$$\delta(t) = \frac{V_c}{V_s} + \frac{a \cdot \sin(\omega t + \phi)}{V_s} + \text{componentes de frequência maior} \quad (8.24)$$

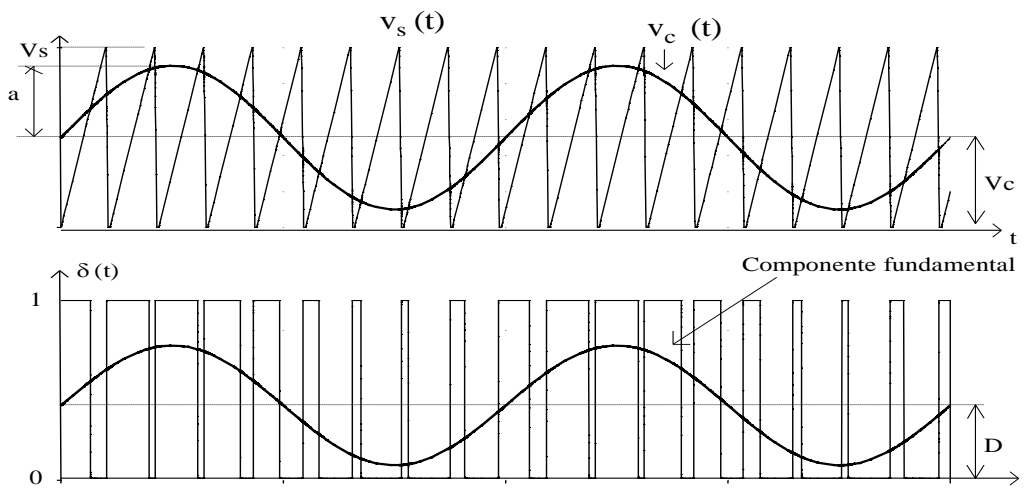


Figura 8.3 Tensão de controle e sinal MLP.

Os termos em frequência elevada presentes em $\delta(t)$ não se refletem significativamente na tensão saída em função do filtro passa baixas na saída do conversor, podendo ser ignorados. Assim:

$$\delta(t) = D + d(t) \quad (8.25)$$

$$D = \frac{V_c}{V_s} \quad (8.26)$$

$$d(t) = \frac{a \cdot \sin(\omega t + \phi)}{V_s} \quad (8.27)$$

A relação buscada é bastante simples, e não possui qualquer elemento dinâmico, ou seja, o modulador PWM pode ser substituído por um ganho:

$$T_m(s) = \frac{d(s)}{v_c(s)} = \frac{1}{V_s} \quad (8.28)$$

8.3 Característica dinâmica do conversor buck no MCC

Para obter a função de transferência $v_o(s)/d(s)$ em um conversor abaixador de tensão, operando no modo de condução contínua, as duas variantes da topologia estão indicadas na figura 8.4.

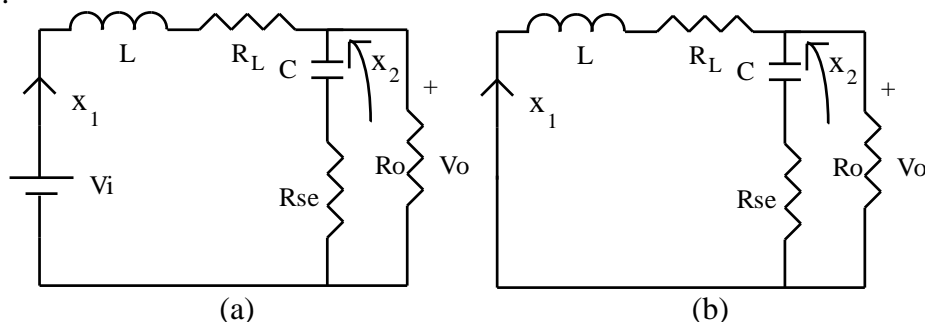


Figura 8.4 Alternativas topológicas (modo contínuo) de conversor abaixador de tensão: condução do transistor (a) e condução do diodo (b).

A resistência série do capacitor é indicada como R_{se} , enquanto a resistência do indutor é R_L . x_1 é a corrente pelo indutor e x_2 é a tensão sobre o capacitor.

Considerando a malha externa no circuito mostrado na figura 8.4.a tem-se:

$$-V_i + L \cdot \dot{x}_1 + R_L \cdot x_1 + R_o \cdot (x_1 - C \cdot \dot{x}_2) = 0 \quad (8.29)$$

Escrevendo a equação de tensões para a malha de saída:

$$-x_2 - C \cdot R_{se} \cdot \dot{x}_2 + R_o \cdot (x_1 - C \cdot \dot{x}_2) = 0 \quad (8.30)$$

Numa forma matricial, as equações anteriores, que são válidas durante o intervalo normalizado δ , podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_o \cdot (R_{se} + R_L) + R_{se} \cdot R_L}{L \cdot (R_{se} + R_o)} & -\frac{R_o}{L \cdot (R_o + R_{se})} \\ \frac{R_o}{C \cdot (R_o + R_{se})} & -\frac{1}{C \cdot (R_o + R_{se})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_i \quad (8.31)$$

As equações de estado para o circuito na situação em que o transistor está desligado, por inspeção, podem ser obtidas facilmente, apenas observando que a tensão V_i vale zero. Assim $A_2 = A_1$ e $B_2 = 0$.

A tensão de saída, em ambos os casos é dada por:

$$v_o = R_o \cdot (x_1 - C \cdot \dot{x}_2) = \frac{R_o \cdot R_{se} \cdot x_1 + R_o \cdot x_2}{R_o + R_{se}} \quad (8.32)$$

Então:

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_o \cdot R_{se}}{R_o + R_{se}} & \frac{R_o}{R_o + R_{se}} \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

Assim, a matriz e os vetores mediados são:

$$\begin{aligned} A &= A_1 \\ B &= B_1 \cdot D \\ C &= C_1 \end{aligned}$$

As seguintes simplificações podem ser feitas: usualmente, $R_o \gg R_{se}$, e tanto R_L quanto R_{se} são pequenos, o que simplifica as matrizes e vetores para:

$$A = A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_{se} + R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C \cdot R_o} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

$$C = C_1 = C_2 \approx \begin{bmatrix} R_{se} & 1 \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{D} \quad (8.36)$$

A inversa da matriz \mathbf{A} é:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{L \cdot C \cdot R_o}{R_o + R_{se} + R_L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C \cdot R_o} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_{se} + R_L}{L} \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

A característica estática do conversor é obtida aplicando 8.17:

$$\frac{V_o}{V_i} = D \cdot \frac{R_o + R_{se}}{R_o + R_{se} + R_L} \cong D \quad (8.38)$$

Para o conversor abaixador de tensão, os elementos do vetor \mathbf{X} são dados por:

$$I_L = I_o = \frac{V_o}{R_o} = \frac{D \cdot V_i}{R_o} \quad \text{e} \quad (8.39)$$

$$V_c = V_o = V_i \cdot D$$

A função de transferência $v_o(s)/d(s)$, aplicando a equação 8.20, é:

$$T_p(s) = \frac{v_o(s)}{d(s)} \cong V_i \cdot \frac{1 + s \cdot R_{se} \cdot C}{L \cdot C \cdot \left[s^2 + s \cdot \left(\frac{1}{R_o \cdot C} + \frac{R_{se} + R_L}{L} \right) + \frac{1}{L \cdot C} \right]} \quad (8.40)$$

Os diagramas de Bode são mostrados na figura 8.5. A figura 8.6 mostra a resposta do conversor, operando no MCC, a uma mudança em V_i ou em δ (são equivalentes do ponto de vista dinâmico). Note que a função de transferência é idêntica caso se obtenha a relação $v_o(s)/v_i(s)$, bastando trocar V_i por D no numerador. A concordância dos resultados é absoluta.

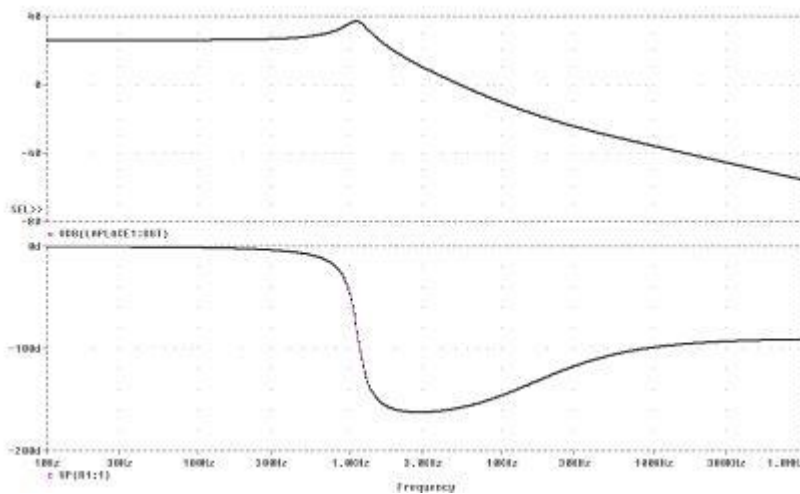


Figura 8.5 Diagramas de Bode do conversor abaixador de tensão.

Parâmetros: $V_i=20$ V, $L=200$ uH, $C=100$ uF, $R_o=10$ ohms, $R_{se}=0,1$ ohm, $R_L=0,1$ ohm.



Figura 8.6 Resposta a uma variação na tensão de entrada (equivalente a uma mudança de largura de pulso) em conversor abaixador de tensão operando no MCC. Em cima: resposta do modelo. Embaixo: resposta no circuito.

8.4 Características dinâmicas dos conversores boost e buck-boost no MCC

Procedimento análogo ao do exemplo anterior pode ser feito para obter as características dinâmicas de qualquer outra topologia.

Para o conversor *boost*, a função de transferência da tensão de saída para a largura de pulso (para o circuito sem perdas) é dada por:

$$\frac{V_o(s)}{d(s)} = \frac{V_i}{(1-D)^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{(1-D)^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_o}\right)}{1 + \frac{s \cdot L}{R_o} \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2 + s^2 \cdot L \cdot C \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2} \quad (8.41)$$

A figura 8.7 mostra o comportamento em frequência desta função de transferência.

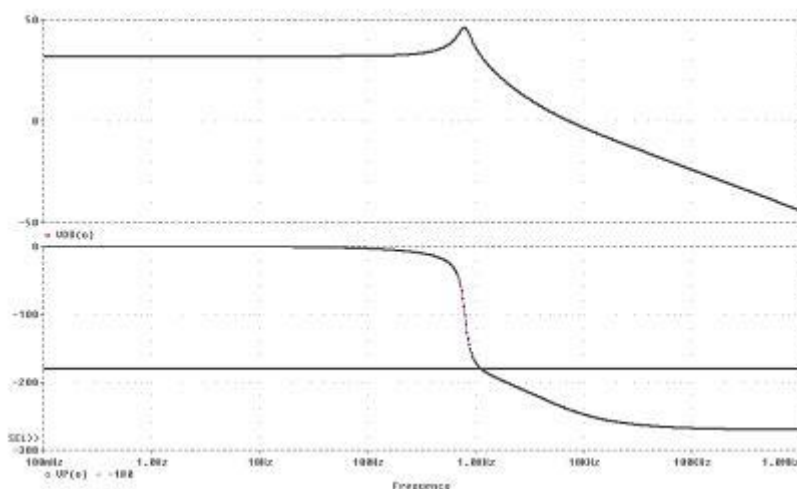


Figura 8.7 Diagramas de Bode do conversor elevador de tensão. Parâmetros: $V_i=10$ V, $L=100$ μ H, $C=100$ μ F, $R_o=10$ ohms, $D=0,8$.

A figura 8.8 mostra a resposta no tempo de um conversor *boost*, em malha aberta, com um aumento de largura de pulso de 50% para 55%. Na mesma figura é mostrada a resposta do modelo linear. Observa-se que o resultado do modelo apresenta uma oscilação em frequência ligeiramente maior e que é menos amortecido. A razão é a não inclusão de elementos de perdas (queda no transistor e no diodo) que estão presentes na simulação do circuito, resultando em um comportamento ligeiramente distinto, tanto na oscilação quanto no valor de regime permanente. Não obstante, pode-se dizer que o modelo representa adequadamente o comportamento do circuito. O comportamento de fase não mínima também é evidente em ambos os resultados, com a variação da saída inicialmente indo no sentido oposto daquela desejado, ou seja, diminuindo ao invés de aumentar.

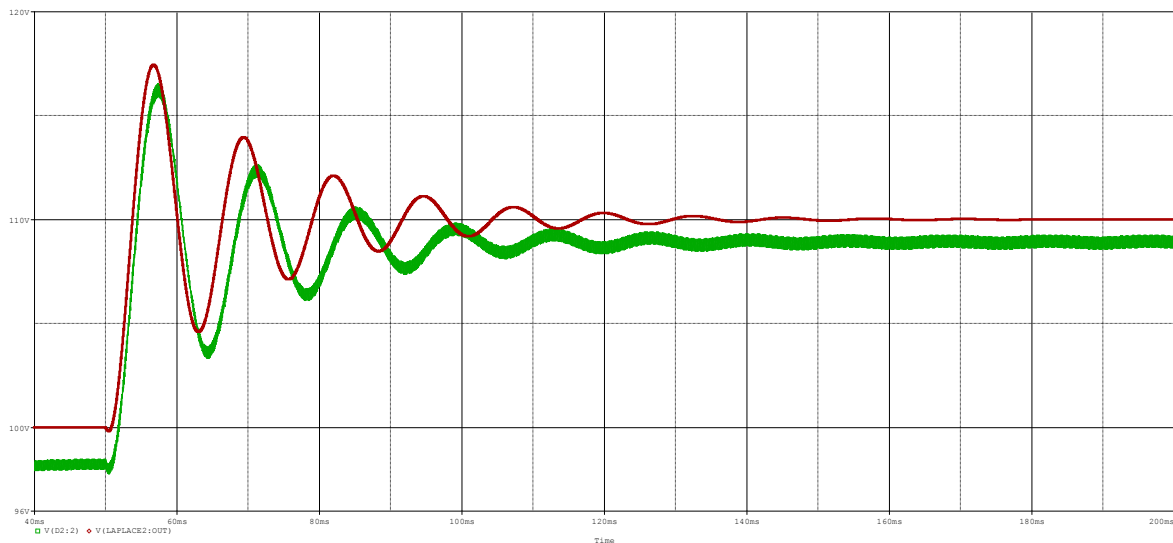


Figura 8.8 Resposta de conversor elevador de tensão e respectivo modelo.
Parâmetros: $V_i=50$ V, $L=10$ mH, $C=100$ uF, $R_o=100$ ohms. Frequência de chaveamento de 10 kHz.

Para o conversor *buck-boost*, a função de transferência da tensão de saída para a largura de pulso (para o circuito sem perdas) é dada por:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = \frac{V_i}{(1-D)^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{D}{(1-D)^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_o}\right)}{1 + \frac{s \cdot L}{R_o} \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2 + s^2 \cdot L \cdot C \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2} \quad (8.42)$$

A figura 8.9 mostra os diagramas de Bode. Observe que se tratam de comportamentos de segunda ordem, mas que apresentam um zero no semiplano direito (RHP) (raiz do numerador com parte real positiva).

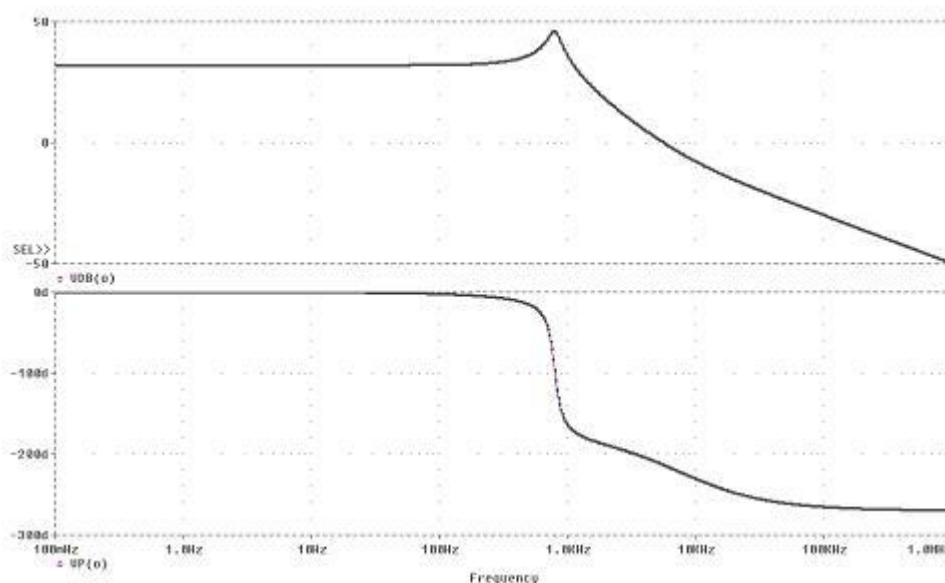


Figura 8.9 Diagramas de Bode do conversor abaixador-elevador de tensão.
Parâmetros: $V_i=10$ V, $L=100$ μ H, $C=100$ μ F, $R_o=10$ ohms, $D=0,8$.

8.5 Referências Bibliográficas

- R. D.Middlebrook and S. Cuk: "A General Unified Approach to Modeling Switching Converter Power Stage". 1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference Record, pp. 18-34.
- S.Cuk and R. D.Middlebrook: "A General Unified Approach to Modeling Switching DC-to-DC Converter in Discontinuous Conduction Mode". 1977 IEEE Power Electronics Specialists Conference Record, pp 36-57
- S. Kislovski, R. Redl and N. O. Sokal: "Dynamic Analysis of Switching-Mode DC/DC Converters", Van Nostrand Reinhold Ed., New York, 1991.
- G. Chryssis: "High-frequency Switching Power Supplies", McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- P. Tenti: "Appunti dalle lezioni di Elettronica di Potenza – Parte I", DIE, Università di Padova, Italia, 1994/95.

8.6 Exercícios

1. Demonstre que a função de transferência $v_o(s)/d(s)$ para o conversor *boost*, no MCC é:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = \frac{V_i}{(1-D)^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{(1-D)^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_o}\right)}{1 + \frac{s \cdot L}{R_o} \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2 + s^2 \cdot L \cdot C \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2}.$$

Não inclua as resistências do capacitor ou do indutor no modelo.

- Trace os diagramas de Bode utilizando os seguintes valores: $V_i=10$ V, $D=0,5$, $L=100$ uH, $C=100$ uF, $R_o=2$ Ω , $V_s=5$ V, $f_{chav}=20$ kHz. Comente os resultados.

2. Demonstre que a função de transferência $v_o(s)/d(s)$ para o conversor *buck-boost*, no

$$\text{MCC é: } \frac{v_o(s)}{d(s)} = \frac{V_i}{(1-D)^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{D}{(1-D)^2} \cdot \frac{s \cdot L}{R_o}\right)}{1 + \frac{s \cdot L}{R_o} \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2 + s^2 \cdot L \cdot C \cdot \left(\frac{1}{1-D}\right)^2}.$$

Não inclua as resistências do capacitor ou do indutor no modelo.

- Trace os diagramas de Bode utilizando os seguintes valores: $V_i=10$ V, $D=0,5$, $L=100$ uH, $C=100$ uF, $R_o=2$ Ω , $V_s=5$ V, $f_{chav}=20$ kHz. Comente os resultados.

3. Obtenha a função de transferência $v_o(s)/d(s)$ para o conversor *buck*, no MCC. Inclua apenas a resistência do capacitor no modelo.

- Trace os diagramas de Bode utilizando os seguintes valores: $V_i=20$ V, $D=0,5$, $L=200$ uH, $C=100$ uF, $R_o=10$ Ω , $V_s=10$ V, $f_{chav}=2$ 0kHz, $R_{se}=0,1$ Ω . Comente os resultados.
- Simule no tempo o conversor e compare os resultados do modelo com os do circuito quando ocorrer uma alteração na tensão de entrada de 20 para 22 V. Note que a função de transferência é idêntica, caso se obtenha a relação $v_o(s)/v_i(s)$, bastando trocar V_i por D no numerador.