# Manual do pacote computacional "Mo2D" para modelagem e simulação de mecanismos planos

Renato Maia Matarazzo Orsino

3 de julho de 2014

## 1 Metodologia geral para a modelagem de mecanismos planos

Seja $\mathcal{S}$ um mecanismo plano, ou seja, um sistema mecânico formado por corpos rígidos em que todos realizam movimentos planos e todos os planos de movimento são paralelos entre si. Considere que este mecanismo seja formado por $\nu_{\mathtt{B}} + 1$ corpos rígidos que serão denotados por $\bar{\mathtt{B}}_n$ $(n = 0, \ldots, \nu_{\mathtt{B}})$. Seja ainda $\bar{\mathtt{N}}$ um referencial inercial. Admite-se que o movimento com relação ao referencial $\bar{\mathtt{N}}$ de um dos corpos do mecanismo, denominado base e denotado por $\bar{\mathtt{B}}_0$, é previamente conhecido. Denote-se por $\mathtt{N}$ um sistema de coordenadas solidário ao referencial inercial $\bar{\mathtt{N}}$, com origem em $\mathtt{n}_0$ e base ortonormal $(\hat{\boldsymbol{n}}_1, \hat{\boldsymbol{n}}_2, \hat{\boldsymbol{n}}_3)$ com $\hat{\boldsymbol{n}}_3$ sendo ortogonal ao planos de movimento dos corpos do mecanismo. Sejam ainda $\mathtt{B}_n$ sistemas de coordenadas solidários aos respectivos corpos rígidos $\bar{\mathtt{B}}_n$.

Apesar de, em geral, os movimentos dos corpos do mecanismo ocorrerem em planos paralelos, para efeito de modelagem, pode-se descrever o movimento das projeções destes corpos rígidos sobre um plano passante por $\mathtt{n}_0$ e ortogonal a $\hat{\boldsymbol{n}}_3$. Dessa forma, pode-se considerar que $\bar{\mathtt{B}}_n$ seja efetivamente a projeção do respectivo corpo sobre este plano. Assim, as descrições das posições de dois pontos distintos de $\bar{\mathtt{B}}_n$ são suficientes para a completa descrição do movimento deste corpo. Denotem-se estes dois pontos por $\mathtt{b}_{n,1}$ e $\mathtt{b}_{n,2}$ e definam-se as coordenadas generalizadas $q_{\mathtt{N},n,1}$, $q_{\mathtt{N},n,2}$, $q_{\mathtt{N},n,3}$ e $q_{\mathtt{N},n,4}$ de tal forma que:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\big(\mathtt{n}_0, \mathtt{b}_{n,1}\big) = q_{\mathtt{N},n,1}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + q_{\mathtt{N},n,2}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \\ \mathbf{r}\big(\mathtt{n}_0, \mathtt{b}_{n,2}\big) = q_{\mathtt{N},n,3}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + q_{\mathtt{N},n,4}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \end{cases} \tag{1}$$

Pelo fato de $\bar{\mathtt{B}}_n$ ser um corpo rígido, existe uma constante $a_{n,1,2}$ tal que:

$$\big(q_{\mathtt{N},n,1} - q_{\mathtt{N},n,3}\big)^2 + \big(q_{\mathtt{N},n,2} - q_{\mathtt{N},n,4}\big)^2 - a_{n,1,2}^2 = 0 \tag{2}$$

Além disso, considere a definição das seguintes velocidades generalizadas para cada corpo rígido $\bar{\mathtt{B}}_n$:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,1}} = p_{\mathrm{N},n,1}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + p_{\mathrm{N},n,2}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \\ {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,2}} = p_{\mathrm{N},n,3}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + p_{\mathrm{N},n,4}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \\ {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}_n} = p_{\mathrm{B},n,3}\,\hat{\boldsymbol{n}}_3 \end{cases} \tag{3}$$

Fica evidente que $p_{\mathrm{N},n,i} = \dot{q}_{\mathrm{N},n,i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Além disso, pelo fato de $\bar{\mathtt{B}}_n$ ser um corpo rígido, $\left({}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,2}} - {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,1}}\right) = {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}_n} \times \mathbf{r}\left(\mathtt{b}_{n,1}, \mathtt{b}_{n,2}\right)$, o que leva às seguintes identidades:

$$\begin{cases} p_{\mathrm{N},n,1} - p_{\mathrm{N},n,3} + p_{\mathrm{B},n,3}\left(q_{\mathrm{N},n,2} - q_{\mathrm{N},n,4}\right) = 0 \\ p_{\mathrm{N},n,2} - p_{\mathrm{N},n,4} - p_{\mathrm{B},n,3}\left(q_{\mathrm{N},n,1} - q_{\mathrm{N},n,3}\right) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Em um sistema mecânico podem ocorrer casos em que apenas um ponto do corpo seja suficiente para a descrição de seu movimento. Nestas situações, não há a necessidade de se adotar quaisquer equações vinculares das formas (2) ou (4). Por outro lado, pode haver casos em que é conveniente utilizar mais de dois pontos para a descrição do movimento de um dado corpo rígido do sistema. Considere, por exemplo, que $\nu_{\mathrm{b},n}$ pontos são adotados para a descrição do movimento de $\bar{\mathtt{B}}_n$. A abordagem até aqui apresentada pode ser estendida tomando para $i = 1, \ldots, \nu_{\mathrm{b},n}$ e $j = 2, \ldots, \nu_{\mathrm{b},n}$:

$$\mathbf{r}\left(\mathtt{n}_0, \mathtt{b}_{n,i}\right) = q_{\mathrm{N},n,(2i-1)}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + q_{\mathrm{N},n,(2i)}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \tag{5}$$

$$\left(q_{\mathrm{N},n,(2i-1)} - q_{\mathrm{N},n,(2j-1)}\right)^2 + \left(q_{\mathrm{N},n,(2i)} - q_{\mathrm{N},n,(2j)}\right)^2 - a_{n,i,j}^2 = 0 \quad \text{para} \quad i < j \tag{6}$$

$${}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,i}} = p_{\mathrm{N},n,(2i-1)}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + p_{\mathrm{N},n,(2i)}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2 \tag{7}$$

$$\begin{cases} p_{\mathrm{N},n,1} - p_{\mathrm{N},n,(2j-1)} + p_{\mathrm{B},n,3}\left(q_{\mathrm{N},n,2} - q_{\mathrm{N},n,(2j)}\right) = 0 \\ p_{\mathrm{N},n,2} - p_{\mathrm{N},n,(2j)} - p_{\mathrm{B},n,3}\left(q_{\mathrm{N},n,1} - q_{\mathrm{N},n,(2j-1)}\right) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Denote-se por $\mathtt{b}_n^*$ o centro de massa de $\bar{\mathtt{B}}_n$. Sejam $\mathtt{b}_{n,i}$ e $\mathtt{b}_{n,j}$ dois pontos de $\bar{\mathtt{B}}_n$ escolhidos para a descrição de seu movimento. Pode-se afirmar que existem duas constantes $\hat{a}_{n,1}$ e $\hat{a}_{n,2}$ tais que para qualquer configuração do corpo seja válida a identidade:

$$\mathbf{r}(\mathtt{b}_{n,i}, \mathtt{b}_n^*) = \hat{a}_{n,1}\,\mathbf{r}(\mathtt{b}_{n,i}, \mathtt{b}_{n,j}) + \hat{a}_{n,2}\,\hat{\boldsymbol{n}}_3 \times \mathbf{r}(\mathtt{b}_{n,i}, \mathtt{b}_{n,j}) \tag{9}$$

Da derivada temporal desta identidade decorre:

$${}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_n^*} = (1 - \hat{a}_{n,1})\,{}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,i}} + \hat{a}_{n,1}\,{}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,j}} + \hat{a}_{n,2}\,\hat{\boldsymbol{n}}_3 \times \left({}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,j}} - {}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}_{n,i}}\right) \tag{10}$$

Considere que todo o sistema de forças aplicado sobre o corpo rígido $\bar{\mathtt{B}}_n$ pode ser reduzido à uma força resultante $w_{n,1}\,\hat{\boldsymbol{n}}_1 + w_{n,2}\,\hat{\boldsymbol{n}}_2$ aplicada em seu centro de massa e um torque $w_{n,3}\,\hat{\boldsymbol{n}}_3$. Adotando a notação $f_{-}^{\{n\}}$ para denotar a parcela de $f_{-}$ devida ao corpo $\bar{\mathtt{B}}_n$, pode-se afirmar que:

$$\begin{bmatrix} f_{\mathtt{N},n,2i-1}^{\{n\}} \\ f_{\mathtt{N},n,2i}^{\{n\}} \\ f_{\mathtt{N},n,2j-1}^{\{n\}} \\ f_{\mathtt{N},n,2j}^{\{n\}} \\ f_{\mathtt{B},n,3}^{\{n\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{a}_{n,1} & -\hat{a}_{n,2} & 0 \\ \hat{a}_{n,2} & 1-\hat{a}_{n,1} & 0 \\ \hat{a}_{n,1} & \hat{a}_{n,2} & 0 \\ -\hat{a}_{n,2} & \hat{a}_{n,1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{n,1} \\ w_{n,2} \\ w_{n,3} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Analogamente, definindo $\hat{a}_{n,3} = (\hat{a}_{n,1}-1)^2 + \hat{a}_{n,2}^2$, $\hat{a}_{n,4} = \hat{a}_{n,1}^2 + \hat{a}_{n,2}^2$ e $\hat{a}_{n,5} = \hat{a}_{n,2}^2 + (\hat{a}_{n,1}-1)\,\hat{a}_{n,1}$, e denotando $m_n$ a massa do corpo $\bar{\mathtt{B}}_n$, por $I_n$ o momento de inércia deste corpo com relação a um eixo paralelo à direção de $\hat{\boldsymbol{n}}_3$ passante por seu centro de massa $\mathtt{b}_n^*$ e por $\tilde{f}_{-}^{\{n\}}$ a parcela de $\tilde{f}_{-}$ devida ao corpo $\bar{\mathtt{B}}_n$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_{\mathtt{N},n,2i-1}^{\{n\}} \\ \tilde{f}_{\mathtt{N},n,2i}^{\{n\}} \\ \tilde{f}_{\mathtt{N},n,2j-1}^{\{n\}} \\ \tilde{f}_{\mathtt{N},n,2j}^{\{n\}} \\ \tilde{f}_{\mathtt{B},n,3}^{\{n\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_n\hat{a}_{n,3} & 0 & m_n\hat{a}_{n,5} & m_n\hat{a}_{n,2} & 0 \\ 0 & -m_n\hat{a}_{n,3} & -m_n\hat{a}_{n,2} & m_n\hat{a}_{n,5} & 0 \\ m_n\hat{a}_{n,5} & -m_n\hat{a}_{n,2} & -m_n\hat{a}_{n,4} & 0 & 0 \\ m_n\hat{a}_{n,2} & m_n\hat{a}_{n,5} & 0 & -m_n\hat{a}_{n,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{\mathtt{N},n,2i-1}^{\{n\}} \\ \dot{p}_{\mathtt{N},n,2i}^{\{n\}} \\ \dot{p}_{\mathtt{N},n,2j-1}^{\{n\}} \\ \dot{p}_{\mathtt{N},n,2j}^{\{n\}} \\ \dot{p}_{\mathtt{B},n,3}^{\{n\}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Suponha que dois corpos $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ deste mecanismo constituam uma junta rotativa e considere, sem perda de generalidade $n_1 < n_2$. Como o mecanismo é plano, o eixo desta junta permanece sempre paralelo à direção do vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}_3$. Dessa forma, tal junta pode ser caracterizada pelo par ordenado de pontos $\left(\mathtt{b}_{n_1,i_1}, \mathtt{b}_{n_2,i_2}\right)$ em que $\mathtt{b}_{n_1,i_1}$ e $\mathtt{b}_{n_2,i_2}$ são os respectivos pontos de $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ que pertencem ao eixo da junta rotativa constituída por estes corpos. Neste caso, o vínculo existente entre os corpos demanda que as coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas utilizadas para a descrição dos movimentos destes dois pontos sejam idênticas. Sendo $n_1 < n_2$, as variáveis que adotadas para a descrição do movimento do ponto $\mathtt{b}_{n_2,i_2}$ podem ser eliminadas do modelo, bastando tomar $q_{\mathtt{N},n_2,2i_2-1} = q_{\mathtt{N},n_1,2i_1-1}$, $q_{\mathtt{N},n_2,2i_2} = q_{\mathtt{N},n_1,2i_1}$, $p_{\mathtt{N},n_2,2i_2-1} = p_{\mathtt{N},n_1,2i_1-1}$ e $p_{\mathtt{N},n_2,2i_2} = p_{\mathtt{N},n_1,2i_1}$. Como consequência desta idêntificação entre variáveis, deve-se definir $f_{\mathtt{N},n_1,2i_1-1}^{\{n_2\}} = f_{\mathtt{N},n_2,2i_2-1}^{\{n_2\}}$, $f_{\mathtt{N},n_1,2i_1}^{\{n_2\}} = f_{\mathtt{N},n_2,2i_2}^{\{n_2\}}$, $\tilde{f}_{\mathtt{N},n_1,2i_1-1}^{\{n_2\}} = \tilde{f}_{\mathtt{N},n_2,2i_2-1}^{\{n_2\}}$ e $\tilde{f}_{\mathtt{N},n_1,2i_1}^{\{n_2\}} = \tilde{f}_{\mathtt{N},n_2,2i_2}^{\{n_2\}}$. Dessa forma, após todas as eliminações de variáveis de movimento devido a existência de juntas rotativas no mecanismo, pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} f_{\mathtt{N},n,\ell} = \sum\limits_{k\geq n} f_{\mathtt{N},n,\ell}^{\{k\}} \\ \tilde{f}_{\mathtt{N},n,\ell} = \sum\limits_{k\geq n} \tilde{f}_{\mathtt{N},n,\ell}^{\{k\}} \end{cases} \tag{13}$$

Ainda, caso a junta rotativa entre $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ seja ativa, ou seja, caso haja um atuador fornecendo um torque $u_{\mathtt{R},n_1,n_2}$ para controlar o movimento rotação relativa entre os corpos, é conveniente definir uma nova velocidade generalizada $p_{\mathrm{R},n_1,n_2}$ satisfazendo à seguinte equação vincular:

$$p_{\mathrm{R},n_1,n_2} - \left(p_{\mathrm{B},n_2,3} - p_{\mathrm{B},n_1,3}\right) = 0 \tag{14}$$

Desta forma, pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} f_{\mathrm{R},n_1,n_2} = u_{\mathrm{R},n_1,n_2} \\ \tilde{f}_{\mathrm{R},n_1,n_2} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Considere agora que a junta constituída pelos corpos $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ ($n_1 < n_2$) seja prismática. Neste caso, não há movimento de rotação de $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ relativamente a $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$, sendo possível eliminar a velocidade generalizada $p_{\mathrm{B},n_2,3}$ do modelo uma vez que $p_{\mathrm{B},n_2,3} = p_{\mathrm{B},n_1,3}$. Neste caso, devem-se definir $f^{\{n_2\}}_{\mathrm{B},n_1,3} = f^{\{n_2\}}_{\mathrm{B},n_2,3}$, $\tilde{f}^{\{n_2\}}_{\mathrm{B},n_1,3} = \tilde{f}^{\{n_2\}}_{\mathrm{B},n_2,3}$. Após todas as eliminações de velocidades generalizadas devido a existência de juntas prismáticas no mecanismo, pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} f_{\mathrm{B},n,3} = \displaystyle\sum_{k \geq n} f^{\{k\}}_{\mathrm{B},n,3} \\ \tilde{f}_{\mathrm{B},n,3} = \displaystyle\sum_{k \geq n} \tilde{f}^{\{k\}}_{\mathrm{B},n,3} \end{cases} \tag{16}$$

Ainda, sabe-se que dois pontos $\mathtt{b}_{n_1,i_1}$ e $\mathtt{b}_{n_1,j_1}$ ($i_1 < j_1$) de $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e um ponto $\mathtt{b}_{n_2,i_2}$ de $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$, todos tomados sobre o eixo desta junta, permanecerão sempre alinhados[1]. A fim de descrever o este outro vínculo imposto por tal junta, é conveniente a definição de uma coordenada generalizada $q_{\mathrm{P},n_1,n_2}$ e de uma velocidade generalizada $p_{\mathrm{P},n_1,n_2} = \dot{q}_{\mathrm{P},n_1,n_2}$. Dessa forma, tal vínculo é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} a_{n_1,i_1,j_1}\, q_{\mathrm{N},n_2,(2i_2-1)} - \left(a_{n_1,i_1,j_1} - q_{\mathrm{P},n_1,n_2}\right) q_{\mathrm{N},n_1,(2i_1-1)} - q_{\mathrm{P},n_1,n_2}\, q_{\mathrm{N},n_1,(2j_1-1)} = 0 \\ a_{n_1,i_1,j_1}\, q_{\mathrm{N},n_2,(2i_2)} - \left(a_{n_1,i_1,j_1} - q_{\mathrm{P},n_1,n_2}\right) q_{\mathrm{N},n_1,(2i_1)} - q_{\mathrm{P},n_1,n_2}\, q_{\mathrm{N},n_1,(2j_1)} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Finalmente, havendo um atuador nesta junta prismática controlando por meio de uma força $u_{\mathrm{P},n_1,n_2}$ a translação relativa entre os corpos $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$, pode-se afirmar que[2]:

$$\begin{cases} f_{\mathrm{P},n_1,n_2} = u_{\mathrm{P},n_1,n_2} \\ \tilde{f}_{\mathrm{P},n_1,n_2} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

[1] Sem perda de generalidade, a descrição da junta prismática também pode ser feita tomando dois pontos de $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ e apenas um ponto de $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ sobre o eixo desta junta.

[2] Em caso de junta prismática passiva, basta considerar $u_{\mathrm{P},n_1,n_2}$ identicamente nulo.

# 2 Pacote computacional “Mo2D” para modelagem e simulação de mecanismos planos

A partir das considerações metodológicas apresentadas nesta seção, foi desenvolvido um pacotede funções no programa Wolfram Mathematica denominada “Mo2D” para produzir modelos matemáticos e simulações numéricas diretas e inversas de mecanismos planos, bastando fornecer uma descrição básica dos corpos rígidos que compõem tais sistemas e das juntas existentes entre tais corpos. Esta subseção visa explicar a utilização das funções que constituem este pacote. Nas próximas subseções serão apresentados exemplos de modelagem e simulação de mecanismos planos utilizando tais funções.

A função Initialize esvazia todas as listas utilizadas em uma rotina de modelagem e simulação. Deve ser declarada sem argumentos ao início de qualquer rotina, por questões de segurança:

```
Initialize [ ]
```

A principal função deste pacote é RigidBody, utilizada para definir um novo corpo rígido para o sistema. Esta função deve ser declarada da seguinte forma:

```
RigidBody[n, ν_{b,n}, {{i, j}, {â_{n,1}, â_{n,2}}}, m_n, I_n, {g_{n,1}, g_{n,2}}, {w_{n,1}, w_{n,2}, w_{n,3}}]
```

De forma coerente com a notação adotada nesta seção, $n$ representa o índice do corpo rígido $\bar{\mathtt{B}}_n$ que se deseja declarar (deve ser um número inteiro), $\nu_{\mathrm{b},n}$ representa o número de nós (pontos) escolhidos para descrever o movimento deste corpo, $i$ e $j$ são os índices dos nós utilizados para a descrição da posição do centro de massa $\mathtt{b}_n^*$ de $\bar{\mathtt{B}}_n$ e $\hat{a}_{n,1}$ e $\hat{a}_{n,2}$ são os parâmetros adimensionais utilizados para tal descrição, conforme a equação (9); $m_n$ e $I_n$ são respectivamente a massa de $\bar{\mathtt{B}}_n$ e o momento de inércia deste corpo com relação a um eixo passante por $\mathtt{b}_n^*$ e com a direção do vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}_3$; $g_{n,1}$ e $g_{n,2}$ representam as componentes segundo $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ da resultante de forças de campo por unidade de massa do corpo $\bar{\mathtt{B}}_n$ (tipicamente, são componentes da aceleração da gravidade segundo tais vetores unitários); $w_{n,1}$, $w_{n,2}$ e $w_{n,3}$ são as componentes do sistema reduzido (com relação a $\mathtt{b}_n^*$) de forças e torques ativos resultantes sobre $\bar{\mathtt{B}}_n$, conforme equação (11).

Basicamente, esta função define insere na lista NodesIndexes elementos da forma $\{\mathtt{N}, n, i\}$ ($i = 1, \ldots, \nu_{\mathrm{b},n}$), na lista CoordinatesIndexes elementos da forma $\{\mathtt{N}, n, \ell\}$ ($\ell = 1, \ldots, 2\,\nu_{\mathrm{b},n}$), e na lista QuasivelocitiesIndexes elementos da forma $\{\mathtt{N}, n, \ell\}$ ($\ell = 1, \ldots, 2\,\nu_{\mathrm{b},n}$) além de $\{\mathtt{B}, n, 3\}$. Assim em todas as demais funções do pacote, caso alguma destas listas não tenha sido declarada ainda, sua declaração como lista vazia é feita automaticamente. À lista QuasivelocitiesTransformations são adicionados elementos da forma $\dot{q}_{\mathtt{N},n,\ell} - p_{\mathtt{N},n,\ell}$ ($\ell = 1, \ldots, 2\,\nu_{\mathrm{b},n}$), à lista HolonomicConstraintEquations são adicionados os primeiros membros das equações (6) e à lista ConstraintEquations são adicionados os primeiros membros das equações (8). Eventuais duplicatas e expressões identicamente nulas são eliminadas destas listas pela função. Além disso, os $f^{\{n\}}_{\mathtt{N},n,\ell}$, $\tilde{f}^{\{n\}}_{\mathtt{N},n,\ell}$ ($\ell = 1, \ldots, 2\,\nu_{\mathrm{b},n}$), $f^{\{n\}}_{\mathtt{B},n,3}$ e $\tilde{f}^{\{n\}}_{\mathtt{B},n,3}$ são computados de acordo com as expressões dadas nas equações (11, 12).

A função RevoluteJoint, por sua vez, define uma junta prismática entre os corpos $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ na qual os pontos $\mathtt{b}_{n_1,i_1}$ e $\mathtt{b}_{n_2,i_2}$ (pertencentes respectivamente a $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$) permanecem sobre o eixo desta junta, e deve ser declarada da seguinte forma:

---

RevoluteJoint $[n_1,\ i_1,\ n_2,\ i_2,\ u_{\mathrm{R},n_1,n_2}]$

---

Caso a junta seja passiva, deve-se adotar $u_{\mathrm{R},n_1,n_2} = 0$. Caso contrário, deve-se substituir $u_{\mathrm{R},n_1,n_2}$ pela expressão do torque fornecido pelo atuador (em caso de siulação dinâmica direta) ou por uma função incógnita (em caso de simulação dinâmica inversa). Considerando que $q_{\mathrm{N},n_2,2i_2-1} = q_{\mathrm{N},n_1,2i_1-1}$, $q_{\mathrm{N},n_2,2i_2} = q_{\mathrm{N},n_1,2i_1}$, $p_{\mathrm{N},n_2,2i_2-1} = p_{\mathrm{N},n_1,2i_1-1}$ e $p_{\mathrm{N},n_2,2i_2} = p_{\mathrm{N},n_1,2i_1}$, tal função elimina as variáveis correspondentes do corpo de maior $n$ (dentre $n_1$ e $n_2$) identificando-as com as correspondentes variáveis do corpo de menor $n$. Além disso, caso a junta seja ativa, a função adiciona à lista QuasivelocitiesIndexes o elemento $\{\mathrm{R}, n_1, n_2\}$, caso $n_1 < n_2$, ou o elemento $\{\mathrm{R}, n_2, n_1\}$, caso $n_1 > n_2$, e à lista ConstraintEquations o primeiro membro da equação (14). Além disso, as respectivas contribuições de força ativa e de inércia associadas a esta nova velocidade generalizada são calculadas de acordo com o sistema de equações (18).

A função PrismaticJoint define uma junta prismática entre os corpos $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$, considerando que os pontos $\mathtt{b}_{n_1,i_1}$ e $\mathtt{b}_{n_1,j_1}$ de $\bar{\mathtt{B}}_{n_1}$ e $\mathtt{b}_{n_2,i_2}$ de $\bar{\mathtt{B}}_{n_2}$ encontram-se sobre o eixo desta junta. Sua declaração deve ter a seguinte forma:

---

PrismaticJoint $[n_1,\ i_1,\ j_1,\ n_2,\ i_2,\ u_{\mathrm{P},n_1,n_2}]$

---

Seja $n'_1 = \min\{n_1, n_2\}$ e $n'_2 = \max\{n_1, n_2\}$. Considerando que $p_{\mathrm{B},n'_2,3} = p_{\mathrm{B},n'_1,3}$, a variável $p_{\mathrm{B},n'_2,3}$ é eliminada, sendo identificada com $p_{\mathrm{B},n'_1,3}$. Às listas CoordinatesIndexes e QuasivelocitiesIndexes é adicionado o elemento $\{\mathrm{P}, n'_1, n'_2\}$ e à lista QuasivelocitiesTransformations o elemento $\dot{q}_{\mathrm{P},n'_1,n'_2} - p_{\mathrm{P},n'_1,n'_2}$. À lista HolonomicConstraintEquations são adicionados os primeiros membros das equações do sistema (17) e à lista ConstraintEquations são adicionadas as derivadas temporais destas expressões. Além disso, $f_{\mathrm{P},n'_1,n'_2}$ e $\tilde{f}_{\mathrm{P},n'_1,n'_2}$ são definidos segundo a equação (18).

A função PrismaticRevoluteJoint representa a superposição de uma junta rotativa e uma junta prismática, sendo declarada da seguinte forma:

---

PrismaticRevoluteJoint $[n_1,\ i_1,\ j_1,\ n_2,\ i_2,\ u_{\mathrm{P},n_1,n_2},\ u_{\mathrm{R},n_1,n_2}]$

---

Nesta função, nenhuma variável é eliminada. Os demais procedimentos realizados por esta função são uma sobreposição dos realizados pelas funções PrismaticJoint e RevoluteJoint.

A função BaseBody fixa um dos corpos rígidos ao referencial inercial $\bar{\mathtt{N}}$. A declaração desta função é feita por meio do índice $n$ do corpo base $\bar{\mathtt{B}}_n$ e por uma lista $\{q_{\mathrm{N},n,\ell} == \ldots\}$ em que são declarados os valores fixos das coordenadas dos nós definidos para o corpo $\bar{\mathtt{B}}_n$, conforme ilustrado a seguir:

---

BaseBody$[n,\ \{q_{\mathrm{N},n,\ell} == \ldots\}]$

---

Esta função elimina do modelo associa aos $q_{\mathrm{N},n,\ell}$ seus respectivos valores constantes, além de estabelecer a nulidade dos $p_{\mathrm{N},n,\ell}$ associados e de $p_{\mathrm{B},n,3}$.

A função AddQuasivelocity permite ao usuário do pacote definir uma velocidade generalizada adicional ($p_j$) caso isto seja conveniente. Neste caso, ainda pode-se definir as contribuições para forças ativas e forças de inércia generalizadas associadas a esta variável ($f_j$ e $\tilde{f}_j$) respectivamente. Sua declaração é feita da seguinte forma:

AddQuasivelocity[$p_j[t]$, $f_j$, $\tilde{f}_j$]

Esta função adiciona o elemento $\{j\}$ à lista QuasivelocitiesIndexes.

A função AddCoordinate permite ao usuário do pacote definir uma coordenada generalizada adicional ($q_i$) caso isto seja conveniente. Ainda é requerido que o usuário forneça nesta função uma expressão da forma $\beta_i(q_i, \dot{q}_i, p_j) = 0$ associando $\dot{q}_i$ a alguns dos $p_j$ previamente definidos. Sua declaração tem a forma:

AddQuasivelocity[$q_i[t]$, $\beta_i(q_i, \dot{q}_i, p_j)$]

Esta função adiciona o elemento $\{j\}$ à lista CoordinatesIndexes e a expressão $\beta_i$ à lista QuasivelocitiesTransformations.

A função AddConstraintEquation permite ao usuário do pacote inserir, segundo sua conveniência, uma nova equação vincular da forma $\psi_k(t, q_i, p_j) = 0$ ao modelo. Sua declaração tem a forma:

AddConstraintEquation[$\psi_k(t, q_i, p_j)$]

Esta função adiciona a expressão $\psi_k$ à lista ConstraintEquations.

A função AddHolonomicConstraintEquation permite ao usuário do pacote inserir, segundo sua conveniência, uma nova equação vincular da forma $\eta_k(t, q_i) = 0$ ao modelo. Sua declaração tem a forma:

AddConstraintEquation[$\eta_k(t, q_i)$]

Esta função adiciona a expressão $\eta_k$ à lista HolonomicConstraintEquations.

A função VariableReduction deve ser declarada após as eventuais ocorrências das funções anteriormente mencionadas nesta subseção. Sua declaração ocorre sem argumentos:

VariableReduction[ ]

Esta função cria a lista Coordinates[t] contendo todas as coordenadas do sistema (dentre as automaticamente definidas pelas funções e as definidas pelo usuário), já considerando todas as eliminações feitas. Os índices dessas coordenadas são postos na lista VariableCoordinatesIndexes. Analogamente são definidas as listas Quasivelocities[t] e VariableQuasivelocitiesIndexes para as velocidades generalizadas. Na lista ExplicitQuasivelocitiesTransformations são computadas as expressões da forma $\dot{q}_i^*(t, q_i, p_j)$ para os $\dot{q}_i$ e na lista GeneralizedForcesModel são computadas as expressões dos $f_-$ e dos $\tilde{f}_-$ utilizando os algoritmos das equações (13, 16).

A função DynamicModel deve ser declarada posteriormente à VariableReduction, também sem argumentos:

```
DynamicModel[ ]
```

Esta função calcula o jacobiano $\mathsf{A}$ das equações vinculares do sistema (ConstraintJacobian) e cria uma função para o cálculo de $\mathsf{C}^\mathsf{T}$ denominanda ConstraintMatrix. cujo único argumento é uma lista de substituições. Caso todos os valores numéricos das variáveis de movimento sejam fornecidos por esta lista, $\mathsf{C}^\mathsf{T}$ é computada numericamente. Caso a lista seja vazia, a expressão analítica de $\mathsf{C}^\mathsf{T}$ é computada. Na lista GeneralizedForces computam-se os valores de $(\mathsf{f} + \tilde{\mathsf{f}})$, enquanto DynamicEquations é outra função que computa o valor de $\mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{f} + \tilde{\mathsf{f}})$ para o sistema, dado uma lista de substituições. Novamente, caso tal lista seja vazia, a expressão analítica de $\mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{f}+\tilde{\mathsf{f}})$ é computada. A matriz de inércia generalizada do sistema $\mathsf{M}$ também é computada (GeneralizedInertiaMatrix).

Finalmente, após todas estas declarações, pode-se fazer simulações numéricas inversa e direta utilizado o modelo computado. Para simulações dinâmicas inversas, utiliza-se a função InverseSimulation que deve ser declarada da seguinte forma:

```
InverseSimulation [SimulationLabel, t*, SimulationData, InitialNodalCoordinates,
    PrescribedCoordinatesIndexes, PrescribedMotionsFunctions, {b1, b2}, InverseSimulationUnknowns,
    InverseDynamicsMethod]
```

Nesta função, SimulationLabel é uma cadeia de caracteres ou um número inteiro que denomina a particular simulação, $t^*$ é o tempo total de simulação (número real), SimulationData é uma lista de substituições que deve conter todos os valores numéricos dos parâmetros que ainda não foram fornecidos (por exemplo, $\{g \to 9.8, m_1 \to 1., m_2 \to 0.2, \ldots\}$), InitialNodalCoordinates é uma lista contendo equações que fornecem as condições iniciais de todas as coordenadas da forma $q_{\mathrm{N},n,\ell}$ em Coordinates[t] e das coordenadas definidas pelo usuário (por exemplo, $\{q_{\mathrm{N},1,1}[0] == 0.8, q_{\mathrm{N},1,2}[0] == 0.1, \ldots\}$), PrescribedCoordinatesIndexes é uma lista com os índices das coordenadas prescritas pelo usuário (por exemplo, se o usuário deseja prescrever as coordenadas $q_{\mathrm{N},2,5}$ e $q_3$, a correspondente lista de índices deve ser $\{\{\mathtt{N}, 2, 5\}, \{3\}\}$), PrescribedMotionsFunctions é uma lista com as respectivas funções puras que prescrevem os movimentos desejados pelo usuário (por exemplo, caso o usuário deseje que $q_{\mathrm{N},2,5}(t) = \sin(2\,\pi\, t)$ e $q_3(t) = \pi\, t$, deve definir esta lista como {Sin[2 π #]&, π # &}), $b_1 = b_3$ e $b_2$ são constantes de estabilização de Baumgarte e InverseSimulationUnknowns é uma lista contendo as incóginitas da simulação dinâmica inversa (por exemplo, se as incógnitas forem $u_1$ e $u_{\mathrm{R},3,7}$, esta lista é dada por $\{u_1,\ u_{\mathrm{R},3,7}\}$). Finalmente, InverseDynamicsMethod é um seletor de método para a simulação dinâmica inversa. Pode ser uma expressão da forma {"Continuous"}, caso em que a simulação dinâmica inversa será feita utilizando a função `NDSolve` do Mathematica, ou uma expressão da forma {"Discrete", $\nu_t$}, caso em que a simulação dinâmica inversa calculará o valor das incógnitas em apenas $\nu_t$ instantes de tempo do intervalo $0 \leq t \leq t^*$ e fornecerá o resultado na forma de uma função interpoladora utilizando estes pontos. Por exemplo, suponha que a SimulationLabel escolhida foi `SI`: neste caso, após a execução da função InverseSimulation, a variável $u_{1,\mathtt{SI}}$ fornecerá uma função interpoladora, definida no intervalo $0 \leq t \leq t^*$ que representará os valores de $u_1$ na simulação `SI`. Analogamente, $p_{\mathrm{N},2,5,\mathtt{SI}}$ representa os valores de $p_{\mathrm{N},2,5}$ na simulação `SI`, etc. É relevante mencionar ainda que após a execução desta função, as seguintes variáveis são definidas:

- InitialCoordinates: lista de substituições contendo os valores iniciais de todas as coordenadas generalizadas, bem como das constantes $a_{n,i,j}$;

- KinematicSimulationR1: lista de substituições contendo os valores iniciais de todas as variáveis de movimento (estado) do sistema;

- KinematicSimulationR2: lista de subsituições contendo as funções interpoladoras (definidas no intervalo $0 \leq t \leq t^*$) de todas as variáveis de estado do sistema;

- DynamicSimulationR: lista de substituições contendo as funções interpoladoras (definidas no intervalo $0 \leq t \leq t^*$) de todas as incógnitas da simulação dinâmica inversa (InverseSimulationUnknowns);

- Animation[t]: Gráfico de linhas que representa a configuração instantânea dos nós do sistema no instante $t$ ($0 \leq t \leq t^*$).

Caso o usuário deseje fazer uma simulação dinâmica direta, a função a ser utilizada é DirectSimulation:

```
DirectSimulation [SimulationLabel, t*, SimulationData, InitialNodalStates, {b1, b2}]
```

A lista InitialNodalStates deve conter equações que fornecem as condições iniciais de todas as coordenadas da forma $q_{\mathrm{N},n,\ell}$ em Coordinates[t], de todas as velocidades generalizadas da forma $p_{\mathrm{N},n,\ell}$ em Quasivelocities[t], bem como das coordenadas e velocidades generalizadas definidas pelo usuário. Neste caso, a lista SimulationData deve conter as regras para a subsituição dos $u\_$ por suas respectivas expressões em função das variáveis de estado e do tempo. Neste caso, suponha que a SimulationLabel escolhida foi `SD`: $q_{1,\mathtt{SD}}$ é uma função interpoladora (definida no intervalo $0 \leq t \leq t^*$) que representa os valores de $q_1$ na simulação `SD`, $p_{\mathrm{N},2,5,\mathtt{SD}}$ é uma função interpoladora (definida no intervalo $0 \leq t \leq t^*$) que representa os valores de $p_{\mathrm{N},2,5}$ na simulação `SD`, etc. Após a execução desta função, as seguintes variáveis são definidas:

- InitialStates: lista de substituições contendo os valores iniciais de todas as coordenadas e velocidades generalizadas, bem como das constantes $a_{n,i,j}$;

- DirectDynamicSimulationR: lista de substituições contendo as funções interpoladoras (definidas no intervalo $0 \leq t \leq t^*$) de todas as variáveis de estado do sistema;

- DirectDynamicsAnimation[t]: Gráfico de linhas que representa a configuração instantânea dos nós do sistema no instante $t$ $(0 \leq t \leq t^{*})$.

As subseções seguintes apresentarão uma série de exemplos de aplicações deste pacote de funções à modelagem de diversos mecanismos bidimensionais.

# 3 Modelagem e simulações dinâmicas direta e inversa de um pêndulo simples utilizando o pacote "Mo2D"

Considere um pêndulo simples formado por uma barra rígida e de inércia desprezível que tem fixa em uma de suas extremidades uma patícula material de massa $m$; a outra extremidade desta barra encontra-se vinculada por meio de uma junta rotativa a uma base fixa a um referencial inercial $\bar{\mathtt{N}}$, de tal forma que o eixo desta junta é ortogonal à direção do campo gravitacional local. Seja o corpo rígido $\bar{\mathtt{B}}_0$ a base, e o corpo $\bar{\mathtt{B}}_1$ a barra. A massa do pêndulo encontra-se concentrada sobre o ponto $\mathtt{b}_{1,1}$ da barra e o eixo da junta rotativa passa pelos pontos $\mathtt{b}_{1,2}$ e $\mathtt{b}_{0,1}$. Por questões de conveniência, deseja-se definir adicionalmente uma coordenada $q_0$ que mede o ângulo formado entre a linha definida pelos pontos $\mathtt{b}_{1,1}$ e $\mathtt{b}_{1,2}$ e a horizontal. Toma-se o vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ paralelo e com sentido oposto ao campo gravitacional local e o vetor unitário $\hat{\boldsymbol{n}}_3$ paralelo ao eixo da junta rotativa entre os corpos. O seguinte código, que utiliza funções do pacote "Mo2D", modela e faz duas simulações numéricas (uma direta e outra inversa) para este sistema:

```
Initialize [ ]
RigidBody[0, 1, {{1, 1}, {0, 0}}, 0, 0, {0,−g}, {0,0,0}]
RigidBody[1, 2, {{1, 2}, {0, 0}}, m, 0, {0,−g}, {0,0,0}]
BaseBody[0, {Subscript[q, "N",0,1]==0, Subscript[q, "N",0,2]==0}]
RevoluteJoint [1, 2, 0, 1, Subscript[u, 1][t]]
AddCoordinate[Subscript[q, 0][t], Subscript[q, 0]'[t] − Subscript[p, "B",1,3][t]]
VariableReduction [ ]
DynamicModel[ ]
InverseSimulation ["SI", 4., {g−> 9.8, m−>1}, {Subscript[q, "N",1,1][0]==0.8, Subscript[q, "N"
    ,1,2][0]==0.6, Subscript[q, 0][0]== ArcSin[0.6]}, {{0}}, {ArcSin[0.6]−Pi Sin[Pi #]&}, {1, 1}, {
    Subscript[u, 1]}, {"Continuous"}]
DirectSimulation ["SD", 10., {g−> 9.8, m−>1, Subscript[u, 1]−> 0}, {Subscript[q, "N",1,1]'[0]==0.,
    Subscript[q, "N",1,2]'[0]==0., Subscript[q, 0]'[0]== 0., Subscript[q, "N",1,1][0]==0.8,
    Subscript[q, "N",1,2][0]==−0.6, Subscript[q, 0][0]== −ArcSin[0.6]}, {1, 1}]
```

A partir deste código, pode-se, por exemplo, utilizar a função `Solve` do Mathematica sobre as equações dinâmicas (acessíveis pelo comando DynamicEquations[{}]) e vinculares do sistema (estas últimas em forma diferencial, ou seja, acessíveis pelo comando **D**[ConstraintEquations, t]) para obter a expressão analítica das equações diferenciais que regem este sistema. Após simplificações, as seguintes equações são obtidas:

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = p_{\mathtt{B},1,3} \\ \dot{q}_{\mathtt{N},1,1} = p_{\mathtt{N},1,1} \\ \dot{q}_{\mathtt{N},1,2} = p_{\mathtt{N},1,2} \\ \dot{p}_{\mathtt{N},1,1} = -p_{\mathtt{B},1,3}^2\, q_{\mathtt{N},1,1} + \dfrac{g\, q_{\mathtt{N},1,2}\, q_{\mathtt{N},1,1}}{a_{1,1,2}^2} + \dfrac{u_1\, q_{\mathtt{N},1,2}}{m\, a_{1,1,2}^2} \\ \dot{p}_{\mathtt{N},1,2} = -p_{\mathtt{B},1,3}^2\, q_{\mathtt{N},1,2} - \dfrac{g\, q_{\mathtt{N},1,1}^2}{a_{1,1,2}^2} - \dfrac{u_1\, q_{\mathtt{N},1,1}}{m\, a_{1,1,2}^2} \\ \dot{p}_{\mathtt{B},1,3} = -\dfrac{g\, q_{\mathtt{N},1,1}}{a_{1,1,2}^2} - \dfrac{u_1}{m\, a_{1,1,2}^2} \\ \dot{p}_{\mathtt{R},0,1} = -\dfrac{g\, q_{\mathtt{N},1,1}}{a_{1,1,2}^2} - \dfrac{u_1}{m\, a_{1,1,2}^2} \end{cases} \tag{19}$$

Ainda, no código apresentado, a função InverseSimulation é declarada para executar simulação dinâmica inversa de 4 segundos, denominada `SI`, com os parâmetros $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ e condições iniciais $q_{\mathtt{N},1,1}(0) = 0{,}8\,\mathrm{m}$, $q_{\mathtt{N},1,2}(0) = 0{,}6\,\mathrm{m}$ e $q_0(0) = \arcsin(0{,}6)$. Nesta simulação, a coordenada $q_0$ é prescrita pela função $q_0(t) = \arcsin(0{,}6) - \pi \sin(\pi\, t)$. As constantes de estabilização de Baumgarte adotadas são $b_1 = b_3 = 1$ e $b_2 = 1$ e a incógnita é o torque $u_1$ que deve ser fornecido pelo atuador presente na junta rotativa formada pela base $\bar{\mathtt{B}}_0$ e pela barra $\bar{\mathtt{B}}_1$. Os gráficos das Figuras 1 a 3 exibem os históricos temporais de algumas das variáveis que descrevem o movimento do sistema, o gráfico da Figura 4 mostra o histórico temporal dos torque fornecido pelo atuador para que o sistema realize o movimento prescrito e os gráficos das Figuras 5 e 6 mostram o controle dos erros numéricos nas simulações cinemáticas e dinâmicas.

A função DirectSimulation, por sua vez, é usada para definir uma simulação dinâmica direta de 10 segundos, denominada `SD`, com os parâmetros $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $u_1 = 0$, e condições iniciais $q_{\mathtt{N},1,1}(0) = 0{,}8\,\mathrm{m}$, $q_{\mathtt{N},1,2}(0) = -0{,}6\,\mathrm{m}$, $q_0(0) = -\arcsin(0{,}6)$, $\dot{q}_{\mathtt{N},1,1}(0) = 0$, $\dot{q}_{\mathtt{N},1,2}(0) = 0$ e $\dot{q}_0(0) = 0$. As constantes de estabilização de Baumgarte adotadas são $b_1 = b_3 = 1$ e $b_2 = 1$.

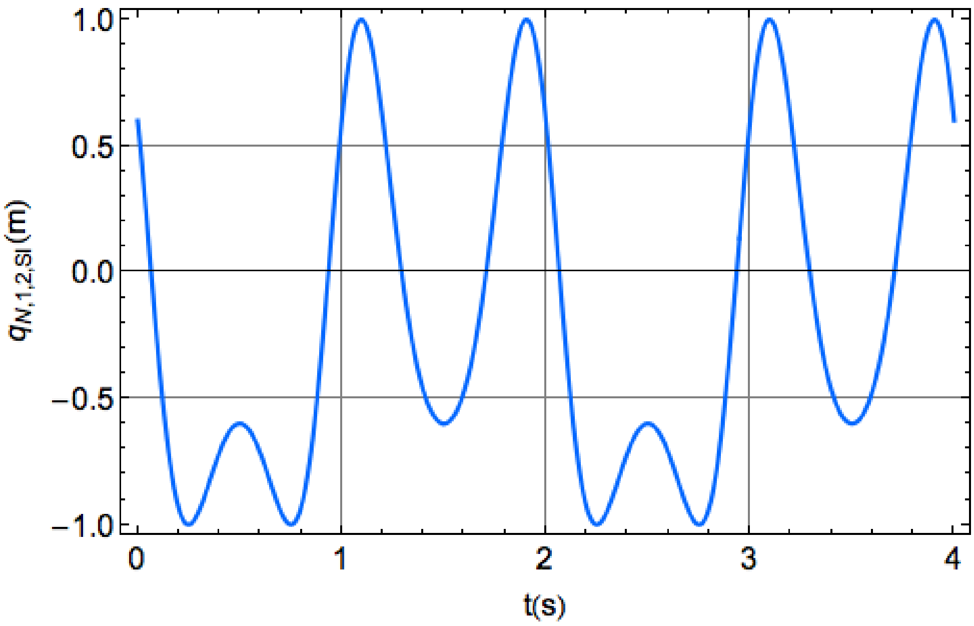


Figura 1: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_{\mathtt{N},1,2}$ na simulação `SI`.

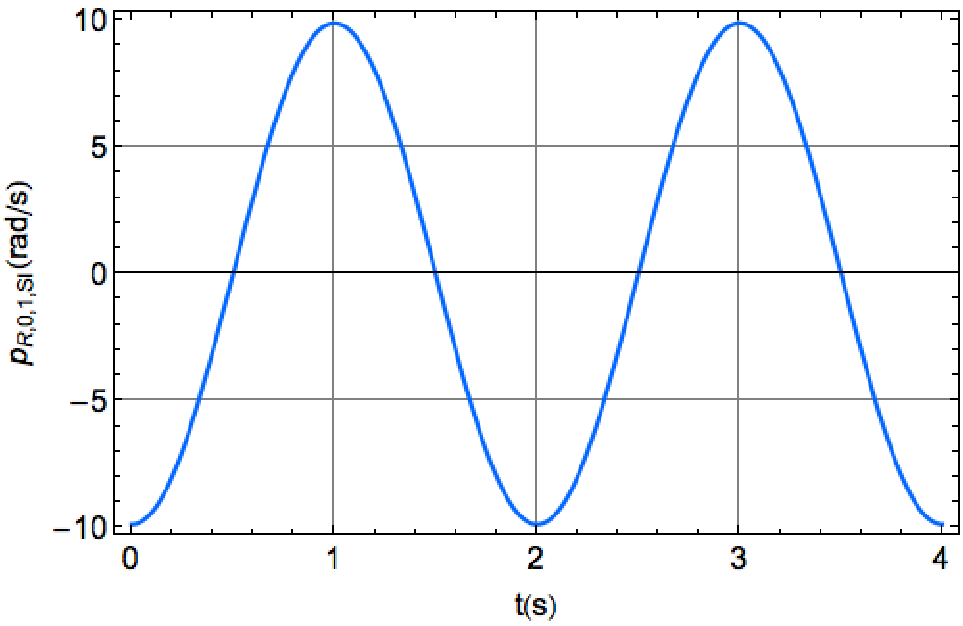


Figura 2: Histórico temporal da velocidade generalizada $p_{\mathtt{R},0,1}$ na simulação `SI`.

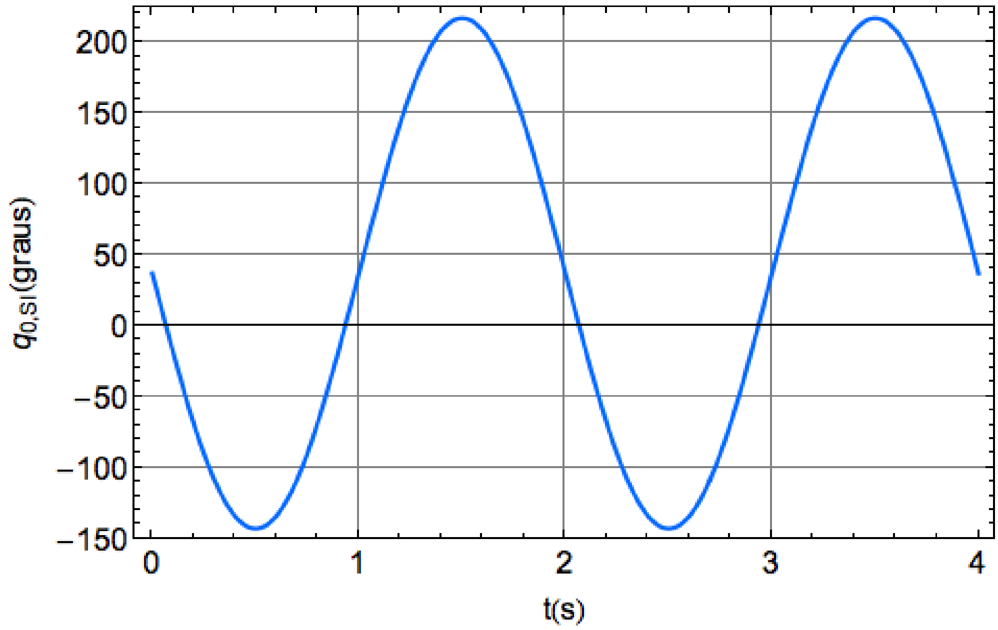


Figura 3: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_0$ na simulação SI.

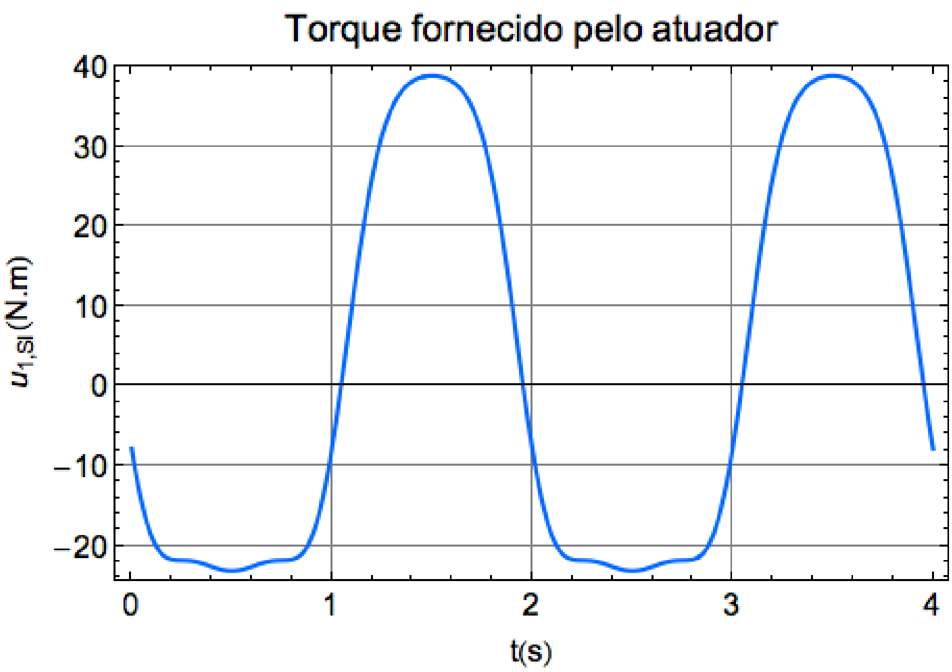


Figura 4: Histórico temporal do torque fornecido pelo atuador na simulação SI.

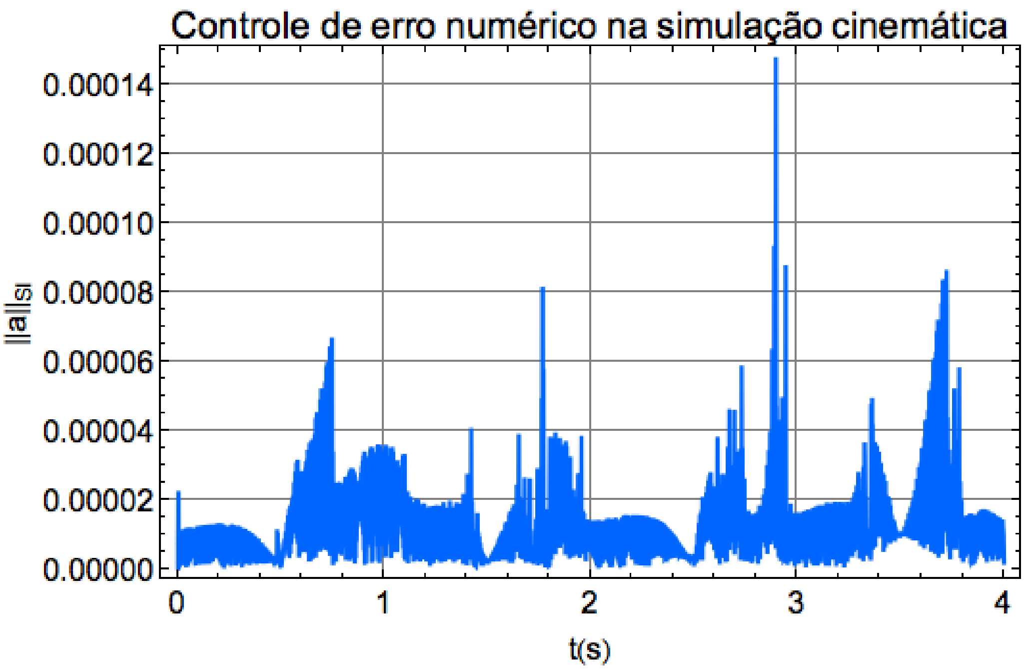


Figura 5: Histórico temporal do erro $\|\mathsf{a}\|$ na solução numérica das equações vinculares na simulação SI.

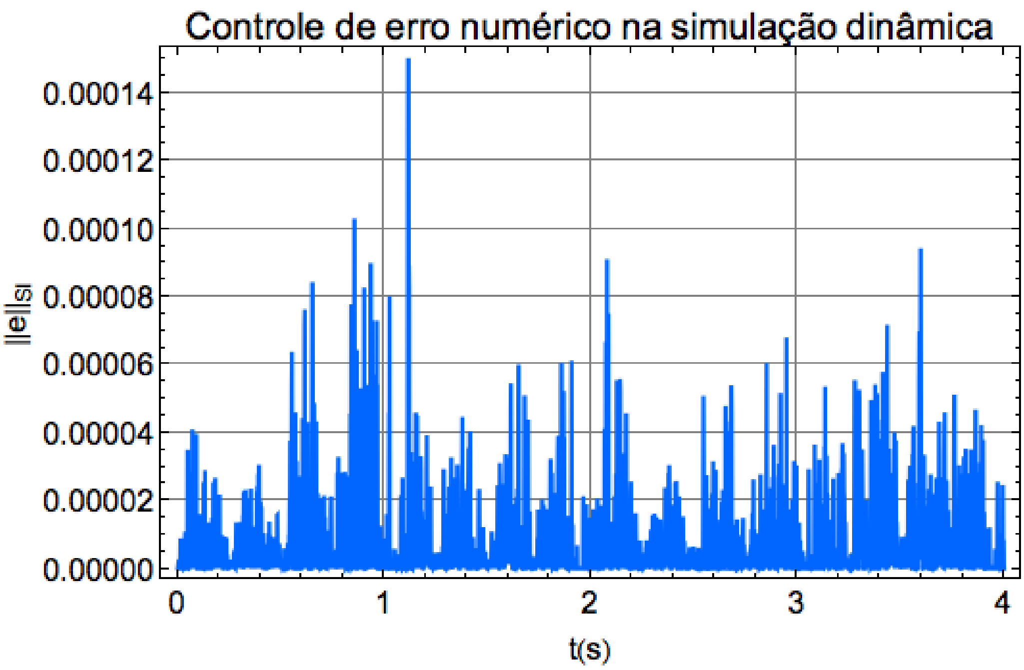


Figura 6: Histórico temporal do erro $\|\mathsf{e}\|$ na solução numérica das equações dinâmicas na simulação SI.

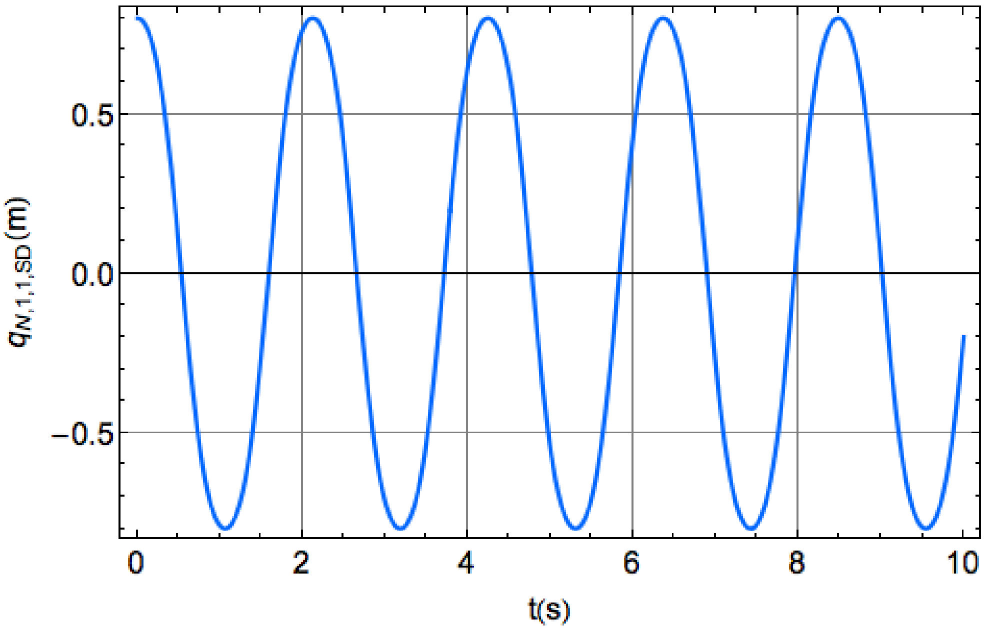


Figura 7: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_{\mathtt{N},1,1}$ na simulação SD.

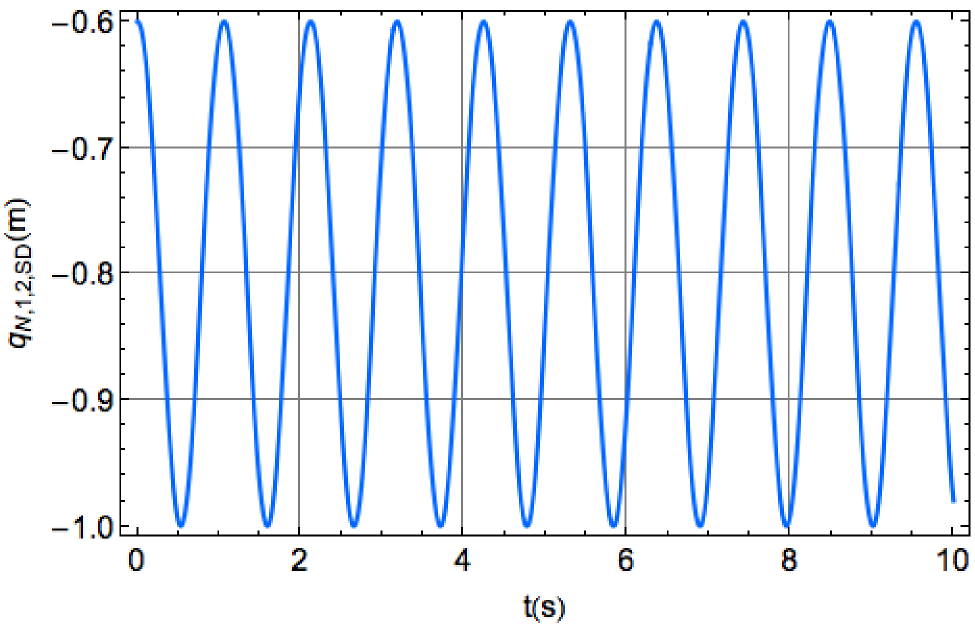


Figura 8: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_{\mathtt{N},1,2}$ na simulação SD.

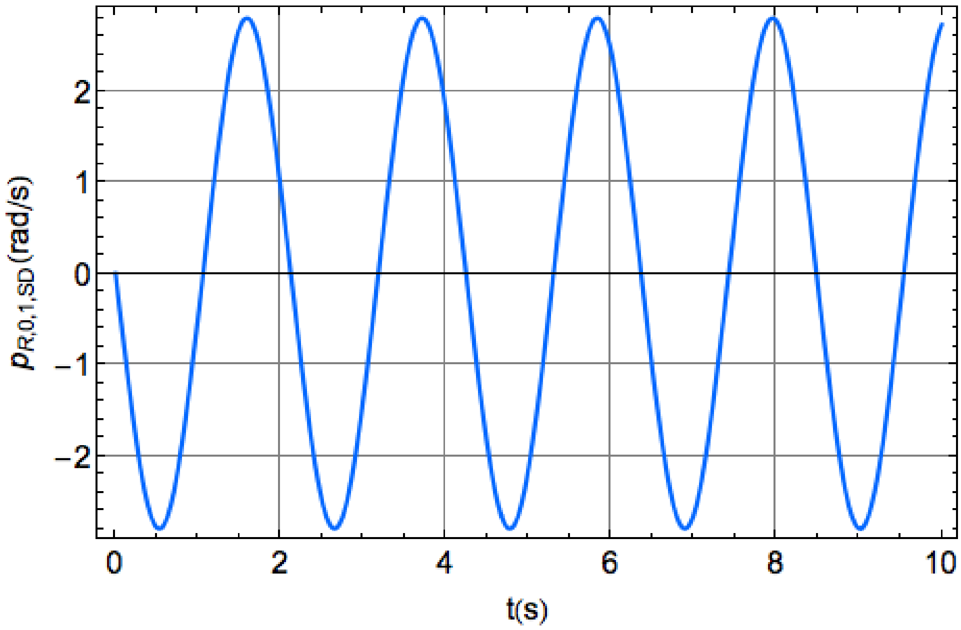


Figura 9: Histórico temporal da velocidade generalizada $p_{\mathrm{R},0,1}$ na simulação SD.

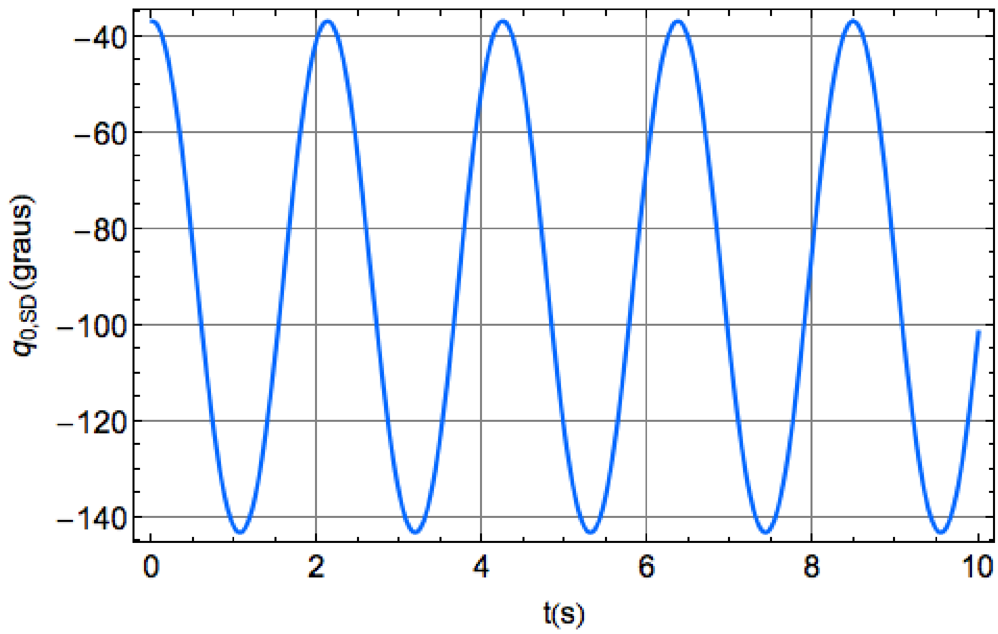


Figura 10: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_0$ na simulação SD.

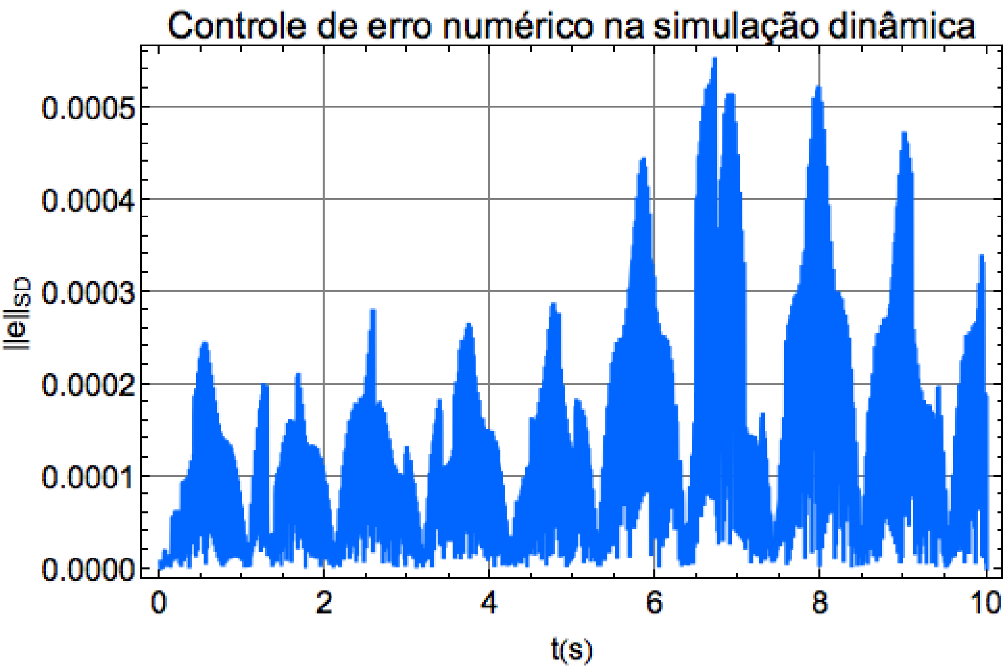


Figura 11: Histórico temporal do erro $\|\mathsf{e}\|$ na solução numérica das equações dinâmicas na simulação SD.

# 4 Modelagem e simulação dinâmica inversa de um mecanismo de retorno rápido de Whitworth utilizando o pacote "Mo2D"

Considere a representação do mecanismo de retorno rápido apresentada na Figura 12. O seguinte código pode ser utilizado para a modelagem deste sistema:

```
Initialize [ ]
RigidBody [0,4,{{1,1},{0,0}},0,0,{0,0},{0,0,0}]
RigidBody [1,1,{{1,1},{0,0}}, Subscript[m, 1],0,{0,0},{0,0,0}]
RigidBody [2,2,{{1,2},{1/2,0}}, Subscript[m, 2], Subscript[\[ Capitallota ], 2],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody [3,2,{{1,2},{1/2,0}}, Subscript[m, 3], Subscript[\[ Capitallota ], 3],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody [4,2,{{1,2},{0,0}}, Subscript[m, 4], Subscript[\[ Capitallota ], 4],{0,0},{0,0,0}]
BaseBody[0,{Subscript[q, "N",0,1]==0,Subscript[q, "N",0,2]==0,Subscript[q, "N",0,3]==0,Subscript
    [q, "N",0,4]==0.3,Subscript[q, "N",0,5]==0,Subscript[q, "N",0,6]==0.8,Subscript[q, "N"
    ,0,7]==0.001,Subscript[q, "N",0,8]==0.8}]
PrismaticJoint [0,3,4,1,1,0]
RevoluteJoint [1,1,2,1,0]
RevoluteJoint [2,2,3,2,0]
RevoluteJoint [0,1,3,1,0]
RevoluteJoint [0,2,4,1, Subscript[u, 1][t]]
PrismaticRevoluteJoint [3,1,2,4,2,0,0]
```

```
AddCoordinate[Subscript[q, 1][t], Subscript[q, 1]'[t]−Subscript[p, "B",4,3][t]]
VariableReduction[ ]
DynamicModel[ ]
```

Este código define o corpo $\bar{\mathsf{B}}_0$ como sendo a base deste mecanismo (solidária ao referencial inercial $\bar{\mathsf{N}}$), e define as coordenadas dos nós $\mathsf{b}_{0,1}$, $\mathsf{b}_{0,2}$, $\mathsf{b}_{0,3}$ e $\mathsf{b}_{0,4}$ como sendo respectivamente, $(0, 0)$, $(0, 0{,}3\,\mathrm{m})$, $(0, 0{,}8\,\mathrm{m})$ e $(0{,}001\,\mathrm{m}, 0{,}3\,\mathrm{m})$. Supõe-se que os corpos $\bar{\mathsf{B}}_2$ e $\bar{\mathsf{B}}_3$ têm centro de massa no ponto médio entre seus nós extremos e o corpo $\bar{\mathsf{B}}_4$ tem centro de massa sobre o ponto $\mathsf{b}_{4,1}$. No pacote, são definidas juntas rotativas entre os corpos $\bar{\mathsf{B}}_0$ e $\bar{\mathsf{B}}_3$, $\bar{\mathsf{B}}_0$ e $\bar{\mathsf{B}}_4$, $\bar{\mathsf{B}}_1$ e $\bar{\mathsf{B}}_2$, $\bar{\mathsf{B}}_2$ e $\bar{\mathsf{B}}_3$, uma junta prismática entre os corpos $\bar{\mathsf{B}}_0$ e $\bar{\mathsf{B}}_1$ e uma junta dada pela sobreposição entre uma rotativa e uma prismática entre os corpos $\bar{\mathsf{B}}_3$ e $\bar{\mathsf{B}}_4$. Dentre estas, a única junta ativa é a rotativa entre os corpos $\bar{\mathsf{B}}_0$ e $\bar{\mathsf{B}}_4$, na qual se considera que há um atuador fornecendo um torque $u_1$. Além disso, supõe-se que o mecanismo está montado sobre um plano horizontal, de tal forma que não há influência do campo gravitacional nos movimentos do mesmo. Ainda, por questões de conveniência, é definida a coordenada angular $q_1$ cuja derivada temporal é igual à velocidade generalizada $p_{\mathsf{B},4,3}$.

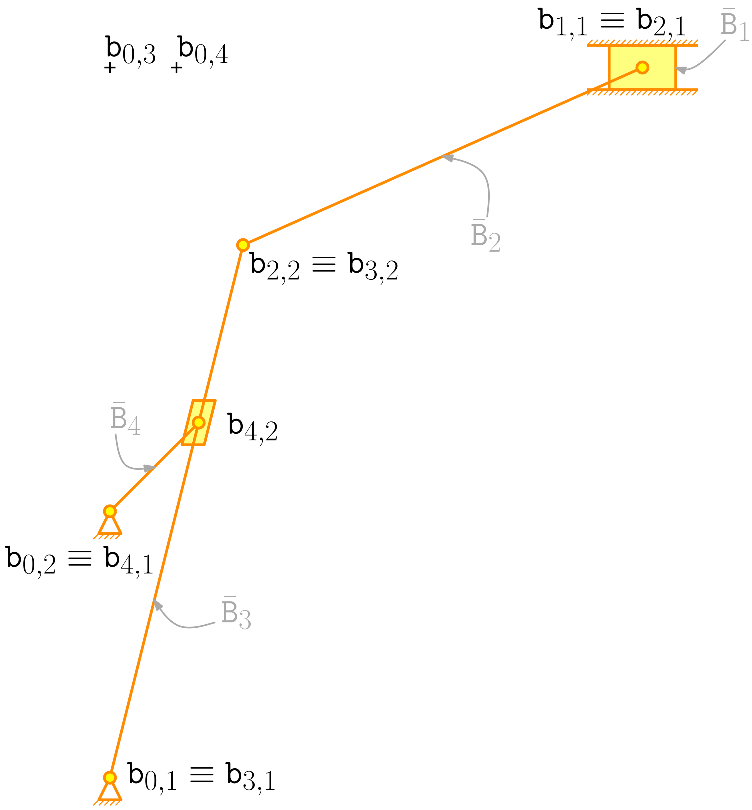


Figura 12: Representação do mecanismo de retorno rápido de Whitworth.

O seguinte código foi utilizado para definir uma simulação inversa, denominada `SI` na qual prescreveu-se a coordenada angular $q_1$ como sendo linear com o tempo, representando um movimento de rotação, com velocidade angular constante e de magnitude $\pi/2\,\mathrm{rad/s}$, para o corpo $\bar{\mathrm{B}}_4$:

```
Subscript[T, "SI"]=16.0;
ParametersList = {g−> 9.8, Subscript[m, 1]−>1., Subscript[m, 2]−>0.2, Subscript[\[CapitalIota], 2]−>0.2∗0.1^2/12,Subscript[m, 3]−> 0.4, Subscript[\[CapitalIota], 3]−>0.2∗0.5^2/12, Subscript[m, 4]−> 0.2, Subscript[\[CapitalIota], 4]−> 0.2∗0.1^2/3};
InitialConditions ={Subscript[q, "N",1,1][0]==0.8, Subscript[q, "N",1,2][0]==0.8, Subscript[q, "N",2,3][0]==0.15, Subscript[q, "N",2,4][0]==0.6, Subscript[q, "N",4,3][0]==0.1, Subscript[q, "N",4,4][0]==0.4, Subscript[q, 1][0]== 0};
InverseSimulation ["SI",Subscript[T, "SI"], ParametersList, InitialConditions , {{1}}, {\[Pi]/2 #&}, {1,1}, {Subscript[u, 1]}, {"Discrete",500}]
```

Alguns dos principais resultados desta simulação são mostrados nos gráficos das Figuras 13 a 16. Em particular, é relevante mencionar que o comportamento de retorno rápido (observado, por exemplo, no histórico temporal da velocidade generalizada $p_{\mathrm{P},0,1}$) está associado a picos no torque fornecido pelo atuador.

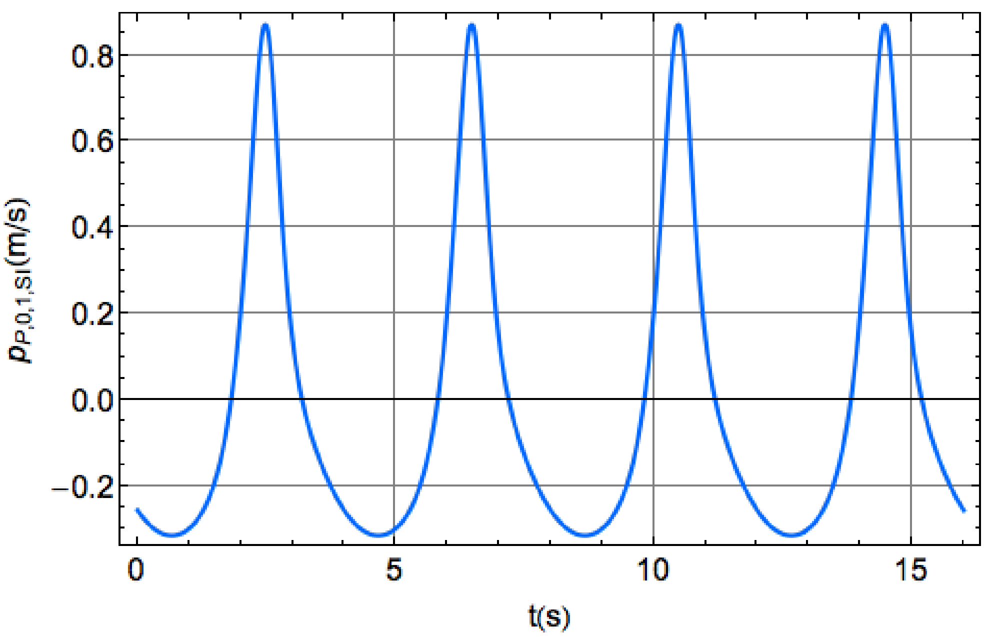


Figura 13: Histórico temporal da velocidade generalizada $p_{\mathrm{P},0,1}$ na simulação SI.

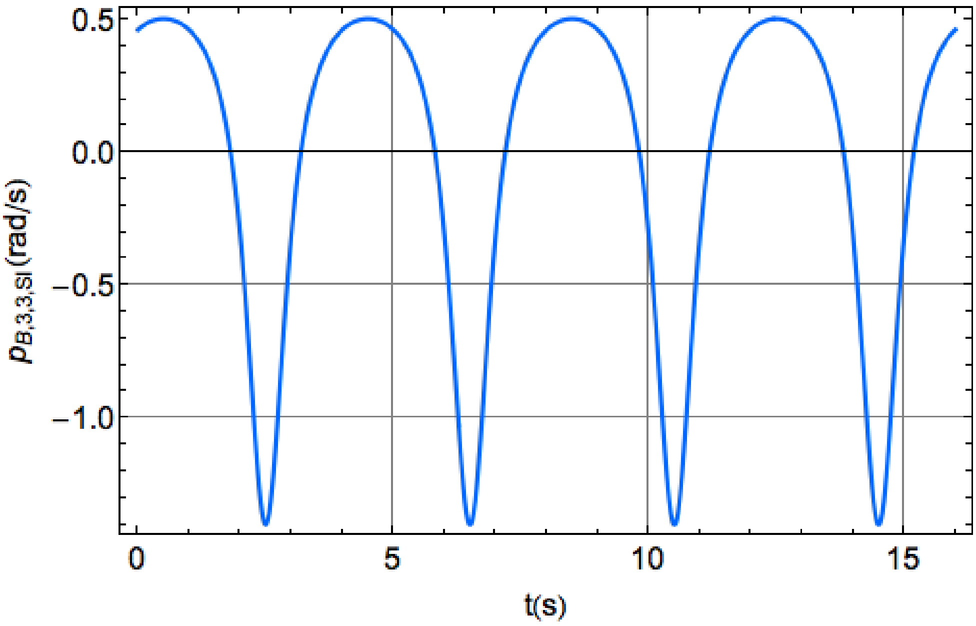


Figura 14: Histórico temporal da velocidade generalizada $p_{B,3,3}$ na simulação `SI`.

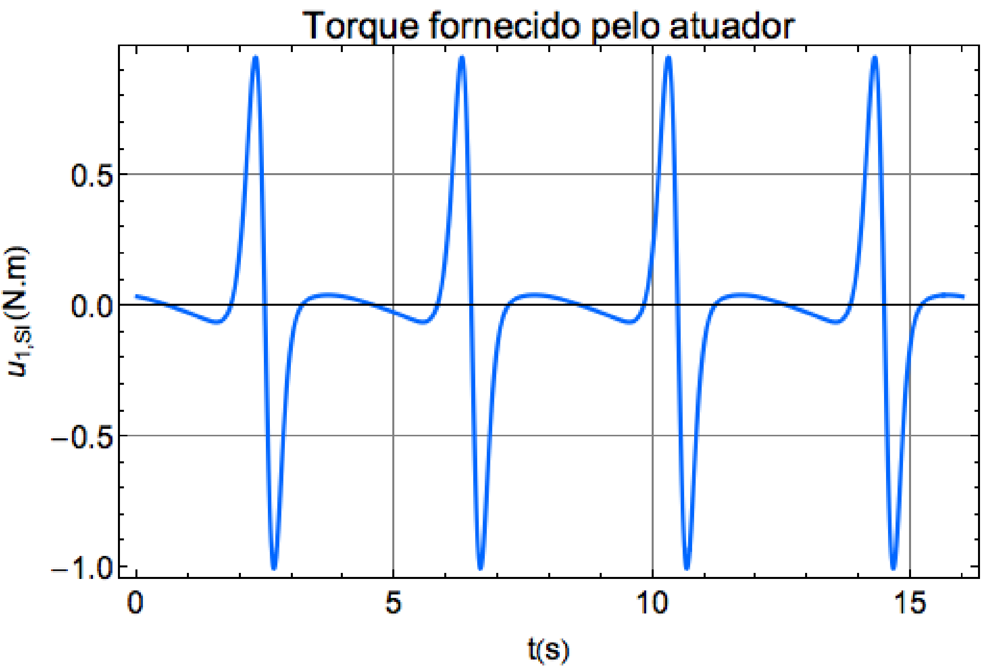


Figura 15: Histórico temporal do torque $u_1$ fornecido pelo atuador na simulação `SI`.

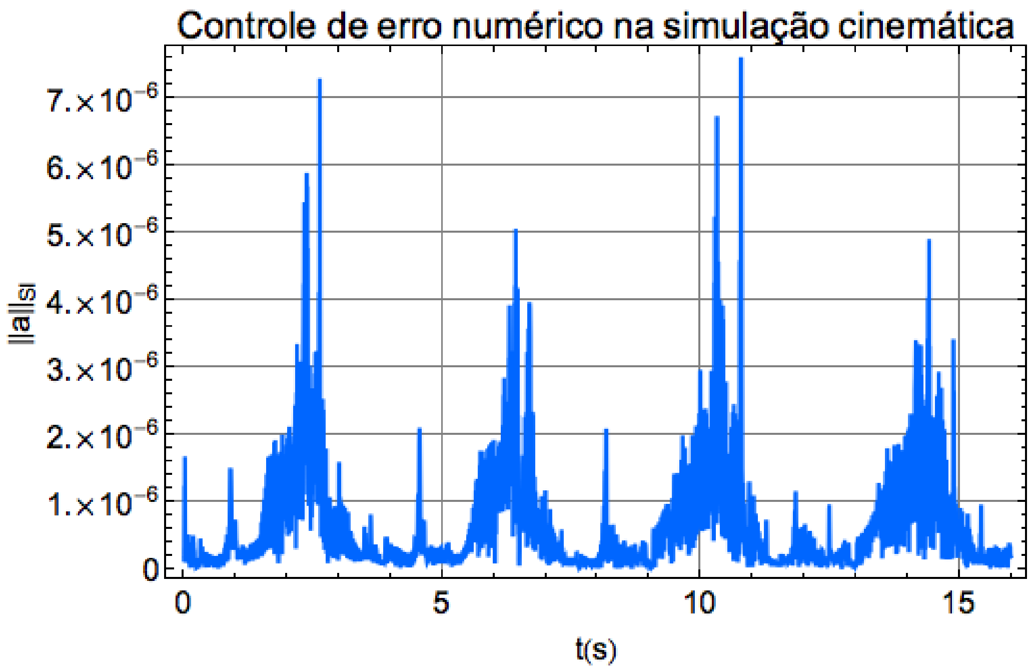


Figura 16: Histórico temporal do erro $\|\alpha\|$ na solução numérica das equações vinculares na simulação SI.

# 5 Modelagem e simulação dinâmica inversa de um mecanismo 3 $\underline{\text{R}}$RR utilizando o pacote "Mo2D"

Considere a representação do mecanismo paralelo 3 $\underline{\text{R}}$RR apresentada na Figura 17. O seguinte código pode ser utilizado para a modelagem deste sistema:

```
Initialize [ ]
RigidBody [0,3,{{1,1},{0,0}},0,0,{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[1,4,{{3,4},{1/2,Sqrt[3]/6}},Subscript[m, 1],Subscript[\[ CapitalIota ], 1],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[2,2,{{1,2},{1/2,0}},Subscript[m, 2],Subscript[\[ CapitalIota ], 2],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[3,2,{{1,2},{1/2,0}},Subscript[m, 2],Subscript[\[ CapitalIota ], 2],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[4,2,{{1,2},{1/2,0}},Subscript[m, 2],Subscript[\[ CapitalIota ], 2],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[5,2,{{1,2},{0,0}},Subscript[m, 3],Subscript[\[ CapitalIota ], 3],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[6,2,{{1,2},{0,0}},Subscript[m, 3],Subscript[\[ CapitalIota ], 3],{0,0},{0,0,0}]
RigidBody[7,2,{{1,2},{0,0}},Subscript[m, 3],Subscript[\[ CapitalIota ], 3],{0,0},{0,0,0}]
BaseBody[0,{Subscript[q, "N",0,1]==3, Subscript[q, "N",0,2]==0, Subscript[q, "N",0,3]==-(3/2),
    Subscript[q, "N",0,4]==(3 Sqrt[3])/2, Subscript[q, "N",0,5]==-(3/2), Subscript[q, "N"
    ,0,6]==-((3 Sqrt[3])/2)}]
RevoluteJoint [0,1,5,1, Subscript[u, 1][t]]
RevoluteJoint [0,2,6,1, Subscript[u, 2][t]]
RevoluteJoint [0,3,7,1, Subscript[u, 3][t]]
RevoluteJoint [1,2,2,1,0]
RevoluteJoint [1,3,3,1,0]
```

```
RevoluteJoint [1,4,4,1,0]
RevoluteJoint [2,2,5,2,0]
RevoluteJoint [3,2,6,2,0]
RevoluteJoint [4,2,7,2,0]
AddCoordinate[Subscript[q, 1][t], Subscript[q, 1]'[t]−Subscript[p, "B",1,3][t]]
VariableReduction[ ]
DynamicModel[ ]
```

Todas as juntas existentes neste mecanismo são rotativas, sendo ativas apenas as existentes entre a base $\bar{\mathrm{B}}_0$ e os corpos $\bar{\mathrm{B}}_5$, $\bar{\mathrm{B}}_6$ e $\bar{\mathrm{B}}_7$. Os torques fornecidos pelos atuadores nestas juntas são denotados respectivamente por $u_1$, $u_2$ e $u_3$. Supõe-se que o mecanismo está montado sobre um plano horizontal, de tal forma que não há influência do campo gravitacional nos movimentos do mesmo. Ainda, por questões de conveniência, é definida a coordenada angular $q_1$ cuja derivada temporal é igual à velocidade generalizada $p_{\mathrm{B},1,3}$.

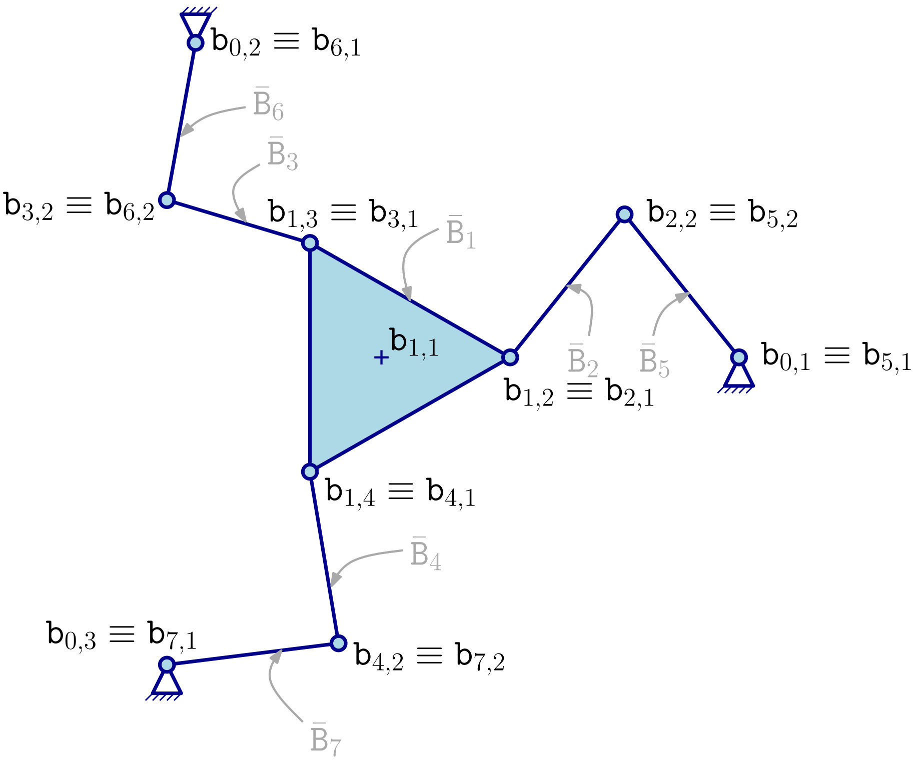


Figura 17: Representação do mecanismo paralelo 3 R̲RR.

O seguinte código define uma simulação dinâmica inversa denominada `SI` na qual são prescritos $q_{\mathrm{N},1,1}(t) = -\sin(\pi\, t/2)$, $q_{\mathrm{N},1,1}(t) = \sin(\pi\, t/4)$ e $q_1(t) = (\pi/6)\sin(\pi\, t/4)$:

```
Subscript[T, "SI"]=16.0;
ParametersList ={g−> 9.8, Subscript[m, 1]−>1.,Subscript[\[CapitalIota], 1]−>0.25, Subscript[m,
    2]−>0.5 ,Subscript[\[CapitalIota], 2]−>1./6,Subscript[m, 3]−> 0.5,Subscript[\[CapitalIota],
    3]−> 2./3};
InitialConditions ={Subscript[q, "N",1,1][0]==0,Subscript[q, "N",1,2][0]==0,Subscript[q, "N"
    ,1,3][0]==1,Subscript[q, "N",1,4][0]==0,Subscript[q, "N",2,3][0]==2,Subscript[q, "N",2,4][0]==
    Sqrt[3],Subscript[q, "N",1,5][0]==−(1/2),Subscript[q, "N",1,6][0]==Sqrt[3]/2,Subscript[q, "N"
```

```
,3,3][0]==−(5/2),Subscript[q, "N",3,4][0]==Sqrt[3]/2,Subscript[q, "N",1,7][0]==−(1/2),
Subscript[q, "N",1,8][0]==−(Sqrt[3]/2),Subscript[q, "N",4,3][0]==1/2,Subscript[q, "N"
,4,4][0]==−((3 Sqrt[3])/2),Subscript[q, 1][0]== 0};
InverseSimulation ["SI",Subscript[T, "SI"], ParametersList, InitialConditions , {{"N",1,1},{"N"
,1,2},{1}},{−1Sin[\[Pi]/2 #]&,1Sin[\[Pi]/4 #]&,\[Pi]/6 Sin[\[Pi]/4 #]^4&}, {1,1}, {Subscript[u
, 1],Subscript[u, 2],Subscript[u, 3]}, {"Discrete",500}]
```

Alguns dos resultados obtidos nestas simulações são mostrados nos gráficos das Figuras 18 a 24. Além disso, a Figura 25 apresenta o gráfico de linhas produzido pelo comando Animation[0], que mostra a configuração instantânea do sistema no instante $t = 0$.

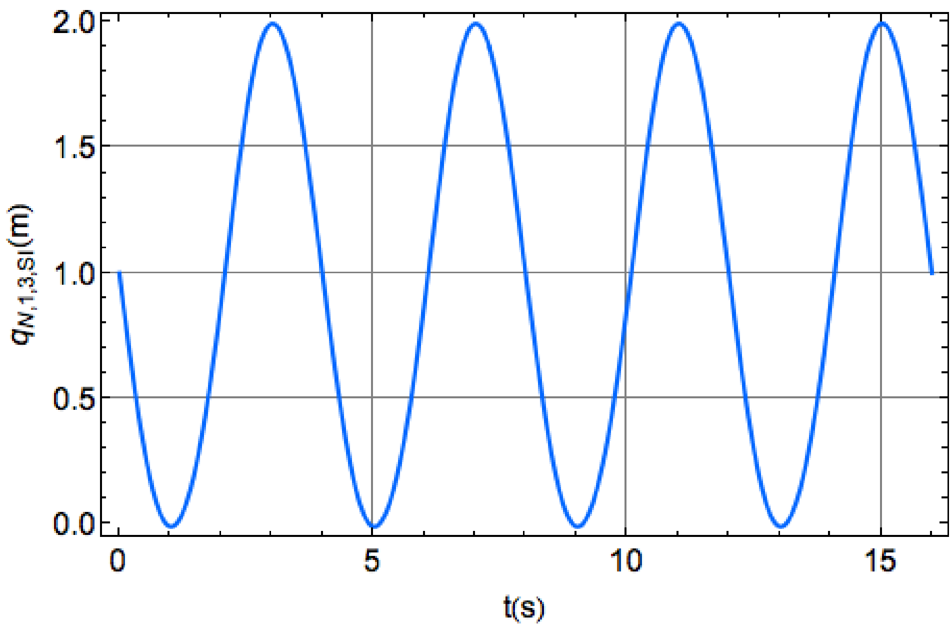


Figura 18: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_{\mathtt{N},1,3}$ na simulação SI.

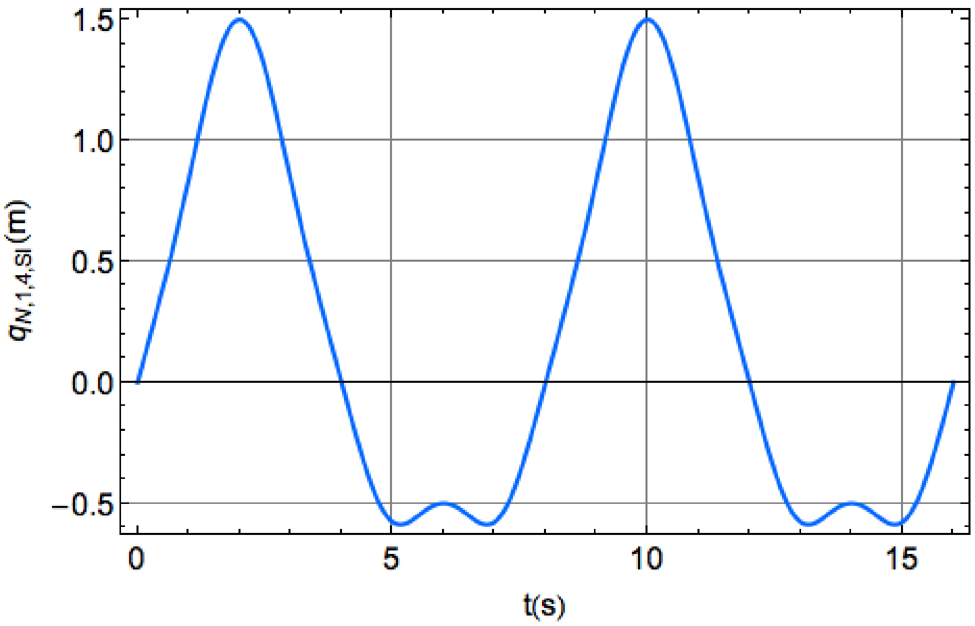


Figura 19: Histórico temporal da coordenada generalizada $q_{\mathrm{N},1,4}$ na simulação `SI`.

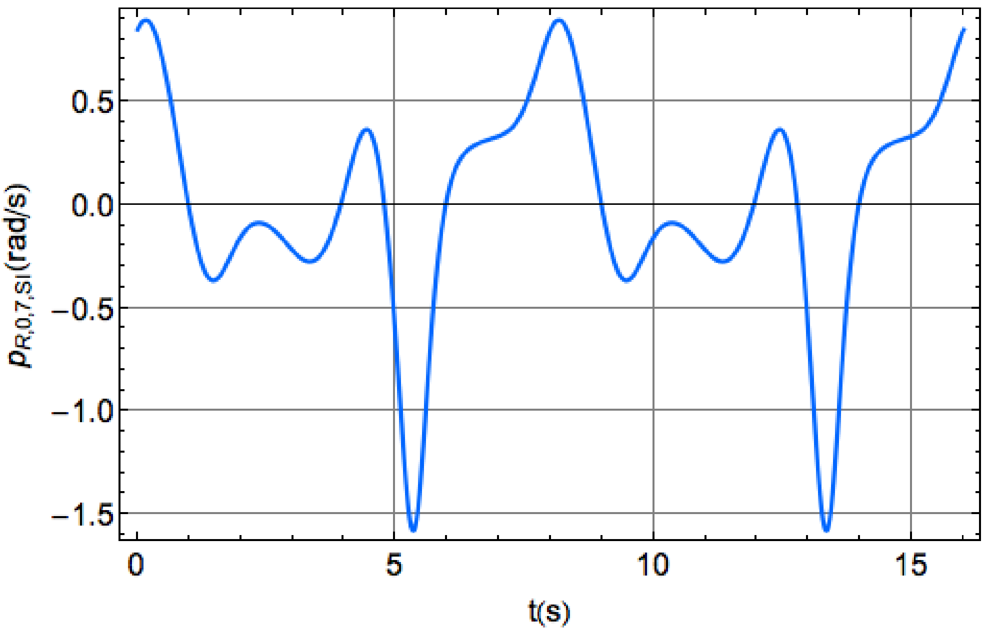


Figura 20: Histórico temporal da velocidade generalizada $p_{\mathrm{R},0,7}$ na simulação `SI`.

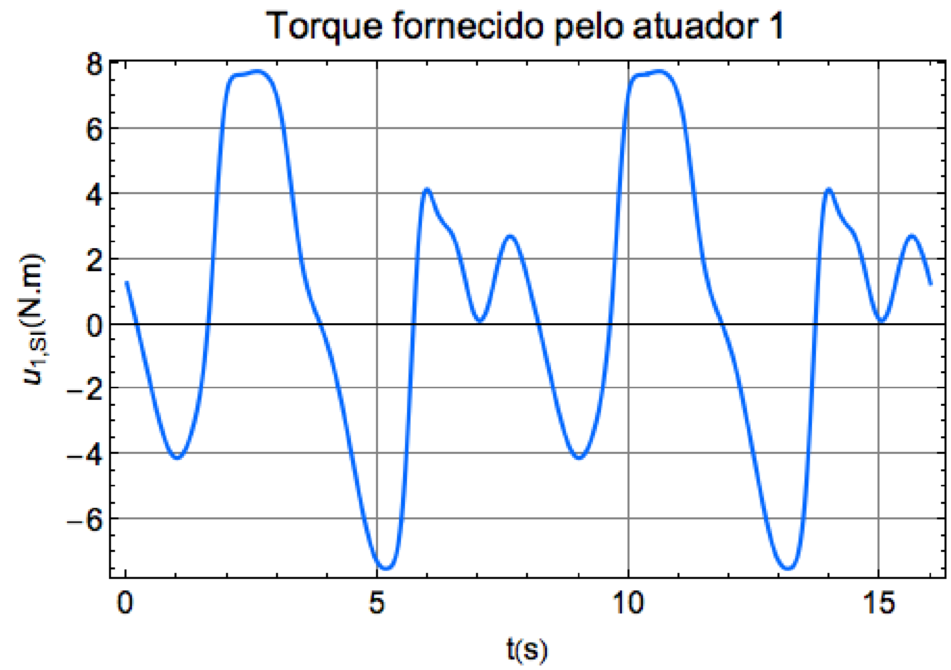


Figura 21: Histórico temporal do torque $u_1$ na simulação `SI`.

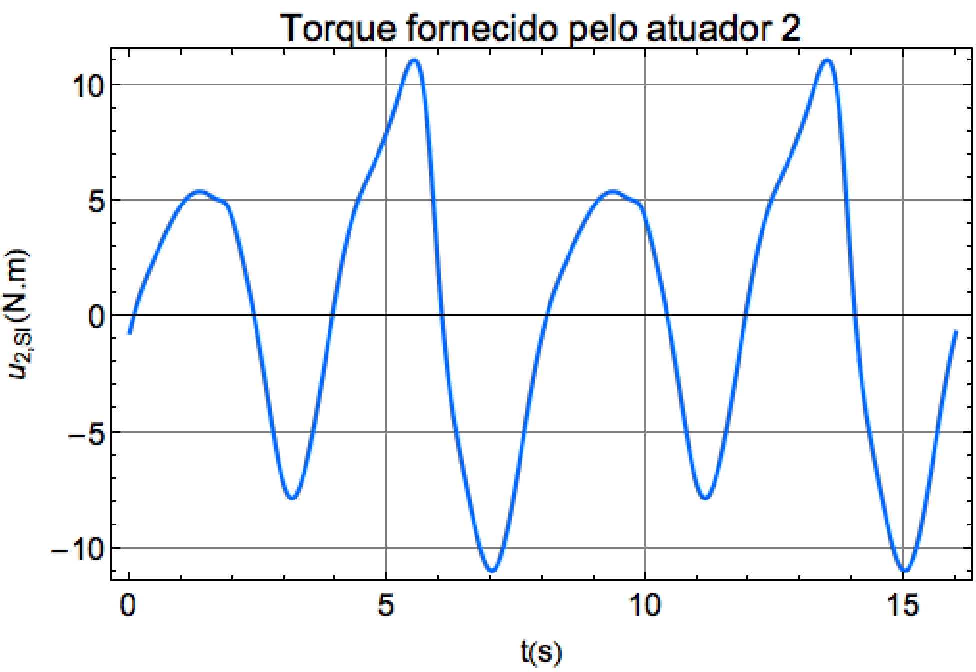


Figura 22: Histórico temporal do torque $u_2$ na simulação `SI`.

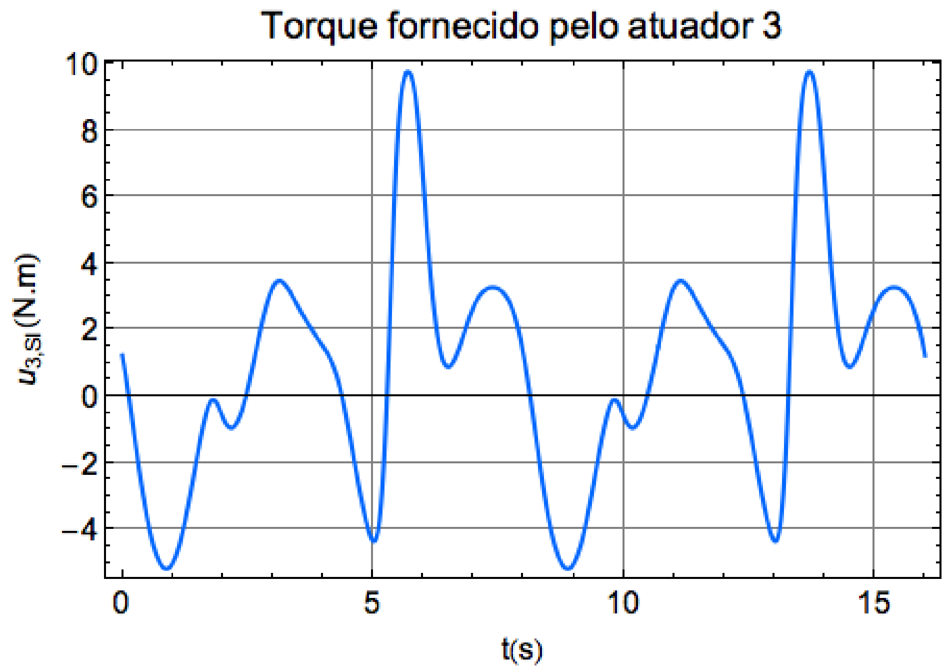


Figura 23: Histórico temporal do torque $u_3$ na simulação `SI`.

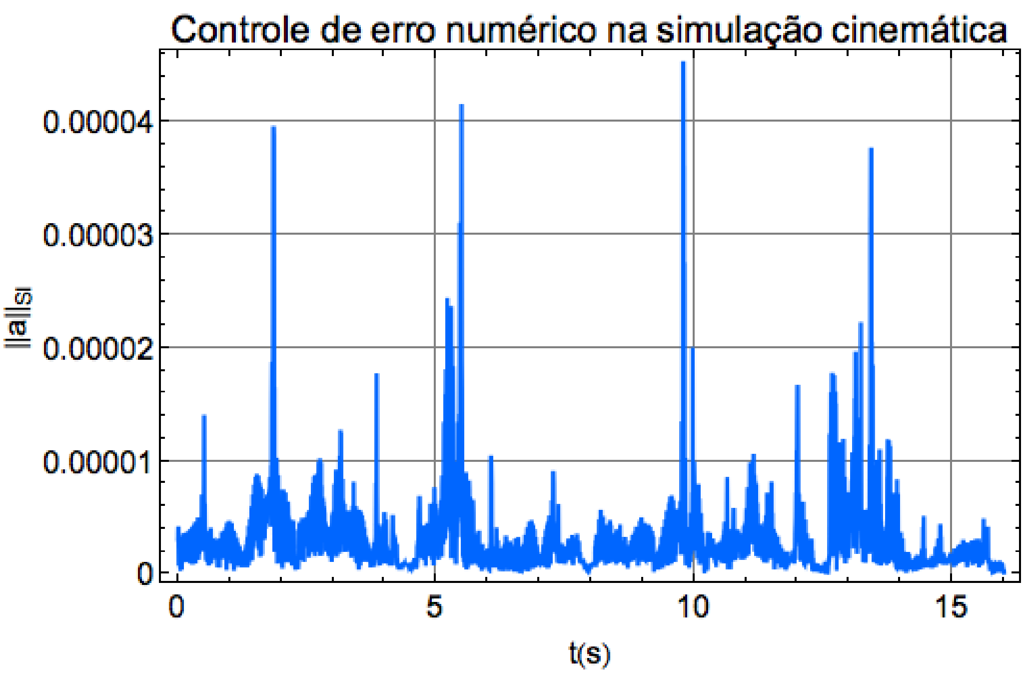


Figura 24: Histórico temporal do erro $\|\alpha\|$ na solução numérica das equações vinculares na simulação `SI`.

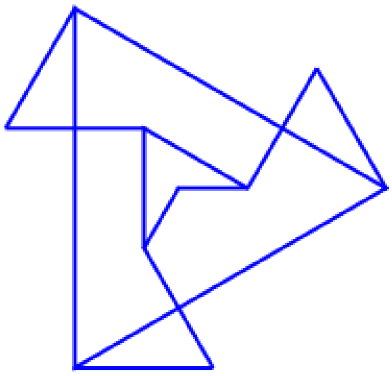

Figura 25: Gráfico de linhas que indica a configuração instantânea do sistema no instante $t = 0$ na simulação `SI`.