Introdução ao R e Simulação

Renato de Paula

2024-11-29

Contents

Chapter 1

Prefácio

Este material, "Introdução ao R", foi desenvolvido com o objetivo de servir como um guia acessível e prático para os alunos do curso de Laboratório de Estatística I - Introdução à Simulação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Reconhecendo a importância crescente da análise de dados na ciência moderna, o material aqui apresentado procura introduzir os conceitos fundamentais e as funcionalidades do R, uma ferramenta poderosa e amplamente utilizada na análise estatística.

Ao longo deste material, os leitores serão guiados por uma série de tópicos essenciais, desde a instalação do software e a navegação no ambiente RStudio, até ao manuseamento de estruturas de dados complexas e à criação de gráficos sofisticados. Cada capítulo foi estruturado de modo a proporcionar uma compreensão sólida dos conceitos abordados, combinando explicações teóricas com exemplos práticos e exercícios que reforçam a aprendizagem.

Este material foi elaborado para ir ao encontro das necessidades dos alunos, independentemente do seu nível de experiência prévia em Estatística. Seja para aqueles que estão a começar os seus estudos ou para os que já têm alguma familiaridade com o tema, o material proporciona uma abordagem estruturada que facilita a compreensão e a aplicação dos conceitos estatísticos. Acreditamos que, ao final deste curso, os alunos terão adquirido uma base sólida que lhes permitirá aplicar técnicas estatísticas em diversas áreas do conhecimento, usando o R de forma eficiente como uma ferramenta essencial para as suas análises de dados.

Chapter 2

Normas de Funcionamento

Docente: Renato de Paula

Gabinete: 6.4.21

email: rrpaula@ciencias.ulisboa.pt

Monitora: Ana Catarina Fernandes

Gabinete: 6.4.17

email: acafernandes@fc.ul.pt

AVALIAÇÃO

- Dois exercícios práticos a realizar em aula e dois testes.

ou

- **Exame final**
- Nota mínima de 8.5 valores em cada um dos testes.
- Datas de realização dos testes:
- Primeiro Exercício prático: 22 de outubro de 2024
- Primeiro teste: 5 de novembro de 2024
- Segundo Exercício prático: 13 de dezembro de 2024
- Segundo teste: 21 de janeiro de 2025
- **Nota final**:
  - $0.10 \times (Ex1) + 0.10 \times (Ex2) + 0.40 \times (Teste1) + 0.40 \times (Teste2)$

ou

- Nota do Exame final
- Exercício prático não efetuado tem cotação igual a zero.

Consulta permitida

- Teste 1: formulário com dimensão máxima igual a uma folha A4, frente e verso.
- Teste 2: formulário com dimensão máxima igual a uma folha A4, frente e verso.
- O formulário deve ser preparado individualmente e escrito à mão (não podem ser fotocópias).

Chapter 3

R e RStudio

O R é um software de código aberto desenvolvido como uma implementação gratuita da linguagem S, que foi concebida especificamente para computação estatística, programação estatística e geração de gráficos. A principal intenção era proporcionar aos utilizadores a capacidade de explorar dados de maneira intuitiva e interativa, utilizando representações gráficas significativas para facilitar a compreensão dos dados. O software estatístico R foi originalmente criado por Ross Ihaka e Robert Gentleman, da Universidade de Auckland, Nova Zelândia.

O R oferece um conjunto integrado de ferramentas para manipulação de dados, cálculo e visualização gráfica. Ele oferece:

- Manipulação eficiente de dados e armazenamento flexível;
- Operadores poderosos para cálculos em arrays e matrizes;
- Uma coleção abrangente, coerente e integrada de ferramentas para análise de dados;
- Recursos gráficos avançados para análise e visualização de dados, seja na tela ou em cópia impressa;
- Uma linguagem de programação robusta, intuitiva e eficaz, que inclui estruturas condicionais, loops, funções recursivas definidas pelo utilizador, além de recursos de entrada e saída de dados.

3.1 Instalação e funcionalidades básicas

- A versão base do R, que inclui o conjunto fundamental de comandos e funções, pode ser descarregada diretamente do site oficial: https://www.r-project.org/. Após instalar o R, é altamente recomendável instalar também um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) para facilitar o trabalho com o código R. Um IDE permite ao utilizador escrever, guardar e organizar scripts de código R de forma mais eficiente, além de executar comandos diretamente no Console do R e gerir configurações e saídas de forma conveniente. Uma escolha popular de IDE é o RStudio, que é gratuito e pode ser descarregado em https://www.rstudio.com/.

- Além do conjunto base de funções, o R oferece uma vasta gama de pacotes adicionais desenvolvidos pela comunidade de utilizadores. Estes pacotes podem ser instalados diretamente pelo Console do R ou através do menu do RStudio. Para instalar um pacote no Console, pode usar a função `install.packages("nome_do_pacote")`. É importante lembrar que, para instalar pacotes, é necessário estar ligado à internet. Para visualizar todos os pacotes já instalados no seu ambiente R, pode utilizar a função `installed.packages()`. Para usar os packages nãoo incluídos na base do R é necessário torna-los activos, usando a função `library()`.

3.2 Navegar no RStudio

Existem quatro painéis principais no ambiente de trabalho do RStudio:

- **Editor/Scripts**. Este painel é utilizado para criar, carregar e exibir scripts de código R. Ele oferece recursos como realce de sintaxe, preenchimento automático e a capacidade de executar o código linha por linha ou em blocos, o que facilita a edição e depuração do código.

- **Console**. No Console, os comandos são executados diretamente. Ele funciona de maneira semelhante ao console padrão do R, mas com melhorias significativas, como realce de sintaxe, preenchimento automático de código e integração com os demais painéis do RStudio. O Console é o local ideal para testes rápidos e execução de comandos imediatos.

- **Environment/Histórico**. O painel "Environment" (Ambiente) exibe informações sobre os objetos actualmente carregados na sessão do R, como conjuntos de dados, funções definidas pelo utilizador e outras variáveis. Isto ajuda a gerir e visualizar o conteúdo da memória de trabalho. A aba "History" (Histórico) armazena todos os comandos executados durante a sessão, permitindo fácil recuperação e reutilização de códigos anteriores.

- **Painel Inferior Direito**. Este painel é multifuncional e contém várias abas úteis:

  - **Files** (Ficheiros): lista todos os ficheiros no diretório de trabalho actual.
  - **Plots** (Gráficos): exibe quaisquer gráficos gerados durante a análise.
  - **Packages** (Pacotes): permite visualizar os pacotes instalados e carregados na sessão.

  - **Help** (Ajuda): fornece acesso ao sistema de ajuda embutido em HTML, que oferece documentação detalhada sobre funções e pacotes.
  - **Viewer** (Visualizador): utilizado para visualizar documentos HTML, PDFs e outros conteúdos dentro do RStudio.

3.3 Atalhos

- **CTRL+ENTER**: executa a(s) linha(s) de código selecionada(s) no script.
- **ALT+-**: insere o operador de atribuição (`<-`) no script.
- **CTRL+SHIFT+M**: (%>%) operador pipe no script.
- **CTRL+1**: move o cursor para o painel de script.
- **CTRL+2**: move o cursor para o console.
- **CTRL+ALT+I**: insere um novo “chunk” de código no R Markdown.
- **CTRL+SHIFT+K**: compila um documento R Markdown.
- **ALT+SHIFT+K**: abre uma janela com todos os atalhos de teclado disponíveis.

No MacBook, os atalhos geralmente são os mesmos, substituindo o **CTRL** por **Command** e o **ALT** por **Option**.

Chapter 4

R como Calculadora e Operações Aritméticas

A Estatística está intimamente ligada à Álgebra, especialmente no que diz respeito ao uso de matrizes e vetores para representar conjuntos de dados e variáveis. No R, estas estruturas de dados são amplamente utilizadas para facilitar a manipulação e a análise estatística. Por isso, é importante primeiro entender como o R lida com estas estruturas antes de avançar para comandos estatísticos mais específicos.

4.1 O Prompt do R

O R utiliza uma interface de linha de comando para executar operações e aceitar comandos diretamente. Esta interface é marcada pelo símbolo >, conhecido como o **prompt**. Quando se digita um comando após o prompt e se pressiona Enter, o R interpreta o comando, executa a operação correspondente e exibe o resultado no ecrã.

```
print("Meu primeiro comando no R!")
## [1] "Meu primeiro comando no R!"
```

Nas notas de aula, o código R digitado no console é exibido em caixas cinzentas. Quando se vê o símbolo ## no início de uma linha, isso indica o resultado (output) gerado pelo console R após a execução do código.

No R, o caractere `#` é utilizado para inserir comentários no código. Qualquer texto que aparece após `#` na mesma linha é ignorado pelo R durante a execução. Comentários são úteis para adicionar explicações ou anotações no código, como no exemplo abaixo:

```
# Este é um exemplo de comentário
2 + 2 # O R vai calcular 2 mais 2
## [1] 4
```

Se conhecer o nome de uma função e desejar aprender mais sobre o seu funcionamento, pode utilizar o comando `?` seguido do nome da função para aceder à documentação de ajuda correspondente. Por exemplo:

```
?sum
```

Este comando abrirá a página de ajuda para a função `sum`, que é utilizada para calcular a soma de elementos.

Além disso, o R oferece uma forma prática de visualizar exemplos de como uma função pode ser utilizada. Para ver exemplos de uso de uma função, pode usar o comando `example()` com o nome da função como argumento:

```
example(sum)
```

Este comando mostrará exemplos de aplicação da função `sum`, ajudando a entender melhor como pode ser usada em diferentes contextos.

4.2 Objetos e Variáveis

Em R, um **objeto** é uma unidade de armazenamento que pode conter diferentes tipos de dados ou funções, sendo referenciado por um nome. Esses dados podem incluir números, caracteres, vetores, matrizes, data frames, listas ou até mesmo funções. Objetos são criados e manipulados através de comandos, permitindo que seus valores sejam reutilizados em qualquer parte do código. Em resumo, tudo o que é criado ou carregado na sessão do R, como dados ou funções, é considerado um objeto.

4.2.1 O que é uma Variável?

Uma **variável** é um nome ou identificador associado a um objeto. Quando se cria uma variável, está-se, na verdade, a criar um "rótulo" que aponta para o objeto armazenado na memória. Assim, uma variável é o nome que se utiliza para aceder aos dados ou funções armazenados no objeto. Ela permite manipular e referenciar o objeto de forma conveniente ao longo do seu script ou análise.

4.2.2 Atribuições

- A expressão `x <- 10` cria uma variável chamada `x` e atribui-lhe o valor 10. Note que o operador de atribuição `<-` atribui o valor do lado direito à variável do lado esquerdo. O lado esquerdo deve conter apenas um único nome de variável.
- Também é possível realizar atribuições usando o sinal de igualdade `=` ou o operador `->`. No entanto, para evitar confusões entre o operador de atribuição e o operador de igualdade, é recomendável usar `<-` para atribuições.

```r
# Atribuição correta
a <- 10
b <- a + 1
```

```r
# Atribuição incorreta
10 = a
a + 2 = 10 # Uma atribuição não é uma equação
```

- O comando `c(1,2,3,4,5)` combina os números 1, 2, 3, 4 e 5 em um vetor, criando uma sequência de valores.
- Vetores podem ser atribuídos a objetos. Por exemplo:

```r
X <- c(2,12,22,32)
```

Esta linha de código atribui um vetor numérico de comprimento 4 ao objeto `X`. É importante lembrar que o R distingue entre maiúsculas e minúsculas, o que significa que `X` e `x` são considerados dois objetos distintos.

Ao definir objetos no console, está a modificar o espaço de trabalho actual. Para visualizar todas as variáveis e objetos actualmente guardados no seu espaço de trabalho, pode usar o comando:

```r
ls()
```

No RStudio, a aba *Environment* exibe todos os objetos e valores presentes no espaço de trabalho.

4.2.3 Regras para definição de variáveis

Os nomes de variáveis em R devem começar com uma letra ou um ponto final (desde que o ponto final seja seguido por uma letra) e podem incluir letras, números, pontos e sublinhados.

- O nome de uma variável **não pode** conter espaços ou caracteres especiais (como @, #, $, %). Apenas letras, números, pontos e sublinhados (_) são permitidos. Exemplo de nome válido: `nome_cliente2`.
- Ao definir nomes de variáveis, **não é permitido** usar palavras reservadas do R. Palavras reservadas são termos que têm um significado especial no R e não podem ser redefinidos. Exemplos de palavras reservadas incluem: `if`, `else`, `for`, `while`, `class`, `FALSE`, `TRUE`, `exp`, `sum`.
- O R diferencia letras maiúsculas de minúsculas, o que significa que `fcul` e `Fcul` são tratadas como variáveis diferentes. Uma convenção comum é usar letras minúsculas para nomes de variáveis e separar palavras com sublinhados. Exemplo: `faculdade_de_ciencias`.
- Escolha nomes de variáveis que descrevam claramente a sua finalidade para que o código seja mais legível e compreensível. Por exemplo, use `nome` em vez de `x`.

```
idade <- 20
Idade <- 30
```

Neste exemplo, `idade` e `Idade` são duas variáveis diferentes devido à diferenciação entre letras maiúsculas e minúsculas.

4.2.4 Tipos de Dados

Em R, variáveis podem armazenar diferentes tipos de dados, incluindo:

- **Numeric**: números inteiros ou decimais. Exemplo: `42`, `3.14`.
- **Character**: sequências de caracteres (texto). Exemplo: `"Olá"`.
- **Logical**: valores booleanos que representam verdadeiro ou falso. Exemplo: `TRUE`, `FALSE`.
- **Vectors**: coleções de elementos do mesmo tipo. Exemplos: `c(1, 2, 3)` para números, `c("a", "b", "c")` para caracteres.
- **Data Frames**: estruturas de dados tabulares que contêm linhas e colunas, semelhantes a uma tabela de banco de dados ou a uma folha de cálculo.
- **Lists**: coleções que podem conter elementos de diferentes tipos, como números, caracteres, vetores, e até mesmo outros data frames.
- **Factors**: variáveis categóricas que representam dados categóricos e são armazenadas como inteiros. São especialmente úteis para análises estatísticas que envolvem dados categóricos.

```
# Numeric
a <- 3.14
```

```r
# Character
b <- "Programação R"

# Logical
c <- 3 < 2

# Vectors
d <- c(1, 2, 3)
```

4.2.5 Comandos Importantes

Abaixo estão alguns comandos úteis para manipular variáveis e objetos no R:

```r
ls() # Exibe a lista de variáveis atualmente armazenadas na memória

ls.str() # Mostra a estrutura das variáveis armazenadas na memória

rm(a) # Remove o objeto 'a' da memória

rm(list=ls()) # Remove todos os objetos da memória

save.image('nome-do-arquivo.RData') # Salva o espaço de trabalho atual em um arquivo .RData
```

4.3 Operadores Aritméticos em R

Operador	Descrição	Exemplo
+	Adiciona dois valores	`5 + 2` resulta em 7
-	Subtrai dois valores	`5 - 2` resulta em 3
*	Multiplica dois valores	`5 * 2` resulta em 10
/	Divide dois valores (sem arredondamento)	`5 / 2` resulta em 2.5
%/%	Realiza divisão inteira	`5 %/% 2` resulta em 2
%%	Retorna o resto da divisão	`5 %% 2` resulta em 1
^	Realiza exponenciação	`5 ^ 2` resulta em 25

Exemplos:

```
1+1
## [1] 2

5-2
## [1] 3

5*21
## [1] 105

sqrt(9)
## [1] 3

3^3
## [1] 27

3**3
## [1] 27

log(9)
## [1] 2.197225

log10(9)
## [1] 0.9542425

exp(1)
## [1] 2.718282

# prioridade de resolução
19 + 26 /4 -2 *10
## [1] 5.5

((19 + 26) /(4 -2))*10
## [1] 225
```

Ao contrário de funções simples como `ls()`, a maioria das funções no R requer um ou mais *argumentos*. Nos exemplos acima, utilizamos funções predefinidas do R como `sqrt()`, `log()`, `log10()` e `exp()`, que aceitam argumentos específicos.

4.3.1 Controle da Quantidade de Dígitos Mostrados

O R permite ajustar a precisão dos números exibidos alterando a configuração global de dígitos. Veja o exemplo a seguir:

```
exp(1)
## [1] 2.718282

options(digits = 20)
exp(1)
## [1] 2.7182818284590450908

options(digits = 3)
exp(1)
## [1] 2.72
```

4.3.2 Objetos Predefinidos, Infinito, Indefinido e Valores Ausentes

O R inclui diversos conjuntos de dados predefinidos que podem ser usados para prática e teste de funções. Para visualizar todos os conjuntos de dados disponíveis, pode-se utilizar o seguinte comando:

```
data()
```

Este comando exibe uma lista de nomes de objetos para cada conjunto de dados disponível. Esses conjuntos de dados podem ser utilizados diretamente ao simplesmente digitar o nome no console. Por exemplo, ao digitar:

```
co2
```

O R exibirá os dados de concentração atmosférica de CO2 coletados em Mauna Loa.

Além dos conjuntos de dados, o R também possui objetos predefinidos que representam constantes matemáticas, como `pi` para o número π e `Inf` para o ∞.

```
pi
## [1] 3.14

1/0
## [1] Inf

2*Inf
## [1] Inf

-1/0
## [1] -Inf
```

```
0/0
## [1] NaN

0*Inf
## [1] NaN

Inf - Inf
## [1] NaN

sqrt(-1)
## Warning in sqrt(-1): NaNs produced
## [1] NaN

c(1,2,3,NA,5)
## [1]  1  2  3 NA  5

mean(c(1,2,3,NA,5))
## [1] NA

mean(c(1,2,3,NA,5), na.rm = TRUE)
## [1] 2.75

x <- c(1, 2, NaN, 4, 5)
y <- c(1, 2, NA, 4, 5)

# Note que isso não funciona
y == NA
## [1] NA NA NA NA NA

# E isso também não
y == "NA"
## [1] FALSE FALSE    NA FALSE FALSE

is.na(x)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.nan(x)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.na(y)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.nan(y)
## [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
# Operações com NaN e NA
sum(x)  # Retorna: NaN, porque a soma envolve um NaN
## [1] NaN

sum(y)  # Retorna: NA, porque a soma envolve um NA
## [1] NA

sum(x, na.rm = TRUE)  # Retorna: 12, ignora NaN na soma
## [1] 12

sum(y, na.rm = TRUE)  # Retorna: 12, ignora NA na soma
## [1] 12
```

- **NaN** (Not a Number): Representa resultados indefinidos de operações matemáticas. Por exemplo, operações como `0/0` ou `sqrt(-1)` geram um `NaN` porque o resultado não é um número real. No R, `NaN` é tecnicamente um tipo especial de `NA` que indica especificamente um resultado numérico indefinido.

- **NA** (Not Available): Indica dados ausentes ou valores que não estão disponíveis num conjunto de dados. Por exemplo, em um vetor de dados, se um valor está ausente ou não foi medido, ele é representado por `NA`. Ao contrário de `NaN`, `NA` é utilizado para representar qualquer tipo de dado ausente, não apenas valores numéricos.

4.3.3 Lidando com NaN e NA em Operações

Ao trabalhar com dados, é importante saber como lidar com `NaN` e `NA` para evitar erros inesperados. Funções como `mean()` e `sum()` podem retornar `NA` ou `NaN` se contiverem esses valores. Para ignorar `NA` ou `NaN` ao realizar cálculos, você pode usar o argumento `na.rm = TRUE`, que remove os valores ausentes ou indefinidos da operação.

```
mean(c(1, 2, 3, NA, 5), na.rm = TRUE)  # Calcula a média ignorando NA
## [1] 2.75

sum(x, na.rm = TRUE)  # Soma ignorando NaN
## [1] 12

sum(y, na.rm = TRUE)  # Soma ignorando NA
## [1] 12
```

4.3.4 Funções Úteis para Detectar NaN e NA

Para verificar a presença de `NA` ou `NaN` em um vetor ou conjunto de dados, pode-se usar as funções `is.na()` e `is.nan()`. A função `is.na()` identifica todos os valores que são `NA` ou `NaN`, enquanto `is.nan()` identifica especificamente valores que são `NaN`. Por exemplo:

```
is.na(x)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.nan(x)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.na(y)
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE

is.nan(y)
## [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

Essas funções são úteis para limpar e preparar dados antes de realizar análises estatísticas, garantindo que os cálculos sejam precisos e significativos.

4.3.5 Tipagem Dinâmica em R

Em R, o tipo de uma variável é determinado dinamicamente com base no valor atribuído a ela. Isso significa que o R automaticamente define o tipo de dado de uma variável quando lhe é atribuído um valor.

```
x <- 5
class(x)
## [1] "numeric"

y <- "Cinco"
class(y)
## [1] "character"

z <- TRUE
class(z)
## [1] "logical"
```

- A função `class()` retorna a **classe** de um objeto em R. A classe de um objeto determina como ele será tratado pelas funções e operações que podem ser aplicadas a ele. Por exemplo, vetores, matrizes, data frames e listas são diferentes classes de objetos em R, cada uma com suas próprias características e métodos.

- A função `typeof()` em R é usada para retornar o **tipo de armazenamento interno** de um objeto. Ela fornece informações detalhadas sobre como os dados são representados na memória do computador.

```r
x <- 1:10
class(x)
## [1] "integer"

typeof(x)
## [1] "integer"

y <- c(1.1, 2.2, 3.3)
class(y)
## [1] "numeric"

typeof(y)
## [1] "double"

z <- data.frame(a = 1:3, b = c("A", "B", "C"))
class(z)
## [1] "data.frame"

typeof(z)
## [1] "list"

w <- list(a = 1, b = "text")
class(w)
## [1] "list"

typeof(w)
## [1] "list"
```

Neste exemplo, `class(x)` e `typeof(x)` ambos retornam "integer" para um vetor de inteiros, enquanto `class(y)` retorna "numeric" para um vetor de números de ponto flutuante, e `typeof(y)` retorna "double", mostrando o tipo específico de armazenamento na memória. Para um data.frame, `class(z)` retorna "data.frame", enquanto `typeof(z)` retorna "list", indicando que os data frames são armazenados internamente como listas.

4.3.6 Conversão entre Tipos de Dados

Em R, é possível converter uma variável de um tipo de dado para outro usando funções de conversão. Isso é especialmente útil ao trabalhar com dados que podem ter sido importados de fontes externas e precisam ser manipulados ou analisados de diferentes maneiras.

```r
# Convertendo um inteiro em uma string (caractere)
a <- 15
b <- as.character(15)
print(b)
## [1] "15"

# Convertendo um número de ponto flutuante (float) em um inteiro
x <- 1.5
y <- as.integer(x)
print(y)
## [1] 1

# Convertendo uma string em um número (float)
z <- "10"
w <- as.numeric(z)
print(w)
## [1] 10
```

Essas funções de conversão são essenciais quando há necessidade de manipular diferentes tipos de dados de forma eficiente em análises estatísticas e outras operações de programação.

4.4 Funções `print()`, `readline()`, `paste()` e `cat()`

No R, existem várias funções úteis para exibir, receber e concatenar informações. Aqui estão algumas das mais comuns:

- `print()`: Utilizada para exibir valores e resultados de expressões no console. É a função básica para mostrar a saída de dados no R.
- `readline()`: Usada para receber entradas do utilizador via teclado. Esta função permite que o script pause e aguarde a entrada do utilizador
- `paste()`: Utilizada para concatenar (combinar) sequências de caracteres (strings) com um separador específico entre elas. Por padrão, o separador é um espaço.
- `paste0()`: Semelhante a `paste()`, mas concatena strings sem qualquer separador.
- `cat()`: Usada para concatenar e exibir uma ou mais strings ou valores de uma forma direta, sem estruturas de formatação adicionais como aspas. Ao contrário de `print()`, `cat()` não retorna o resultado em uma nova linha.

Exemplo 1:

```
nome1 <- "faculdade"
nome2 <- "ciências"
print(paste(nome1, nome2))
## [1] "faculdade ciências"
```

Neste exemplo, `paste()` concatena as duas strings com um espaço entre elas.

Exemplo 2:

```
# Solicitar entrada do utilizador
n <- readline(prompt = "Digite um número: ")

# Converta a entrada em um valor numérico
n <- as.integer(n)

# Imprima o valor no console
print(n+1)
```

Aqui, `readline()` recebe a entrada do utilizador, e `as.integer()` converte essa entrada para um número inteiro. O resultado é incrementado em 1 e exibido.

Exemplo 3:

```
# Solicitar entrada do utilizador
nome <- readline(prompt = "Entre com o seu nome: ")

# Imprima uma mensagem de saudação
cat("Olá, ",nome, "!")
```

O uso de `cat()` aqui é para exibir uma mensagem de saudação que inclui o nome do utilizador.

Exemplo 4:

```
# Solicitar ao utilizador a entrada numérica
idade <- readline(prompt = "Digite a sua idade: ")

# Converta a entrada em um valor numérico
idade <- as.numeric(idade)

# Verifique se a entrada é numérica
if (is.na(idade)) {
cat("Entrada inválida. Insira um valor numérico.\n")
} else {
  cat("Você tem ", idade, " anos.\n")
}
```

Este exemplo mostra como verificar se a entrada é numérica usando `is.na()` e fornecer feedback apropriado ao utilizador.

Concatenando Strings

```
result <- paste("Hello", "World")
print(result)
## [1] "Hello World"
```

Concatenando Múltiplas Strings

```
result <- paste("Data", "Science", "with", "R")
print(result)
## [1] "Data Science with R"
```

Concatenando Strings com um Separador Específico

```
result <- paste("2024", "04", "28", sep="-")
print(result)
## [1] "2024-04-28"
```

Concatenando Vetores de Strings

```
first_names <- c("Anna", "Bruno", "Carlos")
last_names <- c("Smith", "Oliveira", "Santos")
result <- paste(first_names, last_names)
print(result)
## [1] "Anna Smith"     "Bruno Oliveira" "Carlos Santos"
```

Concatene com cada elemento de um vetor

```
numbers <- 1:3
result <- paste("Number", numbers)
print(result)
## [1] "Number 1" "Number 2" "Number 3"
```

Usando `paste0()` para Concatenar sem Espaço

```
result <- paste0("Hello", "World")
print(result)
## [1] "HelloWorld"
```

Concatenando Strings com Números

```
age <- 25
result <- paste("I am", age, "years old")
print(result)
## [1] "I am 25 years old"
```

4.5 Quizz

1. O que é o 'prompt' do R?

- a) Um símbolo que marca o início de um comando
- b) Um objeto armazenado na memória
- c) Uma função para adicionar números
- d) Um operador lógico

2. Qual comando é usado para imprimir texto no console no R?

- a) `print()`
- b) `paste()`
- c) `cat()`
- d) `readline()`

3. O que o caractere `#` faz em um script R?

- a) Executa o comando
- b) Cria uma variável
- c) Indica um comentário
- d) Combina dois números

4. Como você cria um vetor com os números 1 a 5?

- a) `c(1 2 3 4 5)`
- b) `combine(1,2,3,4,5)`
- c) `c(1,2,3,4,5)`
- d) `vector(1,2,3,4,5)`

5. O que o operador `<-` faz no R?

- a) Atribui um valor a uma variável
- b) Compara dois números
- c) Soma dois números
- d) Remove um objeto

6. Como remover um objeto da memória no R?

- a) `delete(x)`
- b) `remove(x)`
- c) `rm(x)`
- d) `clear(x)`

7. Qual operador é usado para divisão inteira em R?

- a) `/`
- b) `%/%`
- c) `%%`
- d) `^`

8. Qual operador retorna o resto da divisão de dois números?

- a) `%/%`
- b) `%%`
- c) `^`
- d) `/`

9. Como você controla a precisão dos números exibidos no console do R?

- a) Usando a função `precision()`
- b) Alterando a opção `options(digits=)`
- c) Usando a função `format()`
- d) Usando o comando `round()`

10. Qual função retorna a classe de um objeto no R?

- a) `typeof()`
- b) `class()`
- c) `str()`
- d) `is()`

11. O que `c()` faz no R?

- a) Cria um vetor
- b) Calcula a soma de números
- c) Remove um vetor
- d) Compara dois números

12. O que a função `readline()` faz?

- a) Imprime texto no console
- b) Lê uma linha de texto do utilizador
- c) Remove um objeto da memória
- d) Soma dois números

13. O que `paste()` faz?

- a) Soma números
- b) Imprime texto sem quebrar linhas
- c) Combina strings
- d) Cria vetores

4.6 Operadores Lógicos e Relacionais

Em R, operadores lógicos e relacionais são utilizados para realizar comparações e tomar decisões com base nos resultados dessas comparações. Esses operadores são fundamentais para a construção de estruturas de controle de fluxo, como instruções condicionais (`if`, `else`) e loops (`for`, `while`).

4.6.1 Operadores Lógicos

Os operadores lógicos são usados para combinar ou modificar condições lógicas, retornando valores booleanos (`TRUE` ou `FALSE`).

- `&` (E lógico): Retorna `TRUE` se **todas** as expressões forem verdadeiras.
- `|` (OU lógico): Retorna `TRUE` se **pelo menos uma** das expressões for verdadeira.
- `!` (Não lógico): Inverte o valor de uma expressão booleana, transformando `TRUE` em `FALSE` e vice-versa.

Exemplos:

```
(5 > 3) & (4 > 2)   # Ambas as condições são verdadeiras
## [1] TRUE

(5 < 3) | (4 > 2)   # Apenas uma condição é verdadeira
## [1] TRUE

!(5 > 3)            # Inverte o valor lógico de TRUE para FALSE
## [1] FALSE
```

4.6.2 Operadores Relacionais

Os operadores relacionais são usados para comparar valores e retornam valores lógicos (`TRUE` ou `FALSE`) com base na comparação.

- `a == b`: Verifica se "a" é igual a "b".
- `a != b`: Verifica se "a" é diferente de "b".
- `a > b`: Verifica se "a" é maior que "b".
- `a < b`: Verifica se "a" é menor que "b".
- `a >= b`: Verifica se "a" é maior ou igual a "b".
- `a <= b`: Verifica se "a" é menor ou igual a "b".
- `is.na(a)`: Verifica se "a" é um valor ausente (NA).
- `is.null(a)`: Verifica se "a" é nulo (NULL).

Exemplos:

```
# Maior que
2 > 1
## [1] TRUE

1 > 2
## [1] FALSE

# Menor que
1 < 2
## [1] TRUE

# Maior ou igual a
0 >= (2+(-2))
## [1] TRUE

# Menor ou igual a
1 <= 3
## [1] TRUE

# Conjunção E (ambas as condições devem ser verdadeiras)
9 > 11 & 0 < 1
## [1] FALSE

# Disjunção OU (pelo menos uma condição deve ser verdadeira)
6 < 5 | 0>-1
## [1] TRUE

# Igual a
1 == 2/2
```

```
## [1] TRUE

# Diferente de
1 != 2
## [1] TRUE
```

4.7 Quizz

1. Qual operador relacional verifica se dois valores são iguais?

- a) `=`
- b) `==`
- c) `!=`
- d) `<=`

2. Qual operador verifica se um valor é maior que outro?

- a) `>=`
- b) `<`
- c) `>`
- d) `<=`

3. Qual o resultado de `5 != 3`?

- a) `TRUE`
- b) `FALSE`
- c) `NA`
- d) `NULL`

4. O que `x & y` faz em R, onde `x` e `y` são lógicos?

- a) Realiza uma operação "OR".
- b) Verifica se ambos são `TRUE`.
- c) Verifica se ao menos um é `TRUE`.
- d) Inverte o valor lógico de `x`.

5. O que faz o operador `|` em expressões lógicas?

- a) Verifica se ambos os operandos são verdadeiros.
- b) Verifica se ao menos um dos operandos é verdadeiro.
- c) Verifica se ambos os operandos são falsos.

- d) Compara se os operandos são iguais.

6. O que faz o operador `!` em R?

- a) Inverte um valor lógico
- b) Multiplica dois valores
- c) Compara dois valores
- d) Calcula o resto da divisão

7. Qual o resultado de `!(TRUE)`?

- a) TRUE
- b) FALSE
- c) NA
- d) NULL

4.8 Exercícios

1. Escreva um programa em R que leia dois inteiros inseridos pelo utilizador e imprima:

- A soma dos dois números.
- O produto dos dois números.
- A diferença entre o primeiro e o segundo número.
- A divisão do primeiro pelo segundo número.
- O resto da divisão do primeiro pelo segundo.
- O resultado do primeiro número elevado à potência do segundo.

Dica: Use as funções `readline()` para entrada de dados e `as.integer()` para conversão de tipos.

2. Escreva um programa em R que leia dois números de ponto flutuante (números decimais) e imprima:

- A soma dos dois números.
- A diferença entre os dois números.
- O produto dos dois números.
- O resultado do primeiro número elevado à potência do segundo.

Dica: Use `as.numeric()` para converter a entrada para números de ponto flutuante.

3. Escreva um programa em R que leia uma distância em milhas inserida pelo utilizador e a converta para quilómetros usando a fórmula: $K = M * 1.609344$.

Dica: Lembre-se de usar `as.numeric()` para converter a entrada para um número.

4. Escreva um programa em R que leia três inteiros correspondentes ao comprimento, largura e altura de um paralelepípedo, e imprima seu volume.

5. Escreva um programa em R que leia três inteiros e imprima a média dos três números.

6. Escreva um programa em R que leia uma temperatura em graus Fahrenheit e a converta para graus Celsius usando a fórmula:: $C = \frac{F-32}{1.8}$.

7. Escreva um programa em R que leia uma hora no formato de 24 horas e imprima a hora correspondente no formato de 12 horas.

8. Está a olhar para um relógio e são exatamente 14h. Definiu um alarme para tocar dentro de 51 horas. A que horas o alarme tocará?

9. Escreva um programa em R que resolva a versão geral do problema acima. Peça ao utilizador para inserir a hora atual (em horas) e o número de horas de espera antes que o alarme toque. O programa deve imprimir a hora em que o alarme tocará.

10. Escreva um programa em R que leia um número inteiro fornecido pelo utilizador e verifique se esse número é maior que 10. O programa deve imprimir `TRUE` se o número for maior que 10 ou `FALSE` caso contrário.

11. Escreva um programa em R que leia dois números fornecidos pelo utilizador e verifique se eles são iguais. O programa deve imprimir `TRUE` se os números são iguais ou `FALSE` caso contrário.

12. Escreva um programa em R que peça ao utilizador para inserir dois números e verifique se o primeiro número é maior ou igual ao segundo. O programa deve imprimir `TRUE` ou `FALSE`.

13. Escreva um programa em R que peça ao utilizador para inserir um número e verifique se esse número está entre 0 e 100, inclusive. O programa deve imprimir `TRUE` se o número está no intervalo e `FALSE` caso contrário.

14. Escreva um programa em R que leia três números fornecidos pelo utilizador e verifique se o primeiro número é menor que o segundo e se o segundo é menor que o terceiro. O programa deve imprimir uma mensagem indicando se a condição é verdadeira ou falsa.

Chapter 5

Estrutura de Dados Básicas

Em R, temos dois tipos principais de objetos: funções e dados.

- **Funções**: São objetos que executam operações específicas.
  - Exemplos de funções:
    * `cos()` - calcula o cosseno de um ângulo.
    * `print()` - imprime valores no console.
    * `plot()` - cria gráficos.
    * `integrate()` - calcula a integral de uma função.
- **Dados**: São objetos que contêm informações, como números, textos ou outros tipos de dados.
  - Exemplos de dados:
    * `23` (número)
    * `"Hello"` (texto ou string)
    * `TRUE` (valor lógico)
    * `c(1, 2, 3)` (vetor numérico)
    * `data.frame(nome = c("Alice", "Bob"), idade = c(25, 30))` (estrutura tabular)
    * `list(numero = 42, nome = "Alice", flag = TRUE)` (coleção de elementos de diferentes tipos)
    * `factor(c("homem", "mulher", "mulher", "homem"))` (dados categóricos)

5.1 Vetor

Um **vetor** é uma estrutura de dados básica que armazena uma sequência de elementos do **mesmo tipo**. Os vetores podem conter dados numéricos, caracteres, valores lógicos (`TRUE`/`FALSE`), números complexos, entre outros.

- Todos os elementos de um vetor devem ser do mesmo tipo.
- Os elementos de um vetor são indexados a partir de 1 (ou seja, o primeiro elemento está na posição 1).
- Os vetores podem ser criados usando a função `c()` (concatenate) e são facilmente manipulados com uma variedade de funções.

5.1.1 Tipos Comuns de Vetores

```
# Vetor numérico
c(1.1, 2.2, 3.3)
## [1] 1.1 2.2 3.3

# Vetor de caracteres
c("a", "b", "c")
## [1] "a" "b" "c"
# ou
c('a','b','c')
## [1] "a" "b" "c"

# Vetor lógico
c(TRUE, 1==2)
## [1]  TRUE FALSE

# Não podemos misturar tipos de dados em um vetor...
c(3, 1==2, "a") # Observe que o R converteu tudo para "character"!
## [1] "3"     "FALSE" "a"
```

5.1.2 Construindo Vetores

```
# Inteiros de 1 a 10
x <- 1:10
x
##  [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10

b <- 10:1
b
##  [1] 10  9  8  7  6  5  4  3  2  1

# Sequência de 0 a 50 com incrementos de 10
```

```
a <- seq(from = 0, to = 50, by=10)
a
## [1]  0 10 20 30 40 50

# Sequência de 15 números de 0 a 1
y <- seq(0,1, length=15)
y
##  [1] 0.0000 0.0714 0.1429 0.2143 0.2857 0.3571 0.4286 0.5000 0.5714 0.6429
## [11] 0.7143 0.7857 0.8571 0.9286 1.0000

# Repetição de um vetor várias vezes
z <- rep(1:3, times=4)
z
##  [1] 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3

# Repetição de cada elemento do vetor várias vezes
t <- rep(1:3, each=4)
t
##  [1] 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3

# Combine números, vetores ou ambos em um novo vetor
w <- c(x,z,5)
w
##  [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10  1  2  3  1  2  3  1  2  3  1  2  3  5
```

5.1.3 Acesso a Elementos de um Vetor

Pode aceder a elementos específicos de um vetor utilizando colchetes [ ] e índices.

```
# Defina um vetor com inteiros de (-5) a 5 e extraia os números com valor absoluto menor que 3:
x <- (-5):5
x
##  [1] -5 -4 -3 -2 -1  0  1  2  3  4  5

# Acesso por índice:
x[4:8]
## [1] -2 -1  0  1  2

# Seleção negativa (excluindo elementos):
x[-c(1:3,9:11)]
## [1] -2 -1  0  1  2

# Todos menos o último
x[-length(x)]
```

```
## [1] -5 -4 -3 -2 -1  0  1  2  3  4

# Vetor lógico para seleção
index <- abs(x)<3
index
##  [1] FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE

# Utilizando o vetor lógico para extrair elementos desejados:
x[index]
## [1] -2 -1  0  1  2

# Ou de forma compacta:
x[abs(x) < 3]
## [1] -2 -1  0  1  2

# Acesso a elementos com vetores predefinidos
letters[1:3]
## [1] "a" "b" "c"

letters[c(2,4,6)]
## [1] "b" "d" "f"

LETTERS[1:3]
## [1] "A" "B" "C"

y <- 1:10
y[ (y>5) ] # Seleciona qualquer número > 5
## [1]  6  7  8  9 10

y[ (y%%2==0) ] # Números divisíveis por 2
## [1]  2  4  6  8 10

y[ (y%%2==1) ] # Números não divisíveis por 2
## [1] 1 3 5 7 9

y[5] <- NA
y[!is.na(y)] # Todos os valores de y que não são NA
## [1]  1  2  3  4  6  7  8  9 10
```

5.1.4 Funções Comuns para Vetores

Os vetores são uma das estruturas de dados mais utilizadas no R, e existem diversas funções para manipular e obter informações sobre eles. Abaixo estão algumas das funções mais comuns usadas com vetores numéricos:

```r
num_vector <- c(2.2, 1.1, 3.3)

# Obtém o comprimento (número de elementos) de um vetor
length(num_vector)
## [1] 3

# Calcula o valor máximo de um vetor
max(num_vector)
## [1] 3.3

# Calcula o valor mínimo de um vetor
min(num_vector)
## [1] 1.1

# Calcula a soma dos elementos de um vetor
sum(num_vector)
## [1] 6.6

# Calcula a média (valor médio) dos elementos de um vetor
mean(num_vector)
## [1] 2.2

# Calcula a mediana dos elementos de um vetor
median(num_vector)
## [1] 2.2

# Retorna um vetor contendo o mínimo e o máximo
range(num_vector)
## [1] 1.1 3.3

# Calcula a variância amostral dos elementos de um vetor
var(num_vector)
## [1] 1.21

# Calcula os quantis dos elementos de um vetor
quantile(num_vector, type = 2)
##   0%  25%  50%  75% 100%
## 1.1  1.1  2.2  3.3  3.3

# Calcula a soma cumulativa dos elementos de um vetor
cumsum(num_vector)
## [1] 2.2 3.3 6.6

# Calcula o produto cumulativo dos elementos de um vetor
cumprod(num_vector)
```

```
## [1] 2.20 2.42 7.99

# Ordena os elementos de um vetor em ordem crescente
sort(num_vector)
## [1] 1.1 2.2 3.3

# Ordena os elementos de um vetor em ordem decrescente
sort(num_vector, decreasing = TRUE)
## [1] 3.3 2.2 1.1

# Remove elementos duplicados de um vetor
duplicate_vector <- c(1, 2, 2, 3, 3, 3)
unique(duplicate_vector)
## [1] 1 2 3
```

A função `which` é utilizada para encontrar os índices dos elementos de um vetor que satisfazem uma condição específica. Isto é útil quando se quer localizar a posição de certos valores dentro de um vetor.

```
y <- c(8, 3, 5, 7, 6, 6, 8, 9, 2, 3, 9, 4, 10, 4, 11)

# Encontrar os índices dos elementos que são maiores que 5
which(y > 5)
## [1]  1  4  5  6  7  8 11 13 15
```

Aqui, a função `which(y > 5)` retorna os índices dos elementos em `y` que são maiores que 5. Se quiser ver os valores em `y` que são maiores que 5, basta fazer:

```
y[y>5]
## [1]  8  7  6  6  8  9  9 10 11
```

5.1.5 Operações com Vetores

Os vetores no R suportam operações aritméticas e lógicas de forma elementar. Isto significa que as operações são aplicadas a cada elemento do vetor.

```
# Adição de 1 a cada elemento do vetor
num_vector + 1
## [1] 3.2 2.1 4.3

# Multiplicação de cada elemento por 2
num_vector * 2
## [1] 4.4 2.2 6.6
```

```
# Comparações: verifica se cada elemento é maior que 2
num_vector > 2
## [1]  TRUE FALSE  TRUE

# Exponenciação de elementos
c(2, 3, 5, 7)^2
## [1]  4  9 25 49

c(2, 3, 5, 7)^c(2, 3)
## [1]   4  27  25 343

c(1, 2, 3, 4, 5, 6)^c(2, 3, 4)
## [1]    1    8   81   16  125 1296

c(2, 3, 5, 7)^c(2, 3, 4)
## [1]   4  27 625  49
```

Os exemplos acima ilustram a **propriedade de reciclagem** do R. Quando operações são realizadas entre vetores de diferentes comprimentos, o R "recicla" (ou repete) o vetor menor até que corresponda ao comprimento do vetor maior. Se o comprimento do vetor maior não for um múltiplo inteiro do comprimento do vetor menor, o R emitirá um aviso.

Por exemplo:

```
c(2,3,5,7)^c(2,3)
## [1]   4  27  25 343
```

Este comando é expandido internamente para:

```
c(2,3,5,7)^c(2,3,2,3)
## [1]   4  27  25 343
```

No entanto, se os vetores não puderem ser "reciclados" perfeitamente, o R irá gerar um aviso:

```
c(2,3,5,7)^c(2,3,4)
## Warning in c(2, 3, 5, 7)^c(2, 3, 4): longer object length is not a multiple of
## shorter object length
## [1]   4  27 625  49
```

Neste caso, `c(2,3,5,7)^c(2,3,4)` é expandido para:

```
c(2,3,5,7)^c(2,3,4,2)
## [1]   4  27 625  49
```

Observe que o último elemento do vetor menor foi reciclado para corresponder ao comprimento do vetor maior, mas não completamente, resultando no aviso.

5.1.6 Exercícios

1. Crie os vetores:

(a) $(1, 2, 3, \ldots, 19, 20)$

(b) $(20, 19, \ldots, 2, 1)$

(c) $(1, 2, 3, \ldots, 19, 20, 19, 18, \ldots, 2, 1)$

(d) $(10, 20, 30, \ldots, 90, 10)$

(e) $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 3)$ onde existem 10 ocorrências do 1, 20 ocorrências do 2 e 30 ocorrências do 3.

2. Use a função `paste()` para criar o seguinte vetor de caracteres de tamanho 20:

("nome 1", "nome 2", ..., "nome 20")

3. Crie um vetor x_1 igual a "A" "A" "B" "B" "C" "C" "D" "D" "E" "E"

4. Crie um vetor x_2 igual a "a" "b" "c" "d" "e" "a" "b" "c" "d" "e"

5. Crie um vetor x_3 igual as palavras "uva" 10 vezes, "maçã" 9 vezes, "laranja" 6 vezes e "banana" 1 vez.

6. Crie um vetor de notas `notas <- c(7, 8, 9)` e atribua os nomes dos alunos "Ana", "João" e "Pedro" aos elementos. Acesse a nota do aluno "João" usando o nome. Dica: use a função `names()`.

7. Crie um vetor de 15 números aleatórios entre 1 e 100 (use a função `sample()`). Ordene esse vetor em ordem crescente e depois em ordem decrescente. Encontre o menor e o maior valor no vetor.

8. Crie um vetor de 20 números aleatórios entre 1 e 50 (use a função `sample()`). Calcule a soma, a média, o desvio padrão e o produto de todos os elementos do vetor.

9. Crie um vetor de 10 números aleatórios entre 1 e 100 (use a função `sample()`). Extraia os elementos do vetor que são maiores que 50. De seguida, substitua os valores menores que 30 por 0.

10. Crie um vetor de 10 números. Verifique quais elementos são maiores que 5 e quais são pares. Crie um novo vetor que contenha apenas os números que satisfazem ambas as condições.

11. Crie um vetor com 10 números inteiros. Multiplique os elementos nas posições 2, 4 e 6 por 2. Substitua o último elemento por 100.

12. Calcule a média dos vetores:

(a) $x = (1, 0, NA, 5, 7)$

(b) $y = (-Inf, 0, 1, NA, 2, 7, Inf)$

13. Crie:

(a) um vetor com valores $e^x \sin(x)$ nos pontos $x = 2, 2.1, 2.2, \ldots, 6$

(b) um vetor com valores $\left(3, \frac{3^2}{2}, \frac{3^3}{3}, \ldots, \frac{3^{30}}{30}\right)$

14. Calcule:

(a)
$$\sum_{i=1}^{1000} \frac{9}{10^i}$$

(b)
$$\sum_{i=10}^{100} i^3 + 4i^2$$

(c)
$$\sum_{i=1}^{25} \frac{2^i}{i} + \frac{3^i}{i^2}$$

5.2 Fatores

Em R, um **fator** é uma estrutura de dados usada para representar dados **categóricos**, ou seja, dados que podem ser classificados em categorias distintas. Os fatores são amplamente utilizados em análises estatísticas e visualizações de dados, pois permitem o tratamento eficiente e consistente de variáveis categóricas.

- **Níveis**: Os fatores possuem **níveis** (ou **levels**), que representam os diferentes valores possíveis que a variável categórica pode assumir. Por exemplo, para uma variável categórica que representa tamanho de roupa, os níveis poderiam ser “Pequeno”, “Médio” e “Grande”.

- **Armazenamento Interno**: Internamente, os fatores são armazenados como inteiros, onde cada inteiro corresponde a um nível específico. No entanto, quando exibidos, os fatores mostram os seus rótulos (labels) para facilitar a compreensão.
- **Fatores Ordenados e Não Ordenados**: Os fatores podem ser **ordenados** (quando há uma ordem lógica entre os níveis, como "Baixo", "Médio", "Alto") ou **não ordenados** (quando os níveis não têm uma ordem intrínseca).

Exemplos:

```
# Vetor de dados categóricos
data <- c("baixo", "medio", "alto", "medio", "baixo", "alto")

# Criar um fator não ordenado a partir dos dados categóricos
factor_data <- factor(data)

print(factor_data)
## [1] baixo    medio alto   medio baixo    alto
## Levels: alto baixo medio
```

Por padrão, os níveis são ordenados alfabeticamente. Podemos especificar a ordem dos níveis de acordo com a lógica desejada:

```
# Especificar a ordem dos níveis do fator
factor_data <- factor(data, levels = c("baixo", "medio", "alto"))
print(factor_data)
## [1] baixo    medio alto   medio baixo    alto
## Levels: baixo medio alto
```

Para criar um fator ordenado, onde os níveis têm uma ordem específica, usamos o argumento `ordered = TRUE`:

```
# Criar um fator ordenado
ordered_factor <- factor(data, levels = c("baixo", "medio", "alto"), ordered = TRUE)
print(ordered_factor)
## [1] baixo    medio alto   medio baixo    alto
## Levels: baixo < medio < alto

# Comparação entre categorias
ordered_factor[1] < ordered_factor[3]
## TRUE
```

5.2.1 Manipulação de Fatores

Podemos utilizar várias funções para verificar e modificar os níveis de um fator:

```r
# Verificar Níveis
levels(factor_data)
## [1] "baixo"    "medio" "alto"

# Modificar Níveis
levels(factor_data) <- c("Baixo", "Medio", "Alto")
print(factor_data)
## [1] Baixo    Medio Alto   Medio Baixo    Alto
## Levels: Baixo Medio Alto
```

5.2.2 Gerando Fatores com `gl()`

A função `gl()` (generate levels) é usada para criar fatores de maneira eficiente, especialmente quando se deseja gerar fatores com padrões repetitivos.

```r
# Sintaxe
gl(n, k, labels = seq_len(n), ordered = FALSE)
```

- `n`: um inteiro que fornece o número de níveis.
- `k`: um inteiro que fornece o número de replicações.
- `labels`: um vetor opcional de rótulos para os níveis de fatores resultantes.
- `ordered`: uma lógica que indica se o resultado deve ser ordenado ou não.

```r
# Gerar níveis de fator com gl()
gl(n=4,k=3)
##  [1] 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4
## Levels: 1 2 3 4

# Gerar fatores com labels personalizados
gl(n=2, k=10, labels = c("mulher", "homem"))
##  [1] mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher
## [11] homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem
## Levels: mulher homem

# Também podemos fazer
as.factor(c(rep("mulher", 10), rep("homem", 10)))
##  [1] mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher mulher
## [11] homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem  homem
## Levels: homem mulher
```

5.2.3 Exercícios

1. Crie um vetor com os seguintes valores: "pequeno", "médio", "grande", "pequeno", "grande". Em seguida, transforme esse vetor em um `factor` com níveis ordenados em "pequeno", "médio" e "grande". Exiba os níveis do factor criado.

2. Crie um factor com os valores de um vetor categórico representando as cores de carros: "vermelho", "azul", "preto", "vermelho", "branco", "azul". Use a função `table()` para contar quantos carros existem de cada cor.

3. Crie um factor representando avaliações de produtos com os valores "bom", "médio", "ruim", e modifique os níveis para "excelente", "razoável" e "insatisfatório". Exiba o factor modificado.

4. Crie um vetor com valores categóricos: "solteiro", "casado", "divorciado". Verifique se esse vetor é um factor usando a função `is.factor()` e depois transforme-o em um factor.

5. Crie um factor representando níveis de escolaridade com os valores "ensino superior", "ensino secundário", "doutoramento", "mestrado", "ensino secundário", "ensino superior". Defina uma ordem lógica para os níveis e ordene o factor em ordem crescente.

6. Crie um factor com os valores "baixo", "alto", "médio", "baixo", "alto", e com as categorias "baixo", "médio" e "alto", representando níveis de pressão. Converta este factor em um vetor numérico, onde "baixo" seja 1, "médio" seja 2, e "alto" seja 3.

7. Crie um factor com as categorias "verde", "amarelo", "vermelho". Substitua o nível "amarelo" por "laranja" e exiba o factor atualizado.

5.3 Matriz e Array

Em R, uma **matriz** é uma estrutura de dados bidimensional que contém elementos do mesmo tipo (como numérico, lógico, etc.), organizados em linhas e colunas. Já um **array** é uma generalização da matriz que pode ter mais de duas dimensões.

- **nrow**: número de linhas;
- **ncol**: número de colunas.

5.3.1 Criando matrizes

Podemos criar uma matriz em R usando a função `matrix()`. Veja o exemplo abaixo:

```r
matrix(c(1,2,3,4,5,6)+exp(1), nrow=2, ncol= 3, byrow = FALSE)
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 3.72 5.72 7.72
## [2,] 4.72 6.72 8.72
```

Podemos também realizar operações lógicas em matrizes:

```r
# Verifica se os elementos da matriz são maiores que 6
matrix(c(1,2,3,4,5,6)+exp(1), nrow=2, ncol=3, byrow = FALSE) > 6
##       [,1]  [,2] [,3]
## [1,] FALSE FALSE TRUE
## [2,] FALSE  TRUE TRUE
```

5.3.2 Criando um array

Um array pode ter mais de duas dimensões e é criado usando a função `array()`:

```r
# Criar um array com 4 linhas, 3 colunas, e 2 camadas
A <- array(c(1:24), dim=c(4,3,2))
A
## , , 1
##
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    5    9
## [2,]    2    6   10
## [3,]    3    7   11
## [4,]    4    8   12
##
## , , 2
##
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   13   17   21
## [2,]   14   18   22
## [3,]   15   19   23
## [4,]   16   20   24
```

5.3.3 Acessar Elementos de um array

```r
# Acessando o elemento na posição [1, 2, 1]
A[1,2,1]
## [1] 5
```

```
# Acessar todos os elementos da linha 2 da primeira camada
A[2, ,1]
## [1]  2  6 10

# Acessar toda a primeira camada (todos os elementos onde a terceira dimensão é 1)
A[,,1]
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    5    9
## [2,]    2    6   10
## [3,]    3    7   11
## [4,]    4    8   12

# Acessar os elementos [1, 1, 1] e [2, 2, 2]
A[c(1,2), c(1,2), c(1,2)]
## , , 1
##
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    5
## [2,]    2    6
##
## , , 2
##
##      [,1] [,2]
## [1,]   13   17
## [2,]   14   18
```

5.3.4 Construindo Matrizes

- `rbind()` (row bind): Combina objetos por linhas, empilhando-os verticalmente.
- `cbind()` (column bind): Combina objetos por colunas, empilhando-os horizontalmente.

Exemplo com Vetores

```
# Criar dois vetores
vector1 <- c(1, 2, 3)
vector2 <- c(4, 5, 6)

# Combinar os vetores por linhas
result <- rbind(vector1, vector2)
print(result)
##         [,1] [,2] [,3]
```

```r
## vector1    1    2    3
## vector2    4    5    6

# Combinar os vetores por colunas
result <- cbind(vector1, vector2)
print(result)
##      vector1 vector2
## [1,]       1       4
## [2,]       2       5
## [3,]       3       6
```

Exemplo com Matrizes

```r
# Criar duas matrizes
matrix1 <- matrix(1:6, nrow = 2, ncol = 3)
matrix2 <- matrix(7:12, nrow = 2, ncol = 3)

# Combinar as matrizes por linhas
result <- rbind(matrix1, matrix2)
print(result)
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
## [3,]    7    9   11
## [4,]    8   10   12

# Combinar as matrizes por colunas
result <- cbind(matrix1, matrix2)
print(result)
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
## [1,]    1    3    5    7    9   11
## [2,]    2    4    6    8   10   12
```

5.3.5 Acessar Elementos de uma Matriz

Podemos aceder a elementos específicos de uma matriz utilizando índices ou expressões lógicas.

```r
# Criar uma matriz
A <- matrix((-4):5, nrow=2, ncol=5)
A
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]   -4   -2    0    2    4
## [2,]   -3   -1    1    3    5
```

```
# Aceder a um elemento específico
A[1,2]
## [1] -2

# Selecionar elementos negativos
A[A<0]
## [1] -4 -3 -2 -1

# Atribuição condicional
A[A<0]<-0
A
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    0    0    0    2    4
## [2,]    0    0    1    3    5

# Selecionar uma linha específica
A[2,]
## [1] 0 0 1 3 5

# Selecionar colunas específicas
A[,c(2,4)]
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    2
## [2,]    0    3
```

5.3.6 Nomear Linhas e Colunas de uma Matriz

```
# Criar uma matriz
x <- matrix(rnorm(12),nrow=4)
x
##        [,1]   [,2]    [,3]
## [1,] -0.508 -0.523 -0.0258
## [2,]  1.864  2.422  0.3408
## [3,] -0.230  0.314 -1.9076
## [4,] -0.571  0.478 -0.5948

# Nomear colunas
colnames(x) <- paste("dados",1:3,sep="")
x
##      dados1 dados2  dados3
## [1,] -0.508 -0.523 -0.0258
## [2,]  1.864  2.422  0.3408
## [3,] -0.230  0.314 -1.9076
```

```
## [4,] -0.571  0.478 -0.5948

# Nomear linhas e colunas de outra matriz
y <- matrix(rnorm(15),nrow=5)
y
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] -0.559 -1.705  0.672
## [2,] -0.796  1.176 -0.566
## [3,]  0.855 -1.474  0.804
## [4,] -0.630 -1.786 -0.973
## [5,]  1.261  0.447  0.285

colnames(y) <- LETTERS[1:ncol(y)]

rownames(y) <- letters[1:nrow(y)]

y
##        A      B      C
## a -0.559 -1.705  0.672
## b -0.796  1.176 -0.566
## c  0.855 -1.474  0.804
## d -0.630 -1.786 -0.973
## e  1.261  0.447  0.285
```

5.3.7 Multiplicação de matrizes

```
M<-matrix(rnorm(20),nrow=4,ncol=5)
N<-matrix(rnorm(15),nrow=5,ncol=3)

# Multiplicação de matrizes
M%*%N
##          [,1]    [,2]   [,3]
## [1,] -1.67927  0.8103 -3.405
## [2,] -0.33112 -0.9712 -2.352
## [3,] -0.83679 -0.2961  0.140
## [4,] -0.00563 -0.0709 -0.113
```

5.3.8 Adicionar Linhas e Colunas a uma Matriz

```
X <- matrix(c(1,2,3,4,5,6),nrow=2)
X
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6

# Adicionar uma coluna
cbind(X, c(7,8))
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    5    7
## [2,]    2    4    6    8

# Adicionar uma coluna no meio
cbind(X[,1:2],c(7,8),X[,3])
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    7    5
## [2,]    2    4    8    6

# Adicionar uma linha
rbind(X, c(7,8,9))
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
## [3,]    7    8    9
```

5.3.9 Algumas outras funções

Seja M uma matriz quadrada.

- dimensão de uma matriz → `dim(M)`
- transposta de uma matriz → `t(M)`
- diagonal principal de uma matriz → `diag(M)`
- determinante de uma matriz → `det(M)`
- inversa de uma matriz → `solve(M)`
- autovalores e autovetores → `eigen(M)`
- soma dos elementos de uma matriz → `sum(M)`
- média dos elementos de uma matriz → `mean(M)`
- aplicar uma função a cada linha ou coluna → `apply(M,1, sum) # soma de cada linha`
- aplicar uma função a cada linha ou coluna → `apply(M,2, mean) # média de cada coluna`

5.3.10 Exercícios

1. Crie uma matriz 3×4 com os números de 1 a 12, preenchendo a matriz por colunas. Exiba a matriz e determine a soma dos elementos da segunda coluna.

2. Crie duas matrizes 2×3 chamadas A e B, cada uma preenchida com números aleatórios inteiros de 1 a 10. Em seguida, some as duas matrizes e multiplique-as elemento por elemento.

3. Crie uma matriz 3×3 chamada M com números aleatórios entre 1 e 9. Crie também um vetor de comprimento 3 chamado v. Realize a multiplicação entre a matriz M e o vetor v (ou seja, $M \times v$). Faça agora a multiplicação $v \times M$.

4. Crie uma matriz 4×2 chamada N com números sequenciais de 1 a 8. Transponha a matriz e calcule a soma dos elementos de cada linha da matriz transposta. Calcule agora a soma da primeira e segunda linha da matriz transposta.

5. Crie uma matriz 3×3 chamada P com valores de sua escolha. Calcule o determinante da matriz P. Caso o determinante seja diferente de zero, calcule também a matriz inversa de P.

6. Crie uma matriz 5×5 chamada Q com números aleatórios de 1 a 25. Extraia a submatriz composta pelas 2^{a}, 3^{a} e 4^{a} linhas e colunas.

7. Crie uma matriz 3×3 com valores sequenciais de 1 a 9. Calcule a soma de todos os elementos da primeira linha e a soma de todos os elementos da terceira coluna.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que $A^3 = 0$.

(b) Troque a terceira coluna pela soma da coluna 1 e coluna 3.

(c) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 22 & 23 \\ 34 & 55 & 57 \\ 99 & 97 & 71 \\ 12 & 16 & 19 \\ 10 & 53 & 24 \\ 14 & 21 & 28 \end{bmatrix},$$

e troque os números pares por 0.

9. Crie uma matriz 3×3 e verifique se ela é simétrica (ou seja, se a matriz é igual à sua transposta). Teste com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Dica: use a função `all()`.

10. Crie uma matriz 4×4 e calcule o traço da matriz (a soma dos elementos da diagonal principal).

11. Crie uma matriz 5×5 com valores de 1 a 25. Em seguida, extraia as colunas de índice par (colunas 2 e 4) da matriz.

12. Crie um array de dimensão 3x3x3 com valores de 1 a 27. Em seguida:

- Acesse o elemento localizado na posição [2, 3, 1] do array.
- Acesse a segunda "camada" (a segunda matriz) do array.
- Todos os elementos da terceira linha da segunda camada.

13. Crie dois arrays de dimensão 2x2x2 com valores aleatórios entre 1 e 10. Realize as seguintes operações:

- Some os dois arrays.
- Multiplique elemento por elemento os dois arrays.
- Calcule a média dos valores resultantes da soma dos dois arrays.
- Multiplique a primeira matriz do primeiro array pela segunda matriz do segundo array.

5.4 Data Frame

Um **data frame** em R é uma estrutura de dados bidimensional usada para armazenar dados tabulares. Cada coluna num data frame pode conter valores de diferentes tipos (como numéricos, caracteres, fatores, etc.), mas todos os elementos dentro de uma coluna devem ser do mesmo tipo. Um data frame é semelhante a uma tabela em um banco de dados ou uma folha de cálculo em programas como o Excel. Os data frames podem ser criados a partir de ficheiros de dados ou convertendo vetores usando a função `as.data.frame()`.

5.4.1 Criar um Data Frame

Para criar um data frame, pode usar a função `data.frame()`, especificando os nomes das colunas e os dados correspondentes:

```
df <- data.frame(
id = 1:4,
nome = c("Ana", "Bruno", "Carlos", "Diana"),
idade = c(23, 35, 31, 28),
salario = c(5000, 6000, 7000, 8000))
df
##   id   nome idade salario
## 1  1    Ana    23    5000
## 2  2  Bruno    35    6000
## 3  3 Carlos    31    7000
## 4  4  Diana    28    8000
```

Um data frame pode parecer semelhante a uma matriz, mas há diferenças importantes. Veja o exemplo de uma matriz criada com os mesmos dados:

```
# Comparando com uma matriz
cbind(id = 1:4,
nome = c("Ana", "Bruno", "Carlos", "Diana"),
idade = c(23, 35, 31, 28),
salario = c(5000, 6000, 7000, 8000))
##      id  nome     idade salario
## [1,] "1" "Ana"    "23"  "5000"
## [2,] "2" "Bruno"  "35"  "6000"
## [3,] "3" "Carlos" "31"  "7000"
## [4,] "4" "Diana"  "28"  "8000"
```

Observe que na matriz, todos os dados são convertidos para o tipo `character`, enquanto em um data frame, cada coluna mantém seu próprio tipo de dados.

5.4.2 Aceder a Linhas e Colunas

Existem várias maneiras de acedeer a linhas e colunas num data frame:

```
# Aceder à coluna 'id' usando índice
df[,1]
## [1] 1 2 3 4

# Aceder à coluna 'id' usando o nome da coluna
df$id
## [1] 1 2 3 4

# Aceder à coluna 'id' usando double brackets
df[["id"]]
## [1] 1 2 3 4
```

```r
# Aceder à primeira linha
df[1, ]
##   id nome idade salario
## 1  1  Ana    23    5000

# Aceder à segunda coluna
df[, 2]
## [1] "Ana"    "Bruno"  "Carlos" "Diana"

# Aceder ao elemento na primeira linha, segunda coluna
df[1, 2]
## [1] "Ana"

# Subconjunto das primeiras duas linhas e colunas
df[1:2, 1:2]
##   id  nome
## 1  1   Ana
## 2  2 Bruno

# Aceder a uma entrada por nome de coluna
df[1, "nome"]
## [1] "Ana"

# Aceder a múltiplas colunas por nome
df[c("nome", "idade")]
##     nome idade
## 1    Ana    23
## 2  Bruno    35
## 3 Carlos    31
## 4  Diana    28
```

5.4.3 Adicionar e Remover Colunas

Adicionar e remover colunas de um data frame é simples e direto:

```r
# Adicionar uma nova coluna calculada
df$novo_salario <- df$salario * 1.1
df
##   id   nome idade salario novo_salario
## 1  1    Ana    23    5000         5500
## 2  2  Bruno    35    6000         6600
## 3  3 Carlos    31    7000         7700
## 4  4  Diana    28    8000         8800
```

```
# ou
df[["novo_salario"]] <- df$salario * 1.1

# ou
df <- cbind(df, novo_salario = df$salario * 1.1)

# Remover uma coluna existente
df$id <- NULL
df
##     nome idade salario novo_salario
## 1    Ana    23    5000         5500
## 2  Bruno    35    6000         6600
## 3 Carlos    31    7000         7700
## 4  Diana    28    8000         8800
```

5.4.4 Fundir Data Frames

Data frames podem ser combinados ou fundidos usando a função `merge()`.

```
# Criar dois data frames
df1 <- data.frame(curso = c("PE", "LE", "CAL"), horas = c(60, 75, 90))
df2 <- data.frame(curso = c("CAL", "PE", "LE"), creditos = c(8, 6, 7))

# Fundir data frames pela variável 'curso'
df12 <- merge(df1, df2, by = "curso")
df12
##   curso horas creditos
## 1   CAL    90        8
## 2    LE    75        7
## 3    PE    60        6
```

5.4.5 Explorar o Data Frame

Funções úteis para explorar e entender a estrutura de um data frame:

```
df <- iris

# Nomes das colunas
names(df)
## [1] "Sepal.Length" "Sepal.Width"  "Petal.Length" "Petal.Width"  "Species"

# Classe dos dados de uma coluna
class(df$Sepal.Length)
```

```
## [1] "numeric"

class(df$Species)
## [1] "factor"

# Dimensão do data frame
dim(df)
## [1] 150   5

# Número de linhas
nrow(df)
## [1] 150

# Número de colunas
ncol(df)
## [1] 5

# Estrutura do data frame
str(df)
## 'data.frame':    150 obs. of  5 variables:
##  $ Sepal.Length: num  5.1 4.9 4.7 4.6 5 5.4 4.6 5 4.4 4.9 ...
##  $ Sepal.Width : num  3.5 3 3.2 3.1 3.6 3.9 3.4 3.4 2.9 3.1 ...
##  $ Petal.Length: num  1.4 1.4 1.3 1.5 1.4 1.7 1.4 1.5 1.4 1.5 ...
##  $ Petal.Width : num  0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 ...
##  $ Species     : Factor w/ 3 levels "setosa","versicolor",..: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 .

# Visualização das primeiras linhas
head(df, 3)
##   Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species
## 1          5.1         3.5          1.4         0.2  setosa
## 2          4.9         3.0          1.4         0.2  setosa
## 3          4.7         3.2          1.3         0.2  setosa

# Visualização das últimas linhas
tail(df, 5)
##     Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width   Species
## 146          6.7         3.0          5.2         2.3 virginica
## 147          6.3         2.5          5.0         1.9 virginica
## 148          6.5         3.0          5.2         2.0 virginica
## 149          6.2         3.4          5.4         2.3 virginica
## 150          5.9         3.0          5.1         1.8 virginica
```

5.4.6 A função subset()

A função `subset()` em R é usada para criar subconjuntos de um data frame com base em condições lógicas. É particularmente útil quando se deseja filtrar linhas que satisfaçam certos critérios e selecionar colunas específicas ao mesmo tempo.

```
# Carregar o conjunto de dados 'iris'
df <- iris

# Criar um subconjunto com Sepal.Width maior que 3, selecionando apenas as colunas Petal.Width e
df1 <- df[df$Sepal.Width > 3, c("Petal.Width","Species")]
head(df1)
##   Petal.Width Species
## 1         0.2  setosa
## 3         0.2  setosa
## 4         0.2  setosa
## 5         0.2  setosa
## 6         0.4  setosa
## 7         0.3  setosa

# Utilizando a função subset() para o mesmo subconjunto
(df2 <- subset(df, Sepal.Width > 3, select = c(Petal.Width, Species)))
##     Petal.Width    Species
## 1           0.2     setosa
## 3           0.2     setosa
## 4           0.2     setosa
## 5           0.2     setosa
## 6           0.4     setosa
## 7           0.3     setosa
## 8           0.2     setosa
## 10          0.1     setosa
## 11          0.2     setosa
## 12          0.2     setosa
## 15          0.2     setosa
## 16          0.4     setosa
## 17          0.4     setosa
## 18          0.3     setosa
## 19          0.3     setosa
## 20          0.3     setosa
## 21          0.2     setosa
## 22          0.4     setosa
## 23          0.2     setosa
## 24          0.5     setosa
## 25          0.2     setosa
## 27          0.4     setosa
```

```
## 28          0.2     setosa
## 29          0.2     setosa
## 30          0.2     setosa
## 31          0.2     setosa
## 32          0.4     setosa
## 33          0.1     setosa
## 34          0.2     setosa
## 35          0.2     setosa
## 36          0.2     setosa
## 37          0.2     setosa
## 38          0.1     setosa
## 40          0.2     setosa
## 41          0.3     setosa
## 43          0.2     setosa
## 44          0.6     setosa
## 45          0.4     setosa
## 47          0.2     setosa
## 48          0.2     setosa
## 49          0.2     setosa
## 50          0.2     setosa
## 51          1.4 versicolor
## 52          1.5 versicolor
## 53          1.5 versicolor
## 57          1.6 versicolor
## 66          1.4 versicolor
## 71          1.8 versicolor
## 86          1.6 versicolor
## 87          1.5 versicolor
## 101         2.5  virginica
## 110         2.5  virginica
## 111         2.0  virginica
## 116         2.3  virginica
## 118         2.2  virginica
## 121         2.3  virginica
## 125         2.1  virginica
## 126         1.8  virginica
## 132         2.0  virginica
## 137         2.4  virginica
## 138         1.8  virginica
## 140         2.1  virginica
## 141         2.4  virginica
## 142         2.3  virginica
## 144         2.3  virginica
## 145         2.5  virginica
## 149         2.3  virginica
```

No exemplo acima, ambas as abordagens (indexação direta e `subset()`) produzem o mesmo resultado, mas `subset()` é geralmente mais legível e conveniente quando se trata de filtragem condicional.

```
# Criar um subconjunto com Petal.Width igual a 0.3, excluindo a coluna Sepal.Width
(df3 <- subset(df, Petal.Width == 0.3, select = -Sepal.Width))
##    Sepal.Length Petal.Length Petal.Width Species
## 7           4.6          1.4         0.3  setosa
## 18          5.1          1.4         0.3  setosa
## 19          5.7          1.7         0.3  setosa
## 20          5.1          1.5         0.3  setosa
## 41          5.0          1.3         0.3  setosa
## 42          4.5          1.3         0.3  setosa
## 46          4.8          1.4         0.3  setosa
```

Neste exemplo, a função `subset()` é utilizada para filtrar linhas em que `Petal.Width` é exatamente 0.3, ao mesmo tempo que exclui a coluna `Sepal.Width`.

```
# Criar um subconjunto selecionando as colunas de Sepal.Width a Petal.Width
(df4 <- subset(df, select = Sepal.Width:Petal.Width))
##     Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
## 1           3.5          1.4         0.2
## 2           3.0          1.4         0.2
## 3           3.2          1.3         0.2
## 4           3.1          1.5         0.2
## 5           3.6          1.4         0.2
## 6           3.9          1.7         0.4
## 7           3.4          1.4         0.3
## 8           3.4          1.5         0.2
## 9           2.9          1.4         0.2
## 10          3.1          1.5         0.1
## 11          3.7          1.5         0.2
## 12          3.4          1.6         0.2
## 13          3.0          1.4         0.1
## 14          3.0          1.1         0.1
## 15          4.0          1.2         0.2
## 16          4.4          1.5         0.4
## 17          3.9          1.3         0.4
## 18          3.5          1.4         0.3
## 19          3.8          1.7         0.3
## 20          3.8          1.5         0.3
## 21          3.4          1.7         0.2
## 22          3.7          1.5         0.4
## 23          3.6          1.0         0.2
## 24          3.3          1.7         0.5
```

```
## 25          3.4          1.9          0.2
## 26          3.0          1.6          0.2
## 27          3.4          1.6          0.4
## 28          3.5          1.5          0.2
## 29          3.4          1.4          0.2
## 30          3.2          1.6          0.2
## 31          3.1          1.6          0.2
## 32          3.4          1.5          0.4
## 33          4.1          1.5          0.1
## 34          4.2          1.4          0.2
## 35          3.1          1.5          0.2
## 36          3.2          1.2          0.2
## 37          3.5          1.3          0.2
## 38          3.6          1.4          0.1
## 39          3.0          1.3          0.2
## 40          3.4          1.5          0.2
## 41          3.5          1.3          0.3
## 42          2.3          1.3          0.3
## 43          3.2          1.3          0.2
## 44          3.5          1.6          0.6
## 45          3.8          1.9          0.4
## 46          3.0          1.4          0.3
## 47          3.8          1.6          0.2
## 48          3.2          1.4          0.2
## 49          3.7          1.5          0.2
## 50          3.3          1.4          0.2
## 51          3.2          4.7          1.4
## 52          3.2          4.5          1.5
## 53          3.1          4.9          1.5
## 54          2.3          4.0          1.3
## 55          2.8          4.6          1.5
## 56          2.8          4.5          1.3
## 57          3.3          4.7          1.6
## 58          2.4          3.3          1.0
## 59          2.9          4.6          1.3
## 60          2.7          3.9          1.4
## 61          2.0          3.5          1.0
## 62          3.0          4.2          1.5
## 63          2.2          4.0          1.0
## 64          2.9          4.7          1.4
## 65          2.9          3.6          1.3
## 66          3.1          4.4          1.4
## 67          3.0          4.5          1.5
## 68          2.7          4.1          1.0
## 69          2.2          4.5          1.5
```

```
## 70          2.5          3.9          1.1
## 71          3.2          4.8          1.8
## 72          2.8          4.0          1.3
## 73          2.5          4.9          1.5
## 74          2.8          4.7          1.2
## 75          2.9          4.3          1.3
## 76          3.0          4.4          1.4
## 77          2.8          4.8          1.4
## 78          3.0          5.0          1.7
## 79          2.9          4.5          1.5
## 80          2.6          3.5          1.0
## 81          2.4          3.8          1.1
## 82          2.4          3.7          1.0
## 83          2.7          3.9          1.2
## 84          2.7          5.1          1.6
## 85          3.0          4.5          1.5
## 86          3.4          4.5          1.6
## 87          3.1          4.7          1.5
## 88          2.3          4.4          1.3
## 89          3.0          4.1          1.3
## 90          2.5          4.0          1.3
## 91          2.6          4.4          1.2
## 92          3.0          4.6          1.4
## 93          2.6          4.0          1.2
## 94          2.3          3.3          1.0
## 95          2.7          4.2          1.3
## 96          3.0          4.2          1.2
## 97          2.9          4.2          1.3
## 98          2.9          4.3          1.3
## 99          2.5          3.0          1.1
## 100         2.8          4.1          1.3
## 101         3.3          6.0          2.5
## 102         2.7          5.1          1.9
## 103         3.0          5.9          2.1
## 104         2.9          5.6          1.8
## 105         3.0          5.8          2.2
## 106         3.0          6.6          2.1
## 107         2.5          4.5          1.7
## 108         2.9          6.3          1.8
## 109         2.5          5.8          1.8
## 110         3.6          6.1          2.5
## 111         3.2          5.1          2.0
## 112         2.7          5.3          1.9
## 113         3.0          5.5          2.1
## 114         2.5          5.0          2.0
```

```
## 115         2.8          5.1         2.4
## 116         3.2          5.3         2.3
## 117         3.0          5.5         1.8
## 118         3.8          6.7         2.2
## 119         2.6          6.9         2.3
## 120         2.2          5.0         1.5
## 121         3.2          5.7         2.3
## 122         2.8          4.9         2.0
## 123         2.8          6.7         2.0
## 124         2.7          4.9         1.8
## 125         3.3          5.7         2.1
## 126         3.2          6.0         1.8
## 127         2.8          4.8         1.8
## 128         3.0          4.9         1.8
## 129         2.8          5.6         2.1
## 130         3.0          5.8         1.6
## 131         2.8          6.1         1.9
## 132         3.8          6.4         2.0
## 133         2.8          5.6         2.2
## 134         2.8          5.1         1.5
## 135         2.6          5.6         1.4
## 136         3.0          6.1         2.3
## 137         3.4          5.6         2.4
## 138         3.1          5.5         1.8
## 139         3.0          4.8         1.8
## 140         3.1          5.4         2.1
## 141         3.1          5.6         2.4
## 142         3.1          5.1         2.3
## 143         2.7          5.1         1.9
## 144         3.2          5.9         2.3
## 145         3.3          5.7         2.5
## 146         3.0          5.2         2.3
## 147         2.5          5.0         1.9
## 148         3.0          5.2         2.0
## 149         3.4          5.4         2.3
## 150         3.0          5.1         1.8
```

Aqui, `subset()` é usado para selecionar todas as colunas desde `Sepal.Width` até `Petal.Width`.

5.4.7 A Função `summary()`

A função `summary()` é amplamente usada em R para fornecer resumos estatísticos dos dados. O comportamento de `summary()` varia conforme o tipo de objeto ao qual é aplicado.

```r
# Aplicando summary() a um vetor numérico
x <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
summary(x)
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##    1.00    3.25    5.50    5.50    7.75   10.00

# Aplicando summary() a uma coluna numérica de um data frame
summary(iris$Sepal.Length)
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##    4.30    5.10    5.80    5.84    6.40    7.90

# Aplicando summary() a um data frame completo
summary(iris)
##   Sepal.Length   Sepal.Width    Petal.Length   Petal.Width        Species
##  Min.   :4.30   Min.   :2.00   Min.   :1.00   Min.   :0.1   setosa    :50
##  1st Qu.:5.10   1st Qu.:2.80   1st Qu.:1.60   1st Qu.:0.3   versicolor:50
##  Median :5.80   Median :3.00   Median :4.35   Median :1.3   virginica :50
##  Mean   :5.84   Mean   :3.06   Mean   :3.76   Mean   :1.2
##  3rd Qu.:6.40   3rd Qu.:3.30   3rd Qu.:5.10   3rd Qu.:1.8
##  Max.   :7.90   Max.   :4.40   Max.   :6.90   Max.   :2.5
```

Aplicar `summary()` ao data frame `iris` inteiro fornece resumos estatísticos para todas as colunas, incluindo estatísticas descritivas para variáveis numéricas e uma contagem de frequências para variáveis categóricas (fatores).

5.4.8 Valores ausentes

```r
colMeans(airquality)
##   Ozone Solar.R    Wind    Temp   Month     Day
##      NA      NA   9.958  77.882   6.993  15.804
```

Para eliminarmos os `NAs` em uma coluna podemos usar

```r
sem_na <- subset(airquality, !is.na(Ozone))
colMeans(sem_na)
##   Ozone Solar.R    Wind    Temp   Month     Day
##  42.129      NA   9.862  77.871   7.198  15.534
```

Note que o argumento `na.rm=TRUE` pode ser passado para a maioria das funções sumárias por exemplo, `sum()`, `mean()`:

```r
mean(airquality$Ozone, na.rm = TRUE)
```

```
## [1] 42.12931
```

```r
# ou
colMeans(airquality, na.rm = TRUE)
```

```
##      Ozone    Solar.R       Wind       Temp      Month        Day
##  42.129310 185.931507   9.957516  77.882353   6.993464  15.803922
```

5.4.9 Exercícios

1. Crie um data frame chamado `estudantes` com as colunas: Nome (caracteres), Idade (números inteiros), Curso (caracteres) e Nota (números decimais). Adicione os dados de cinco estudantes fictícios e exiba o data frame.

2. Utilize o data frame `estudantes` criado no exercício anterior. Aceda à coluna `Nota` e aumente todas as notas em 0.5. Substitua o valor da coluna `Curso` para "Estatística" para todos os estudantes com nota superior a 8.0.

3. Dado o data frame `mtcars` embutido no R, filtre as linhas onde o número de cilindros (`cyl`) é igual a 6 e a potência (`hp`) é maior que 100. Crie um novo data frame com essas informações.

4. Adicione uma nova coluna ao data frame `mtcars` chamada `Peso_KG` que converta o peso dos carros (`wt`) de mil libras para quilogramas (multiplicando por 453.592).

5. Utilizando o data frame `mtcars`, calcule a média, o mínimo e o máximo da potência (`hp`) para cada número diferente de cilindros (`cyl`). Utilize a função `aggregate()` para realizar esta operação.

6. Utilizando o data frame `mtcars`, aplique a função `sapply()` para calcular o desvio padrão de todas as colunas numéricas.

7. Transforme a coluna `am` do data frame `mtcars` num fator com rótulos significativos: "Automático" para 0 e "Manual" para 1. Depois, conte quantos carros existem para cada tipo de transmissão.

8. Ordene o data frame `mtcars` pela coluna `mpg` em ordem decrescente. Mostre os 5 carros mais económicos e os 5 menos económicos. Dica: use a função `order()`.

9. Utilize o data frame `mtcars`, disponível no R, para criar dois novos data frames chamados `carros1` e `carros2`. Primeiro, adicione ao data frame `mtcars` uma nova coluna chamada `car`, que conterá os nomes dos carros (os nomes das linhas do data frame original).

O data frame carros1 deve conter as colunas car, mpg e cyl, enquanto o data frame carros2 deve conter as colunas car, hp e wt.

Em seguida, utilize a função merge() para combinar os dois data frames criados (carros1 e carros2) com base na coluna car, que contém os nomes dos carros.

10. Carregue o dataset airquality e exiba as primeiras 6 linhas e as últimas 6 linhas da tabela.

11. Verifique quantos valores ausentes (NA) existem em cada coluna do dataset airquality. Dica: use a função colSums().

12. Calcule a média dos valores da coluna Solar.R no dataset airquality, ignorando os valores ausentes (NA).

13. Crie um subconjunto do dataset airquality onde a velocidade do vento (Wind) é maior que 10 e a temperatura (Temp) é maior que 80. Exiba as primeiras 6 linhas do resultado.

14. Adicione uma nova coluna ao dataset airquality chamada Temp_Wind_Sum, que seja a soma dos valores das colunas Temp e Wind. Exiba as primeiras 6 linhas da tabela modificada.

15. Carregue o dataset iris e verifique sua estrutura. Filtre as observações que pertencem à espécie "setosa".

Crie uma nova coluna chamada Petal.Area, que representa a área das pétalas (comprimento * largura).

Filtre apenas as linhas onde a área da pétala (Petal.Area) é maior que 0.2.

Ordene o data frame resultante de acordo com o comprimento da pétala (Petal.Length) em ordem decrescente.

16. Carregue o dataset airquality e remova todas as linhas que contenham valores ausentes (NA). Use a função na.omit().

Adicione uma nova coluna chamada Temp.Celsius, que converte a temperatura em Fahrenheit (Temp) para Celsius usando a fórmula: $Temp.Celsius = \frac{(Temp-32)}{1.8}$

Agrupe o data frame pelo mês (Month) e calcule a média da coluna Ozone para cada mês. Use a função aggregate().

Crie um gráfico de dispersão (plot()) para a relação entre Ozone e a nova coluna Temp.Celsius, colorindo os pontos de acordo com o mês (Month).

5.5 Listas

Em R, uma **lista** é uma estrutura de dados versátil que pode armazenar elementos de diferentes tipos, como vetores, matrizes, data frames, funções e até outras listas. Esta flexibilidade torna as listas uma poderosa ferramenta para manipulação de dados complexos, permitindo armazenar uma coleção heterogénea de elementos em um único objeto.

- **Flexibilidade**: Ao contrário dos vetores, que são homogéneos e podem conter apenas elementos de um único tipo, as listas podem conter elementos de diferentes tipos e tamanhos.
- **Indexação**: Os elementos de uma lista podem ser acedidos de várias maneiras:
- **Colchetes duplos** [[ ]]: Usados para aceder elementos específicos de uma lista.
- **Operador $**: Usado para aceder elementos nomeados.
- **Colchetes simples** [ ]: Retornam uma sublista contendo os elementos especificados.

5.5.1 Criar e Manipular Listas

Vamos criar uma lista que contém diferentes tipos de elementos, incluindo um vetor, um vetor de caracteres, uma matriz e uma função:

```
# Criar uma lista com diferentes tipos de elementos
minha_lista <- list(
  nome = "Estudante",
  idade = 21,
  notas = c(85, 90, 92),
  disciplinas = c("Matemática", "Estatística", "Computação"),
  matriz_exemplo = matrix(1:9, nrow = 3, byrow = TRUE),
  media= function(x) mean(x)
)

# Visualizar a lista
print(minha_lista)
## $nome
## [1] "Estudante"
##
## $idade
## [1] 21
##
## $notas
## [1] 85 90 92
##
## $disciplinas
## [1] "Matemática"  "Estatística" "Computação"
##
## $matriz_exemplo
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
## [3,]    7    8    9
##
## $media
## function(x) mean(x)

# Aceder a um elemento pelo nome usando $
print(minha_lista$nome)
## [1] "Estudante"

# Aceder a um elemento pelo índice
print(minha_lista[[1]])
## [1] "Estudante"

# Aceder a uma sublista contendo os dois primeiros elementos
print(minha_lista[1:2])
## $nome
## [1] "Estudante"
##
## $idade
## [1] 21

# Aceder à segunda nota do vetor "notas" dentro da lista
print(minha_lista$notas[2])
## [1] 90
```

5.5.2 Por que usar listas?

Listas são extremamente úteis em R para:

- **Armazenar resultados de diferentes tipos**: Em análises estatísticas complexas, os resultados muitas vezes consistem em diferentes tipos de dados (como números, tabelas, gráficos e modelos estatísticos).
- **Agrupar dados heterogéneos**: Quando se precisa manipular um conjunto de dados que inclui diversos tipos de informação (por exemplo, dados brutos, estatísticas resumidas, e resultados de modelos).
- **Passar múltiplos argumentos para funções**: As listas são usadas para agrupar múltiplos parâmetros para funções, tornando-as uma ferramenta poderosa para programação funcional.

5.5.3 Exercícios

1. Crie uma lista em R chamada `dados_estudante` que contenha as seguintes informações sobre um estudante:

- Nome: "João"
- Idade: 21
- Notas: Um vetor com as notas em Estatística (85), Matemática (90), e Computação (95).

Depois de criar a lista, aceda e imprima:

1. O nome do estudante.
2. A idade do estudante.
3. A nota em Computação.

2. Considere a lista `dados_estudante` criada no exercício anterior. Adicione um novo elemento à lista que contenha o status de aprovação do estudante, com valor "Aprovado". Em seguida, substitua a nota de Estatística para 88. Por fim, imprima a lista completa.

3. Crie duas listas chamadas `estudante1` e `estudante2` com as mesmas estruturas da lista `dados_estudante`. Em `estudante1`, use os valores:

- Nome: "Maria"
- Idade: 22
- Notas: 78, 85, 90
- Status: "Aprovado"

Em `estudante2`, use os valores:

- Nome: "Carlos"
- Idade: 23
- Notas: 70, 75, 80
- Status: "Aprovado"

Agora, combine `estudante1` e `estudante2` numa nova lista chamada `turma`, e imprima a lista `turma`.

4. Utilizando a lista `turma` criada no exercício anterior, faça as seguintes operações:

(a) Extraia e imprima o nome do segundo estudante.
(b) Calcule a média das notas do primeiro estudante.

(c) Altere o status do segundo estudante para "Reprovado" e imprima a lista atualizada.

5. Crie uma lista chamada `estatistica_aplicada` que contenha duas listas internas: `turma1` e `turma2`. Cada uma dessas listas internas deve conter as informações de dois estudantes (com as mesmas estruturas utilizadas anteriormente). Por exemplo:

- `turma1`: Contendo `estudante1` e `estudante2`.
- `turma2`: Contendo dois novos estudantes de sua escolha.

Aceda e imprima:

(a) O nome do primeiro estudante da `turma2`.
(b) A média das notas do segundo estudante da `turma1`.
(c) A lista completa `estatistica_aplicada`.

6. Uma fábrica produz 4 diferentes produtos e coleta informações de produção mensal. Crie uma lista chamada `produtos_fabrica` que contenha informações sobre 4 produtos:

- Nome do Produto
- Quantidade Produzida Mensalmente (em unidades)
- Custo de Produção Unitário (em euros)
- Preço de Venda Unitário (em euros)

(a) Calcule e adicione à lista a **margem de lucro mensal** de cada produto (subtraia o custo de produção do preço de venda e multiplique pela quantidade produzida). Imprima a margem de lucro mensal de cada produto.

(b) Encontre e imprima o produto que gera a maior margem de lucro mensal.

(c) Atualize o **preço de venda** do segundo produto, aumentando-o em 5%, e imprima a nova margem de lucro mensal desse produto.

(d) Crie uma lista com os **produtos mais lucrativos**, considerando aqueles cuja margem de lucro mensal é superior a 10% do custo de produção mensal.

Chapter 6

Estruturas de Seleção

Em R, as estruturas de seleção ou decisão são usadas para controlar o fluxo de execução do código com base em condições específicas. Estas estruturas permitem executar diferentes blocos de código dependendo de valores ou condições lógicas. As estruturas de seleção mais comuns em R são `if`, `else`, e `else if`.

6.1 Condicional `if`

A instrução `if` executa um bloco de código apenas se uma condição for verdadeira. Caso contrário, o bloco de código dentro do `if` é ignorado.

```
# Sintaxe
if (condição) {
      # Código a ser executado se a condição for TRUE
}
```

Exemplo 1:

```
idade <- 18

if (idade >= 18) {
      print("Maior de idade")
}
## [1] "Maior de idade"
```

Neste exemplo, como a variável `idade` é 18, a condição `idade >= 18` é verdadeira, então o R executa o código dentro do `if` e imprime `"Maior de idade"`.

6.2 Estrutura `if...else`

A estrutura `if...else` permite executar um bloco de código se a condição for verdadeira, e um outro bloco de código se a condição for falsa.

```
# Sintaxe
if (condição) {
      # Código a ser executado se a condição for TRUE
} else {
      # Código a ser executado se a condição for FALSE
}
```

Exemplo 2:

```
idade <- 16

if (idade >= 18) {
      print("Maior de idade")
} else {
    print("Menor de idade")
}
## [1] "Menor de idade"
```

Como a variável `idade` é 16, a condição `idade >= 18` é falsa, então o R executa o bloco de código dentro do `else` e imprime `"Menor de idade"`.

6.3 Condicional `else if`

A estrutura `else if` permite testar múltiplas condições. Quando uma das condições é verdadeira, o R executa o código associado e ignora os restantes `else if` ou `else`.

```
# Sintaxe
if (condição1) {
      # Código se condição1 for TRUE
} else if (condição2) {
      # Código se condição2 for TRUE
} else {
      # Código se nenhuma condição anterior for TRUE
}
```

Exemplo 3:

```r
nota <- 85

if (nota >= 90) {
  print("Excelente")
} else if (nota >= 70) {
  print("Bom")
} else {
  print("Insuficiente")
}
## [1] "Bom"
```

Neste caso, a variável `nota` é 85, então o código imprime `"Bom"` porque a condição `nota >= 70` é verdadeira.

6.4 A função `ifelse()`

A função `ifelse` é uma versão vetorizada de if...else que retorna valores dependendo de uma condição. É especialmente útil para aplicar condições a vetores ou data frames.

```r
# Sintaxe
resultado <- ifelse(condição, valor_se_true, valor_se_false)
```

Exemplo 4:

```r
valores <- c(4, 6, 9, 3)
resultado <- ifelse(valores > 5, "maior que 5", "não é maior que 5")
print(resultado)
## [1] "não é maior que 5" "maior que 5"       "maior que 5"
## [4] "não é maior que 5"
```

Aqui, `ifelse()` aplica a condição `valores > 5` a cada elemento do vetor `valores` e retorna "maior que 5" se a condição for verdadeira ou "não é maior que 5" caso contrário.

6.5 Exemplos

Exemplo 5: Indique o(os) erro(os) no código abaixo

```
if (x%%2 = 0){
      print("Par")
} else {
    print("Ímpar")
}
```

Código correto

```
if (x%%2 == 0){
  print("Par")
} else {
    print("Ímpar")
}
```

Exemplo 6: Indique o(os) erro(os) no código abaixo

```
if (a>0) {
  print("Positivo")
  if (a%%5 = 0)
    print("Divisível por 5")
} else if (a==0)
    print("Zero")
  else if {
    print("Negativo")
}
```

Código correto

```
if (a>0) {
  print("Positivo")
  if (a%%5 == 0) {
    print("Divisível por 5")
  }
} else if (a==0) {
    print("Zero")
} else {
    print("Negativo")
}
```

Exemplo 7: Quais são os valores de `x` e `y` no final da execução?

```
x = 1
y = 0
if (x == 1){
```

```
  y = y - 1
}
if (y == 1){
  x = x + 1
}
```

Exemplo 8:

- Se `x=1` qual será o valor de `x` no final da execução?
- Qual teria de ser o valor de `x` para que no final da execução fosse -1?
- Há uma parte do programa que nunca é executada: qual é e porquê?

```
if (x == 1){
  x = x + 1
  if (x == 1){
    x = x + 1
  } else {
      x = x - 1
  }
} else {
    x = x - 1
}
```

6.6 Exercícios

1. Escreva um programa em R que leia um número do utilizador e exiba “O número é positivo” se for maior que zero.

2. Crie um programa em R que leia um número inteiro do utilizador e imprima “Par” se o número for par, e “Ímpar” caso contrário.

3. Escreva um programa em R que leia um número não negativo e exiba se ele está no intervalo [0, 10], [11, 20], ou maior que 20. Considere que os intervalos [0, 10] e [11, 20] são inclusivos. Exemplo: para o número 15, o programa deve exibir “O número está no intervalo [11, 20]”.

4. Escreva um programa em R que leia a idade de uma pessoa e a classifique como “Criança” (0-12 anos), “Adolescente” (13-17 anos), “Adulto” (18-64 anos), ou “Idoso” (65 anos ou mais). Se a idade inserida for negativa, o programa deve exibir “Idade inválida”.

5. Escreva um programa em R que leia o preço original de um produto e aplique um desconto com base no seguinte critério:

- Desconto de 5% se o preço for inferior a \$100
- Desconto de 10% se o preço estiver entre \$100 e \$500 (inclusive)
- Desconto de 15% se o preço for superior a \$500

Se o preço inserido for negativo, o programa deve exibir "Preço inválido". Exemplo de entrada: 350; Saída esperada: "O preço com desconto é \$315".

6. Escreva um programa em R que leia as coordenadas (x, y) de um ponto e determine em qual quadrante o ponto está localizado. Se o ponto estiver em um dos eixos, o programa deve especificar "Eixo X" ou "Eixo Y". Exemplo de entrada: $(x = -3, y = 2)$; Saída esperada: "Segundo quadrante".

7. Escreva um programa em R que leia um ano e determine se é um ano bissexto. Um ano é bissexto se:

- É divisível por 4, mas não divisível por 100, exceto quando divisível por 400.

Se o ano inserido for negativo, o programa deve exibir "Ano inválido". Exemplo de entrada: 2000; Saída esperada: "Ano bissexto".

8. Escreva um programa que leia um número inteiro entre 0 e 999, e o descreva em termos de centenas, dezenas e unidades. Por exemplo, para 304, o programa deve exibir "3 centenas 0 dezenas e 4 unidades". Caso o número inteiro não pertença ao intervalo [0;999], deverá imprimir um aviso "Número fora do intervalo".

9. Escreva um programa em R que leia um número inteiro positivo (menor ou igual a 5) e escreva no ecrã a sua representação em numeração romana. Se o número inserido for maior que 5 ou menor que 1, o programa deve exibir "Número fora do intervalo". Exemplo de entrada: 3; Saída esperada: "III".

10. Escreva um programa em R que leia quatro números inteiros (um de cada vez) e exiba após cada iteração qual o menor número lido até ao momento. Exemplo:

```
Introduza um numero inteiro: 4

`O menor numero introduzido até agora é 4.`

`Introduza um numero inteiro: 6`

`O menor numero introduzido até agora é 4.`

`Introduza um numero inteiro: 2`

`O menor numero introduzido até agora é 2.`
```

11. Dado um vetor de números inteiros, identifique se cada número é par ou ímpar. Use a função `ifelse()` para atribuir "par" aos números divisíveis por 2 e "ímpar" aos que não são.

Crie um vetor de números de 1 a 10 e use a função `ifelse()` para rotular cada número como "par" ou "ímpar".

12. Você tem um vetor de notas de alunos e deseja avaliar o desempenho de cada aluno como "Aprovado" ou "Reprovado". Suponha que a nota de aprovação seja 50.

Crie um vetor com as seguintes notas: 50, 85, 70, 40, 60, 90. Use `ifelse()` para marcar alunos com nota igual ou maior que 50 como "Aprovado" e os demais como "Reprovado".

Modifique o exercício para que notas entre 50 e 59 sejam classificadas como "Aprovado com Restrição". Como ficaria o código?

13. Dado um vetor de idades, categorize as idades em "Criança" (idade $<=$ 12), "Adolescente" (12 $<$ idade $<=$ 18) e "Adulto" (idade $>$ 18), utilizando a função `ifelse()`.

Chapter 7

Funções

Em R, uma **função** é um bloco de código que realiza uma tarefa específica e é executado somente quando chamada. Funções são fundamentais na programação, pois permitem a modularização do código, facilitando a manutenção, reutilização e compreensão.

Características de uma Função

- **Reutilizável**: Uma vez definida, uma função pode ser chamada repetidamente em diferentes partes de um script.
- **Modularização**: Funções ajudam a dividir o código em partes menores e mais gerenciáveis, o que torna o código mais organizado e legível.
- **Parâmetros (Argumentos)**: Dados podem ser passados para uma função na forma de parâmetros ou argumentos, permitindo que a função opere sobre entradas específicas.

A estrutura básica de uma função em R é a seguinte:

```
# Sintaxe
nome_da_funcao <- function(argumentos) {
  # Corpo da função: código que realiza operações
  resultado <- ... # Cálculos ou operações
  return(resultado) # Retorna o valor final
}
```

- **Nome da Função**: Um identificador único que você escolhe para a função.
- **Argumentos**: Valores de entrada que a função recebe quando chamada. Podem ser opcionais ou obrigatórios.
- **Corpo da Função**: O bloco de código que executa as operações definidas.

- **Return (Retorno)**: O valor que a função devolve após a execução.

O principal objetivo das funções é promover a reutilização de código e reduzir a redundância, facilitando a manutenção e o desenvolvimento eficiente de scripts em R.

Exemplo: Cálculo de Área Retangular

Vamos criar uma função para calcular a área de um retângulo, dada a sua largura e altura:

```
calcula_area <- function(largura, altura) {
  area <- largura * altura
  return(area)
}

largura_obj <- as.numeric(readline("Insira a largura (em cm): "))
altura_obj <- as.numeric(readline("Insira a altura (em cm): "))

# Chamada da função para calcular a área
area_obj <- calcula_area(largura_obj, altura_obj)

print(paste("A área do retângulo é:", area_obj, "cm²"))
```

- **Variáveis Locais**: Dentro da função `calcula_area`, as variáveis `largura` e `altura` são **locais**. Elas existem apenas durante a execução da função e são destruídas após a conclusão.
- **Variáveis Globais**: As variáveis `largura_obj` e `altura_obj` são **globais** dentro do script, ou seja, são acessíveis em todo o script, fora da função.
- **Importância da Nomenclatura**: É uma boa prática usar nomes diferentes para variáveis locais e globais para evitar confusão e melhorar a legibilidade do código.

Passagem de Argumentos com Valores Padrão

Funções em R podem ser definidas com valores padrão para seus argumentos, o que permite chamadas de função sem a necessidade de especificar todos os argumentos.

```
calcula_area <- function(largura, altura=2) {
  area <- largura * altura
  return(area)
}

# Chamada da função com um argumento omitido
area_obj <- calcula_area(4)
```

```r
print(area_obj)
## [1] 8
```

- **Argumentos com Valores Padrão**: Se a `altura` não for especificada na chamada da função, seu valor padrão será 2. Assim, a função calcula a área usando largura 4 e altura 2.

Passagem de Argumentos por Palavra-chave

Em R, ao chamar uma função, os argumentos podem ser passados por nome (palavra-chave), permitindo maior flexibilidade na ordem dos argumentos.

```r
calcula_area <- function(largura, altura=2) {
        area <- largura * altura
        return(area)
}

# Chamada da função com argumentos nomeados
area_obj <- calcula_area(altura=4,largura=3)

print(area_obj)
## [1] 12
```

- **Flexibilidade na Ordem dos Argumentos**: Ao usar argumentos nomeados, a ordem em que os argumentos são passados não importa. O R associa os valores aos nomes corretos.

Uso da Função `stop()` para Controle de Erro

A função `stop()` em R é usada para interromper a execução de uma função ou script, exibindo uma mensagem de erro personalizada. É útil para tratar casos em que certas condições pré-definidas não são atendidas.

```r
f <- function(x) {
  if (x < 0) {
    stop("Erro: x não pode ser negativo")  # Interrompe a função com uma mensagem de erro
  }
  return(sqrt(x))
}

f(-2)
## Error in f(-2): Erro: x não pode ser negativo
```

- **Uso de stop()**: Quando a condição `x < 0` é verdadeira, a função `stop()` é chamada, o que interrompe a execução e gera uma mensagem de erro. Isso é útil para prevenir operações inválidas ou resultados inesperados.

Exercício 1: Qual será o output do script abaixo?

```
x <- 10

minha_funcao <- function() {
    x <- 5
    return(x)
}

print(minha_funcao())
print(x)
```

Exercício 2: Qual é o resultado da chamada da função `dados_estudante`?

```
dados_estudante <- function(nome, altura=167){
  print(paste("O(A) estudante",nome,"tem",altura,"centímetros de altura."))
}

dados_estudante("Joana",160)
```

Exercício 3: Qual é a sintaxe correta para definir uma função em R que soma dois números?

(a) `sum <- function(x, y) {return(x + y)}`

(b) `function sum(x, y) {return(x + y)}`

(c) `def sum(x, y) {return(x + y)}`

(d) `sum(x, y) = function {return(x + y)}`

Exercício 4: Qual das seguintes chamadas à função estão corretas?

```
dados_estudante <- function(nome, altura=167) {
  print(paste("O(A) estudante",nome,"tem",altura,"centímetros de altura."))
}

dados_estudante("Joana",160)
dados_estudante(altura=160, nome="Joana")
dados_estudante(nome = "Joana", 160)
dados_estudante(altura=160, "Joana")
dados_estudante(160)
```

`dados_estudante(160)` - Esta chamada está errada porque 160 será interpretado como nome, e altura usará seu valor padrão, 167. Isso resultará na impressão: `"O(A) estudante 160 tem 167 centímetros de altura."` A chamada está tecnicamente correta no sentido de sintaxe, mas o resultado não faz sentido lógico, já que 160 não é um nome válido para um estudante.

Exercício 5: Qual o resultado do seguinte programa?

```
adi <- function(a,b) {
  return(c(a+5, b+5))
}

resultado <- adi(3,2)
```

7.1 Exercícios

1. Crie uma função chamada `quadrado()` que recebe um único argumento numérico `x` e devolva o quadrado de `x`. Teste a função com os valores 3, 5 e 7.

2. Implemente uma função chamada `hipotenusa(a,b)` que calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo dados os comprimentos dos dois catetos, a e b. A função deve devolver o comprimento da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras.

3. Escreva uma função chamada `divisao_segura(numerador, denominador)` que devolva o resultado da divisão ou uma mensagem de erro apropriada se o denominador for zero.

4. Escreva uma função que receba dois inteiros e devolva o maior deles. Teste a função escrevendo um programa que recebe dois números inteiros do utilizador e imprime o resultado da chamada à função. Depois, escreva uma segunda função que devolva o menor deles, aproveitando a primeira função.

5. Escreva uma função que devolva o maior de três números inteiros, utilizando a função `maior()` do exercício anterior.

6. Crie uma função chamada `analise_vetor()` que receba um vetor numérico e devolva outro vetor contendo a soma, a média, o desvio padrão e o valor máximo do vetor. Use a função para analisar o vetor `c(4, 8, 15, 16, 23, 42)`. Funções auxiliares `sum()`, `mean()`, `sd()`, `max()`.

7. Implemente uma função chamada `classificar_numero()` que classifique um número inteiro como “positivo”, “negativo”, ou “zero”.

8. Escreva uma função que calcule o IMC (Índice de Massa Corporal) com base no peso (kg) e altura (m) fornecidos como argumentos e classifique o resultado com base na tabela:

IMC (kg/m^2)	**Classificação**
Menor que 18.5	Baixo peso
De 18.5 a 24.9	Peso normal
De 25 a 29.9	Sobrepeso
De 30 a 34.9	Obesidade grau I
De 35 a 39.9	Obesidade grau II
Igual ou maior que 40	Obesidade grau III

Lembre-se de que IMC $= \frac{\text{Peso}}{\text{Altura}^2}$.

9. Crie funções em R para converter valores entre diferentes moedas com base nas taxas de câmbio. Implemente e teste as funções, e escreva um programa que solicite ao utilizador um valor em euros e imprima a conversão desse valor para algumas das principais moedas, como dólar, libra, iene e real.

10. Crie uma função que calcule o intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ para o valor médio (nota: amostras grandes, dimensão ≥ 30.).

- $s =$ desvio padrão amostral.
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}} =$ quantil de probabilidade $1-\alpha/2$. Use a função `qnorm()`.

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

```
IC <- function(amostra, alpha){
  # Coloque seu código aqui

}
```

11. Criar uma função que calcule o intervalo de confiança para o valor médio para α igual a 0.001, 0.01, 0.05 e 0.10.

```
ICs <- function(amostra, alphas){
  # Coloque seu código aqui

}
```

12. Crie uma função chamada `calcula_moda` que receba um vetor numérico ou de caracteres e devolva a moda, ou seja, o valor que mais vezes aparece no vetor.

- Caso haja mais do que uma moda (valores que aparecem com a mesma frequência), a função deverá retornar todos os valores modais.

- Utilize a função `table()` para contar as ocorrências de cada valor no vetor.
- Aplique a função ao vetor `c(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)`.
- Teste também com um vetor de caracteres `c("A", "B", "A", "C", "C", "C", "B")`.

13. A distância euclidiana entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dada pela fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Crie uma função chamada `distancia_euclidiana` que aceite como parâmetros as coordenadas dos dois pontos e devolva a distância entre eles.

Teste a função com dois pontos arbitrários, por exemplo, $A(2, 3)$ e $B(6, 9)$.

Generalize a função para trabalhar em qualquer dimensão, ou seja, para pontos com coordenadas n-dimensionais.

Teste a função para dois vetores de coordenadas de três dimensões, como $A(1, 2, 3)$ e $B(4, 5, 6)$, garantindo que o código funcione para múltiplas dimensões.

14. Crie uma função chamada `cria_matriz_aleatoria` que aceite dois parâmetros: o número de linhas e o número de colunas, e devolva uma matriz com números aleatórios uniformes entre 0 e 1.

Adicione uma segunda função `analisa_matriz` que aceite uma matriz como entrada e devolva as seguintes informações:

- Soma de todos os elementos;
- Média de todos os elementos;
- Traço da matriz (a soma dos elementos da diagonal principal, se a matriz for quadrada).

Teste as funções criando uma matriz 5×5 e analisando-a com a função `analisa_matriz`.

Generalize a função `analisa_matriz` para devolver a determinante da matriz, apenas se for quadrada. Se não for quadrada, deve informar que não é possível calcular a determinante.

Chapter 8

Scripts em R

Um **script** em R é um ficheiro que contém um conjunto de definições, como variáveis, funções e blocos de código, que podem ser reutilizados em outros programas R. Scripts são ferramentas essenciais para automatizar tarefas e para garantir a reprodutibilidade da análise de dados.

- **Criar um Script**: Para criar um script em R, basta gravar o código num ficheiro com a extensão ".R". Este ficheiro pode então ser executado ou reutilizado noutras sessões de R.

Exemplo: Guarde o seguinte código num ficheiro chamado `meu_script.R`:

```
produto <- function(x,y){
  return(x*y)
}
```

Executar o script

Para executar o script que criou, utilize a função `source()` no console do R ou dentro de outro script. Isto permitirá que o R leia e execute todas as linhas de código do script.

1. **Executar no Diretório de Trabalho Atual**: Se o ficheiro `meu_script.R` estiver no diretório de trabalho atual, pode executá-lo simplesmente escrevendo:

```
source("meu_script.R")
```

2. **Executar a Partir de Outro Diretório**: Se o ficheiro estiver localizado num diretório diferente do diretório de trabalho atual, terá de fornecer o caminho completo para o ficheiro:

```
source("/caminho/para/o/seu/script/meu_script.R")
```

O que Acontece Quando Executamos um Script?

Quando utiliza o comando `source()`, o R lê e executa todas as linhas do script. Qualquer função, variável ou resultado de operações realizadas dentro do script será carregado e ficará disponível no ambiente de trabalho após a execução. Por exemplo, após executar o script acima, a função `produto()` estará disponível para ser utilizada:

```
# Agora pode utilizar a função 'produto'
produto(2,3)
## [1] 6
```

Notas Importantes

- **Diretório de trabalho**: O diretório de trabalho é o local onde o R procura por ficheiros para leitura ou onde guarda ficheiros. Pode verificar o diretório de trabalho atual utilizando `getwd()` e mudar para um novo diretório com `setwd("caminho/do/diretorio")`.

8.1 Exercícios

1. Crie os seguintes scripts:

(a) Crie um script `quadrado.R` que contenha funções para calcular o perímetro e a área de um quadrado, dado o comprimento do lado. Utilize o script `quadrado.R` noutro script para calcular o perímetro e a área de um quadrado com lado de comprimento 5.

(b) Crie um script `estatistica.R` que contenha funções para ordenar uma amostra, calcular a média, a variância e o desvio padrão de um vetor numérico.

(c) Crie um programa que utilize o script `estatistica.R` para calcular a mediana, a variância e o desvio padrão da amostra `amostra <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)`.

2. Crie um script chamado `circulo.R` que contenha duas funções:

- `area_circulo(r)`: para calcular a área de um círculo, dado o raio r.
- `circunferencia(r)`: para calcular a circunferência de um círculo, dado o raio r.

Em seguida, crie outro script que utilize as funções de `circulo.R` para calcular a área e a circunferência de um círculo com raio igual a 10.

3. Crie um script chamado `analise.R` com funções para calcular:

- O valor mínimo (`minimo`) e máximo (`maximo`) de um vetor numérico.
- A amplitude (`amplitude`) do vetor, calculada como a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo.

Em seguida, crie um script separado que utilize `analise.R` para calcular o valor mínimo, máximo e amplitude de um vetor `dados <- c(8, 15, 22, 3, 18, 7)`.

4. Crie um script chamado `categorias.R` que contenha uma função chamada `contar_categorias`, que recebe um vetor categórico e retorna uma tabela de frequências de cada categoria.

Em seguida, crie um script que utilize `categorias.R` para analisar o vetor `cidades <- c("Lisboa", "Porto", "Lisboa", "Coimbra", "Porto", "Porto", "Lisboa")`. Exiba a frequência de cada cidade.

5. Crie um script chamado `escore_z.R` que contenha uma função chamada `calcular_escore_z(valor, media, desvio_padrao)`. Essa função deve calcular o escore z de um valor em relação a uma média e desvio padrão. Fórmula $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Em seguida, crie um script separado que use `escore_z.R` para calcular o escore z dos valores do vetor `valores <- c(5, 6, 7, 8, 9)`, assumindo uma média de 7 e desvio padrão de 1.5.

6. Crie um script chamado `binomial.R` que contenha uma função chamada `probabilidade_binomial(n, p, x)`, que calcula a probabilidade de ocorrer exatamente x sucessos em n tentativas de um experimento binomial.

Fórmula $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, onde

- $\binom{n}{x}$ é o coeficiente binomial. No R `choose(n,x)`.
- p é a probabilidade de sucesso em cada tentativa.

Em seguida, crie um script separado que use `binomial.R` para calcular a probabilidade de obter exatamente 3 sucessos em 5 tentativas, com uma probabilidade de sucesso de 0.6.

Chapter 9

Leitura de dados

O R é uma linguagem poderosa para análise de dados e oferece diversas funções para importar dados de diferentes formatos. Independentemente do formato, o processo básico de leitura de dados em R segue alguns passos comuns:

1. **Especificar o caminho do ficheiro**: Onde o ficheiro está localizado.
2. **Indicar as características do ficheiro**: Como delimitador, presença de cabeçalhos, tipos de dados, etc.
3. **Ler os dados e armazená-los num objeto**: Geralmente um data frame para fácil manipulação e análise.

9.1 Leitura de Dados da Entrada do Utilizador

A função `scan()` é usada para ler dados da entrada padrão (teclado) ou de um ficheiro, e devolve um vetor. Um uso comum de `scan()` é para entrada de dados manual:

```r
# Solicita ao utilizador para introduzir números
numeros <- scan()
```

Após escrever `scan()`, o utilizador pode inserir uma série de números separados por espaços e pressionar Enter para concluir a entrada.

9.2 Diretório de trabalho

O **diretório de trabalho** (working directory) em R é o local padrão onde o R lê e grava ficheiros. Quando importa dados ou guarda resultados, o R utiliza o diretório de trabalho como ponto de referência. Ter um diretório de trabalho configurado corretamente é essencial para facilitar o acesso a ficheiros de dados e gravação de saídas.

Funções Principais para Manipulação de Diretório

- `getwd()`: Retorna o caminho do diretório atual de trabalho.
- `setwd("caminho/do/diretorio")`: Define o diretório de trabalho para o caminho especificado.

Para verificar o diretório de trabalho atual, utilize `getwd()`:

```
getwd()
```

A saída pode ser semelhante a esta, dependendo do seu sistema operativo:

```
# Exemplo de saída no Windows
## [1] "C:/Users/Utilizador/Documents"

# Exemplo de saída no Mac
## [1] "/Users/Utilizador/Documents"
```

Para alterar o diretório de trabalho para uma pasta específica, use `setwd()`:

```
# Define o diretório de trabalho para "C:/Users/Utilizador/Documents/ProjetosR"
setwd("C:/Users/Utilizador/Documents/ProjetosR")

# Verifica se o diretório de trabalho foi alterado
print(getwd())
## [1] "C:/Users/Utilizador/Documents/ProjetosR"
```

Ao definir corretamente o diretório de trabalho, pode importar ficheiros diretamente sem precisar especificar o caminho completo. Por exemplo, se o ficheiro `dados.csv` estiver no diretório de trabalho, pode lê-lo facilmente:

```
# Lê o ficheiro "dados.csv" no diretório de trabalho atual
dados <- read.csv("dados.csv")

# Exibe as primeiras linhas do conjunto de dados
head(dados)
```

9.3 A Função read.table()

A função `read.table()` é uma das mais versáteis em R para a leitura de ficheiros de texto em formato tabular. Ela permite importar dados de ficheiros de texto e configurá-los de acordo com suas características. Faça o download do ficheiro `dados.txt` em link para praticar.

```
# Leitura de ficheiro txt com read.table()
dados <- read.table(file = "dados.txt", header = TRUE, sep = "")
print(dados)
```

Argumentos Comuns de `read.table()`

- `file`: Especifica o nome do ficheiro ou o caminho do ficheiro para leitura.
- `header`: Indica se a primeira linha do ficheiro contém os nomes das colunas. Se `header = TRUE`, a primeira linha é considerada como cabeçalho.
- `sep`: Define o caractere separador entre os campos. O padrão é uma vírgula (,), mas pode ser especificado para outros caracteres, como espaço (“ “), ponto e vírgula (;), etc.
- `dec`: Define o caractere utilizado para separar a parte inteira da parte decimal dos números. Por exemplo, pode ser ponto (.) ou vírgula (,).
- `nrows`: Especifica o número máximo de linhas a serem lidas do ficheiro, útil para ler apenas uma parte do ficheiro.
- `na.strings`: Define quais valores no ficheiro devem ser interpretados como `NA` (valores ausentes), como “NA”, “N/A”, etc.
- `skip`: Indica o número de linhas a serem ignoradas no início do ficheiro antes de começar a leitura.
- `comment.char`: Define o caractere usado para denotar comentários no ficheiro. Linhas que começam com este caractere serão ignoradas.

Para ver todas as opções disponíveis na função `read.table()`, pode usar:

```
args(read.table)
```

```
## function (file, header = FALSE, sep = "", quote = "\"'", dec = ".",
##     numerals = c("allow.loss", "warn.loss", "no.loss"), row.names,
##     col.names, as.is = !stringsAsFactors, tryLogical = TRUE,
##     na.strings = "NA", colClasses = NA, nrows = -1, skip = 0,
##     check.names = TRUE, fill = !blank.lines.skip, strip.white = FALSE,
##     blank.lines.skip = TRUE, comment.char = "#", allowEscapes = FALSE,
##     flush = FALSE, stringsAsFactors = FALSE, fileEncoding = "",
##     encoding = "unknown", text, skipNul = FALSE)
## NULL
```

Se o ficheiro for um CSV (valores separados por vírgula), pode utilizar `read.table()` com o argumento `sep` apropriado:

```
dados_csv <- read.table("dados.csv", header = TRUE, sep = ",")
```

9.4 A função `read.csv()`

A função `read.csv()` está otimizada para a leitura de ficheiros CSV (Comma-Separated Values), que são ficheiros de texto onde cada linha representa um registo e os valores são separados por vírgulas. A principal diferença entre `read.csv()` e `read.table()` é que o separador padrão em `read.csv()` é uma vírgula.

```
# Leitura de ficheiro CSV com read.csv
dados_csv <- read.csv("dados.csv", header = TRUE)
```

Aqui, o argumento `header = TRUE` indica que a primeira linha do ficheiro contém os nomes das colunas. Outros argumentos são semelhantes aos de `read.table()`.

9.5 A função `read.csv2()`

A função `read.csv2()` é semelhante à `read.csv()`, mas é projetada para lidar com ficheiros CSV onde o separador padrão é um ponto e vírgula (;) e o separador decimal é uma vírgula (,). Este formato é comum em alguns países europeus.

```
# Leitura de CSV com separador ponto e vírgula
dados_csv2 <- read.csv2("dados.csv2", header = TRUE)
```

9.6 A Função `read_excel()`

Para ler ficheiros Excel (.xls e .xlsx), usamos a função `read_excel()` do pacote `readxl`. Este pacote precisa ser instalado e carregado antes da sua utilização.

```
library(readxl)

# Sintaxe básica
read_excel(path, sheet = NULL, range = NULL, col_names = TRUE,
           col_types = NULL, na = "", trim_ws = TRUE, skip = 0, n_max = Inf,
           guess_max = min(1000, n_max), progress = readxl_progress())
```

Principais Parâmetros de `read_excel()`

- `path`: O caminho do ficheiro Excel a ser lido. Este é um argumento obrigatório e pode ser um caminho local ou uma URL.
- `sheet`: O nome ou o índice da aba (folha) do Excel a ser lida. Se não for especificado, a função irá ler a primeira folha.
- `range`: Um intervalo específico a ser lido, como "A1:D10". Se `NULL` (padrão), a função lê toda a folha.
- `col_names`: Um argumento lógico (`TRUE` ou `FALSE`) que indica se a primeira linha da folha deve ser usada como nomes das colunas no data frame. O padrão é `TRUE`.
- `col_types`: Um vetor de tipos de colunas que podem ser `"blank"`, `"numeric"`, `"date"`, `"text"`, ou `"guess"`. O padrão é `NULL`, o que permite que a função adivinhe os tipos de coluna automaticamente.
- `na`: Um vetor de strings que devem ser interpretadas como valores ausentes (`NA`). O padrão é string vazia (" ").
- `trim_ws`: Um argumento lógico (`TRUE` ou `FALSE`) que indica se os espaços em branco devem ser removidos do início e do fim dos valores de texto. O padrão é `TRUE`.
- `skip`: Número de linhas a serem ignoradas antes de começar a leitura. O padrão é 0.
- `n_max`: Número máximo de linhas a serem lidas. O padrão é `Inf`, o que significa que todas as linhas são lidas.

Exemplo de Utilização: Vamos considerar um exemplo em que temos um ficheiro Excel chamado `"dados_instagram.xlsx"`. Este ficheiro pode ser descarregado aqui. Vamos ler a primeira folha (`Sheet1`):

```
dados <- read_excel(path = "instagram.xlsx",
                    sheet = "Sheet1",
                    col_names = TRUE)
```

9.7 Leitura de Dados Online

O R também permite ler dados diretamente de URLs. Pode usar funções como `read.table()`, `read.csv()`, ou `read_excel()` (dependendo do formato do ficheiro) para importar dados diretamente de um link online.

```
# Leitura de dados online com read.table
url <- "https://example.com/data.csv"
dados_online <- read.table(url, header = TRUE, sep = ",")
```

Neste exemplo, url contém o endereço do ficheiro CSV na web, e `read.table()` é usado para importar o conteúdo como um data frame.

9.8 Exercícios

1. Faça a leitura do ficheiro `dados_instagram` aqui e responda às perguntas abaixo (lembre de instalar o pacote `readxl`):

(a) Exiba as primeiras 6 linhas do dataset:

(b) **Construa uma tabela de frequência**: Crie um data frame que contenha a tabela de frequência de cada variável no conjunto de dados.

```
# --------------------
# Indice de influência
# ---------------------

# Calcular o número de classes usando a Regra de Sturges
n <- length(dados_instagram$indice_influencia)  # Número de observações
k <- ceiling(1 + 3.322 * log10(n))   # Número de classes arredondado para cima

# Definir os limites das classes
min_val <- min(dados_instagram$indice_influencia)
max_val <- max(dados_instagram$indice_influencia)
intervalos <- seq(min_val, max_val, length.out = k + 1)  # Criação dos intervalos de c

# Criar a tabela de frequências
tabela_frequencia_if <- cut(dados_instagram$indice_influencia, breaks = intervalos, inc
tabela_frequencia_if <- table(tabela_frequencia_if)

# Converter a tabela em um data frame para visualização mais organizada
tabela_frequencia_if_df <- as.data.frame(tabela_frequencia_if)
names(tabela_frequencia_if_df) <- c("Intervalo", "Frequencia")
tabela_frequencia_if_df

# Frequência relativa
tabela_frequencia_if_df$Freq_Relativa <- round(tabela_frequencia_if_df$Frequencia/lengt

# Frequência absoluta acumulada
tabela_frequencia_if_df$Freq_Abs_Acum <- cumsum(tabela_frequencia_if_df$Frequencia)

# Frequência relativa acumulada
tabela_frequencia_if_df$Freq_Rela_Acum <- cumsum(tabela_frequencia_if_df$Freq_Relativa)
```

(c) **Visualização gráfica**: Crie representações gráficas adequadas para cada variável. Considere o uso de histogramas, gráficos de barras, boxplots..., conforme o tipo de variável.

(d) **Cálculo de medidas descritivas**: Determine as principais medidas descritivas para cada variável, incluindo média, mediana, variância, desvio padrão, coeficiente de variação, primeiro e terceiro quartis (Q_1 e Q_3), amplitude e amplitude interquartil. Indique quando essas medidas não forem aplicáveis.

(e) Calcule a média e a mediana do "índice de influência" para cada género. Comente sobre as diferenças entre os géneros e discuta se os resultados podem sugerir tendências distintas de influência entre eles.

(f) Calcule a média e a mediana da "média de likes" para cada género. Avalie se há diferenças significativas entre os géneros nesta métrica e discuta possíveis implicações.

(g) **Comparação de dispersão entre variáveis**: Compare a dispersão das variáveis "índice de influência" e "número de publicações" utilizando medidas como variância e desvio padrão. Justifique qual das variáveis apresenta maior dispersão e interprete o que isso pode indicar sobre os dados.

(h) **Análise de percentis para "número de seguidores"**: Identifique os percentis de 10%, 25%, 75% e 90% para a variável "número de seguidores". Comente sobre como esses percentis podem ser usados para categorizar influenciadores com diferentes níveis de popularidade na plataforma.

(i) **Identificação de outliers**: Investigue a presença de outliers nas variáveis "número de publicações", "número de seguidores" e "média de likes".

(j) **Correlação entre "índice de influência" e "média de likes"**: Calcule a correlação entre as variáveis "índice de influência" e "média de likes". Comente sobre a relação entre essas duas variáveis, discutindo se um alto índice de influência tende a estar associado a uma média maior de curtidas.

2. Importe o ficheiro `dataset.csv` aqui no R e salve-o como um data frame. Em seguida:

(a) Exiba as primeiras 6 linhas do dataset.

(b) Escolha uma variável categórica no dataset crie uma tabela de frequência para essa variável. Visualize a distribuição da variável usando um gráfico de barras.

(c) Para cada variável numérica no dataset, crie as seguintes visualizações:

- Histogramas para observar a distribuição das variáveis.
- Boxplots para identificar a presença de outliers e a dispersão dos dados.

(d) Calcule as principais medidas descritivas para uma variável numérica à sua escolha. Inclua: Média, mediana, variância, desvio padrão, coeficiente de variação, quartis (Q_1 e Q_3), amplitude e amplitude interquartil.

(e) Selecione uma variável numérica e uma variável categórica (por exemplo, comparar uma variável numérica entre diferentes categorias de uma variável categórica). Especificamente:

- Calcule a média e a mediana da variável numérica para cada grupo da variável categórica.
- Use boxplots para comparar visualmente as distribuições entre os grupos.

Chapter 10

Pipe

10.1 O operador pipe

O operador pipe (`%>%`) em R é uma ferramenta poderosa que facilita a escrita de código mais limpo e legível. Ele permite que o resultado de uma função seja passado diretamente como entrada para a próxima função, sem a necessidade de criar variáveis intermediárias. Este operador ajuda a tornar o fluxo de dados mais intuitivo e o código mais fácil de ler.

O operador pipe foi popularizado pelo pacote `magrittr`, desenvolvido por Stefan Milton Bache e lançado em 2014. O nome "magrittr" é uma referência ao artista surrealista René Magritte, famoso pela pintura "Ceci n'est pas une pipe" (Isto não é um cachimbo), que inspirou a ideia de que o operador pipe permite que dados fluam através de uma sequência de operações de maneira intuitiva e sem a necessidade de variáveis temporárias.

Para começar a utilizar o operador pipe, é necessário instalar e carregar o pacote `magrittr`.

```
install.packages("magrittr")
library(magrittr)
```

O operador pipe `%>%` permite que o **valor de uma expressão à esquerda seja passado como o primeiro argumento para a função à direita**. Isso permite que o **código seja lido de maneira sequencial, de cima para baixo, em vez de dentro para fora**, o que facilita a compreensão do fluxo de dados. Por exemplo, considere o seguinte código em R sem o uso do pipe:

```
x <- c(1, 2, 3, 4)
sqrt(sum(x))
## [1] 3.16
```

Com o operador pipe, o código pode ser reescrito de forma mais clara e legível:

```
library(magrittr)
x %>% sum() %>% sqrt()
## [1] 3.16
```

Considere um exemplo onde queremos calcular a raiz quadrada da soma dos logaritmos dos valores absolutos de um vetor `x`:

```
resultado <- sqrt(sum(log(abs(x))))
```

Usando o operador pipe, o mesmo código pode ser reescrito de maneira mais clara:

```
resultado <- x %>%
  abs() %>%
  log() %>%
  sum() %>%
  sqrt()
```

Uso do Ponto (.) no Pipe

Em alguns casos, o **resultado do lado esquerdo do operador pipe deve ser passado para um argumento que não é o primeiro na função do lado direito**. Para esses casos, usamos um ponto (.) como um marcador para indicar onde o valor deve ser inserido.

Por exemplo, ao usar o pipe para construir um modelo linear com o conjunto de dados `airquality`, queremos que o dataset seja passado como o segundo argumento (`data =`) da função `lm()`:

```
airquality %>%
  na.omit() %>% # Remove valores ausentes
  lm(Ozone ~ Wind + Temp + Solar.R, data = .) %>% # Cria o modelo linear
  summary() # Gera o resumo do modelo
##
## Call:
## lm(formula = Ozone ~ Wind + Temp + Solar.R, data = .)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -40.48 -14.22  -3.55  10.10  95.62
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept) -64.3421    23.0547   -2.79   0.0062 **
## Wind         -3.3336     0.6544   -5.09  1.5e-06 ***
## Temp          1.6521     0.2535    6.52  2.4e-09 ***
## Solar.R       0.0598     0.0232    2.58   0.0112 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 21.2 on 107 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.606,  Adjusted R-squared:  0.595
## F-statistic: 54.8 on 3 and 107 DF,  p-value: <2e-16
```

Neste exemplo, o dataset `airquality` é pré-processado com `na.omit()` para remover os valores ausentes, e o resultado é usado como o argumento data na função `lm()` para criar um modelo linear. O pipe permite que este fluxo de operações seja descrito de forma clara e linear.

10.2 Exercícios

1. Reescreva a expressão abaixo utilizando o `%>%`.

```r
round(mean(sum(1:10)/3), digits = 1)
```

Dica: utilize a função `magrittr::divide_by()`. Veja o help da função para mais informações.

2. Reescreva o código abaixo utilizando o `%>%`.

```r
x <- rnorm(100)

x.pos <- x[x>0]

media <- mean(x.pos)

saida <- round(media, 2)
```

Dica: utilize a função `magrittr::extract()`. Veja o help da função para mais informações.

3. Sem executar, diga qual a saída do código abaixo. Consulte o help das funções caso precise.

```
2 %>%
  add(2) %>%
  c(6, NA) %>%
  mean(na.rm = T) %>%
  equals(5)
```

4. Dado o dataset `mtcars`, selecione as colunas `mpg`, `hp`, e `wt`, filtre os carros com mais de 100 cavalos de potência (`hp > 100`), e ordene-os pela coluna `wt` (peso) de forma crescente.

```
# Sem o operador pipe
install.packages("dplyr")
library(dplyr)
result <- arrange(filter(select(mtcars, mpg, hp, wt), hp > 100), wt)
print(result)
```

Reescreva o código acima usando o operador pipe (`%>%`).

5. Dado o dataset `iris`, filtre as linhas onde `Sepal.Length` seja maior que 5, selecione as colunas `Sepal.Length` e `Species`, e depois calcule a média de `Sepal.Length` para cada espécie.

```
# Sem o operador pipe
result <- aggregate(Sepal.Length ~ Species, data = select(filter(iris, Sepal.Length > 5
print(result)
```

Reescreva o código acima usando o operador pipe (`%>%`).

6. Utilizando o dataset `airquality`, remova as linhas que contêm valores ausentes (`NA`), selecione as colunas `Ozone` e `Wind`, e calcule a média de `Ozone` para valores onde `Wind` é maior que 10.

```
# Sem o operador pipe
cleaned_data <- na.omit(airquality)
filtered_data <- filter(cleaned_data, Wind > 10)
result <- mean(filtered_data$Ozone)
print(result)
```

Reescreva o código acima usando o operador pipe (`%>%`). Dica: use a função `summarise()`.

7. Dado o dataset `mtcars`, crie uma nova coluna chamada `hp_per_wt` que seja a razão entre `hp` e `wt`. Em seguida, filtre os carros com essa razão maior que 30, e selecione as colunas `mpg`, `hp_per_wt`, e `gear`.

```r
# Sem o operador pipe
mtcars$hp_per_wt <- mtcars$hp / mtcars$wt
filtered_data <- filter(mtcars, hp_per_wt > 30)
result <- select(filtered_data, mpg, hp_per_wt, gear)
print(result)
```

Reescreva o código acima usando o operador pipe (`%>%`). Dica: use a função `mutate()`.

Chapter 11

Loop while

A instrução `while` em R é uma estrutura de controle de fluxo que permite executar repetidamente um bloco de código enquanto uma condição específica for verdadeira. Esse tipo de loop é especialmente útil quando o número de iterações não é conhecido antecipadamente e depende de uma condição lógica ser atendida.

```
# Sintaxe
while (condição) {
  # Bloco de código a ser executado repetidamente
}
```

- **condição**: Uma expressão lógica que é avaliada antes de cada iteração do loop. Enquanto essa condição for `TRUE`, o bloco de código dentro do while será executado.
- **Bloco de código**: As instruções que são repetidas enquanto a condição for verdadeira.

Funcionamento do Loop While

- **Avaliação da Condição**: Antes de cada execução do bloco de código, a condição é avaliada.
- **Execução do Bloco de Código**: Se a condição for `TRUE`, o bloco de código dentro do `while` é executado.
- **Reavaliação**: Após a execução do bloco de código, a condição é reavaliada. Se a condição continuar a ser `TRUE`, o ciclo repete-se. Se a condição se tornar `FALSE`, o loop termina e o controlo do programa continua com a próxima instrução após o `while`.

Exemplo 1: Somando números até um limite. O exemplo seguinte calcula a soma de todos os números de 1 a 10.

```
limite <- 10
soma <- 0
contador <- 1

while (contador <= limite) {
  soma <- soma + contador
  contador <- contador + 1
}

print(paste("A soma dos números de 1 a", limite, "é:", soma))
## [1] "A soma dos números de 1 a 10 é: 55"
```

Neste exemplo:

- O loop while continua enquanto `contador <= limite`.
- Em cada iteração, o valor de `contador` é adicionado a soma, e `contador` é incrementado em 1.
- Quando `contador` excede `limite`, o loop termina.

Exemplo 2: Escrever a tabuada de um número inteiro. O programa abaixo imprime a tabuada de um número fornecido pelo utilizador.

```
n <- as.numeric(readline("Digite um número inteiro: "))

print(paste("Tabuada do",n, ":"))
i <- 1
while (i <= 10){
  print(paste(n,"x",i, "=", n*i))
  i + 1
}
```

Explique por que o programa acima não termina. Qual é o erro no nosso código? O loop no código original não terminava porque a linha `i + 1` não atualizava a variável `i`. A expressão `i + 1` calcula o novo valor, mas não o atribui de volta a `i`. O código correto usa `i <- i + 1` para atualizar a variável `i` a cada iteração.

Exemplo 3: Uso do break para interromper um loop. O próximo exemplo demonstra como usar a instrução `break` para sair de um loop antecipadamente.

```
limite <- 10
soma <- 0
contador <- 1
```

```
while (contador <= limite) {
  soma <- soma + contador
  print(contador)
  if (contador == 3){
    break # Interrompe o loop quando contador é igual a 3
  }
  contador <- contador + 1
}
## [1] 1
## [1] 2
## [1] 3
```

- **break**: A instrução `break` é usada para sair imediatamente do loop, independentemente de a condição de while ainda ser `TRUE`.

Considerações Importantes sobre o Uso do `while()`

- **Condição de Paragem**: É fundamental garantir que a condição do `while` eventualmente se torne `FALSE` para evitar loops infinitos que podem bloquear o programa.
- **Incremento/Decremento**: A variável que controla a condição deve ser atualizada corretamente dentro do loop. Falhas em fazer isso corretamente também podem causar loops infinitos.
- **Desempenho**: Loops `while` podem ser menos eficientes do que operações vetorizadas em R. Para grandes conjuntos de dados, considere usar funções vetorizadas como `apply`, `lapply`, `sapply`, etc., para melhorar o desempenho.

11.1 Exercícios

1. Escreva um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro n. O programa deve imprimir todos os números inteiros de 0 até n, um número por linha.

2. Crie um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro, calcule o seu quadrado e exiba o resultado. Em seguida, pergunte ao utilizador se ele deseja continuar ou terminar o programa. O loop deve continuar até que o utilizador escolha terminar.

3. Desenvolva um programa em R que peça ao utilizador um número inteiro n e calcule a soma dos primeiros n inteiros (de 1 até n). O resultado deve ser exibido no console.

4. Escreva um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro n e conte quantos números pares existem no intervalo de 0 até n. O resultado deve ser impresso no console.

5. Use um loop `while` para somar números inteiros positivos até que um número negativo seja inserido.

Crie um programa em R que leia números inteiros inseridos pelo utilizador e some-os. O loop deve continuar até que o utilizador insira um número negativo, momento em que o programa deve parar e exibir a soma dos números positivos inseridos.

6. Use um loop while para implementar uma contagem regressiva.

Implemente um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro positivo e, em seguida, execute uma contagem regressiva até zero, imprimindo cada número no console.

7. Escreva um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro negativo e, em seguida, conte progressivamente até zero, imprimindo cada número no console.

8. Desenvolva um programa em R que peça ao utilizador para inserir um número. Se o número for positivo, o programa deve contar regressivamente até zero. Se o número for negativo, o programa deve contar progressivamente até zero. Cada número deve ser impresso no console.

9. Crie um programa em R que solicite ao utilizador um número inteiro não negativo e calcule seu fatorial usando um loop `while`. Lembre-se que $0! = 1$ e que $4! = 4 \times 3 \times 2 \times = 24$.

10. Escreva um programa em R que leia um número inteiro positivo e calcule a soma de seus dígitos usando um loop `while`. Por exemplo, para o número 23, o programa deve calcular $2 + 3 = 5$.

11. Desenvolva um programa em R que gere e imprima os números da sequência de Fibonacci até atingir um valor máximo especificado pelo utilizador. A sequência de Fibonacci começa com 1, 1 e cada número subsequente é a soma dos dois anteriores $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots)$.

Chapter 12

Loop for

O loop `for` em R é uma estrutura de controlo de fluxo que permite executar repetidamente um bloco de código para cada elemento de uma sequência. Ele é particularmente útil quando o número de iterações é conhecido de antecipadamente. O loop `for` é amplamente utilizado em R para iterar sobre vetores, listas, data frames, e outras estruturas de dados.

```
# Sintaxe
for (variável in sequência) {
  # Bloco de código a ser executado
}
```

- **variável**: Uma variável de controlo que, em cada iteração, assume o valor do próximo elemento da sequência.
- **sequência**: Uma estrutura de dados como um vetor, lista, ou outro objeto sobre o qual se deseja iterar.
- **bloco de código**: As instruções a serem executadas a cada iteração do loop.

Funcionamento do Loop for

- **Inicialização**: Antes de iniciar o loop, a variável de controlo é definida com o primeiro elemento da sequência.
- **Iteração**: Para cada iteração, a variável de controlo é atualizada com o próximo valor da sequência.
- **Execução do Bloco de Código**: O bloco de código dentro do loop é executado para cada valor da variável de controlo.

- **Finalização**: O loop termina quando todos os elementos da sequência tiverem sido processados.

Exemplo 1: Imprima os números de 0 a 10 no ecrã.

```
for (i in 0:10) {
  print(i)
}
## [1] 0
## [1] 1
## [1] 2
## [1] 3
## [1] 4
## [1] 5
## [1] 6
## [1] 7
## [1] 8
## [1] 9
## [1] 10
```

Exemplo 2: Soma dos elementos de um vetor.

```
numeros <- c(1, 2, 3, 4, 5)
soma <- 0

for (num in numeros) {
  soma <- soma + num
}

print(paste("A soma dos números é:", soma))
## [1] "A soma dos números é: 15"
```

Exemplo 3: Uso do `for` com índices. Também pode usar o loop for para iterar sobre índices de vetores ou listas, o que pode ser útil quando se deseja aceder ou modificar elementos em posições específicas.

```
numeros <- c(10, 20, 30, 40, 50)

for (i in 1:length(numeros)) {
  numeros[i] <- numeros[i] * 2
}

print("Elementos do vetor multiplicados por 2:")
print(numeros)
## [1]  20  40  60  80 100
```

Exemplo 4: Iterar sobre matrizes. O loop `for` também pode ser utilizado para percorrer elementos de uma matriz, seja por linha ou por coluna. No exemplo abaixo, calculamos a soma dos elementos de cada linha de uma matriz.

```
matriz <- matrix(1:9, nrow=3, ncol=3)
soma_linhas <- numeric(nrow(matriz))

for (i in 1:nrow(matriz)) {
  soma_linhas[i] <- sum(matriz[i, ])
}

print("Soma dos elementos de cada linha:")
print(soma_linhas)
## [1] 12 15 18
```

Exemplo 5: Cálculo de Médias de Colunas num Data Frame. Neste exemplo, calculamos a média de cada coluna de um data frame usando um loop `for`.

```
dados <- data.frame(
A = c(1, 2, 3),
B = c(4, 5, 6),
C = c(7, 8, 9)
)

medias <- numeric(ncol(dados))

for (col in 1:ncol(dados)) {
  medias[col] <- mean(dados[, col])
}

print("Médias das colunas do data frame:")
print(medias)
## [1] 2 5 8
```

12.1 Exercícios

1. Escreva um programa em R que use um loop `for` para imprimir todos os números de 1 a 10.

2. Escreva um programa em R que use um loop `for` para imprimir o quadrado de cada número de 1 a 5.

3. Escreva um programa em R que some todos os elementos do vetor `numeros <- c(2, 4, 6, 8, 10)` usando um loop `for`.

4. Escreva um programa em R que calcule a média das notas no vetor `notas <- c(85, 90, 78, 92, 88)` usando um loop `for`.

5. Escreva um programa em R que imprima todos os números ímpares do vetor `valores <- c(1, 3, 4, 6, 9, 11, 14)`. Utilize um loop `for`.

6. Escreva um programa em R que leia um número inteiro e use um loop `for` para imprimir sua a tabuada de 1 a 10.

7. Escreva um programa em R que leia um número inteiro e use um loop `for` para criar o vetor `c(1,2,...,n-1,n)`.

8. Escreva um programa em R que leia um número inteiro e use um loop `for` para determinar se o número é perfeito ou não. Um número perfeito é aquele cuja soma de seus divisores próprios é igual ao próprio número (por exemplo, 6 tem divisores próprios 1, 2 e 3, e 1+2+3 = 6).

9. Escreva um programa em R que use um loop `for` para encontrar e imprimir todos os números perfeitos entre 1 e 1000.

10. Escreva um programa em R que leia dois inteiros n e m e imprima os números entre 0 e n, inclusive, com um intervalo de m entre eles. Utilize um loop `for` para o efeito.

11. Escreva um programa que calcule a média de um conjunto de notas fornecidas pelo utilizador. O número de notas a serem inseridas é indicado pelo utilizador antes da entrada das notas. Utilize um loop `for` para recolher as notas e calcular a média. Segue-se um exemplo da interação com o computador:

```
Digite o número de notas que serão inseridas: 4

Digite a nota: 12

Digite a nota: 13

Digite a nota: 15.5

Digite a nota: 16

A média das notas é 14.125
```

12. Crie uma matriz 4×4 com números de 1 a 16. Utilizando o comando de repetição `for` calcule:

(a) a média da terceira coluna da matriz.

(b) a média da terceira linha da matriz.

(c) a média de cada coluna da matriz.

(d) a média de cada linha da matriz.

(e) a média dos números pares de cada coluna da matriz.

(f) a média dos números ímpares de cada linha da matriz.

Obs: Use estruturas de decisão (`if`…`else`…) sempre que necessário para condicionar a lógica dentro dos loops.

Chapter 13

Família `Xapply()`

A família `Xapply()` no R refere-se a um conjunto de funções desenhadas para iterar de forma eficiente sobre objetos, evitando a necessidade de loops (ciclos) explícitos como `for`. Essas funções são especialmente úteis para realizar operações repetitivas em listas, vetores, matrizes, data frames e outros objetos, de forma concisa e frequentemente mais rápida.

Função	**Argumentos**	**Objetivo**	**Input**	**Output**
`apply`	`apply(x, MARGIN, FUN)`	Aplica uma função às linhas ou colunas ou a ambas	Data frame ou matriz	vetor, lista, array
`lapply`	`lapply(x, FUN)`	Aplica uma função a todos os elementos da entrada	Lista, vetor ou data frame	lista
`sapply`	`sapply(x, FUN)`	Aplica uma função a todos os elementos da entrada	Lista, vetor ou data frame	vetor ou matriz
`tapply`	`tapply(x, INDEX, FUN)`	Aplica uma função a cada fator	Vetor ou data frame	array

13.1 Função `apply()`

A função `apply()` aplica uma função a margens específicas (linhas ou colunas) de uma matriz ou data frame e devolve um vetor, lista ou array. É frequentemente usada para evitar loops explícitos.

```
# Sintaxe
apply(X, MARGIN, FUN)
```

- `X`: A matriz ou data frame a ser manipulado.
- `MARGIN`: Um valor que indica se a função deve ser aplicada às linhas (1) ou colunas (2) ou ambas `c(1,2)`.
- `FUN`: A função que será aplicada.

Exemplo: Calcular a soma, a média e a raíz quadrada de cada coluna de uma matriz.

```
matriz <- matrix(1:9, nrow = 3)

apply(matriz, 2, sum)
## [1]  6 15 24

apply(matriz, 2, mean)
## [1] 2 5 8

f <- function(x) sqrt(x)
apply(matriz, 2, f)
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 1.00 2.00 2.65
## [2,] 1.41 2.24 2.83
## [3,] 1.73 2.45 3.00
```

13.2 Função lapply()

A função `lapply()` aplica uma função a cada elemento de uma lista ou vetor e devolve uma lista. É útil quando se deseja manter a estrutura de saída como uma lista.

```
# Sintaxe
lapply(X, FUN, ...)
```

- `X`: A lista ou vetor de entrada.
- `FUN`: A função que será aplicada.

Exemplo 1:

```
nomes <- c("ANA", "JOAO", "PAULO", "FILIPA")
nomes_minusc <- lapply(nomes, tolower)
print(nomes_minusc)
## [[1]]
## [1] "ana"
##
## [[2]]
## [1] "joao"
##
## [[3]]
## [1] "paulo"
##
## [[4]]
## [1] "filipa"

str(nomes_minusc)
## List of 4
##  $ : chr "ana"
##  $ : chr "joao"
##  $ : chr "paulo"
##  $ : chr "filipa"
```

Exemplo 2:

```
# Aplicar a função sqrt a cada elemento de uma lista
vetor_dados <- list(a = 1:4, b = 5:8)
lapply(vetor_dados, sqrt)
## $a
## [1] 1.00 1.41 1.73 2.00
##
## $b
## [1] 2.24 2.45 2.65 2.83
```

13.3 Função sapply()

A função `sapply()` é semelhante à `lapply()`, mas tenta simplificar o resultado para um vetor ou matriz, se possível.

```
# Sintaxe
sapply(X, FUN, ...)
```

Exemplo

```
dados <- 1:5
f <- function(x) x^2

lapply(dados, f)
## [[1]]
## [1] 1
##
## [[2]]
## [1] 4
##
## [[3]]
## [1] 9
##
## [[4]]
## [1] 16
##
## [[5]]
## [1] 25

sapply(dados, f)
## [1]  1  4  9 16 25
```

13.4 Função tapply()

A função `tapply()` aplica uma função a subconjuntos de um vetor, divididos de acordo com fatores. É ideal para operações em subconjuntos de dados categorizados.

```
# Sintaxe
tapply(X, INDEX, FUN, ...)
```

- `X`: O vetor de dados.
- `INDEX`: Um fator ou lista de fatores que definem os grupos.
- `FUN`: A função que será aplicada a cada grupo.

Exemplo: O dataset `iris` em R é um conjunto de dados amplamente utilizado para exemplificar análises estatísticas. Foi introduzido por Ronald A. Fisher em 1936 no seu artigo sobre a utilização de modelos estatísticos para discriminação de espécies de plantas. Contém informações sobre três espécies de flores (`Setosa`, `Versicolor`, `Virginica`) e suas características morfológicas (comprimento e largura das sépalas e pétalas). Vamos calcular a média do comprimento das pétalas por espécie usando `tapply()`:

```
iris
##    Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width    Species
## 1           5.1         3.5          1.4         0.2     setosa
## 2           4.9         3.0          1.4         0.2     setosa
## 3           4.7         3.2          1.3         0.2     setosa
## 4           4.6         3.1          1.5         0.2     setosa
## 5           5.0         3.6          1.4         0.2     setosa
## 6           5.4         3.9          1.7         0.4     setosa
## 7           4.6         3.4          1.4         0.3     setosa
## 8           5.0         3.4          1.5         0.2     setosa
## 9           4.4         2.9          1.4         0.2     setosa
## 10          4.9         3.1          1.5         0.1     setosa
## 11          5.4         3.7          1.5         0.2     setosa
## 12          4.8         3.4          1.6         0.2     setosa
## 13          4.8         3.0          1.4         0.1     setosa
## 14          4.3         3.0          1.1         0.1     setosa
## 15          5.8         4.0          1.2         0.2     setosa
## 16          5.7         4.4          1.5         0.4     setosa
## 17          5.4         3.9          1.3         0.4     setosa
## 18          5.1         3.5          1.4         0.3     setosa
## 19          5.7         3.8          1.7         0.3     setosa
## 20          5.1         3.8          1.5         0.3     setosa
## 21          5.4         3.4          1.7         0.2     setosa
## 22          5.1         3.7          1.5         0.4     setosa
## 23          4.6         3.6          1.0         0.2     setosa
## 24          5.1         3.3          1.7         0.5     setosa
## 25          4.8         3.4          1.9         0.2     setosa
## 26          5.0         3.0          1.6         0.2     setosa
## 27          5.0         3.4          1.6         0.4     setosa
## 28          5.2         3.5          1.5         0.2     setosa
## 29          5.2         3.4          1.4         0.2     setosa
## 30          4.7         3.2          1.6         0.2     setosa
## 31          4.8         3.1          1.6         0.2     setosa
## 32          5.4         3.4          1.5         0.4     setosa
## 33          5.2         4.1          1.5         0.1     setosa
## 34          5.5         4.2          1.4         0.2     setosa
## 35          4.9         3.1          1.5         0.2     setosa
## 36          5.0         3.2          1.2         0.2     setosa
## 37          5.5         3.5          1.3         0.2     setosa
## 38          4.9         3.6          1.4         0.1     setosa
## 39          4.4         3.0          1.3         0.2     setosa
## 40          5.1         3.4          1.5         0.2     setosa
## 41          5.0         3.5          1.3         0.3     setosa
## 42          4.5         2.3          1.3         0.3     setosa
## 43          4.4         3.2          1.3         0.2     setosa
```

```
## 44          5.0         3.5          1.6         0.6     setosa
## 45          5.1         3.8          1.9         0.4     setosa
## 46          4.8         3.0          1.4         0.3     setosa
## 47          5.1         3.8          1.6         0.2     setosa
## 48          4.6         3.2          1.4         0.2     setosa
## 49          5.3         3.7          1.5         0.2     setosa
## 50          5.0         3.3          1.4         0.2     setosa
## 51          7.0         3.2          4.7         1.4 versicolor
## 52          6.4         3.2          4.5         1.5 versicolor
## 53          6.9         3.1          4.9         1.5 versicolor
## 54          5.5         2.3          4.0         1.3 versicolor
## 55          6.5         2.8          4.6         1.5 versicolor
## 56          5.7         2.8          4.5         1.3 versicolor
## 57          6.3         3.3          4.7         1.6 versicolor
## 58          4.9         2.4          3.3         1.0 versicolor
## 59          6.6         2.9          4.6         1.3 versicolor
## 60          5.2         2.7          3.9         1.4 versicolor
## 61          5.0         2.0          3.5         1.0 versicolor
## 62          5.9         3.0          4.2         1.5 versicolor
## 63          6.0         2.2          4.0         1.0 versicolor
## 64          6.1         2.9          4.7         1.4 versicolor
## 65          5.6         2.9          3.6         1.3 versicolor
## 66          6.7         3.1          4.4         1.4 versicolor
## 67          5.6         3.0          4.5         1.5 versicolor
## 68          5.8         2.7          4.1         1.0 versicolor
## 69          6.2         2.2          4.5         1.5 versicolor
## 70          5.6         2.5          3.9         1.1 versicolor
## 71          5.9         3.2          4.8         1.8 versicolor
## 72          6.1         2.8          4.0         1.3 versicolor
## 73          6.3         2.5          4.9         1.5 versicolor
## 74          6.1         2.8          4.7         1.2 versicolor
## 75          6.4         2.9          4.3         1.3 versicolor
## 76          6.6         3.0          4.4         1.4 versicolor
## 77          6.8         2.8          4.8         1.4 versicolor
## 78          6.7         3.0          5.0         1.7 versicolor
## 79          6.0         2.9          4.5         1.5 versicolor
## 80          5.7         2.6          3.5         1.0 versicolor
## 81          5.5         2.4          3.8         1.1 versicolor
## 82          5.5         2.4          3.7         1.0 versicolor
## 83          5.8         2.7          3.9         1.2 versicolor
## 84          6.0         2.7          5.1         1.6 versicolor
## 85          5.4         3.0          4.5         1.5 versicolor
## 86          6.0         3.4          4.5         1.6 versicolor
## 87          6.7         3.1          4.7         1.5 versicolor
## 88          6.3         2.3          4.4         1.3 versicolor
```

```
## 89          5.6         3.0          4.1         1.3 versicolor
## 90          5.5         2.5          4.0         1.3 versicolor
## 91          5.5         2.6          4.4         1.2 versicolor
## 92          6.1         3.0          4.6         1.4 versicolor
## 93          5.8         2.6          4.0         1.2 versicolor
## 94          5.0         2.3          3.3         1.0 versicolor
## 95          5.6         2.7          4.2         1.3 versicolor
## 96          5.7         3.0          4.2         1.2 versicolor
## 97          5.7         2.9          4.2         1.3 versicolor
## 98          6.2         2.9          4.3         1.3 versicolor
## 99          5.1         2.5          3.0         1.1 versicolor
## 100         5.7         2.8          4.1         1.3 versicolor
## 101         6.3         3.3          6.0         2.5  virginica
## 102         5.8         2.7          5.1         1.9  virginica
## 103         7.1         3.0          5.9         2.1  virginica
## 104         6.3         2.9          5.6         1.8  virginica
## 105         6.5         3.0          5.8         2.2  virginica
## 106         7.6         3.0          6.6         2.1  virginica
## 107         4.9         2.5          4.5         1.7  virginica
## 108         7.3         2.9          6.3         1.8  virginica
## 109         6.7         2.5          5.8         1.8  virginica
## 110         7.2         3.6          6.1         2.5  virginica
## 111         6.5         3.2          5.1         2.0  virginica
## 112         6.4         2.7          5.3         1.9  virginica
## 113         6.8         3.0          5.5         2.1  virginica
## 114         5.7         2.5          5.0         2.0  virginica
## 115         5.8         2.8          5.1         2.4  virginica
## 116         6.4         3.2          5.3         2.3  virginica
## 117         6.5         3.0          5.5         1.8  virginica
## 118         7.7         3.8          6.7         2.2  virginica
## 119         7.7         2.6          6.9         2.3  virginica
## 120         6.0         2.2          5.0         1.5  virginica
## 121         6.9         3.2          5.7         2.3  virginica
## 122         5.6         2.8          4.9         2.0  virginica
## 123         7.7         2.8          6.7         2.0  virginica
## 124         6.3         2.7          4.9         1.8  virginica
## 125         6.7         3.3          5.7         2.1  virginica
## 126         7.2         3.2          6.0         1.8  virginica
## 127         6.2         2.8          4.8         1.8  virginica
## 128         6.1         3.0          4.9         1.8  virginica
## 129         6.4         2.8          5.6         2.1  virginica
## 130         7.2         3.0          5.8         1.6  virginica
## 131         7.4         2.8          6.1         1.9  virginica
## 132         7.9         3.8          6.4         2.0  virginica
## 133         6.4         2.8          5.6         2.2  virginica
```

```
## 134          6.3         2.8          5.1         1.5  virginica
## 135          6.1         2.6          5.6         1.4  virginica
## 136          7.7         3.0          6.1         2.3  virginica
## 137          6.3         3.4          5.6         2.4  virginica
## 138          6.4         3.1          5.5         1.8  virginica
## 139          6.0         3.0          4.8         1.8  virginica
## 140          6.9         3.1          5.4         2.1  virginica
## 141          6.7         3.1          5.6         2.4  virginica
## 142          6.9         3.1          5.1         2.3  virginica
## 143          5.8         2.7          5.1         1.9  virginica
## 144          6.8         3.2          5.9         2.3  virginica
## 145          6.7         3.3          5.7         2.5  virginica
## 146          6.7         3.0          5.2         2.3  virginica
## 147          6.3         2.5          5.0         1.9  virginica
## 148          6.5         3.0          5.2         2.0  virginica
## 149          6.2         3.4          5.4         2.3  virginica
## 150          5.9         3.0          5.1         1.8  virginica
```

```r
tapply(iris$Petal.Length, iris$Species, mean)
##     setosa versicolor  virginica
##      1.46       4.26       5.55
```

13.5 Exercícios

1. Crie um vetor chamado `nomes` contendo os nomes "Alice", "Bruno", "Carla", e "Daniel". Use a função `lapply()` para converter todos os nomes para maiúsculas. Verifique o resultado.

```r
nomes <- c("Alice", "Bruno", "Carla", "Daniel")
# Sua solução aqui
```

2. Crie um vetor chamado `palavras` contendo as palavras "cachorro", "gato", "elefante", e "leão". Use a função `sapply()` para calcular o comprimento (número de caracteres) de cada palavra. Verifique o resultado. Dica, veja `?nchar`.

```r
palavras <- c("cachorro", "gato", "elefante", "leão")
# Sua solução aqui
```

3. Crie uma matriz 3x3 chamada `matriz_exemplo` com os números de 1 a 9. Use a função `apply()` para calcular a soma de cada linha da matriz. Em seguida, use a função `apply()` novamente para calcular a média de cada coluna.

```
matriz_exemplo <- matrix(1:9, nrow = 3)
# Sua solução aqui
```

4. Use o conjunto de dados embutido `mtcars` em R. Use a função `tapply()` para calcular a média do consumo de combustível (`mpg`) para cada número de cilindros (`cyl`).

```
data(mtcars)
# Sua solução aqui
```

5. Crie uma lista chamada `minha_lista` contendo três elementos: um vetor numérico de 1 a 5, um vetor de caracteres com os valores "A", "B", "C", e uma matriz 2x2 com valores de 1 a 4. Use `lapply()` para calcular o comprimento de cada elemento da lista e, em seguida, use `sapply()` para simplificar o resultado num vetor.

```
minha_lista <- list(1:5, c("A", "B", "C"), matrix(1:4, nrow = 2))
# Sua solução aqui
```

6. Crie um vetor `numeros` contendo os números de 1 a 10. Use a função `sapply()` para aplicar uma função personalizada que retorne "par" se o número for par e "ímpar" se o número for ímpar.

```
numeros <- 1:10
# Sua solução aqui
```

7. Use o conjunto de dados `iris`. Utilize `tapply()` para calcular a média do comprimento das pétalas (`Petal.Length`) por espécie (`Species`) e a variância da largura das sépalas (`Sepal.Width`) por espécie.

```
data(iris)
# Sua solução aqui
```

8. Use o conjunto de dados `mtcars`. Use `apply()` para normalizar (escala de 0 a 1) todas as colunas numéricas do data frame. Converta o resultado num data frame. Em seguida, use `lapply()` para aplicar a função `summary()` a cada coluna normalizada para verificar o resultado. Valor normalizado $\frac{x-min(x)}{max(x)-min(x)}$.

```
data(mtcars)
# Sua solução aqui
```

9. Um professor quer analisar o desempenho dos alunos em quatro exames. Ele registou as notas de 30 alunos, e agora deseja calcular algumas estatísticas descritivas.

- Crie um data frame `notas_alunos` com 30 linhas (representando 30 alunos) e 4 colunas (representando os 4 exames).
- Preencha o data frame com valores aleatórios entre 0 e 100, para simular as notas. Use a função `runif()`.
- Utilize `apply()` para calcular a média de cada aluno em todos os exames.
- Em seguida, utilize `sapply()` para calcular a nota mínima e a nota máxima de cada exame.

10. Um gestor de marketing está a analisar o número de clientes que visitam quatro lojas ao longo de um mês. Ele quer verificar a frequência média e as tendências para cada loja.

- Crie uma matriz chamada `frequencia_lojas` com 4 linhas (representando 4 lojas) e 30 colunas (representando os dias do mês).
- Preencha a matriz com valores aleatórios entre 0 e 200, representando o número de clientes diários em cada loja. Use a função `sample()`.
- Utilize `apply()` para calcular a média diária de clientes em cada loja ao longo dos 30 dias.
- Em seguida, utilize `apply()` para calcular a soma total de clientes de cada loja durante o mês.
- Converta a matriz `frequencia_lojas` em um data frame e use `sapply()` para calcular o desvio padrão do número de clientes em cada dia do mês (cada coluna), para verificar a variação de clientes ao longo dos dias.

Chapter 14

Exercícios de Revisão

1 Um pesquisador está a analisar os resultados de uma pesquisa que avalia a satisfação de clientes com diferentes serviços. Ele quer calcular a média de satisfação de cada cliente e classificar os clientes em satisfeitos ou insatisfeitos.

- Crie um data frame chamado `satisfacao` com 10 linhas (clientes) e 3 colunas (representando os serviços).
- Preencha o data frame com valores aleatórios entre 1 e 10.
- Escreva uma função chamada `calcula_media` que receba o data frame e calcule a média de satisfação para cada cliente. Adicione uma coluna ao data frame com a média de satisfação.
- Utilize um loop `for` para percorrer as médias e classificar cada cliente como "Satisfeito" (média >= 7) ou "Insatisfeito" (média < 7), usando a estrutura `if-else`. Adicione uma coluna ao data frame com o grau de satisfação.

2. Uma empresa registou o número de tarefas realizadas por 15 funcionários durante 5 dias. A empresa quer saber quem atingiu a meta diária de 20 tarefas.

- Crie um data frame chamado `tarefa_funcionarios` com 15 linhas (funcionários) e 5 colunas (dias).
- Preencha o data frame com valores aleatórios entre 10 e 30, representando o número de tarefas concluídas por dia.
- Escreva uma função chamada `verifica_meta` que receba o data frame e verifique, para cada funcionário, se ele atingiu a meta de 20 tarefas em pelo menos 3 dias.
- Utilize um loop `for` e a estrutura `if-else` para classificar os funcionários como "Atingiu Meta" ou "Não Atingiu Meta", criando um vetor de saída com esses resultados. Adicione uma coluna ao data frame com a classificação dos funcionários.

3. Um estatístico está a simular amostras de diferentes populações para estudar a variabilidade das médias. Ele quer gerar amostras de diferentes tamanhos e calcular a média de cada amostra, parando a simulação quando a média exceder um valor limite.

- Crie uma matriz `amostras` com 6 linhas e 15 colunas, onde cada linha representa uma amostra de tamanho 15.
- Preencha a matriz com valores aleatórios entre 0 e 100.
- Crie uma função chamada `calcula_media_amostra` que receba a matriz e calcule a média de cada amostra.
- Utilize um loop `while` para calcular as médias das amostras e, em cada iteração, verifique se a média da amostra excede 75. Caso ultrapasse, imprima "Média Excedeu Limite", e caso contrário, continue o cálculo até todas as amostras serem processadas.

4. Um climatologista está a analisar as temperaturas médias diárias em 12 cidades ao longo de uma semana. Ele quer calcular a temperatura média semanal de cada cidade e identificar se a média semanal está acima ou abaixo de uma temperatura de referência de 25ºC.

- Crie uma matriz chamada `temperaturas_cidades` com 12 linhas (cidades) e 7 colunas (dias da semana).
- Preencha a matriz com valores aleatórios entre 10 e 40, representando as temperaturas diárias.
- Crie uma função chamada `calcula_media_temperaturas` que receba a matriz e calcule a média de cada cidade.
- Utilize um loop `while` para iterar sobre as cidades e, com base na média calculada, use `if-else` para indicar se a média semanal de temperatura está "Acima de 25ºC" ou "Abaixo de 25ºC".

5. Uma empresa realizou uma pesquisa de satisfação com 15 clientes, onde os clientes classificaram seu nível de satisfação com notas de 1 a 5. A empresa deseja calcular a média das avaliações e identificar quais clientes deram notas abaixo de 3.

- Crie um vetor chamado `avaliacoes` com 15 elementos, cada um representando a nota de um cliente.
- Crie uma função chamada `calcula_media_satisfacao` que receba o vetor e calcule a média das avaliações.
- Use um loop `for` para verificar se alguma avaliação é inferior a 3 e, com if-else, identifique os clientes insatisfeitos.
- Organize os resultados em uma lista chamada `resultado_pesquisa`, que contenha o vetor de avaliações, a média e os clientes insatisfeitos.

Chapter 15

Gráficos (R base)

O R oferece uma variedade de funções para criar gráficos estatísticos básicos e personalizá-los de acordo com as necessidades da análise. A criação de gráficos é uma parte essencial da análise de dados, pois permite visualizar padrões, tendências e distribuições de forma intuitiva.

15.1 Gráfico de Barras

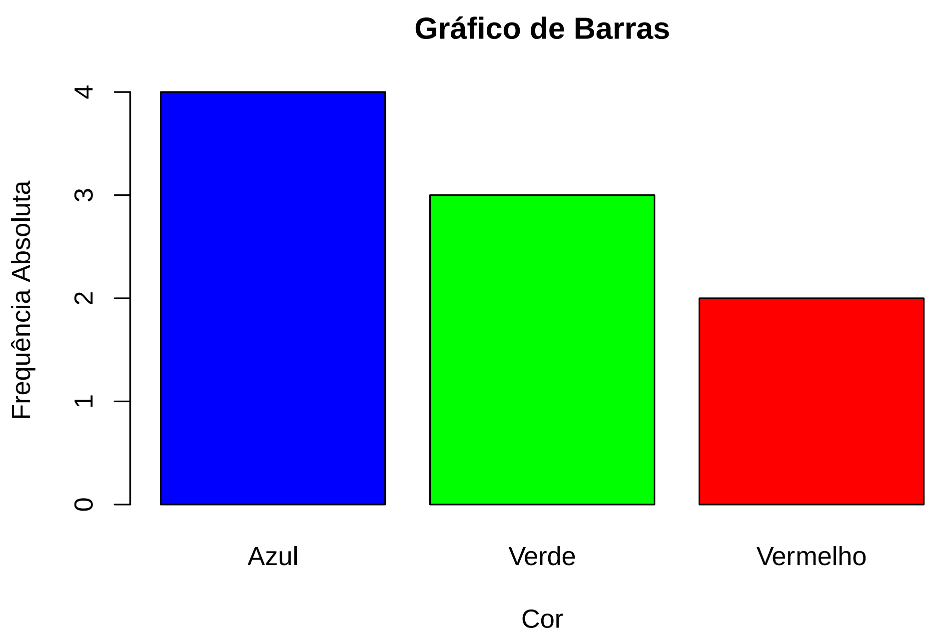
Gráfico de barras: Um gráfico de barras consiste em barras verticais ou horizontais, onde cada barra representa uma categoria e sua altura (ou comprimento) indica a frequência (absoluta ou relativa) dessa categoria. A largura das barras é constante e não possui significado estatístico.

```
# Sintaxe
barplot(altura,
        names.arg = NULL,
        main = NULL,
        xlab = NULL,
        ylab = NULL,
        col = NULL,
        beside = FALSE)
```

- `altura`: Vetor ou matriz que define a altura das barras. Pode ser um vetor numérico (para um gráfico simples) ou uma matriz (para gráficos empilhados ou agrupados).
- `names.arg`: Define os rótulos que serão exibidos no eixo x para cada barra.
- `main`: Título principal do gráfico.
- `xlab` e `ylab`: Rótulos dos eixos x e y, respectivamente.

- `col`: Cor ou vetor de cores das barras.
- `beside`: Controla se as barras devem ser exibidas lado a lado (`TRUE`) ou empilhadas (`FALSE`).

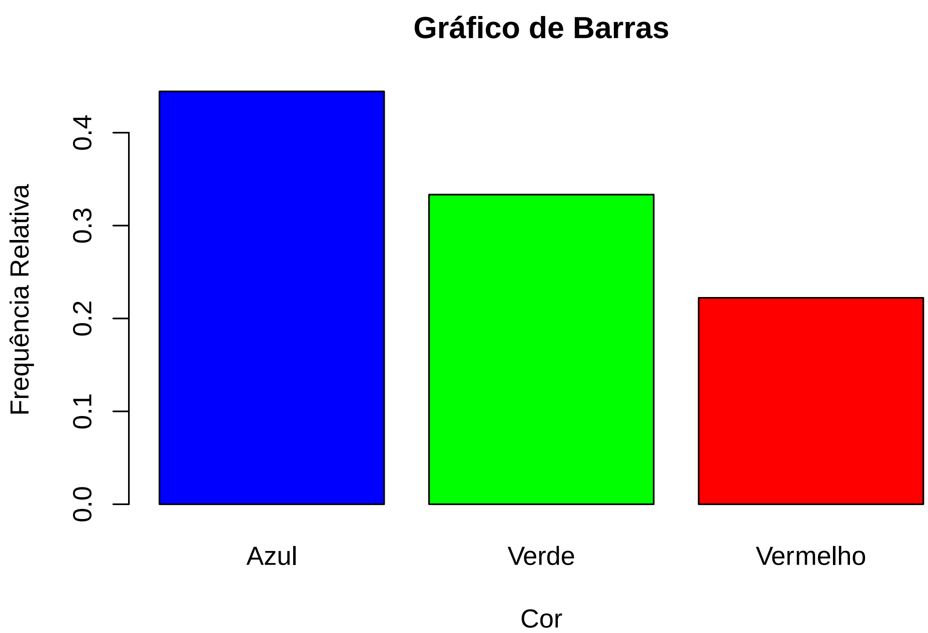
```
# Dados de exemplo: cores favoritas
cores <- c("Azul", "Vermelho", "Verde", "Azul", "Verde",
"Vermelho", "Azul", "Verde", "Azul")

# Calcular as frequências absolutas
frequencia_absoluta <- table(cores)

# Criar o gráfico de barras com frequências absolutas
barplot(frequencia_absoluta,
  main = "Gráfico de Barras",
  xlab = "Cor",
  ylab = "Frequência Absoluta",
  col = c("blue", "green", "red"),
  border = "black")
```



Para ter o gráfico com as frequências relativas fazemos:

```
# Calcular as frequências relativas
frequencia_relativa <- frequencia_absoluta / length(cores)

# Criar o gráfico de barras com frequências relativas
```

```
barplot(frequencia_relativa,
  main = "Gráfico de Barras",
  xlab = "Cor",
  ylab = "Frequência Relativa",
  col = c("blue", "green", "red"),
  border = "black")
```



Personalização de Gráficos de Barras

Pode personalizar ainda mais os gráficos de barras usando argumentos como `horiz` (para gráficos de barras horizontais), e `beside` (para barras lado a lado).

```
# Gráfico de barras horizontal
barplot(frequencia_absoluta,
        main = "Gráfico de Barras Horizontal",
        xlab = "Frequência Absoluta",
        ylab = "Cor",
        col = c("blue", "green", "red"),
        horiz = TRUE)
```

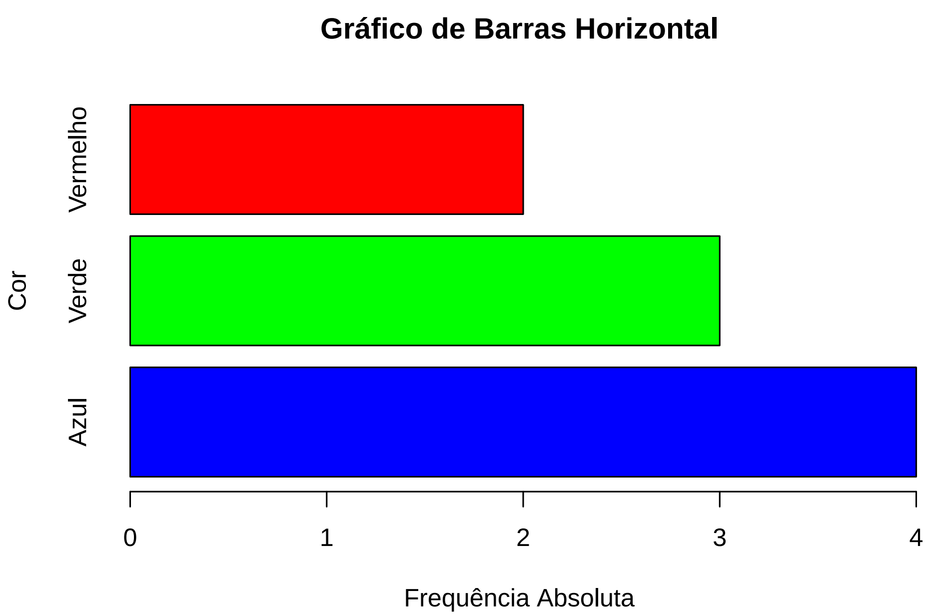
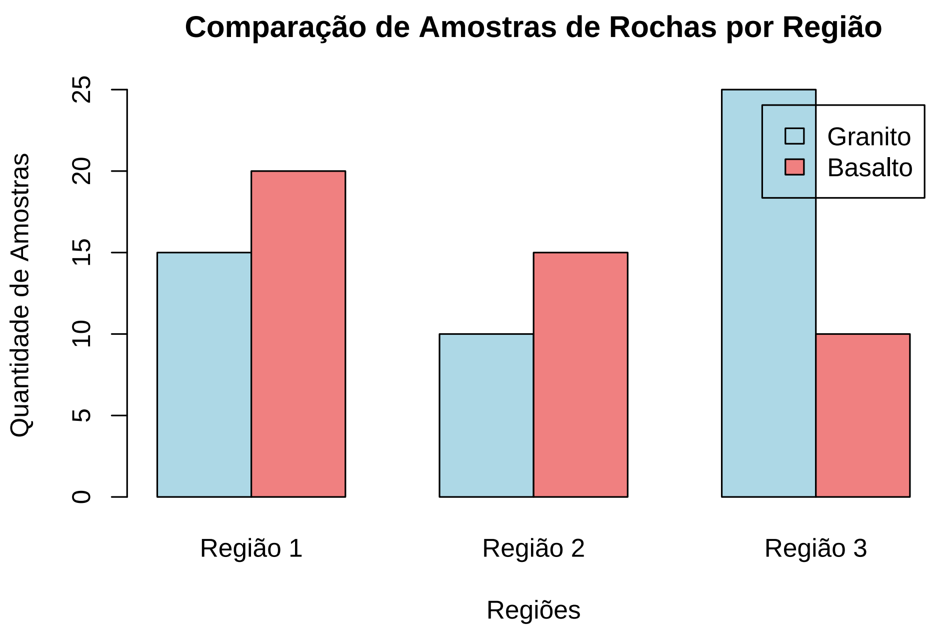


Gráfico de Barras Agrupadas

Podemos também gerar gráficos de barras que comparam mais de uma variável. Neste exemplo, vamos comparar o número de amostras de dois tipos de rochas em três diferentes regiões geográficas.

```
# Dados: contagem de amostras por tipo de rocha e região
regioes <- c("Região 1", "Região 2", "Região 3")
granito <- c(15, 10, 25)
basalto <- c(20, 15, 10)

# Criando uma matriz para agrupar os dados
dados_rochas <- rbind(granito, basalto)

# Gerando o gráfico de barras agrupadas
barplot(dados_rochas,
        beside = TRUE,
        names.arg = regioes,
        col = c("lightblue", "lightcoral"),
        legend.text = c("Granito", "Basalto"),
        main = "Comparação de Amostras de Rochas por Região",
        xlab = "Regiões",
        ylab = "Quantidade de Amostras")
```

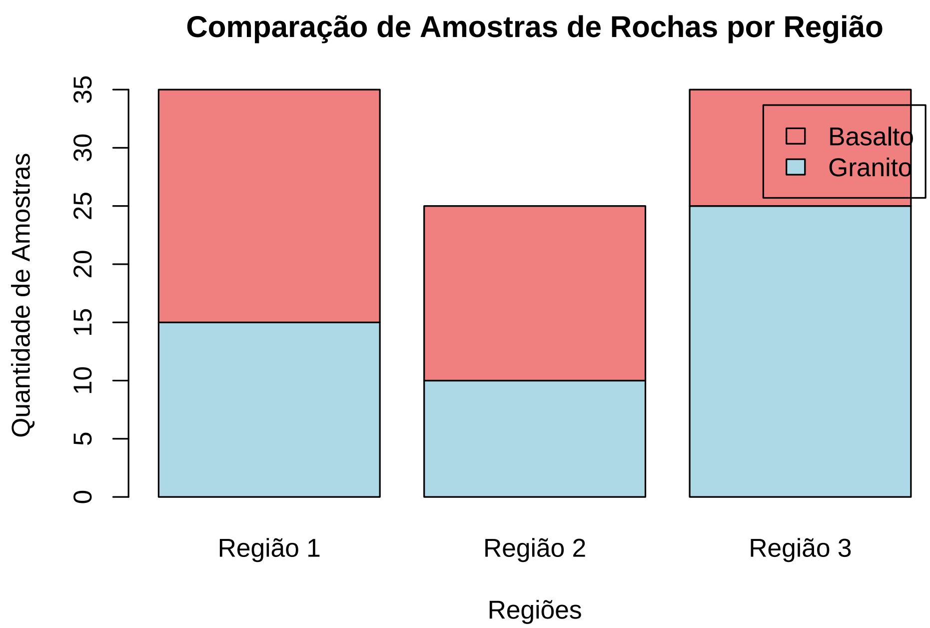


Neste exemplo, usamos `rbind()` para agrupar os dados e o argumento `beside = TRUE` para gerar barras lado a lado para comparação entre "Granito" e "Basalto". O parâmetro `legend.text` cria uma legenda para identificar cada cor de barra.

Gráfico de Barras Empilhado

Para gerar um gráfico de barras empilhado em vez de agrupado, basta remover o argumento `beside = TRUE`. No gráfico empilhado, as barras de diferentes categorias serão colocadas uma em cima da outra em vez de lado a lado.

```r
# Dados: contagem de amostras por tipo de rocha e região
regioes <- c("Região 1", "Região 2", "Região 3")
granito <- c(15, 10, 25)
basalto <- c(20, 15, 10)

# Criando uma matriz para agrupar os dados
dados_rochas <- rbind(granito, basalto)

# Gerando o gráfico de barras empilhadas
barplot(dados_rochas,
        names.arg = regioes,
        col = c("lightblue", "lightcoral"),
        legend.text = c("Granito", "Basalto"),
        main = "Comparação de Amostras de Rochas por Região",
        xlab = "Regiões",
        ylab = "Quantidade de Amostras")
```



15.2 Gráfico Circular (Pizza)

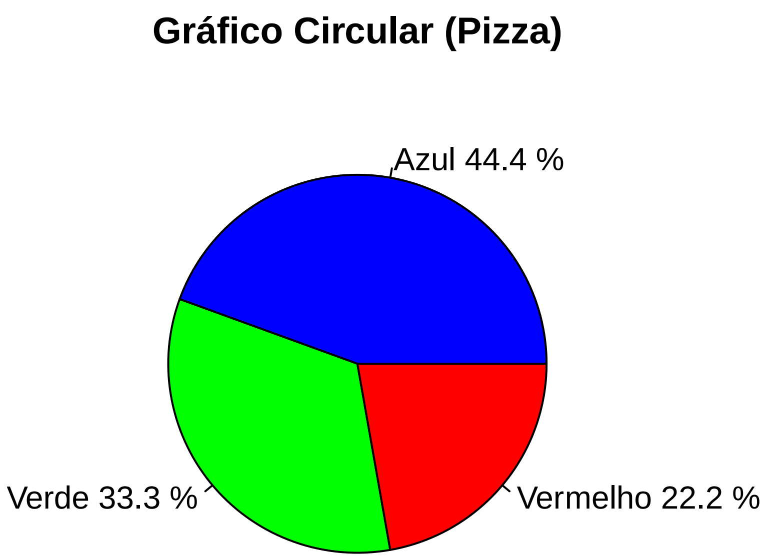
Gráfico circular (pizza): Mostra a proporção de diferentes categorias em relação ao total. Cada fatia representa uma categoria e o tamanho de cada fatia é proporcional à sua porcentagem.

```
# Sintaxe
pie(x, labels = NULL, main = NULL, col = NULL, radius = 1)
```

- `x`: Um vetor numérico com os valores de cada fatia. Eles podem ser absolutos, e a função `pie()` calcula automaticamente a proporção entre eles.
- `labels`: Um vetor de rótulos para cada fatia. Se não for especificado, o R usará os valores de `x` como rótulos.
- `main`: Título do gráfico.
- `col`: Um vetor de cores para cada fatia.
- `radius`: Ajusta o tamanho do gráfico. O valor padrão é 1, e valores menores ou maiores diminuem ou aumentam o tamanho do gráfico.

```
# Criar gráfico circular
pie(frequencia_relativa,
    main = "Gráfico Circular (Pizza)",
    col = c("blue", "green", "red"),
```

```
    labels = paste(names(frequencia_relativa),
                   round(frequencia_relativa * 100, 1), "%"))
```



15.3 Histograma

Histograma: é uma representação gráfica dos dados em que se marcam as classes (intervalos) no eixo horizontal e as frequências (absuluta ou relativa) no eixo vertical.

- Cada retângulo corresponde a uma classe.
- A largura de cada retângulo é igual à amplitude da classe.
- Se as classes tiverem todas a mesma amplitude, a altura do retângulo é proporcional à frequência.

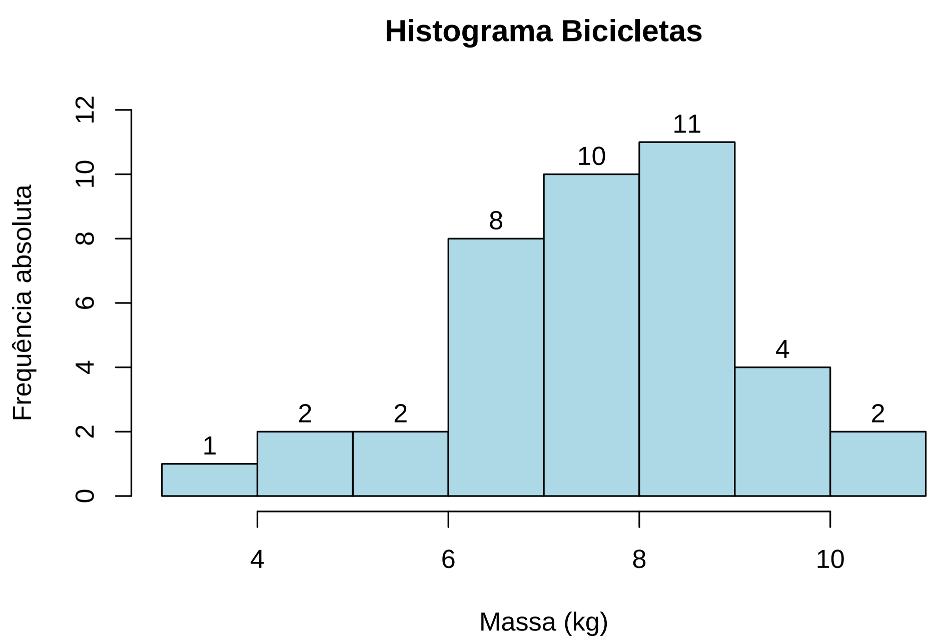
Por default, o R utiliza a frequência absoluta para construir o histograma. Se tiver interesse em representar as frequências relativas, utilize a opção `freq=FALSE` nos argumentos da função `hist()`. O padrão de intervalo de classe no R é $(a, b]$.

```
# Sintaxe
hist(x, breaks = "Sturges",
     main = NULL,
     xlab = NULL,
```

```
     ylab = NULL,
     col = NULL,
     border = NULL)
```

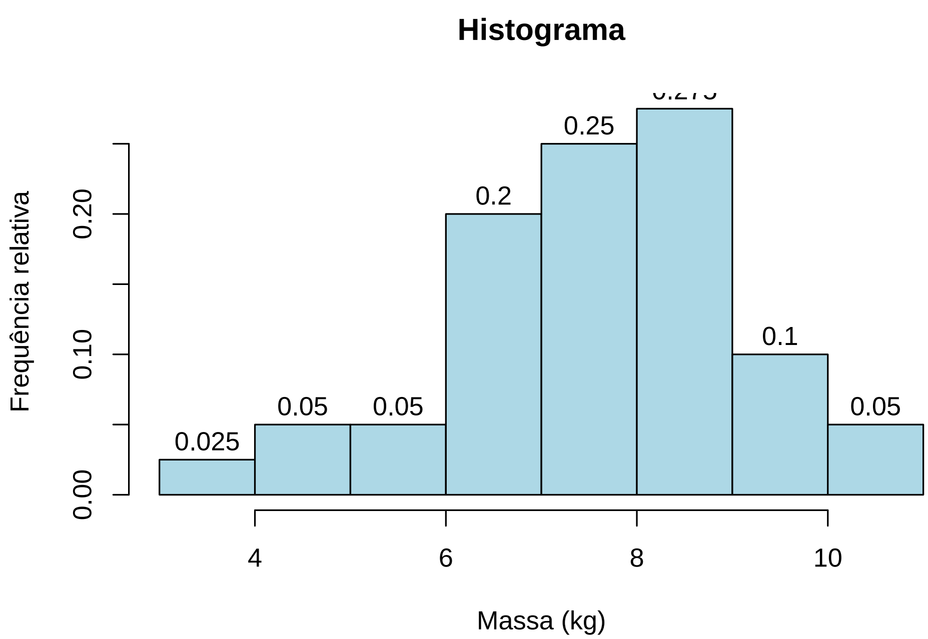
- `x`: Um vetor numérico com os dados para criar o histograma.
- `breaks`: Controla o número de intervalos ou "bins" do histograma. Pode ser um número específico ou um método (ex.: "Sturges", "Scott", "FD").
- `main`: Define o título do gráfico.
- `xlab`: Rótulo para o eixo `x`.
- `ylab`: Rótulo para o eixo `y`.
- `col`: Cor das barras do histograma.
- `border`: Cor das bordas das barras.

```
# Dados referentes à massa (em kg) de 40 bicicletas
bicicletas <- c(4.3,6.8,9.2,7.2,8.7,8.6,6.6,5.2,8.1,10.9,7.4,4.5,3.8,7.6,6.8,7.8,8.4,7

h <- hist(bicicletas,
          breaks = "Sturges",
          main = "Histograma Bicicletas",
          xlab = "Massa (kg)",
          ylab = "Frequência absoluta",
          col = "lightblue",
          border = "black",
          ylim = c(0,12),
          labels = TRUE)
```



```r
# Pontos limites das classes
h$breaks
## [1]  3  4  5  6  7  8  9 10 11

# O comando h$counts retorna um vetor com as frequências absolutas dentro de cada classe
h$counts
## [1]  1  2  2  8 10 11  4  2
```

```r
# Histograma com frequência relativa
hist(bicicletas,
  main = "Histograma",
  xlab = "Massa (kg)",
  ylab = "Frequência relativa",
  freq = FALSE,
  col = "lightblue",
  border = "black",
  labels = TRUE)
```

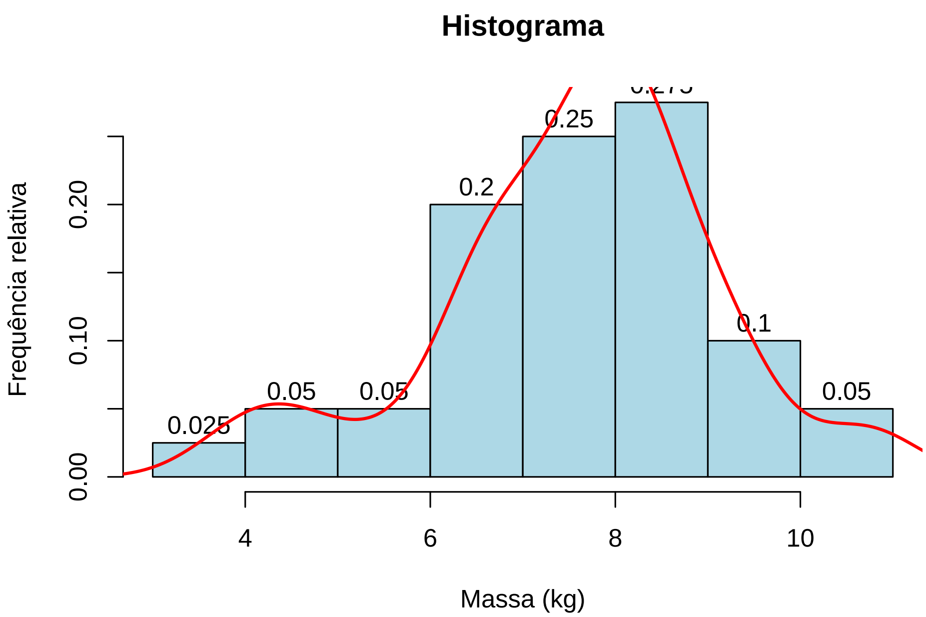


Pode controlar o número de intervalos (bins) usando o argumento `breaks`. Por exemplo, `breaks = 5` divide os dados em 5 intervalos.

Podemos adicionar também uma curva de densidade em cima do histograma.

```r
# Histograma com frequência relativa
hist(bicicletas,
```

```
  main = "Histograma",
  xlab = "Massa (kg)",
  ylab = "Frequência relativa",
  freq = FALSE,
  col = "lightblue",
  border = "black",
  labels = TRUE)

# Adicionando uma curva de densidade em cima do histograma
lines(density(bicicletas), col="red", lwd=2)
```



15.4 Box-plot

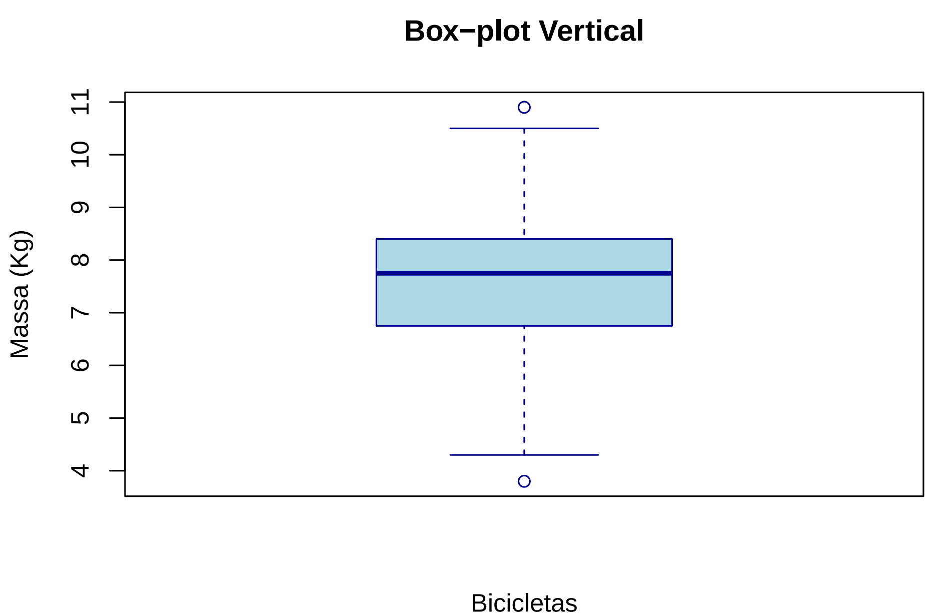
Box-plot (Caixa de Bigodes): O box-plot é uma representação gráfica que resume a distribuição de uma variável através de cinco estatísticas principais: mínimo, primeiro quartil (Q1), mediana (Q2), terceiro quartil (Q3) e máximo. Também pode mostrar outliers (valores atípicos).

```
# Sintaxe
boxplot(x,
        main = NULL,
        xlab = NULL,
        ylab = NULL,
```

```
        col = NULL,
        border = NULL,
        horizontal = FALSE)
```

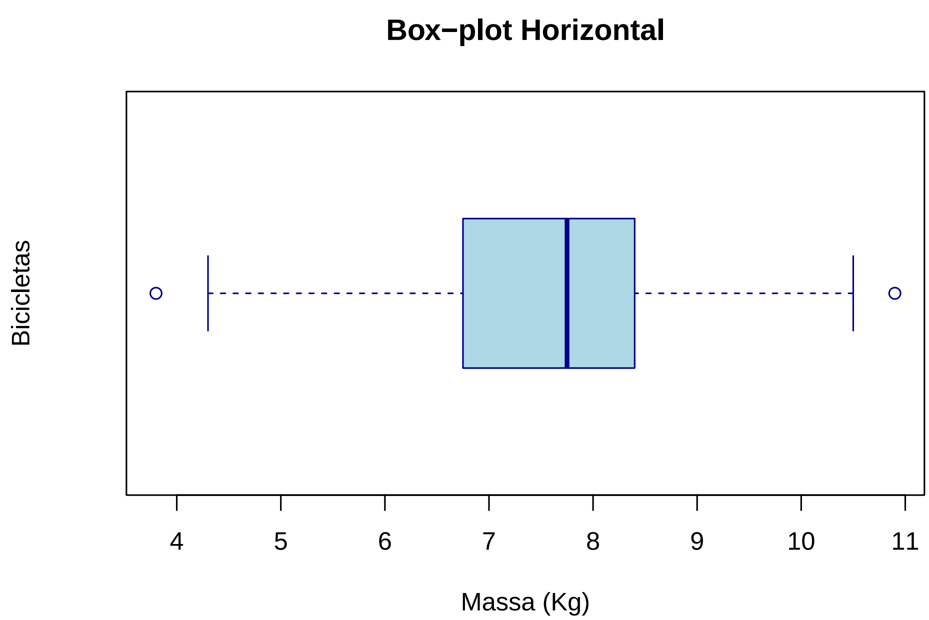
- `x`: Vetor numérico, matriz ou lista de dados numéricos para criar o boxplot.
- `main`: Define o título do gráfico.
- `xlab` e `ylab`: Rótulos para os eixos x e y, respectivamente.
- `col`: Cor do preenchimento da caixa.
- `border`: Cor da borda do boxplot.
- `horizontal`: Define se o boxplot será horizontal (`TRUE`) ou vertical (`FALSE`, padrão).

```
# Box-plot vertical
boxplot(bicicletas,
        main = "Box-plot Vertical",
        xlab = "Bicicletas",
        ylab = "Massa (Kg)",
        col = "lightblue",
        border = "darkblue")
```



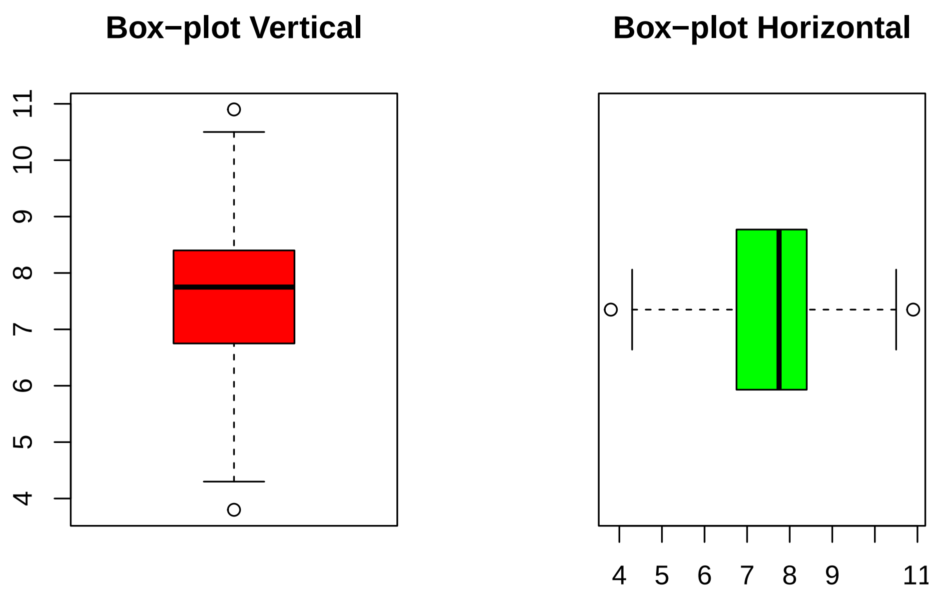

```
# Box-plot horizontal
boxplot(bicicletas,
        main = "Box-plot Horizontal",
        xlab = "Massa (Kg)",
        ylab = "Bicicletas",
```

```
        col = "lightblue",
        border = "darkblue",
        horizontal = TRUE)
```



Pode comparar a distribuição de múltiplas variáveis lado a lado com box-plots. Use a função `par()` para ajustar o layout gráfico.

```
# Ajuste do layout gráfico
par(mfrow = c(1, 2))

# Box-plot vertical e horizontal lado a lado
boxplot(bicicletas, main = "Box-plot Vertical", col = "red")
boxplot(bicicletas, main = "Box-plot Horizontal", col = "green", horizontal = TRUE)
```



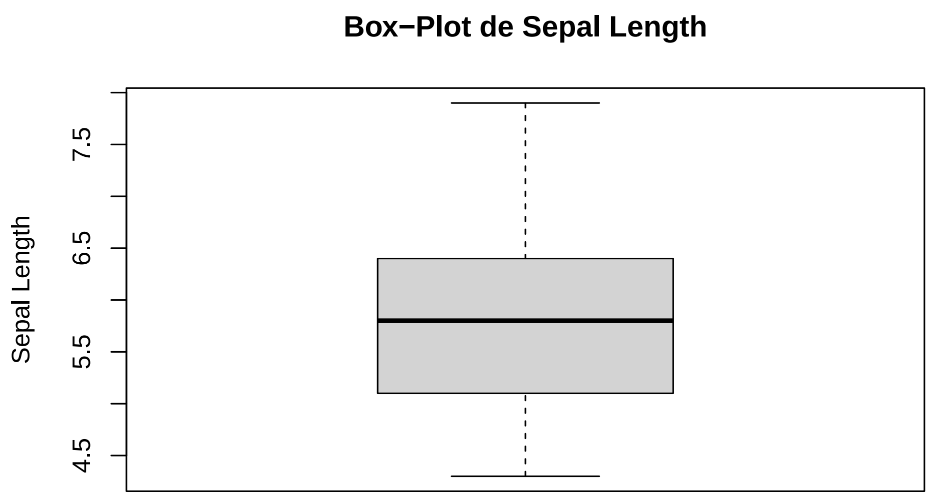

```
# Resetar layout gráfico para o padrão
par(mfrow = c(1, 1))
```

Quando temos dados organizados por categorias, podemos usar um boxplot para compará-los:

```
# Dados categorizados
grupo_A <- rnorm(50, mean = 60, sd = 10)
grupo_B <- rnorm(50, mean = 50, sd = 15)
grupo_C <- rnorm(50, mean = 55, sd = 5)

# Boxplot com múltiplas categorias
boxplot(grupo_A, grupo_B, grupo_C,
        names = c("Grupo A", "Grupo B", "Grupo C"),
        main = "Boxplot por Grupo",
        ylab = "Valores",
        col = c("lightgreen", "lightcoral", "lightblue"))
```

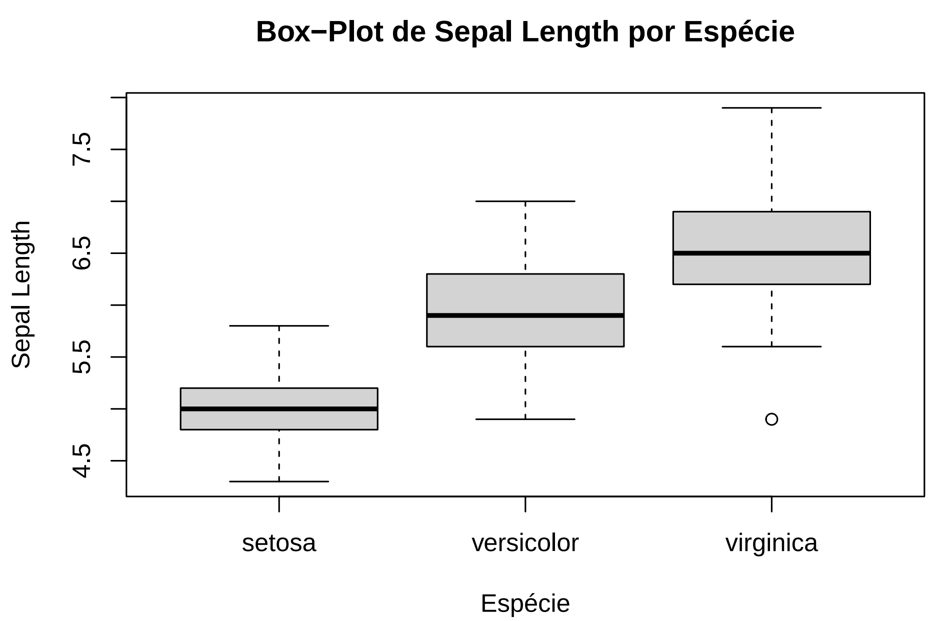
Usando o conjunto de dados `iris`, vamos criar um box-plot simples da variável `Sepal.Length`.

```
data(iris)
boxplot(iris$Sepal.Length,
        main="Box-Plot de Sepal Length",
        ylab="Sepal Length")
```



Vamos criar agora um box-plot da variável `Sepal.Length` agrupado por espécie de flor (`Species`) no conjunto de dados iris.

```
boxplot(Sepal.Length ~ Species,
        data = iris,
        main = "Box-Plot de Sepal Length por Espécie",
        xlab = "Espécie",
        ylab = "Sepal Length")
```



15.5 Gráfico de Dispersão

Gráfico de Dispersão (Scatter Plot): Útil para visualizar a relação entre duas variáveis quantitativas. É uma boa ferramenta para identificar correlações, tendências e outliers.

```r
# Sintaxe
plot(x, y,
     main = NULL,
     xlab = NULL,
     ylab = NULL,
     col = NULL,
     pch = NULL,
     cex = 1,
     xlim = NULL,
     ylim = NULL)
```

- `x` e `y`: Vetores numéricos com as coordenadas dos pontos no eixo x e y.
- `main`: Título do gráfico.
- `xlab` e `ylab`: Rótulos dos eixos x e y.
- `col`: Cor dos pontos. Pode ser um único valor ou um vetor de cores.
- `pch`: Formato dos pontos (e.g., pch = 16 para pontos preenchidos).
- `cex`: Tamanho dos pontos.
- `xlim` e `ylim`: Limites dos eixos x e y, respectivamente.

```r
# Dados de exemplo
x <- rnorm(100)
y <- x + rnorm(100, sd = 0.5)

# Criar gráfico de dispersão
plot(x, y,
     main = "Gráfico de Dispersão",
     xlab = "Variável X",
     ylab = "Variável Y",
     col = "blue",
     pch = 19)
```

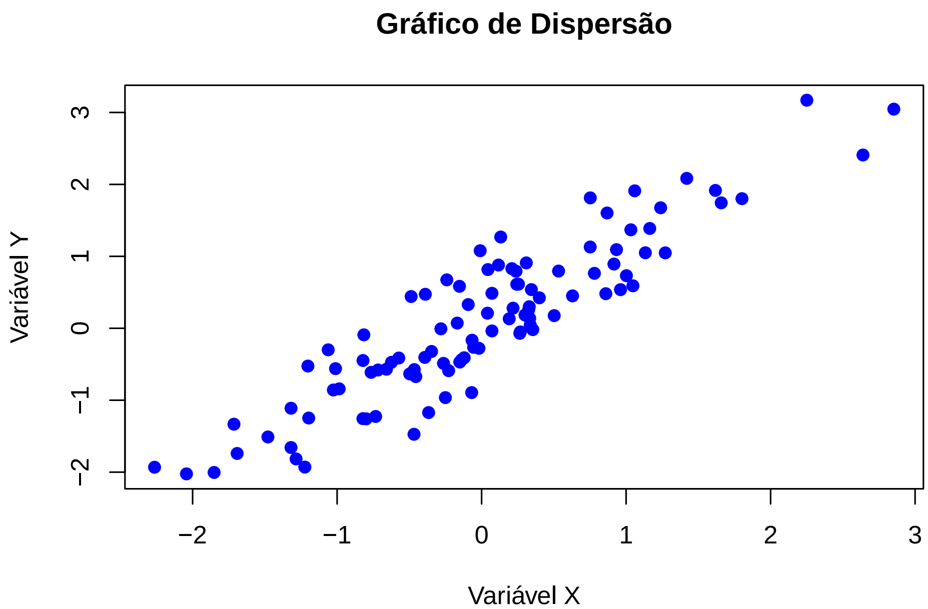
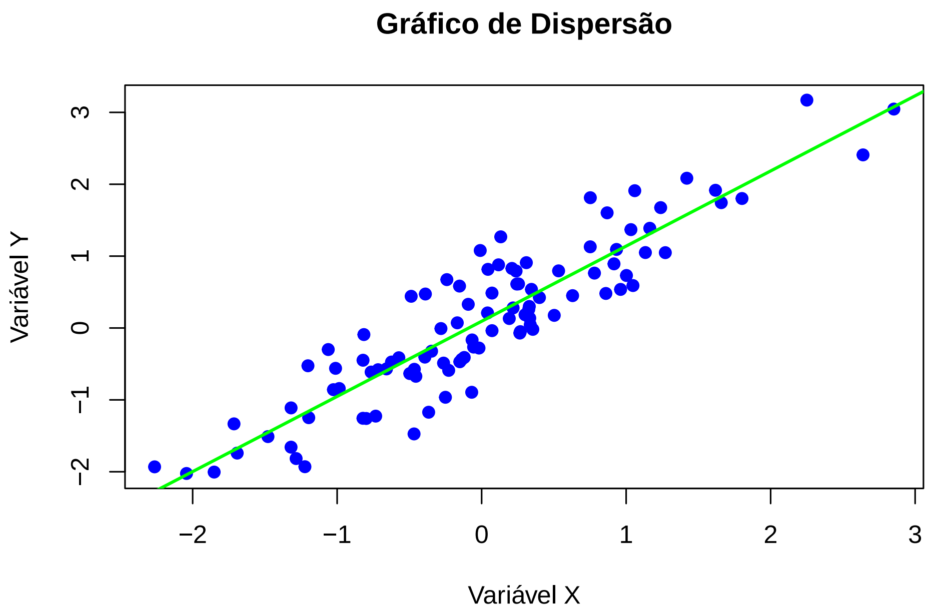


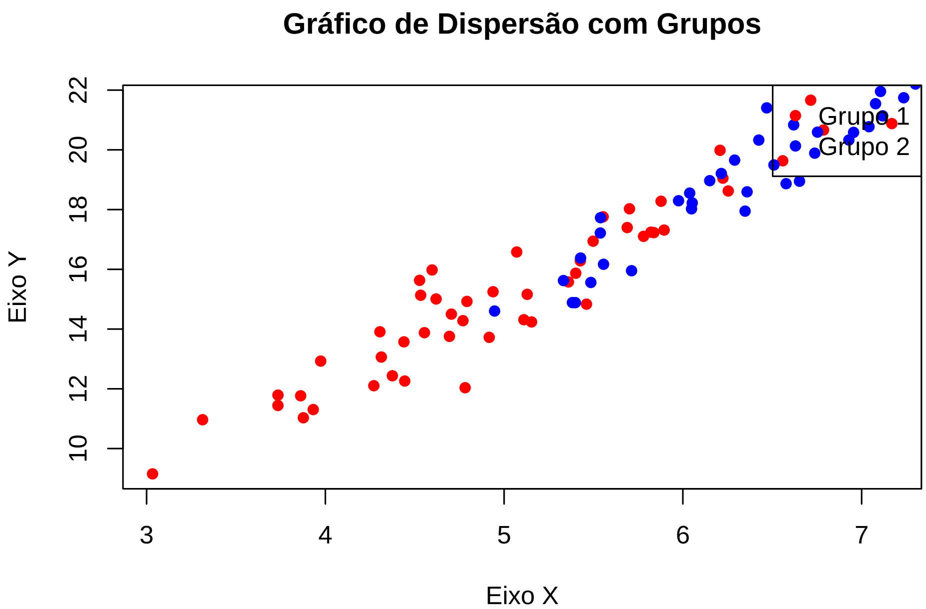
Gráfico de dispersão com regressão.

```
# Criar gráfico de dispersão
plot(x, y,
     main = "Gráfico de Dispersão",
     xlab = "Variável X",
     ylab = "Variável Y",
     col = "blue",
     pch = 19)

abline(lm(y~x), col="green", lwd=2)
```



Se você tiver grupos de dados diferentes, pode diferenciá-los por cores:

```
# Dados com dois grupos
set.seed(123)
x1 <- rnorm(50, mean = 5)
y1 <- 3 * x1 + rnorm(50)
x2 <- rnorm(50, mean = 7)
y2 <- 3 * x2 + rnorm(50)

# Gráfico de dispersão com diferentes cores
plot(x1, y1,
     main = "Gráfico de Dispersão com Grupos",
     xlab = "Eixo X",
     ylab = "Eixo Y",
     col = "red", pch = 16)
points(x2, y2, col = "blue", pch = 16)
legend("topright", legend = c("Grupo 1", "Grupo 2"), col = c("red", "blue"), pch = 16)
```



15.6 Gráfico de Linhas

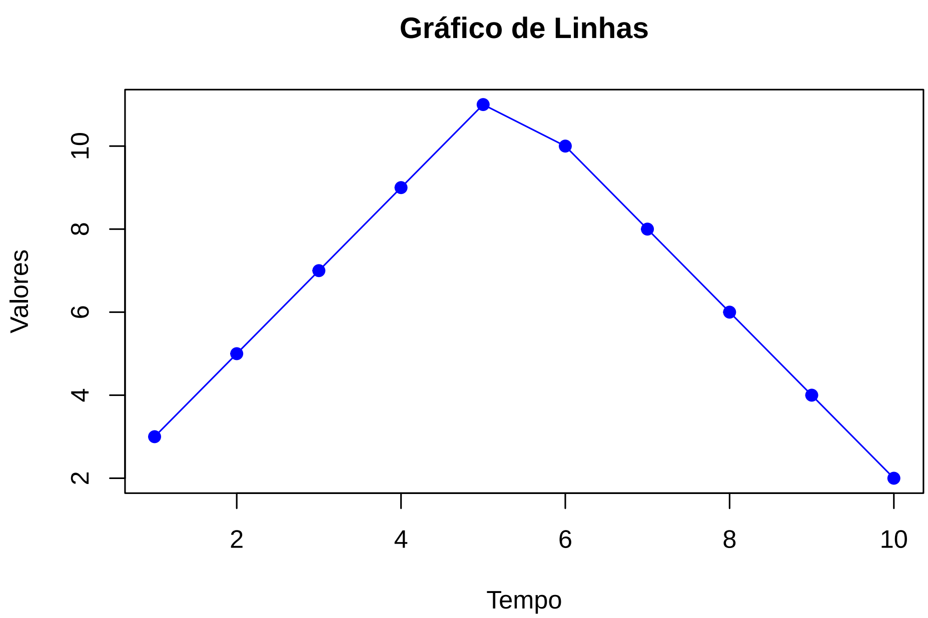
Gráfico de Linhas: É usado para mostrar informações de séries temporais ou tendências ao longo de intervalos contínuos, como o tempo.

```
# Sintaxe
plot(x, y,
     type = "l",
     main = NULL,
     xlab = NULL,
     ylab = NULL,
     col = NULL,
     lty = 1,
     lwd = 1,
     xlim = NULL,
     ylim = NULL)
```

- `x` e `y`: Vetores numéricos contendo as coordenadas dos pontos ao longo do eixo x e y.
- `type = "l"`: Define o tipo de gráfico como "linha" (outros valores podem ser `"p"` para pontos, `"b"` para linhas e pontos, etc.).
- `main`: Título do gráfico.
- `xlab` e `ylab`: Rótulos dos eixos x e y.
- `col`: Cor da linha.

- `lty`: Tipo de linha (e.g., 1 para linha contínua, 2 para linha tracejada).
- `lwd`: Espessura da linha.
- `xlim` e `ylim`: Limites dos eixos x e y, respectivamente.

```r
# Dados de exemplo
tempo <- 1:10
valores <- c(3, 5, 7, 9, 11, 10, 8, 6, 4, 2)

# Criar gráfico de linhas
plot(tempo, valores,
     type = "o",
     main = "Gráfico de Linhas",
     xlab = "Tempo",
     ylab = "Valores",
     col = "blue",
     lwd = 1,
     pch = 19)
```



15.7 Exercícios

1. Usando o dataset `iris`, crie um gráfico de barras para mostrar a contagem de cada espécie de flor.

- Nome do gráfico: Contagem Espécies

- Eixo x: Espécie
- Eixo y: Frequência Absoluta
- Cores das barras: Azul, Verde, Amarelo

Refaça o gráfico de barras considerando agora a frequência relativa.

2. Utilizando o dataset `airquality`, crie um gráfico de barras para mostrar a média de temperatura (`Temp`) por mês. Dica: use a função `tapply()` para encontrar a temperatura média em cada mês.

- Nome do gráfico: Média de Temperatura por Mês
- Eixo x: Mês
- Eixo y: Temperatura Média (°F)
- Cor: Azul

3. Crie um gráfico de pizza com as diferentes espécies de flores no dataset `iris`. Adicione ao gráfico o nome das espécies e a percentagem.

4. Utilizando o dataset `Titanic`, crie um gráfico de pizza que mostre a proporção de sobreviventes e não sobreviventes. Dica: Transforme Titanic num data frame.

5. Crie um histograma para a variável `Sepal.Length`. Em seguida, personalize o histograma com cores, ajuste o número de "bins" (intervalos) e adicione um título e rótulos aos eixos.

6. Um pesquisador está a estudar a distribuição de alturas de plantas em duas espécies diferentes: Espécie A e Espécie B. Ele coletou 100 amostras de altura para cada espécie e tem como objetivo criar histogramas para comparar as distribuições de altura entre as duas espécies.

- Crie dois vetores de 100 alturas (em cm) para as espécies A e B. Use `rnorm()` para gerar os dados com médias e desvios padrão diferentes.

```r
# Gerando os dados
altura_A <- rnorm(100, mean = 150, sd = 10)
altura_B <- rnorm(100, mean = 160, sd = 15)
```

- Gere dois histogramas separados, um para cada espécie, e compare as distribuições de altura.

- Altere as cores dos histogrmas. Use `col = rgb(1, 0, 0, 0.5)` para o primeiro histograma e `col = rgb(0, 0, 1, 0.5)` para o segundo histograma.

- Ajuste os histogramas para serem sobrepostos usando a função `hist()` com o parâmetro `add = TRUE`.

- Adicione a legenda

```
legend("topright", legend = c("Espécie A", "Espécie B"), fill = c(rgb(1, 0, 0, 0.5), rgb(0, 0, 1,
```

7. Um professor aplicou um exame a uma turma de 200 alunos e quer analisar a distribuição das notas. O objetivo do professor é criar um histograma para visualizar a distribuição das notas e calcular algumas estatísticas descritivas (média, mediana e desvio padrão).

- Crie um vetor de 200 valores, representando as pontuações dos alunos (notas de 0 a 20).

```
set.seed(1234)
rnorm(200, mean=14, sd=4)
```

- Gere um histograma para as notas.
- Calcule a média, mediana e desvio padrão das notas.
- Adicione a média e a mediana diretamente no gráfico, usando o comando `abline()`.
- Use a legenda

```
legend("topright", legend = c(paste("Média:", round(media_nota, 2)),
                              paste("Mediana:", round(mediana_nota, 2)),
                              paste("Desvio Padrão:", round(desvio_nota, 2))),
       bty = "n")
```

8. Utilizando o dataset `airquality`, crie histogramas para a variável `Ozone` separadamente para cada mês (de maio a setembro). Ajuste o layout para mostrar os histogramas lado a lado e compare a distribuição dos níveis de ozônio ao longo dos meses.

- Carregue o dataset airquality.
- Crie um histograma para a variável `Ozone` para cada mês.
- Use o comando `par(mfrow=c(3, 2))` para mostrar os gráficos lado a lado e comparar.

9. Utilizando o dataset `iris` crie um box-plot para comparar a distribuição do comprimento da pétala (`Petal.Length`) entre as diferentes espécies.

- Carregue o dataset `iris`.

- Crie um box-plot para a variável `Petal.Length`, agrupando os dados pelas diferentes espécies (`Species`).
- Personalize o gráfico com cores diferentes para cada grupo e adicione títulos e rótulos.

10. Utilizando o dataset `airquality` crie um box-plot para comparar a distribuição dos níveis de ozônio (`Ozone`) para os diferentes meses. Observe como os níveis de ozônio variam ao longo do tempo.

- Carregue o dataset airquality.
- Crie um box-plot para os níveis de ozônio (`Ozone`), agrupando os dados por mês (`Month`).
- Adicione uma linha horizontal indicando o valor mediano global dos níveis de ozônio. Dica: use a função `abline()`.

11. Estudando a relação entre altura e peso de um grupo de pessoas.

- Crie um vetor `altura` com 30 valores aleatórios entre 150 e 200 cm (use `runif()`).
- Crie um vetor peso com 30 valores aleatórios entre 50 e 90 kg, ajustando-o para estar aproximadamente proporcional à altura. Use `peso <- altura * 0.4 + runif(30, -5, 5)`.
- Use `plot()` para criar um gráfico de dispersão com altura no eixo x e peso no eixo y.
- Adicione rótulos (xlab, ylab) e um título (main) ao gráfico.
- Qual é a tendência visual entre altura e peso? Comente sobre a correlação entre as duas variáveis.

12. Analisando o crescimento de uma população ao longo de 20 anos.

- Crie um vetor `anos` com valores de 2000 a 2019.
- Crie um vetor `populacao` simulando o crescimento populacional a partir de 100.000 pessoas em 2000 e um crescimento de 2% ao ano. Adicione um pequeno fator aleatório para representar flutuações. Use `populacao <- 100000 * cumprod(1.02 + runif(20, -0.01, 0.01))`.
- Crie um gráfico de linha para mostrar o crescimento populacional ao longo dos anos.

Chapter 16

Manipulação de dados

16.1 Tibbles

Tibbles são uma versão moderna e melhorada dos data frames em R, introduzida pelo pacote `tibble`, que faz parte do `tidyverse` — um conjunto de pacotes desenvolvido para facilitar a ciência de dados em R. Os tibbles foram projetados para ultrapassar algumas das limitações dos data frames tradicionais, oferecendo uma estrutura de dados mais robusta e intuitiva para manipulação e análise de dados.

Diferenças Principais entre Tibble e Data Frame

Os tibbles têm várias vantagens em relação aos data frames, especialmente em termos de usabilidade e integração com o `tidyverse`. A tabela abaixo resume as principais diferenças:

Característica	Data Frame	Tibble
Impressão no Console	Exibe todos os dados	Exibe um resumo com 10 linhas e colunas visíveis
Conversão de Strings	Converte strings para fatores por padrão	Mantém strings como caracteres
Manuseio de Colunas	Apenas vetores, listas podem ser problemáticas	Permite listas, funções, outros tibbles
Nomes de Colunas	Nomes devem ser únicos e sem espaços	Nomes podem ter espaços, ser duplicados, etc.
Retorno de Subsetting (`[`)	Pode retornar um vetor ou data frame	Sempre retorna um tibble

Característica	Data Frame	Tibble
Compatibilidade e Integração	Totalmente compatível com base R	Compatível, mas otimizado para uso com tidyverse
Manipulação de Dados	Menos intuitivo para algumas operações.	Mais intuitivo e fácil de usar, especialmente com operações encadeadas.

16.1.1 Criar e trabalhar com Tibbles

Criar um `tibble` é semelhante a criar um data frame, mas com uma sintaxe ligeiramente diferente que facilita a criação de colunas complexas.

```
# Carregar o pacote tibble
library(tibble)

# Criando um tibble
tb <- tibble(
  x = 1:5,
  y = c("A", "B", "C", "D", "E"),
  z = x * 2
)

print(tb)
## # A tibble: 5 × 3
##       x y         z
##   <int> <chr> <dbl>
## 1     1 A         2
## 2     2 B         4
## 3     3 C         6
## 4     4 D         8
## 5     5 E        10
```

Também pode converter um data frame existente para um tibble usando a função `as_tibble()`:

```
# Criar um data frame
df <- data.frame(
  x = 1:5,
  y = c("A", "B", "C", "D", "E")
)

# Converter para tibble
```

```
tb <- as_tibble(df)

print(tb)
## # A tibble: 5 × 2
##       x y
##   <int> <chr>
## 1     1 A
## 2     2 B
## 3     3 C
## 4     4 D
## 5     5 E
```

16.2 Manipulação de Dados com dplyr

O `dplyr` é um pacote fundamental no `tidyverse` para manipulação de dados em R. Ele proporciona uma sintaxe mais limpa e legível para operações comuns em data frames e tibbles, como seleção, filtragem, mutação (criação/modificação de colunas), ordenação e agrupamento de dados.

As principais funções do `dplyr` são:

- `select()`: Seleciona colunas de um data frame.
- `arrange()`: Ordena as linhas de um data frame com base nos valores de uma ou mais colunas.
- `filter()`: Filtra linhas com base em condições lógicas.
- `mutate()`: Adiciona novas colunas ou modifica colunas existentes.
- `group_by()`: Agrupa os dados com base nos valores de uma ou mais colunas.
- `summarise()`: Resuma os dados, tipicamente usado após `group_by()` para calcular estatísticas agregadas.

Vamos explorar cada uma dessas funções usando o dataset `starwars` disponível no pacote dplyr.

Assim, utilizaremos o objeto `sw` para acessar os dados.

```
library(dplyr)
```

```
##
## Attaching package: 'dplyr'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##     filter, lag
```

```
## The following objects are masked from 'package:base':
##
##     intersect, setdiff, setequal, union
```

```
# Carregar o dataset Star Wars
sw <- starwars
glimpse(sw) # Exibe uma visão geral dos dados
```

```
## Rows: 87
## Columns: 14
## $ name       <chr> "Luke Skywalker", "C-3PO", "R2-D2", "Darth Vader", "Leia Or~
## $ height     <int> 172, 167, 96, 202, 150, 178, 165, 97, 183, 182, 188, 180, 2~
## $ mass       <dbl> 77.0, 75.0, 32.0, 136.0, 49.0, 120.0, 75.0, 32.0, 84.0, 77.~
## $ hair_color <chr> "blond", NA, NA, "none", "brown", "brown, grey", "brown", N~
## $ skin_color <chr> "fair", "gold", "white, blue", "white", "light", "light", "~
## $ eye_color  <chr> "blue", "yellow", "red", "yellow", "brown", "blue", "blue",~
## $ birth_year <dbl> 19.0, 112.0, 33.0, 41.9, 19.0, 52.0, 47.0, NA, 24.0, 57.0, ~
## $ sex        <chr> "male", "none", "none", "male", "female", "male", "female",~
## $ gender     <chr> "masculine", "masculine", "masculine", "masculine", "femini~
## $ homeworld  <chr> "Tatooine", "Tatooine", "Naboo", "Tatooine", "Alderaan", "T~
## $ species    <chr> "Human", "Droid", "Droid", "Human", "Human", "Human", "Huma~
## $ films      <list> <"A New Hope", "The Empire Strikes Back", "Return of the J~
## $ vehicles   <list> <"Snowspeeder", "Imperial Speeder Bike">, <>, <>, <>, "Imp~
## $ starships  <list> <"X-wing", "Imperial shuttle">, <>, <>, "TIE Advanced x1",~
```

16.2.1 Seleção de Colunas com `select()`

A função `select()` é usada para selecionar uma ou mais colunas de um tibble ou data frame. Pode usar nomes de colunas diretamente sem aspas.

```
# Selecionar uma coluna
select(sw, name)
```

```
## # A tibble: 87 x 1
##    name
##    <chr>
##  1 Luke Skywalker
##  2 C-3PO
##  3 R2-D2
##  4 Darth Vader
##  5 Leia Organa
##  6 Owen Lars
##  7 Beru Whitesun Lars
##  8 R5-D4
```

```
##  9 Biggs Darklighter
## 10 Obi-Wan Kenobi
## # i 77 more rows
```

```
# Selecionar várias colunas
select(sw, name, mass, hair_color)
```

```
## # A tibble: 87 x 3
##    name                mass hair_color
##    <chr>              <dbl> <chr>
##  1 Luke Skywalker        77 blond
##  2 C-3PO                 75 <NA>
##  3 R2-D2                 32 <NA>
##  4 Darth Vader          136 none
##  5 Leia Organa           49 brown
##  6 Owen Lars            120 brown, grey
##  7 Beru Whitesun Lars    75 brown
##  8 R5-D4                 32 <NA>
##  9 Biggs Darklighter     84 black
## 10 Obi-Wan Kenobi        77 auburn, white
## # i 77 more rows
```

```
# Selecionar um intervalo de colunas
select(sw, name:hair_color)
```

```
## # A tibble: 87 x 4
##    name               height  mass hair_color
##    <chr>               <int> <dbl> <chr>
##  1 Luke Skywalker        172    77 blond
##  2 C-3PO                 167    75 <NA>
##  3 R2-D2                  96    32 <NA>
##  4 Darth Vader           202   136 none
##  5 Leia Organa           150    49 brown
##  6 Owen Lars             178   120 brown, grey
##  7 Beru Whitesun Lars    165    75 brown
##  8 R5-D4                  97    32 <NA>
##  9 Biggs Darklighter     183    84 black
## 10 Obi-Wan Kenobi        182    77 auburn, white
## # i 77 more rows
```

O `dplyr` possui um conjunto de funções auxiliares muito úteis para seleção de colunas. As principais são:

- `starts_with()`: para colunas que começam com um texto específico.

- `ends_with()`: para colunas que terminam com um texto específico.
- `contains()`: para colunas que contêm um texto específico.

```
# Selecionar colunas que terminam com "color"
select(sw, ends_with("color"))
```

```
## # A tibble: 87 x 3
##    hair_color    skin_color  eye_color
##    <chr>         <chr>       <chr>
##  1 blond         fair        blue
##  2 <NA>          gold        yellow
##  3 <NA>          white, blue red
##  4 none          white       yellow
##  5 brown         light       brown
##  6 brown, grey   light       blue
##  7 brown         light       blue
##  8 <NA>          white, red  red
##  9 black         light       brown
## 10 auburn, white fair        blue-gray
## # i 77 more rows
```

Para remover colunas, basta acrescentar um `-` antes da seleção.

```
select(sw, -name, -hair_color)
```

```
## # A tibble: 87 x 12
##    height  mass skin_color  eye_color birth_year sex    gender homeworld species
##     <int> <dbl> <chr>       <chr>          <dbl> <chr>  <chr>  <chr>     <chr>
##  1    172    77 fair        blue            19   male   mascu~ Tatooine  Human
##  2    167    75 gold        yellow         112   none   mascu~ Tatooine  Droid
##  3     96    32 white, blue red             33   none   mascu~ Naboo     Droid
##  4    202   136 white       yellow          41.9 male   mascu~ Tatooine  Human
##  5    150    49 light       brown           19   female femin~ Alderaan  Human
##  6    178   120 light       blue            52   male   mascu~ Tatooine  Human
##  7    165    75 light       blue            47   female femin~ Tatooine  Human
##  8     97    32 white, red  red             NA   none   mascu~ Tatooine  Droid
##  9    183    84 light       brown           24   male   mascu~ Tatooine  Human
## 10    182    77 fair        blue-gray       57   male   mascu~ Stewjon   Human
## # i 77 more rows
## # i 3 more variables: films <list>, vehicles <list>, starships <list>
```

```
# Remover múltiplas colunas
select(sw, -ends_with("color"))
```

```
## # A tibble: 87 x 11
##    name    height  mass birth_year sex   gender homeworld species films vehicles
##    <chr>    <int> <dbl>      <dbl> <chr> <chr>  <chr>     <chr>   <lis> <list>
##  1 Luke S~    172    77       19   male  mascu~ Tatooine  Human   <chr> <chr>
##  2 C-3PO      167    75      112   none  mascu~ Tatooine  Droid   <chr> <chr>
##  3 R2-D2       96    32       33   none  mascu~ Naboo     Droid   <chr> <chr>
##  4 Darth ~    202   136       41.9 male  mascu~ Tatooine  Human   <chr> <chr>
##  5 Leia O~    150    49       19   fema~ femin~ Alderaan  Human   <chr> <chr>
##  6 Owen L~    178   120       52   male  mascu~ Tatooine  Human   <chr> <chr>
##  7 Beru W~    165    75       47   fema~ femin~ Tatooine  Human   <chr> <chr>
##  8 R5-D4       97    32       NA   none  mascu~ Tatooine  Droid   <chr> <chr>
##  9 Biggs ~    183    84       24   male  mascu~ Tatooine  Human   <chr> <chr>
## 10 Obi-Wa~    182    77       57   male  mascu~ Stewjon   Human   <chr> <chr>
## # i 77 more rows
## # i 1 more variable: starships <list>
```

16.2.2 Exercícios

Utilize a base `sw` nos exercícios a seguir.

1. Utilize a função `glimpse()` do pacote `dplyr` na base `sw`. O que ela faz?

2. Crie uma tabela chamada `sw_simples` contendo apenas as colunas `name`, `gender` e `films`.

3. Selecione apenas as colunas `hair_color`, `skin_color` e `eye_color` usando a função auxiliar `contains()`.

4. Usando a função `select()` e as suas funções auxiliares, escreva códigos que retornem a base `sw` sem as colunas `hair_color`, `skin_color` e `eye_color`. Escreva todas as soluções diferentes que conseguir pensar.

16.2.3 Ordenando a Base de Dados

A função `arrange()` permite ordenar as linhas de uma tabela com base nos valores de uma ou mais colunas. Pode ordenar em ordem crescente ou decrescente, conforme a necessidade.

```r
# Exemplo de ordenação crescente
arrange(sw, mass)
```

```
## # A tibble: 87 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Ratts T~     79    15 none       grey, blue unknown           NA male  mascu~
```

```
##  2 Yoda         66    17 white      green      brown            896 male  mascu~
##  3 Wicket ~     88    20 brown      brown      brown              8 male  mascu~
##  4 R2-D2        96    32 <NA>       white, bl~ red               33 none  mascu~
##  5 R5-D4        97    32 <NA>       white, red red               NA none  mascu~
##  6 Sebulba     112    40 none       grey, red  orange            NA male  mascu~
##  7 Padmé A~    185    45 brown      light      brown             46 fema~ femin~
##  8 Dud Bolt     94    45 none       blue, grey yellow            NA male  mascu~
##  9 Wat Tam~    193    48 none       green, gr~ unknown           NA male  mascu~
## 10 Sly Moo~    178    48 none       pale       white             NA <NA>  <NA>
## # i 77 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

```r
# Exemplo de ordenação decrescente
arrange(sw, desc(mass))
```

```
## # A tibble: 87 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Jabba D~    175  1358 <NA>       green-tan~ orange         600   herm~ mascu~
##  2 Grievous    216   159 none       brown, wh~ green, y~       NA   male  mascu~
##  3 IG-88       200   140 none       metal      red             15   none  mascu~
##  4 Darth V~    202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  5 Tarfful     234   136 brown      brown      blue            NA   male  mascu~
##  6 Owen La~    178   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  7 Bossk       190   113 none       green      red             53   male  mascu~
##  8 Chewbac~    228   112 brown      unknown    blue           200   male  mascu~
##  9 Jek Ton~    180   110 brown      fair       blue            NA   <NA>  <NA>
## 10 Dexter ~    198   102 none       brown      yellow          NA   male  mascu~
## # i 77 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

```r
# Ordenar por múltiplas colunas
arrange(sw, desc(height), desc(mass))
```

```
## # A tibble: 87 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Yarael ~    264    NA none       white      yellow            NA   male  mascu~
##  2 Tarfful     234   136 brown      brown      blue              NA   male  mascu~
##  3 Lama Su     229    88 none       grey       black             NA   male  mascu~
##  4 Chewbac~    228   112 brown      unknown    blue             200   male  mascu~
##  5 Roos Ta~    224    82 none       grey       orange            NA   male  mascu~
```

```
##  6 Grievous    216   159 none       brown, wh~ green, y~       NA   male  mascu~
##  7 Taun We     213    NA none       grey       black           NA   fema~ femin~
##  8 Tion Me~    206    80 none       grey       black           NA   male  mascu~
##  9 Rugor N~    206    NA none       green      orange          NA   male  mascu~
## 10 Darth V~    202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
## # i 77 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

16.2.4 Exercícios

1. Ordene a base `sw` pela coluna `mass` em ordem crescente e pela coluna `birth_year` em ordem decrescente. Guarde o resultado em um objeto chamado `sw_ordenados`.

```
sw_ordenados <- arrange(sw, mass, desc(birth_year))
sw_ordenados
```

2. Selecione apenas as colunas `name` e `birth_year`, então ordene de forma decrescente pelo `birth_year`.

```
# Usando aninhamento de funções
arrange(select(sw, name, birth_year), desc(birth_year))

# Usando um objeto intermediário
sw_aux <- select(sw, name, birth_year)
arrange(sw_aux, desc(birth_year))

# Usando pipes para simplificar
sw %>%
  select(name, birth_year) %>%
  arrange(desc(birth_year))
```

16.2.5 Filtrando Linhas da Base de Dados

Para selecionar linhas específicas com base em uma ou mais condições, utilizamos a função `filter()`.

```
# filter(sw, height > 170)
# Ou
sw %>% filter(height > 170)
```

```
## # A tibble: 55 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Luke Sk~    172    77 blond      fair       blue            19   male  mascu~
##  2 Darth V~    202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  3 Owen La~    178   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  4 Biggs D~    183    84 black      light      brown           24   male  mascu~
##  5 Obi-Wan~    182    77 auburn, w~ fair       blue-gray       57   male  mascu~
##  6 Anakin ~    188    84 blond      fair       blue            41.9 male  mascu~
##  7 Wilhuff~    180    NA auburn, g~ fair       blue            64   male  mascu~
##  8 Chewbac~    228   112 brown      unknown    blue           200   male  mascu~
##  9 Han Solo    180    80 brown      fair       brown           29   male  mascu~
## 10 Greedo      173    74 <NA>       green      black           44   male  mascu~
## # i 45 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

Podemos selecionar apenas as colunas `name` e `height` para visualizarmos as alturas:

```
sw %>%
  filter(height > 170) %>%
  select(name, height)
```

```
## # A tibble: 55 x 2
##    name               height
##    <chr>               <int>
##  1 Luke Skywalker        172
##  2 Darth Vader           202
##  3 Owen Lars             178
##  4 Biggs Darklighter     183
##  5 Obi-Wan Kenobi        182
##  6 Anakin Skywalker      188
##  7 Wilhuff Tarkin        180
##  8 Chewbacca             228
##  9 Han Solo              180
## 10 Greedo                173
## # i 45 more rows
```

Podemos estender o filtro para duas ou mais colunas.

```
filter(sw, height>170, mass>80)
```

```
## # A tibble: 21 x 14
```

```
##    name      height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>      <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Darth V~     202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  2 Owen La~     178   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  3 Biggs D~     183    84 black      light      brown           24   male  mascu~
##  4 Anakin ~     188    84 blond      fair       blue            41.9 male  mascu~
##  5 Chewbac~     228   112 brown      unknown    blue           200   male  mascu~
##  6 Jabba D~     175  1358 <NA>       green-tan~ orange         600   herm~ mascu~
##  7 Jek Ton~     180   110 brown      fair       blue            NA   <NA>  <NA>
##  8 IG-88        200   140 none       metal      red             15   none  mascu~
##  9 Bossk        190   113 none       green      red             53   male  mascu~
## 10 Ackbar       180    83 none       brown mot~ orange          41   male  mascu~
## # i 11 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

```
sw %>% filter(height > 170, mass > 80)
```

```
## # A tibble: 21 x 14
##    name      height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>      <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Darth V~     202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  2 Owen La~     178   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  3 Biggs D~     183    84 black      light      brown           24   male  mascu~
##  4 Anakin ~     188    84 blond      fair       blue            41.9 male  mascu~
##  5 Chewbac~     228   112 brown      unknown    blue           200   male  mascu~
##  6 Jabba D~     175  1358 <NA>       green-tan~ orange         600   herm~ mascu~
##  7 Jek Ton~     180   110 brown      fair       blue            NA   <NA>  <NA>
##  8 IG-88        200   140 none       metal      red             15   none  mascu~
##  9 Bossk        190   113 none       green      red             53   male  mascu~
## 10 Ackbar       180    83 none       brown mot~ orange          41   male  mascu~
## # i 11 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

Podemos filtrar colunas categóricas. O exemplo abaixo retorna uma tabela apenas com os personagens com cabelo preto ou castanho.

```
# Filtrar texto com correspondência exata
filter(sw, hair_color == "black" | hair_color == "brown")
```

```
## # A tibble: 31 x 14
##    name      height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>      <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
```

```
##  1 Leia Or~    150  49    brown      light      brown           19    fema~ femin~
##  2 Beru Wh~    165  75    brown      light      blue            47    fema~ femin~
##  3 Biggs D~    183  84    black      light      brown           24    male  mascu~
##  4 Chewbac~    228 112    brown      unknown    blue           200    male  mascu~
##  5 Han Solo    180  80    brown      fair       brown           29    male  mascu~
##  6 Wedge A~    170  77    brown      fair       hazel           21    male  mascu~
##  7 Jek Ton~    180 110    brown      fair       blue            NA    <NA>  <NA>
##  8 Boba Fe~    183  78.2 black      fair       brown           31.5 male  mascu~
##  9 Lando C~    177  79    black      dark       brown           31    male  mascu~
## 10 Arvel C~     NA  NA    brown      fair       brown           NA    male  mascu~
## # i 21 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

```
# Filtrar texto com correspondência exata
sw %>% filter(hair_color %in% c("black","brown"))
```

```
## # A tibble: 31 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Leia Or~    150  49    brown      light      brown           19    fema~ femin~
##  2 Beru Wh~    165  75    brown      light      blue            47    fema~ femin~
##  3 Biggs D~    183  84    black      light      brown           24    male  mascu~
##  4 Chewbac~    228 112    brown      unknown    blue           200    male  mascu~
##  5 Han Solo    180  80    brown      fair       brown           29    male  mascu~
##  6 Wedge A~    170  77    brown      fair       hazel           21    male  mascu~
##  7 Jek Ton~    180 110    brown      fair       blue            NA    <NA>  <NA>
##  8 Boba Fe~    183  78.2 black      fair       brown           31.5 male  mascu~
##  9 Lando C~    177  79    black      dark       brown           31    male  mascu~
## 10 Arvel C~     NA  NA    brown      fair       brown           NA    male  mascu~
## # i 21 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

Para filtrar textos sem correspondência exata, podemos utilizar a função auxiliar `str_detect()` do pacote `{stringr}`. Ela serve para verificar se cada string de um vetor contém um determinado padrão de texto.

```
library(stringr)

str_detect(
  string = c("a", "aa","abc", "bc", "A", NA),
  pattern = "a"
)
```

```
## [1]  TRUE  TRUE  TRUE FALSE FALSE    NA
```

Podemos utilizá-la para filtrar apenas os personagens com cabelo `grey`.

```
# Podemos detetar se o cabelo grey aparece na string
str_detect(
  string = sw$hair_color,
  pattern = "grey"
)
```

```
##  [1] FALSE    NA    NA FALSE FALSE  TRUE FALSE    NA FALSE FALSE FALSE  TRUE
## [13] FALSE FALSE    NA    NA FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [25] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [37] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [49] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [61] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [73] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [85] FALSE FALSE FALSE
```

```
library(stringr)
sw %>% filter(str_detect(hair_color,"grey"))
```

```
## # A tibble: 3 x 14
##   name      height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##   <chr>      <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
## 1 Owen Lars    178   120 brown, gr~ light      blue              52 male  mascu~
## 2 Wilhuff ~    180    NA auburn, g~ fair       blue              64 male  mascu~
## 3 Palpatine    170    75 grey       pale       yellow            82 male  mascu~
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

16.2.6 Exercícios

Utilize a base `sw` nos exercícios a seguir.

1. Crie um objeto chamado `humanos` apenas com personagens que sejam humanos.

2. Crie um objeto chamado `altos_fortes` com personagens que tenham mais de 200 cm de altura e peso maior que 100 kg.

3. Retorne tabelas (`tibbles`) apenas com:

a. Personagens humanos que nasceram antes de 100 anos antes da batalha de Yavin (`birth_year < 100`).

b. Personagens com cor `light` ou `red`.

c. Personagens com massa maior que 100 kg, ordenados de forma decrescente por altura, mostrando apenas as colunas `name`, `mass` e `height`.

d. Personagens que sejam "Humano" ou "Droid", e tenham uma altura maior que 170 cm.

e. Personagens que não possuem informação tanto de altura (`height`) quanto de massa (`mass`), ou seja, possuem `NA` em ambas as colunas.

16.2.7 Modificar e criar novas colunas

A função `mutate()` permite criar novas colunas ou modificar colunas existentes, facilitando transformações de dados. O código abaixo divide os valores da coluna `height` por 100, mudando a unidade de medida dessa variável de centímetros para metros.

```
# Modificar a unidade de medida da coluna height
sw %>% mutate(height = height/100)
```

```
## # A tibble: 87 x 14
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>     <dbl> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Luke Sk~   1.72    77 blond      fair       blue            19   male  mascu~
##  2 C-3PO      1.67    75 <NA>       gold       yellow         112   none  mascu~
##  3 R2-D2      0.96    32 <NA>       white, bl~ red             33   none  mascu~
##  4 Darth V~   2.02   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  5 Leia Or~   1.5     49 brown      light      brown           19   fema~ femin~
##  6 Owen La~   1.78   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  7 Beru Wh~   1.65    75 brown      light      blue            47   fema~ femin~
##  8 R5-D4      0.97    32 <NA>       white, red red             NA   none  mascu~
##  9 Biggs D~   1.83    84 black      light      brown           24   male  mascu~
## 10 Obi-Wan~   1.82    77 auburn, w~ fair       blue-gray       57   male  mascu~
## # i 77 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

Também poderíamos ter criado essa variável em uma nova coluna. Repare que a nova coluna `height_meters` é colocada no final da tabela.

```
sw %>% mutate(height_meters = height/100)
```

```
## # A tibble: 87 x 15
##    name     height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
```

```
##    <chr>     <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Luke Sk~    172    77 blond      fair       blue            19   male  mascu~
##  2 C-3PO       167    75 <NA>       gold       yellow         112   none  mascu~
##  3 R2-D2        96    32 <NA>       white, bl~ red             33   none  mascu~
##  4 Darth V~    202   136 none       white      yellow          41.9 male  mascu~
##  5 Leia Or~    150    49 brown      light      brown           19   fema~ femin~
##  6 Owen La~    178   120 brown, gr~ light      blue            52   male  mascu~
##  7 Beru Wh~    165    75 brown      light      blue            47   fema~ femin~
##  8 R5-D4        97    32 <NA>       white, red red             NA   none  mascu~
##  9 Biggs D~    183    84 black      light      brown           24   male  mascu~
## 10 Obi-Wan~    182    77 auburn, w~ fair       blue-gray       57   male  mascu~
## # i 77 more rows
## # i 6 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>, height_meters <dbl>
```

Podemos fazer qualquer operação com uma ou mais colunas. Abaixo vamos criar um tibble que contenha as colunas `name`, `height`, `mass`, e uma nova coluna `BMI`, que calcule o Índice de Massa Corporal (IMC) de cada personagem, usando a fórmula `mass / (height/100)^2`. Caso `height` ou `mass` seja `NA`, a coluna `BMI` deve ser `NA`.

```
sw %>%
  mutate(BMI = ifelse(!is.na(height) & !is.na(mass), mass / (height/100)^2, NA)) %>%
  select(name, height, mass, BMI)
```

```
## # A tibble: 87 x 4
##    name               height  mass   BMI
##    <chr>               <int> <dbl> <dbl>
##  1 Luke Skywalker        172    77  26.0
##  2 C-3PO                 167    75  26.9
##  3 R2-D2                  96    32  34.7
##  4 Darth Vader           202   136  33.3
##  5 Leia Organa           150    49  21.8
##  6 Owen Lars             178   120  37.9
##  7 Beru Whitesun Lars    165    75  27.5
##  8 R5-D4                  97    32  34.0
##  9 Biggs Darklighter     183    84  25.1
## 10 Obi-Wan Kenobi        182    77  23.2
## # i 77 more rows
```

16.2.8 Exercícios

1. Crie uma coluna chamada `dif_peso_altura` (diferença entre altura e peso) e salve a nova tabela em um objeto chamado `starwars_dif`. Em seguida, filtre apenas os personagens que têm altura maior que o peso e ordene a tabela por ordem crescente de `dif_peso_altura`.

2. Crie as seguintes colunas:

a. `indice_massa_altura` = `mass` / `height`

b. `indice_massa_medio` = `mean(mass, na.rm = TRUE)`

c. `indice_relativo` = `(indice_massa_altura - indice_massa_medio) / indice_massa_medio`

d. `acima_media` = `ifelse(indice_massa_altura > indice_massa_medio, "sim", "não")`

3. Crie uma nova coluna que classifique o personagem em "recente" (nascido após 100 anos antes da batalha de Yavin) e "antigo" (nascido há 100 anos ou mais).

16.2.9 Sumarizar a Base de Dados

A função `summarize()` permite calcular estatísticas agregadas, como média, mediana, variância, etc. Para agregar dados por categorias, combinamos `summarize()` com `group_by()`.

O código abaixo resume a coluna `mass` pela sua média.

```
# Exemplo de sumarização
sw %>% summarize(media_massa = mean(mass, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 1 x 1
##   media_massa
##         <dbl>
## 1        97.3
```

```
# Sumarização agrupada por categorias
sw %>%
  group_by(species) %>%
  summarize(media_massa = mean(mass, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 38 x 2
##    species   media_massa
##    <chr>           <dbl>
##  1 Aleena           15
##  2 Besalisk        102
##  3 Cerean           82
##  4 Chagrian        NaN
```

```
##  5 Clawdite          55
##  6 Droid             69.8
##  7 Dug               40
##  8 Ewok              20
##  9 Geonosian         80
## 10 Gungan            74
## # i 28 more rows
```

Podemos calcular ao mesmo tempo sumarizações diferentes.

```
sw %>% summarize(
  media_massa = mean(mass, na.rm = TRUE),
  mediana_massa = median(mass, na.rm = TRUE),
  variancia_massa = var(mass, na.rm = TRUE)
)
```

```
## # A tibble: 1 x 3
##   media_massa mediana_massa variancia_massa
##         <dbl>         <dbl>           <dbl>
## 1        97.3            79          28716.
```

Podemos também sumarizar diversas colunas.

```
sw %>% summarize(
  media_massa = mean(mass, na.rm = TRUE),
  media_altura = mean(height, na.rm = TRUE),
  media_ano = mean(birth_year, na.rm = TRUE)
)
```

```
## # A tibble: 1 x 3
##   media_massa media_altura media_ano
##         <dbl>        <dbl>     <dbl>
## 1        97.3         175.      87.6
```

Para sumarizar uma coluna agrupada pelas categorias de uma segunda coluna usamos além do `summarize()` a função `group_by()`.

O código a abaixo calcula a altura média dos personagens para cada categoria da coluna `hair_color`.

```
sw %>%
  filter(!is.na(hair_color), !is.na(height)) %>%
  group_by(hair_color) %>%
  summarize(media_altura = mean(height, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 11 x 2
##    hair_color    media_altura
##    <chr>                <dbl>
##  1 auburn                150
##  2 auburn, grey          180
##  3 auburn, white         182
##  4 black                 174.
##  5 blond                 177.
##  6 blonde                168
##  7 brown                 177.
##  8 brown, grey           178
##  9 grey                  170
## 10 none                  181.
## 11 white                 156
```

16.2.10 Exerícios

Utilize a base `sw` nos exercícios a seguir.

1. Calcule a altura média e mediana dos personagens.

2. Calcule a massa média dos personagens cuja altura é maior que 175 cm.

3. Apresente na mesma tabela a massa média dos personagens com altura menor que 175 cm e a massa média dos personagens com altura maior ou igual a 175 cm.

4. Retorne tabelas (`tibbles`) apenas com:

a. A altura média dos personagens por espécie. **b.** A massa média e mediana dos personagens por espécie. **c.** Apenas o nome dos personagens que participaram de mais de 2 filmes.

16.2.11 Juntando Tabelas em R com dplyr

Em ciência de dados, é comum precisar combinar informações de diferentes fontes em uma única tabela. No R, o pacote `dplyr` oferece várias funções para realizar operações de junção, que permitem combinar duas ou mais tabelas (data frames ou tibbles) com base em uma ou mais colunas compartilhadas.

Tipos de Junção

As junções mais comuns em manipulação de dados são:

- `left_join()`: Mantém todas as linhas da tabela à esquerda e adiciona as colunas da tabela à direita onde há correspondência de valores na coluna chave.

- `right_join()`: Mantém todas as linhas da tabela à direita e adiciona as colunas da tabela à esquerda onde há correspondência.
- `full_join()`: Mantém todas as linhas de ambas as tabelas e adiciona NA onde não há correspondência.

Essas funções são extremamente úteis quando é necessário combinar dados de diferentes fontes que compartilham uma chave comum, como um identificador único.

Exemplo: Personagens de Star Wars

Para ilustrar como estas funções funcionam, vamos usar a base de dados `sw` e criar dois subconjuntos de dados:

1. `personagens_altos`: Tabela contendo apenas personagens com altura superior a 180 cm.
2. `personagens_humanos`: Tabela contendo apenas personagens que são humanos.

Vamos criar os nossos subconjuntos de dados usando a função `filter()` do dplyr.

```
# Criar subconjunto de personagens altos (altura > 180 cm)
personagens_altos <- sw %>%
  filter(height > 180) %>%
  select(name, height)

# Criar subconjunto de personagens humanos
personagens_humanos <- sw %>%
  filter(species == "Human") %>%
  select(name, species)
```

Agora que temos duas tabelas, `personagens_altos` e `personagens_humanos`, podemos usar as funções de junção para combiná-las: `left_join()`, `right_join()`, e `full_join()`.

A função `left_join()` junta duas tabelas, mantendo todas as linhas da tabela à esquerda (primeira tabela) e adicionando colunas da tabela à direita (segunda tabela) para as quais existe uma correspondência. Valores sem correspondência entre as bases receberão `NA` na nova base.

```
# Combinar tabelas mantendo todas as linhas de personagens_altos
humanos_altos_left_join <- left_join(personagens_altos, personagens_humanos, by = "name")

# Visualizar o resultado
print(humanos_altos_left_join)
```

```
## # A tibble: 39 x 3
##    name               height species
##    <chr>               <int> <chr>
##  1 Darth Vader           202 Human
##  2 Biggs Darklighter     183 Human
##  3 Obi-Wan Kenobi        182 Human
##  4 Anakin Skywalker      188 Human
##  5 Chewbacca             228 <NA>
##  6 Boba Fett             183 Human
##  7 IG-88                 200 <NA>
##  8 Bossk                 190 <NA>
##  9 Qui-Gon Jinn          193 Human
## 10 Nute Gunray           191 <NA>
## # i 29 more rows
```

Neste exemplo, a tabela resultante `humanos_altos_left_join` inclui todos os personagens altos e adiciona informações sobre a espécie (se disponível) da tabela `personagens_humanos`. Se um personagem não for humano, as colunas de espécie serão preenchidas com `NA`.

A função `right_join()` faz o oposto de `left_join()`: mantém todas as linhas da tabela à direita e adiciona colunas da tabela à esquerda para as quais existe uma correspondência.

```
# Combinar tabelas mantendo todas as linhas de personagens_humanos
humanos_altos_right_join <- right_join(personagens_altos, personagens_humanos, by = "na

# Visualizar o resultado
print(humanos_altos_right_join)
```

```
## # A tibble: 35 x 3
##    name               height species
##    <chr>               <int> <chr>
##  1 Darth Vader           202 Human
##  2 Biggs Darklighter     183 Human
##  3 Obi-Wan Kenobi        182 Human
##  4 Anakin Skywalker      188 Human
##  5 Boba Fett             183 Human
##  6 Qui-Gon Jinn          193 Human
##  7 Padmé Amidala         185 Human
##  8 Ric Olié              183 Human
##  9 Quarsh Panaka         183 Human
## 10 Mace Windu            188 Human
## # i 25 more rows
```

A tabela `humanos_altos_right_join` inclui todos os personagens humanos e adiciona informações sobre a altura (se disponível) da tabela personagens_altos. Se um personagem humano não for alto, a coluna de altura será preenchida com NA.

A função full_join() mantém todas as linhas de ambas as tabelas e adiciona NA onde não há correspondência.

```
# Combinar todas as informações de personagens altos e humanos
humanos_altos_full_join <- full_join(personagens_altos, personagens_humanos, by = "name")

# Visualizar o resultado
print(humanos_altos_full_join)
```

```
## # A tibble: 59 x 3
##    name               height species
##    <chr>               <int> <chr>
##  1 Darth Vader           202 Human
##  2 Biggs Darklighter     183 Human
##  3 Obi-Wan Kenobi        182 Human
##  4 Anakin Skywalker      188 Human
##  5 Chewbacca             228 <NA>
##  6 Boba Fett             183 Human
##  7 IG-88                 200 <NA>
##  8 Bossk                 190 <NA>
##  9 Qui-Gon Jinn          193 Human
## 10 Nute Gunray           191 <NA>
## # i 49 more rows
```

A tabela humanos_altos_full_join contém todos os personagens altos e humanos. Se um personagem está em apenas uma das tabelas, as colunas da outra tabela são preenchidas com NA.

16.2.12 Exercícios

1. Crie uma tabela personagens_altos contendo apenas personagens com altura superior a 180 cm e uma outra tabela personagens_leves contendo apenas personagens com massa inferior a 75 kg. Use left_join() para combinar as duas tabelas com base no nome do personagem.

```
# Criação dos subconjuntos
personagens_altos <- sw %>%
  filter(height > 180) %>%
  select(name, height)

personagens_leves <- sw %>%
```

```
  filter(mass < 75) %>%
  select(name, mass)

# Combinação com left_join
left_join(personagens_altos, personagens_leves, by = "name")
```

Dica: Observe como `left_join()` mantém todos os personagens altos e adiciona informações sobre massa apenas para aqueles que também são leves.

2. Crie uma tabela `personagens_humanos` contendo apenas personagens humanos e uma outra tabela `cor_cabelo` contendo apenas personagens com cor de cabelo diferente de `NA`. Use `right_join()` para combinar `personagens_humanos` e `cor_cabelo` com base no nome do personagem.

```
# Criação dos subconjuntos
personagens_humanos <- sw %>%
  filter(species == "Human") %>%
  select(name, species)

cor_cabelo <- sw %>%
  filter(!is.na(hair_color)) %>%
  select(name, hair_color,)

# Combinação com right_join
right_join(personagens_humanos, cor_cabelo, by = "name")
```

Dica: Observe como `right_join()` mantém todos os personagens com cor de cabelo conhecida e adiciona informações sobre a espécie apenas para aqueles que também são humanos.

3. Crie uma tabela `especies_personagens` contendo apenas personagens de espécies conhecidas (não `NA`) e uma outra tabela `cor_olhos` contendo apenas personagens com cor de olho conhecida (não `NA`). Use `full_join()` para combinar as duas tabelas com base no nome do personagem.

```
# Criação dos subconjuntos
especies_personagens <- sw %>%
  filter(!is.na(species)) %>%
  select(name, species)

cor_olhos <- sw %>%
  filter(!is.na(eye_color)) %>%
  select(name, eye_color)

# Combinação com full_join
full_join(especies_personagens, cor_olhos, by = "name")
```

Dica: `full_join()` combina todas as informações disponíveis, preenchendo com NA onde não há correspondências.

Chapter 17

O pacote `ggplot2`

O `ggplot2` é um dos pacotes mais populares do R para criar gráficos. Ele implementa o conceito de *Grammar of Graphics*, que oferece uma maneira sistemática de descrever e construir gráficos. Este conceito está apresentado no livro The Grammar of graphics.

Chapter 18

A função `sample()`

A função `sample()` em R é amplamente utilizada para gerar amostras aleatórias a partir de um conjunto de dados ou de uma sequência de números. É uma função muito flexível que permite definir o tamanho da amostra, se a amostragem é feita com ou sem reposição, e se os elementos têm diferentes probabilidades de serem selecionados.

```r
# Sintaxe
sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
```

- `x`: O vetor de elementos a serem amostrados.
- `size`: O tamanho da amostra desejada.
- `replace`: Um valor lógico que indica se a amostragem é feita com reposição (`TRUE`) ou sem reposição (`FALSE`).
- `prob`: Um vetor de probabilidades associadas a cada elemento em `x`. Se não especificado, assume-se que todos os elementos têm a mesma probabilidade de serem selecionados.

Exemplo 1 (Amostragem Simples sem Reposição): Neste exemplo, extraímos uma amostra de 5 elementos a partir de uma população de números inteiros de 1 a 10, sem reposição:

```r
# População de 1 a 10
pop <- 1:10

# Amostra de 5 elementos sem reposição
amostra <- sample(pop, size = 5, replace = FALSE)
print(amostra)
## [1]  5  2  4 10  8
```

Exemplo 2 (Amostragem com Reposição):. Neste exemplo, permitimos que os mesmos elementos sejam selecionados mais de uma vez:

```
# Amostra de 5 elementos com reposição
amostra_repos <- sample(pop, size = 5, replace = TRUE)
print(amostra_repos)
## [1] 6 8 9 9 6
```

Exemplo 3 (Amostragem com Probabilidades Diferentes): Neste exemplo, associamos diferentes probabilidades a cada elemento da população:

```
# Probabilidades associadas a cada elemento
prob <- c(0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05)

# Amostra com probabilidades diferentes
amostra_prob <- sample(pop, size = 5, prob = prob)
print(amostra_prob)
## [1] 2 4 6 5 3
```

18.1 Exercícios

1. Crie um vetor com os números de 1 a 20. Utilize a função `sample()` para selecionar uma amostra aleatória de 5 elementos desse vetor. A amostragem deve ser feita sem reposição.

2. Suponha que tem uma população representada pelos números de 1 a 10. Utilize a função `sample()` para selecionar uma amostra de 10 elementos com reposição.

3. Crie um vetor com as letras A, B, C, D, E. Aplique a função `sample()` para selecionar uma amostra de 3 letras, onde a probabilidade de cada letra ser selecionada é dada pelo vetor `c(0.1, 0.2, 0.3, 0.25, 0.15)`.

4. Crie um vetor com os números de 1 a 10. Utilize a função `sample()` para reordenar aleatoriamente os elementos desse vetor.

5. Crie um vetor com os nomes de cinco frutas: "Maçã", "Banana", "Laranja", "Uva", "Pera". Utilizando a função `sample()`, selecione aleatoriamente uma fruta desse vetor. Em seguida, selecione uma amostra de 3 frutas.

6. Você é responsável por realizar um teste de qualidade em uma fábrica. Há 1000 produtos fabricados, numerados de 1 a 1000. Selecione uma amostra aleatória de 50 produtos para inspeção, garantindo que não haja reposição na seleção.

7. Simule o lançamento de dois dados justos 10000 vezes e registe as somas das faces resultantes. Utilize a função `sample()` para realizar a simulação. Em seguida, crie um histograma das somas obtidas.

8. Tem um vetor de 200 estudantes classificados em três turmas: A, B, e C. As turmas têm tamanhos diferentes (50, 100, e 50 alunos, respetivamente). Usando `sample()`, selecione uma amostra de 20 alunos, mantendo a proporção original das turmas.

9. Um cartão de Bingo contém 24 números aleatórios entre 1 e 75 (excluindo o número central "free"). Crie 5 cartões de Bingo únicos usando a função `sample()`.

10. Em um estudo clínico, 30 pacientes devem ser randomizados em dois grupos: tratamento e controlo. O grupo de tratamento deve conter 20 pacientes e o grupo de controlo 10. Usando `sample()`, faça a randomização dos pacientes. Dica: use a função `setdiff()`.

Chapter 19

Probabilidade e Variáveis Aleatórias

Uma **variável aleatória** é uma função que atribui a cada resultado possível de um experimento aleatório um valor numérico. Em termos formais, é uma função que mapeia elementos de um espaço de resultados Ω para o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por exemplo, ao lançar um dado, podemos definir uma variável aleatória X que representa o número obtido na face superior, assumindo valores de 1 a 6.

As variáveis aleatórias são fundamentais na teoria das probabilidades, pois permitem quantificar e analisar matematicamente fenómenos aleatórios. Elas podem ser classificadas em dois tipos principais:

- **Variáveis Aleatórias Discretas**: assumem valores em um conjunto finito ou numerável, como o número de caras ao lançar uma moeda três vezes.
- **Variáveis Aleatórias Contínuas**: podem assumir qualquer valor em um intervalo contínuo, como a altura de uma pessoa medida em centímetros.

A compreensão das variáveis aleatórias é essencial para modelar situações incertas e calcular probabilidades associadas a diferentes eventos.

Exemplo 1: Em uma empresa, o número de reclamações recebidas por dia é uma variável aleatória discreta X com a seguinte função de probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ 0.25, & x = 1 \\ 0.3, & x = 2 \\ 0.2, & x = 3 \\ 0.15, & x = 4 \end{cases}$$

(a) Mostre que f_X é uma função massa de probabilidade (f.m.p.).

(b) Calcule o número esperado de reclamações e a variância do número de reclamações por dia.

(c) Calcule a probabilidade de haver mais de 2 reclamações em um dia.

Sabemos que para f_X ser uma f.m.p. ela deve satisfazer duas condições:

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\sum_x f_X(x) = 1$.

```r
# Função de probabilidade do número de reclamações (X)
X_valores <- c(0, 1, 2, 3, 4)
P_X <- c(0.1, 0.25, 0.3, 0.2, 0.15)

# a. Verificar se P(X) é uma função massa de probabilidade
sum(P_X)  # Deve ser igual a 1
## [1] 1
```

Sabemos que $E(X) = \sum_x x \times f_X(x)$ e $V(X) = \sum_x (x - E(X))^2 \times f_X(x)$.

```r
# b. Cálculo da média e variância do número de reclamações
E_X <- sum(X_valores * P_X)  # Esperança
Var_X <- sum((X_valores - E_X)^2 * P_X)  # Variância
print(E_X)
## [1] 2.05
print(Var_X)
## [1] 1.4475
# c. Probabilidade de haver mais de 2 reclamações em um dia
P_Y_maior_2 <- sum(P_X[X_valores > 2])
print(P_Y_maior_2)
## [1] 0.35
```

Exemplo 2: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) Mostre que essa função é uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).
b) Calcule a probabilidade de que $X > 2$.
c) Calcule a probabilidade de que $0.3 < X < 0.7$.

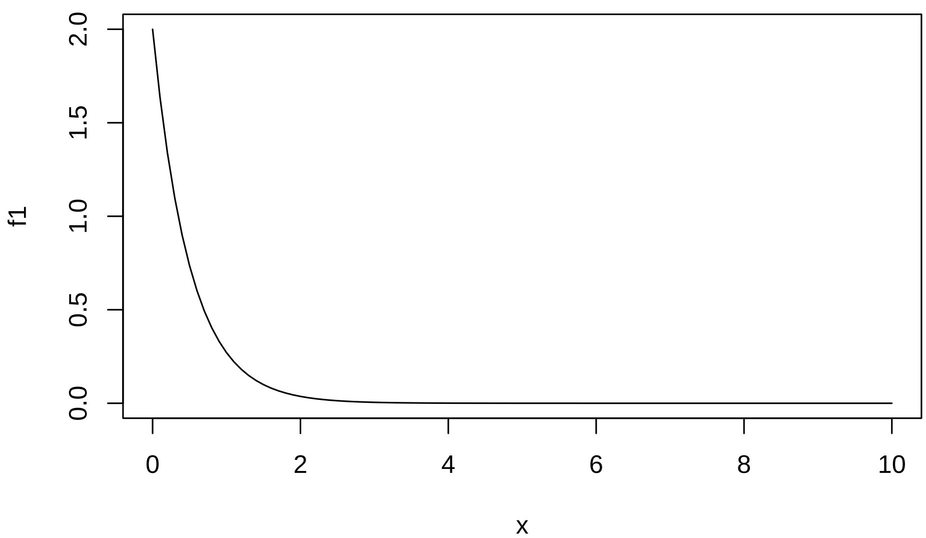
Sabemos que para f ser f.d.p. ela deve satisfazer duas condições:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

```
f1 <- function(x){
  fx <- ifelse(x<0, 0, 2*exp(-2*x))
  return(fx)
}
```

Gráfico de f:

```
plot(f1, from = 0, to = 10)
```



Para verificar que o integral da função é igual a 1 podemos usar a função `integrate()`, que realiza a integração numérica.

```
integrate(f1, lower = 0, upper = Inf)
## 1 with absolute error < 5e-07
```

Para fazer os cálculos pedidos nas alíneas (a) e (b) lembramos que a probabilidade é dada pela área sob a curva da função no intervalo pedido, ou seja,

$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \int_2^{+\infty} 2e^{-2x}\, dx$

$P(0.3 < X < 0.7) = \int_{0.3}^{0.7} f(x)\, dx = \int_{0.3}^{0.7} 2e^{-2x}\, dx$

que são obtidas usando os comandos

```
integrate(f1, lower = 2, upper = Inf)
## 0.01831564 with absolute error < 2.8e-06

integrate(f1, lower = 0.3, upper = 0.7)
## 0.3022147 with absolute error < 3.4e-15
```

Exemplo 3: A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se} \quad 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \text{ ou } x \geq 3 \end{cases}$$

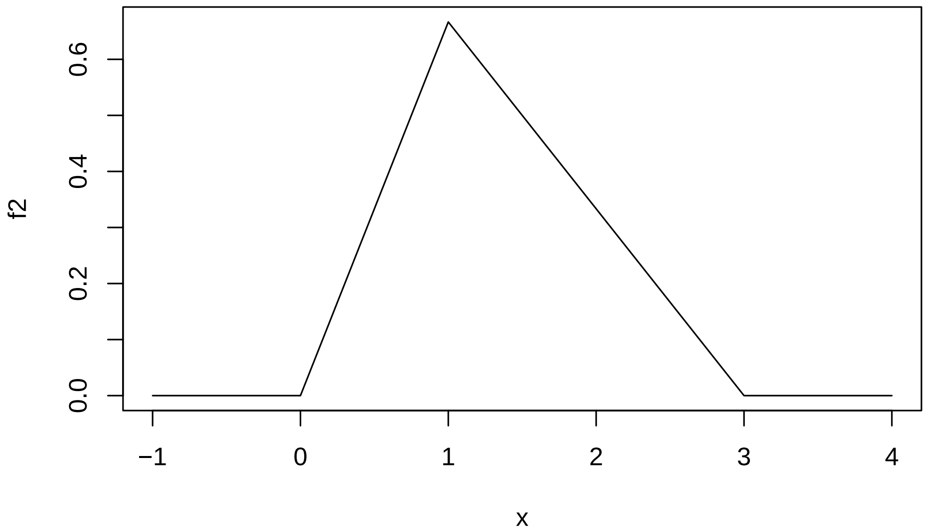
(a) Calcular a probabilidade de que sejam vendidos mais que 150 kg.
(b) Calcular a venda esperada em 30 dias.

```
f2 <- function(x) {
  ifelse(x >= 0 & x < 1, (2/3) * x,
         ifelse(x >= 1 & x < 3, -x/3 + 1, 0))
}
```

Vamos verificar que o integral da função é 1 e vamos fazer também o gráfico da função.

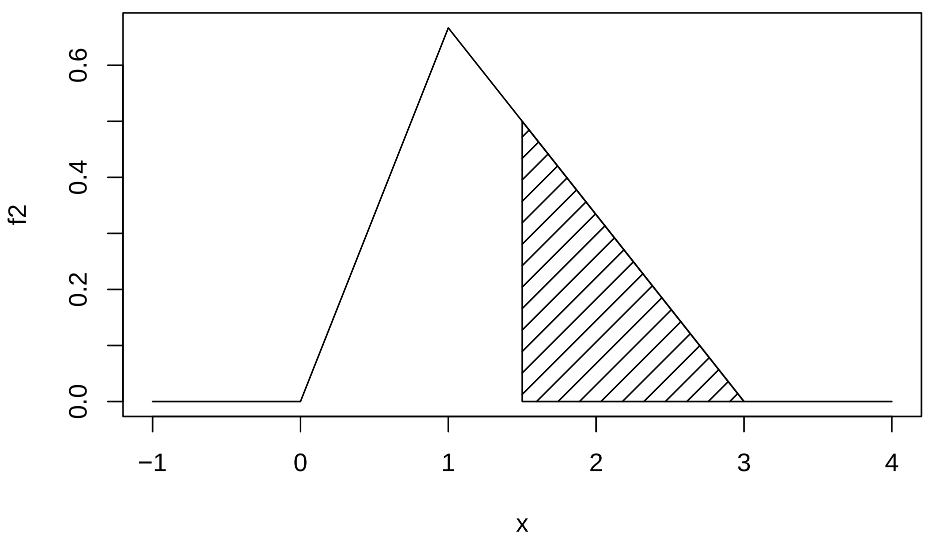
```
integrate(f2, 0, 3)
## 1 with absolute error < 1.1e-15
```

```
plot(f2, -1, 4)
```



(a) Calcular a probabilidade de que sejam vendidos mais que 150 kg (1.5 centenas de quilos). Ou seja, queremos calcular $P(X > 1.5) = \int_{1.5}^{+\infty} f(x)\,dx$.

```
plot(f2, -1, 4)
polygon(x = c(1.5, 1.5, 3), y = c(0, f2(1.5), 0), dens = 10)
```



Podemos resolver o integral numericamente da seguinte forma

```
integrate(f2, 1.5, 3)
## 0.375 with absolute error < 4.2e-15
```

A venda esperada em trinta dias é 30 vezes o valor esperado de venda em um dia. Para calcular o valor esperado $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ definimos uma nova função e resolvemos o integral. A função `integrate()` retorna uma lista onde um dos elementos (`value`) é o valor do integral.

```
ef2 <- function(x) {
  x*f2(x)
}
```

```
integrate(ef2,0,3)
## 1.333333 with absolute error < 7.3e-05

30*integrate(ef2,0,3)$value
## [1] 40
```

Por fim, ressaltamos que os exemplos abordados aqui são básicos e podem ser resolvidos de forma analítica, sem a necessidade de métodos numéricos. Esses exemplos foram escolhidos apenas para ilustrar o uso do R na obtenção de soluções numéricas. Na prática, o R é mais indicado para problemas complexos, nos quais as soluções analíticas são difíceis ou inviáveis.

19.1 Exercícios

1. O número de produtos defeituosos em uma linha de produção ao final de cada hora é uma variável aleatória discreta X com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x = 0 \\ \frac{2}{10}, & x = 1 \\ \frac{3}{10}, & x = 2 \\ \frac{2}{10}, & x = 3 \\ \frac{2}{10}, & x = 4 \end{cases}$$

(a) Verifique se $P(X)$ é uma função massa de probabilidade.

(b) Calcule o valor esperado e a variância do número de produtos defeituosos por hora.

(c) Calcule a probabilidade de haver, no máximo, 2 produtos defeituosos em uma hora.

2. Uma pesquisa foi realizada em uma universidade sobre o número de cursos que cada aluno está matriculado. A variável aleatória Z representa o número de cursos e possui a seguinte função de probabilidade:

$$P(Z = z) = \begin{cases} 0.05, & z = 1 \\ 0.15, & z = 2 \\ 0.35, & z = 3 \\ 0.25, & z = 4 \\ 0.2, & z = 5 \end{cases}$$

(a) Verifique se $P(Z)$ é uma função massa de probabilidade.

(b) Calcule o valor esperado e a variância do número de cursos em que os alunos estão matriculados.

(c) Calcule a probabilidade de que um aluno esteja matriculado em mais de 3 cursos.

3. Em uma determinada localidade a distribuição de renda, em u.m. (unidade monetária) é uma variável aleatória X com função de distribuição de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 6 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.
(b) Qual a renda média nesta localidade?
(c) Calcule a probabilidade de encontrar uma pessoa com renda acima de 4.5 u.m. e indique o resultado no gráfico da distribuição.

4. Sabe-se que uma variável aleatória contínua X é distribuída uniformemente no intervalo 10 e 20.

(a) Apresente o gráfico da função densidade de probabilidade.
(b) Calcule $P(X < 15)$.
(c) Calcule $P(12 \leq X \leq 18)$.
(d) Calcule $E(X)$ e $V(X)$.

5. O tempo de espera (em minutos) para ser atendido em um posto de atendimento ao cliente é uma variável aleatória contínua Y , cuja função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.125y, & 0 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com base nesta função de densidade, responda às seguintes questões:

(a) Crie uma função para calcular a função de distribuição acumulada de Y.

(b) Calcule $P(Y > 3)$, que representa a probabilidade de o tempo de espera ser superior a 3 minutos.

(c) Calcule $P(1 < Y < 3)$, que representa a probabilidade de o tempo de espera estar entre 1 e 3 minutos.

(d) Calcule $P(Y < 2)$, que representa a probabilidade de o tempo de espera ser inferior a 2 minutos.

(e) Calcule $P(Y < 3 \mid Y > 1)$, que representa a probabilidade de o tempo de espera ser inferior a 3 minutos, dado que já passou mais de 1 minuto.

6. A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua X com densidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3\,e^{-3x}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Crie uma função para calcular a função de distribuição acumulada de X.

(b) Calcule $P(X > 2)$.

(c) Calcule $P(0.5 < X < 1.2)$.

(d) Calcule $P(X > 3)$.

(e) Calcule $P(X < 3|X > 1)$.

Chapter 20

Simulação

A simulação é uma ferramenta poderosa que utiliza a capacidade dos computadores modernos para realizar cálculos que, de outra forma, seriam difíceis ou até impossíveis de serem resolvidos analiticamente. A Lei dos Grandes Números assegura-nos que, ao observarmos uma grande amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média finita, a média dessas observações tende a convergir para a média verdadeira da distribuição à medida que o tamanho da amostra aumenta.

Em vez de nos esforçarmos para encontrar essa média através de métodos analíticos complexos, podemos utilizar o poder computacional para gerar uma amostra suficientemente grande dessas variáveis aleatórias. A partir dessa amostra, calculamos a média observada, que serve como uma estimativa consistente da média verdadeira da distribuição. No entanto, a eficácia desse método depende de três fatores cruciais:

1. **Identificação correta dos tipos de variáveis aleatórias necessárias para o problema em questão**: É essencial determinar quais distribuições de probabilidade descrevem adequadamente os processos aleatórios que estamos a modelar.
2. **Capacidade do computador de gerar essas variáveis de forma precisa**: Os algoritmos utilizados para gerar números pseudoaleatórios devem ser robustos e capazes de produzir amostras que representem fielmente as distribuições desejadas.
3. **Determinação do tamanho adequado da amostra**: O tamanho da amostra deve ser suficientemente grande para que a média da amostra seja uma boa aproximação da média real. Além disso, um tamanho de amostra maior geralmente reduz a variabilidade das estimativas, aumentando a fiabilidade dos resultados.

A simulação, portanto, simplifica o processo de resolução de problemas complexos, proporcionando uma abordagem prática e eficiente para explorar cenários onde o cálculo analítico é impraticável ou impossível. Ela permite aos estatísticos e cientistas de dados testar hipóteses, realizar análises de sensibilidade e prever resultados em condições controladas de incerteza.

Para ilustrar o potencial da simulação, começamos com alguns exemplos básicos onde a solução analítica já é conhecida. Esses exemplos demonstram que a simulação pode reproduzir resultados teóricos com precisão. Além disso, estes casos introdutórios servem para destacar aspetos importantes que precisam ser considerados ao resolver problemas mais complexos por meio de simulação, como o tratamento de variáveis dependentes, correlações entre variáveis, e questões de eficiência computacional.

Exemplo 1 (Estimando a Média de uma Distribuição Uniforme): A média da distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ é conhecida por ser $\frac{1}{2}$. Se tivermos um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) a partir dessa distribuição uniforme, denotadas por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, a Lei dos Grandes Números diz-nos que a média amostral, dada por $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, deve aproximar-se da média verdadeira de 0.5 à medida que o tamanho da amostra n aumenta.

A tabela abaixo apresenta as médias de diferentes amostras simuladas de tamanho n geradas a partir da distribuição uniforme $[0, 1]$ para vários valores de n. Observamos que as médias amostrais estão geralmente próximas de 0.5, mas existe uma considerável variação, especialmente quando $n = 100$. Nota-se que há menos variação para $n = 1.000$, e a variação diminui ainda mais para os dois maiores valores de n (10.000 e 100.000).

n	Replicações da Simulação				
100	0.485	0.481	0.484	0.569	0.441
1.000	0.497	0.506	0.480	0.498	0.499
10.000	0.502	0.501	0.499	0.498	0.498
100.000	0.502	0.499	0.500	0.498	0.499

Para gerar uma amostra aleatória uniforme no intervalo [0,1], utilizamos a função `runif` no R:

```r
runif(100, 0, 1)
```

Como discutido anteriormente, neste exemplo não há necessidade real de simulação, pois conhecemos a média da distribuição uniforme analiticamente. Este exemplo serve para ilustrar que a simulação pode replicar resultados teóricos. No entanto, é crucial entender que, independentemente do tamanho da amostra gerada, a média amostral de variáveis aleatórias i.i.d. não será necessariamente exatamente igual à média verdadeira da distribuição. A simulação introduz uma variabilidade que precisa ser considerada; à medida que o tamanho da amostra aumenta, a variabilidade da média amostral diminui, aproximando-a da média real. Esta propriedade sublinha a importância de escolher um tamanho de amostra apropriado para obter estimativas confiáveis.

Exemplo de Aplicação da Simulação

A seguir, exploramos um exemplo onde as questões fundamentais são relativamente fáceis de descrever, mas a solução analítica seria, na melhor das hipóteses, complexa e trabalhosa.

Problema: Esperando por uma Pausa. Dois atendentes, A e B, num restaurante fast-food começam a servir clientes ao mesmo tempo. Eles concordam em encontrar-se para uma pausa assim que ambos tiverem atendido 10 clientes. No entanto, um deles provavelmente terminará antes do outro e terá de esperar. O nosso objetivo é determinar, em média, quanto tempo um dos atendentes terá de esperar pelo outro.

Para modelar este problema, assumimos que os tempos de serviço de cada cliente, independentemente do atendente, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com uma distribuição exponencial de taxa $\lambda = 0.3$ clientes por minuto. Portanto, o tempo total que um atendente leva para atender 10 clientes segue uma distribuição gama com parâmetros de forma $k = 10$ e taxa $\lambda = 0.3$.

Seja X o tempo que o atendente A leva para atender 10 clientes e Y o tempo que o atendente B leva para atender 10 clientes. Precisamos de calcular a média do valor absoluto da diferença de tempo entre eles, $E(|X - Y|)$.

A solução analítica para este problema exigiria a resolução de uma integral dupla sobre a união de duas regiões não retangulares. Em vez disso, a simulação oferece uma abordagem mais prática e eficiente.

Solução Usando Simulação

Suponhamos que podemos gerar um grande número de variáveis aleatórias gama independentes. Podemos, então, simular um par (X, Y) e calcular $Z = |X - Y|$. Repetindo este processo independentemente várias vezes, podemos calcular a média de todos os valores observados de Z, que servirá como uma estimativa da média de $|X - Y|$.

Vamos utilizar o R para realizar a simulação:

```r
# Definir a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar amostras da distribuição gama para X e Y
x <- rgamma(10000, shape = 10, rate = 0.3)
y <- rgamma(10000, shape = 10, rate = 0.3)
```

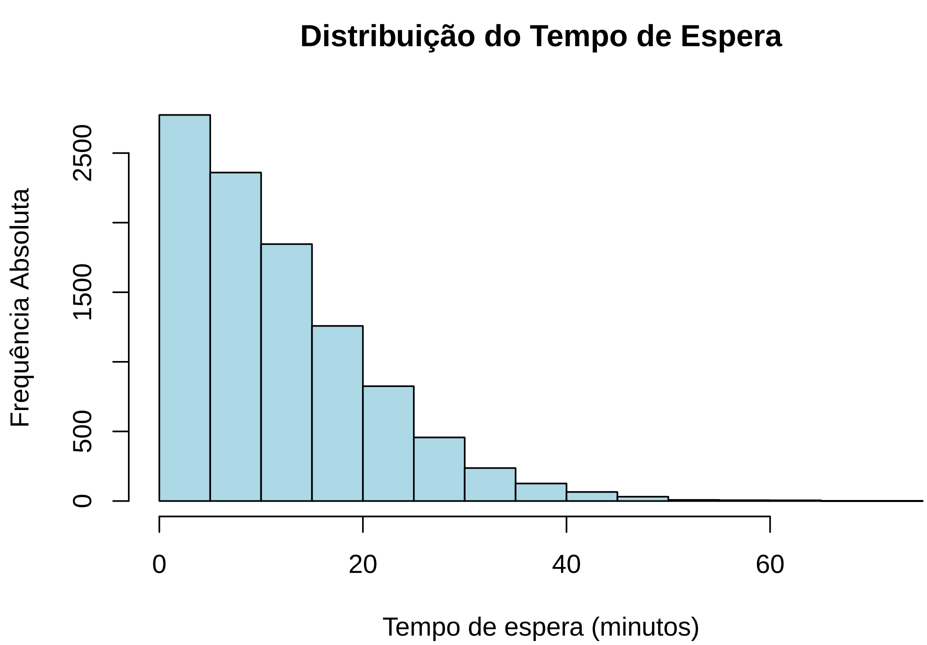
```
# Calcular a diferença absoluta entre X e Y
z <- abs(x-y)

# Calcular a média de Z
mean(z)
```

```
## [1] 11.75882
```

A saída do código acima dá-nos um tempo médio de espera de aproximadamente 11.75 minutos.

Para compreender melhor a distribuição do tempo de espera, podemos visualizar a distribuição dos valores de Z utilizando um histograma:

```
hist(z,
     main = "Distribuição do Tempo de Espera",
     xlab = "Tempo de espera (minutos)",
     ylab = "Frequência Absoluta",
     col = "lightblue",
     border = "black")
```



20.1 Simulação e Geração de Números Pseudoaleatórios

Números Aleatórios

Números aleatórios são valores gerados de forma imprevisível, sem seguir nenhum padrão determinístico. Numa sequência de números aleatórios, cada número é escolhido independentemente dos outros, e não há qualquer correlação entre eles. Na prática, números aleatórios são fundamentais em diversas áreas, como criptografia, simulações estatísticas, jogos de azar e processos de modelagem onde a imprevisibilidade é crucial.

A verdadeira aleatoriedade geralmente deriva de processos físicos inerentemente imprevisíveis, como a *radiação cósmica*, o *ruído térmico em circuitos eletrónicos* ou o *decaimento radioativo*. No entanto, em computação, obter números verdadeiramente aleatórios pode ser difícil e, frequentemente, desnecessário. Para muitas aplicações, uma forma de aleatoriedade que seja suficientemente imprevisível é suficiente.

Números Pseudoaleatórios

Números pseudoaleatórios, por outro lado, são gerados por algoritmos determinísticos que produzem sequências de números que parecem aleatórios, mas são, na verdade, baseados num valor inicial conhecido como semente (*seed*). Se um algoritmo de geração de números pseudoaleatórios for iniciado com a mesma semente, ele produzirá exatamente exatamente a mesma sequência de números em cada execução.

Embora os números pseudoaleatórios não sejam verdadeiramente aleatórios, são amplamente utilizados porque podem ser gerados de forma rápida e eficiente e, para muitas aplicações, são suficientemente aleatórios. A principal vantagem de usar números pseudoaleatórios é que, ao utilizar a mesma semente, podemos replicar experiências ou simulações, o que é extremamente útil para fins de investigação e depuração de códigos.

Método Congruencial Multiplicativo

Uma das abordagens mais comuns para gerar números pseudoaleatórios é o **Método Congruencial Multiplicativo**:

- **Semente Inicial**: Considere um valor inicial x_0, chamado de semente (*seed*).
- **Cálculo Recursivo**: Para $n \geq 1$, os valores sucessivos x_n são calculados recursivamente usando a fórmula:

$$x_n = (a \cdot x_{n-1}) \bmod m,$$

onde a e m são inteiros positivos dados. Aqui, x_n é o resto da divisão inteira de $a \cdot x_{n-1}$ por m.

- **Números Pseudoaleatórios**: A quantidade $\frac{x_n}{m}$ é considerada um número pseudoaleatório, uma aproximação de uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Critérios para Escolha de a e m

Para que os números gerados sejam úteis em simulações, as constantes a e m devem satisfazer os seguintes critérios:

1. **Aparência de Aleatoriedade**: A sequência gerada deve ter a "aparência" de uma sequência de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo (0,1).
2. **Período Longo**: A sequência deve ter um período longo antes de começar a se repetir, o que significa que deve gerar um grande número de variáveis antes que ocorra uma repetição.
3. **Eficiência Computacional**: Os valores devem ser computados de forma eficiente para que o algoritmo seja utilizável em aplicações práticas.

Para ver como o algoritmo funciona, considere-se o seguinte exemplo, arbitrando-se $m = 17$, $a = 5$ e $x_0 = 7$:

- $x_1 = (5 \times 7) \, mod \, 17 =$ resto da divisão inteira de 35/17=*1*
- $x_2 = (5 \times 1) \, mod \, 17 = 5$
- $x_3 = (5 \times 5) \, mod \, 17 = 8$

Continuando o processo, obtém-se:

$$7, 1, 5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, (R)7, 1, 5, 8, ...$$

Após R, verifica-se repetição, pelo que o período foi de 16 números.

20.2 A função `set.seed()`

A função `set.seed()` no R é usada para definir uma semente para o gerador de números aleatórios. Isso significa que, ao usar `set.seed()` com um valor específico, podemos garantir que os resultados de operações aleatórias serão reprodutíveis. Em outras palavras, sempre que executarmos o código com o mesmo valor de semente, os mesmos números aleatórios serão gerados.

A aleatoriedade em R (como em outros softwares estatísticos) é gerada por algoritmos, e a "semente" inicial determina a sequência de números aleatórios que serão produzidos. Ao definir uma semente com `set.seed()`, controlamos o ponto de partida dessa sequência, garantindo que as operações subsequentes que dependem de aleatoriedade sempre retornem os mesmos resultados quando a semente é a mesma.

```
set.seed(123)
sample(1:100, 5)
```

```
## [1] 31 79 51 14 67
```

Com isso, você sempre obterá os mesmos 5 números aleatórios ao usar esse código.

O gerador de números pseudoaleatórios padrão em R é o Mersenne Twister. No R, o Mersenne Twister usa uma semente aleatória como entrada: construída a partir do tempo e ID da sessão. Você pode substituir a semente aleatória por uma semente fixa com a função `set.seed()`.

20.3 Exercícios

1. Defina uma semente de sua escolha usando `set.seed()`.

- Gere duas amostras aleatórias de tamanho 10 a partir dos números de 1 a 50, sem reposição.
- Mude o valor da semente e gere novamente as amostras.
- Compare os resultados obtidos antes e depois de alterar a semente.

2. Defina uma semente fixa usando `set.seed(123)`.

- Simule 100 lançamentos de um dado (números de 1 a 6) e conte a frequência de cada número.
- Repita o processo sem redefinir a semente.
- Redefina a semente com o mesmo valor (`set.seed(123)`) e repita a simulação. Compare os resultados com a primeira simulação.

3. Use `set.seed()` para gerar 50 valores aleatórios de uma distribuição normal $N(\mu = 10, \sigma = 2)$. Use `rnorm(n = 50, mean = 10, sd = 2)`.

- Use a mesma semente para gerar 50 valores de uma distribuição uniforme $U(0,1)$. Use `runif(n = 50, min = 0, max = 1)`.
- Altere a semente e repita o processo. Compare os conjuntos de dados gerados.

4. Defina uma semente usando `set.seed(42)`.

- Divida os números de 1 a 100 em dois grupos aleatórios de tamanho igual (50 números cada). Use a função `setdiff()` para dividir os grupos.
- Execute novamente a divisão sem usar `set.seed()`.
- Redefina a semente como `set.seed(42)` e repita a divisão. Verifique se os grupos permanecem os mesmos.

5. Use `set.seed()` para simular as respostas de 50 participantes a uma pergunta de múltipla escolha com 4 opções (A, B, C, D).

- Altere a semente e repita a simulação.
- Verifique se as distribuições das respostas mudam ao alterar ou manter a mesma semente.

Chapter 21

Distribuições de Probabilidade

No R temos acesso as mais comuns distribuições univariadas. Todas as funções tem as seguintes formas:

Função	Descrição
pnome(…)	função de distribuição
dnome(…)	função de probabilidade ou densidade de probabilidade
qnome(…)	calcula o quantil correspondente a uma dada probabilidade
rnome(…)	retorna uma amostra aleatória da distribuição

o **nome** é uma abreviatura do nome usual da distribuição (`binom`, `geom`, `pois`, `unif`, `exp`, `norm`, …).

Exempo 1: Simule o lançamento de três moedas honestas e a contagem do número de caras X.

(a) Use a sua simulação para estimar $P(X = 1)$ e $E(X)$.

(b) Modifique a alínea anterior para permitir uma moeda viciada onde $P(cara) = 3/4$.

```
set.seed(123)
n <- 10000
sim1 <- numeric(n)
sim2 <- numeric(n)
for (i in 1:n) {
  moedas <- sample(0:1,3,replace=T)
```

```
  sim1[i] <- if (sum(moedas)==1) 1 else 0
  sim2[i] <- sum(moedas)
}
# P(X=1)
mean(sim1)
## [1] 0.3821
# E(X)
mean(sim2)
## [1] 1.4928
```

```
set.seed(123)
n <- 10000
sim1 <- numeric(n)
sim2 <- numeric(n)
for (i in 1:n) {
  moedas <- sample(c(0,1),3,prob=c(1/4,3/4),replace=T)
  sim1[i] <- if (sum(moedas)==1) 1 else 0
  sim2[i] <- sum(moedas)
}
# P(X=1)
mean(sim1)
## [1] 0.1384
# E(X)
mean(sim2)
## [1] 2.2503
```

Sabemos também que $X-$ número de caras no lançamneto de três moedas honestas tem distribuição $Binomial(n = 3, p = 0.5)$. Assim, podemos resolver a questão da seguinte maneira

```
set.seed(123)
valores <- rbinom(10000,3,0.5)
# P(X=1)
sum(valores == 1)/length(valores)
## [1] 0.383
# E(X)
sum(valores)/length(valores)
## [1] 1.4897
mean(valores)
## [1] 1.4897
```

No segundo caso teremos $X \sim Binomial(n = 3, p = 3/4)$.

```
set.seed(123)
valores <- rbinom(10000,3,3/4)
# P(X=1)
sum(valores == 1)/length(valores)
## [1] 0.1365
# E(X)
sum(valores)/length(valores)
## [1] 2.2558
mean(valores)
## [1] 2.2558
```

Exemplo 2: O tempo até a chegada de um autocarro tem uma distribuição exponencial com média de 30 minutos.

(a) Use o comando `rexp()` para simular a probabilidade do autocarro chegar nos primeiros 20 minutos.

(b) Use o comando `pexp()` para comparar com a probabilidade exata.

```
set.seed(123)
valores <- rexp(10000, 1/30)
# Probabilidade P(X <=20)
sum( valores < 20)/length(valores)
## [1] 0.4832
# Probabilidade exata
pexp(20, 1/30)
## [1] 0.4865829
```

Exemplo 3: As cartas são retiradas de um baralho padrão, com reposição, até que um ás apareça. Simule a média e a variância do número de cartas necessárias.

```
set.seed(123)
n <- 10000
# Denote os ases por 1,2,3,4
simlist <- numeric(n)

for (i in 1:n) {
  ct <- 0
  as <- 0
  while (as == 0) {
    carta <- sample(1:52,1,replace=T)
    ct <- ct + 1
    if (carta <= 4){
      as <- 1
```

```
    }
  }
  simlist[i] <- ct
}
mean(simlist)
## [1] 12.8081
var(simlist)
## [1] 147.5318
```

Podemos notar aqui tambném que $X-$ número de provas de Bernoulli até o primeiro sucesso (aparecer um ás), que tem distribuição $Geomtrica(p = 4/52)$. Lembre que o R trabalha com a geométrica como sendo $X-$ número de insucessos até o primeiro sucesso.

```
set.seed(123)

valores <- rgeom(10000, 4/52) + 1

# Média e variância
mean(valores)
## [1] 13.0108
var(valores)
## [1] 152.0335
```

21.1 Função de distribuição empírica

A função de distribuição empírica é uma função de distribuição acumulada que descreve a proporção ou contagem de observações em um conjunto de dados que são menores ou iguais a um determinado valor. É uma ferramenta útil para visualizar a distribuição de dados observados e comparar distribuições amostrais.

- É uma função definida para todo número real x e que para cada x dá a proporção de elementos da amostra menores ou iguais a x:

$$F_n(x) = \frac{\#\,\text{observações} \leq x}{n}$$

- Para construir a função de distribuição empírica precisamos primeiramente ordenar os dados em ordem crescente: $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$
- A definição da função de distribuição empírica é

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

- Passo a passo para a construção da função
  - Inicie desenhando a função do valor mais à esquerda para o mais à direita.
  - Atribua o valor 0 para todos os valores menores que o menor valor da amostra, $x_{(1)}$.
  - Atribua o valor $\frac{1}{n}$ para o intervalo entre $x_{(1)}$ e $x_{(2)}$, o valor $\frac{2}{n}$ para o intervalo entre $x_{(2)}$ e $x_{(3)}$, e assim por diante, até atingir todos os valores da amostra.
  - Para valores iguais ou superiores ao maior valor da amostra, $x_{(n)}$, a função tomará o valor 1.
  - Se um valor na amostra se repetir k vezes, o salto da função para esse ponto será $\frac{k}{n}$, em vez de $\frac{1}{n}$.

Matematicamente, para uma amostra de tamanho n , a função de distribuição empírica $F_n(x)$ é definida como:

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(X_i \leq x)$

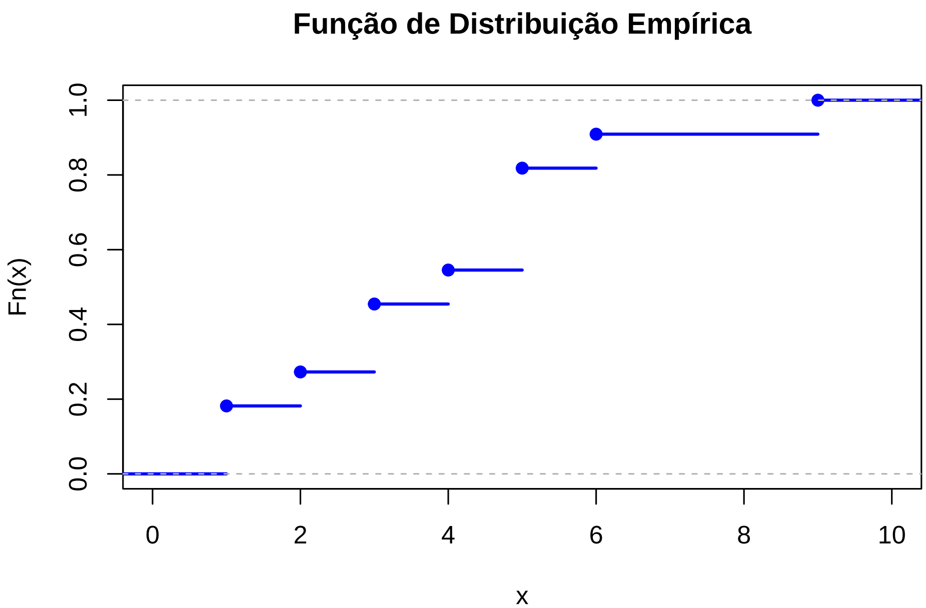
onde:

- $\mathbb{I}(X_i \leq x)$ é uma função indicadora que vale 1 se $X_i \leq x$, e 0 caso contrário.
- n é o número total de observações.
- X_i são os valores observados na amostra.

21.1.1 Função de distribuição empírica no R, função `ecdf()`

A função `ecdf()` no R é usada para calcular a função de distribuição empírica (Empirical Cumulative Distribution Function - ECDF) de um conjunto de dados.

```r
# Conjunto de dados
dados <- c(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5)

# Calcular a ECDF usando a função ecdf()
Fn <- ecdf(dados)

# Plotar a ECDF usando a função ecdf()
plot(Fn, main = "Função de Distribuição Empírica", xlab = "x", ylab = "Fn(x)", col = "blue", lwd
```



Exemplo 1: Resolva o exemplo 1 usando a função de distribuição empírica.

```
set.seed(123)
valores <- rexp(10000, 1/30)
# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(valores)
# Probabilidade P(X<=20)
Fn(20)
## [1] 0.4832
# Probabilidade exata
pexp(20, 1/30)
## [1] 0.4865829
```

Modelos Teóricos Discretos

Um modelo probabilístico teórico discreto é uma representação matemática utilizada para descrever fenómenos onde as variáveis aleatórias assumem apenas valores isolados (discretos) num conjunto finito ou infinito enumerável.

O modelo define a distribuição de probabilidades associada a cada possível valor da variável, ou seja, especifica a probabilidade de cada evento ocorrer.

21.2 Distribuição Uniforme Discreta

Definição: A variável aleatória X diz-se ter **distribuição uniforme discreta** no conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se sua função massa de probabilida (f.mp.) for dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x = x_1, \dots, x_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação

- $X \sim \text{Uniforme Discreta}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$
- $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n+1}{2}$
- $V(X) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$

> Esta distribuição é razoável quando a variável aleatória discreta toma n valores distintos, todos com a mesma probabilidade.

Não há entre as funções básicas do R uma função específica para a distribuição uniforme discreta, provavelmente devido a sua simplicidade, embora algumas outras funções possam ser usadas. Por exemplo para sortear números pode-se usar `sample()`, como no exemplo a seguir onde são sorteados 15 valores de uma uniforme discreta com valores (inteiros) entre 1 e 10 ($X \sim \text{Uniforme Discreta}(\{1, \dots, 10\})$).

```r
sample(1:10, size = 15, replace = TRUE)
## [1] 2 3 4 4 4 5 7 9 4 2 6 7 1 6 9
```

21.2.1 Exercícios

1. Crie uma variável aleatória uniforme discreta X com valores possíveis de 1 a 10.

- Simule 1000 realizações de X.
- Verifique se a frequência relativa de cada valor aproxima-se da probabilidade teórica $P(X = x) = \frac{1}{10}$.
- Visualize os resultados com um gráfico de barras.

2. Defina uma variável aleatória uniforme discreta X com valores possíveis de 5 a 15.

- Calcule a esperança $\mathbb{E}[X]$ e a variância $\text{Var}(X)$ da variável.
- Simule 10.000 realizações de X e compare os valores empíricos da média e variância com os valores teóricos.

3. Considere duas variáveis aleatórias uniformes discretas independentes, X e Y, com valores possíveis de 1 a 6 (como em um par de dados).

- Gere 5000 pares de valores para X e Y.
- Calcule a média e a variância da soma $Z = X + Y$.
- Calcule a probabilidade empírica de que $Z > 8$.

4. Defina uma variável aleatória uniforme discreta X com valores possíveis de -3 a 3.

- Crie uma nova variável aleatória $Y = X^2 + 2X$.
- Simule 5000 valores para X e calcule a esperança $\mathbb{E}[Y]$ e a variância $\mathrm{Var}(Y)$.

5. Defina uma variável aleatória uniforme discreta X com valores possíveis de -5 a 5.

- Crie uma nova variável $Y = 3X^3 - 2X^2 + X$.
- Simule 5000 valores de X e calcule:
- A média empírica de Y.
- A proporção de valores de Y que são positivos.

21.3 Distribuição de Bernoulli

Definição: Uma experiência aleatória diz-se uma **prova de Bernoulli** se possuir apenas dois resultados possíveis

- um sucesso A, que ocorre com probabilidade p $(0 \leq p \leq 1)$;
- um insucesso $\bar{A}$, que ocorre com probabilidade $1 - p$.

Exemplos

- Lançar uma moeda e observar se o resultado é “cara” ou “coroa”.
- Examinar uma amostra de rocha para verificar a presença de fósseis.
- Realizar uma perfuração para verificar a presença de petróleo num local específico.

Definição: A variável aleatória discreta X, que representa o *“número de sucessos numa prova de Bernoulli”*, diz-se com **distribuição de Bernoulli** com parâmetro p e possui f.m.p. dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou, de forma equivalente,

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação

- $X \sim$ Bernoulli(p)
- $p = P$(Sucesso)
- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$

21.3.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim$ Bernoulli($p = 0.5$).

$P(X = 0) \rightarrow$ `dbinom(x=0, size=1, prob=0.5)` $= 0.5$

$P(X = 1) \rightarrow$ `dbinom(x=1, size=1, prob=0.5)` $= 0.5$

$P(X \leq 1) \rightarrow$ `pbinom(q=1, size=1, prob=0.5)` $= 1$

$P(X > 0) \rightarrow$ `pbinom(q=0, size=1, prob=0.5, lower.tail=FALSE)` $= 0.5$

Amostra aleatória de dimensão 5: `rbinom(n = 5, size = 1, prob = 0.5)` $=$ 0 1 0 1 1

21.3.2 Exercícios

1. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda não viciada e observar a face que fica voltada para cima. Sendo o objetivo verificar se sai "cara", defina-se a variável aleatória

$$X - \text{número de vezes, em 1 lançamento, que sai cara}$$

(a) Simule a situação descrita, determinando a percentagem de vezes em que saiu cara, para um número total de lançamentos: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$.

(b) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

2. Considere uma variável aleatória X com distribuição de Bernoulli, onde $P(X = 1) = 0.7$ e $P(X = 0) = 0.3$.

- Simule 1000 valores de X .
- Calcule a frequência relativa de $X = 1$ e $X = 0$ na amostra.
- Compare os resultados empíricos com as probabilidades teóricas.

3. Defina uma variável de Bernoulli X com $P(X = 1) = 0.4$.

- Simule 10.000 valores de X.
- Calcule a média empírica de X e compare com sua esperança teórica $\mathbb{E}[X] = p$.
- Calcule a variância empírica e compare com a fórmula teórica $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

4. Considere 5 variáveis $X_1, X_2, \dots, X_5$, cada uma com distribuição de Bernoulli $P(X = 1) = 0.5$.

- Simule 5000 realizações de cada variável.
- Calcule a soma $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$.
- Verifique a frequência relativa de cada valor possível de S (de 0 a 5) e compare com a distribuição binomial teórica. Use `dbinom(x = 0:5, size = 5, prob = 0.5)`.

21.4 Distribuição Binomial

Definição: A variável aleatória discreta X, que representa o *"número de sucessos num conjunto de n provas de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso comum e igual a p"*, diz-se com **distribuição binomial** de parâmetros (n, p) e possui f.m.p. dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde

$$\binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}.$$

Esta fórmula representa a probabilidade de obter exatamente x sucessos em n tentativas, com probabilidade p de sucesso em cada tentativa.

Notação

- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$
- $p = P(\text{sucesso})$
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$

21.4.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 20, p = 0.1)$.

$P(X = 4) \rightarrow$ `dbinom(x=4, size=20, prob=0.1)` $= 0.08977883$

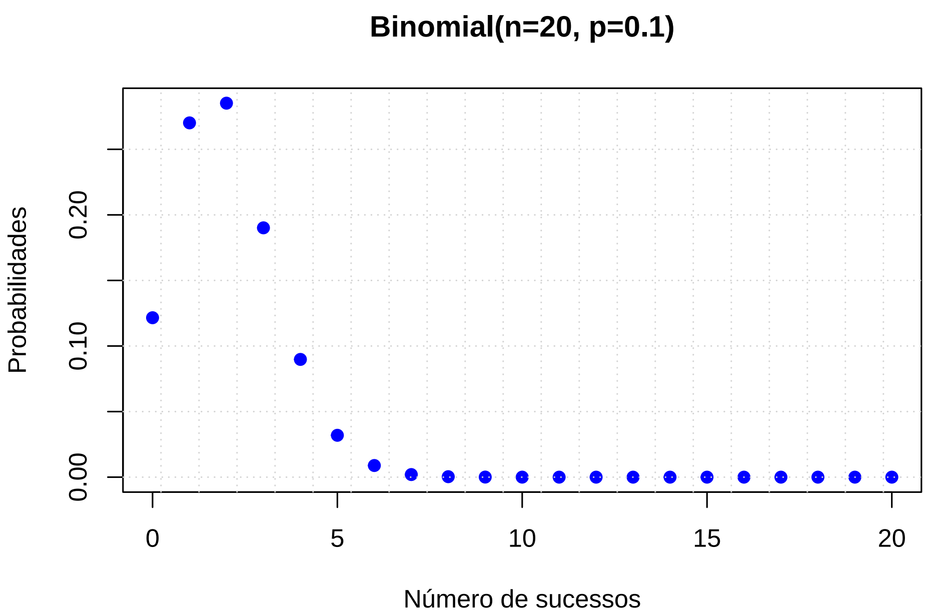
$P(X \leq 4) \rightarrow$ `pbinom(q=4, size=20, prob=0.1)` $= 0.9568255$

$P(X > 4) \rightarrow$ `pbinom(q=4, size=20, prob=0.1, lower.tail=FALSE)`$=$ 0.0431745

Amostra aleatória de dimensão 5: `rbinom(n=5, size=20, prob=0.1)`$=$ 0 1 1 4 0

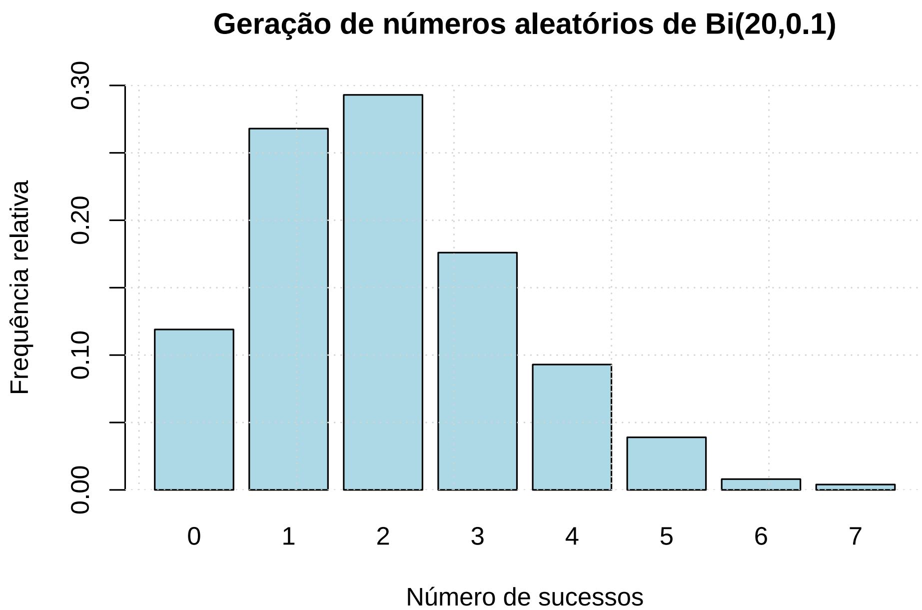
21.4.2 Função massa de probabilidade (teórica)

```
# Simulação de Variáveis aleatórias

# Função massa de probabilidade Binomial(n,p)
n <- 20
p <- 0.1
x <- 0:20

teorico <- data.frame(x = x, y=dbinom(x, size = n, prob = p))

plot(teorico$x, teorico$y,
     main = "Binomial(n=20, p=0.1)",
     xlab = "Número de sucessos",
     ylab = "Probabilidades",
     pch = 19,
     col = "blue")
grid(nx=21, ny=NULL)
```



21.4.3 Função massa de probabilidade (simulação)

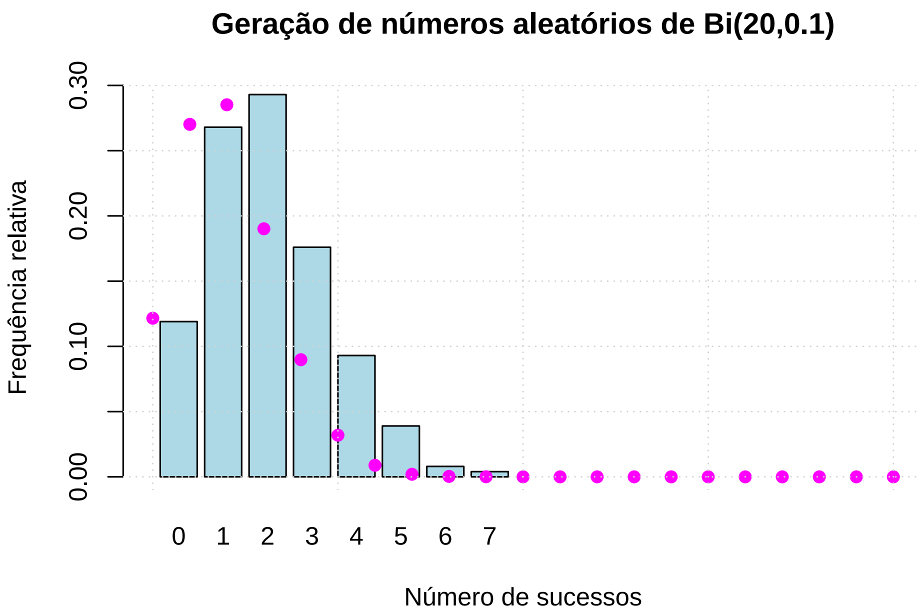
```
set.seed(1234)

n <- 20
p <- 0.1
k <- 1000 # número de simulações

dados <- rbinom(k, size = n, prob = p)

frequencia_relativa <- table(dados)/length(dados)

barplot(frequencia_relativa,
        main = "Geração de números aleatórios de Bi(20,0.1)",
        col = "lightblue",
        xlab = "Número de sucessos",
        ylab = "Frequência relativa",
        ylim = c(0,0.3))
grid()
```



21.4.4 Comparação

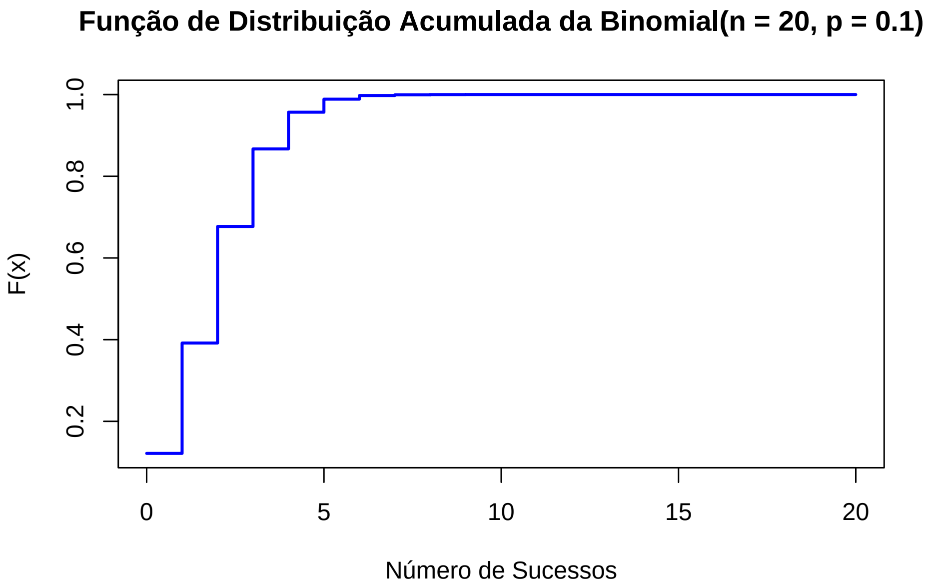
```
set.seed(1234)

n <- 20
p <- 0.1
k <- 1000 # número de simulações

dados <- rbinom(k, size = n, prob = p)
frequencia_relativa <- table(dados)/length(dados)

teorico <- data.frame(x = 0:n, y=dbinom(0:n, size = n, prob = p))

barplot(frequencia_relativa,
        main = "Geração de números aleatórios de Bi(20,0.1)",
        col = "lightblue",
        xlab = "Número de sucessos",
        ylab = "Frequência relativa",
        xlim = c(0,20),
        ylim = c(-0.01,0.3))

points(teorico$x, teorico$y,
       col = "magenta",
       pch = 19)
```

```
grid()
```



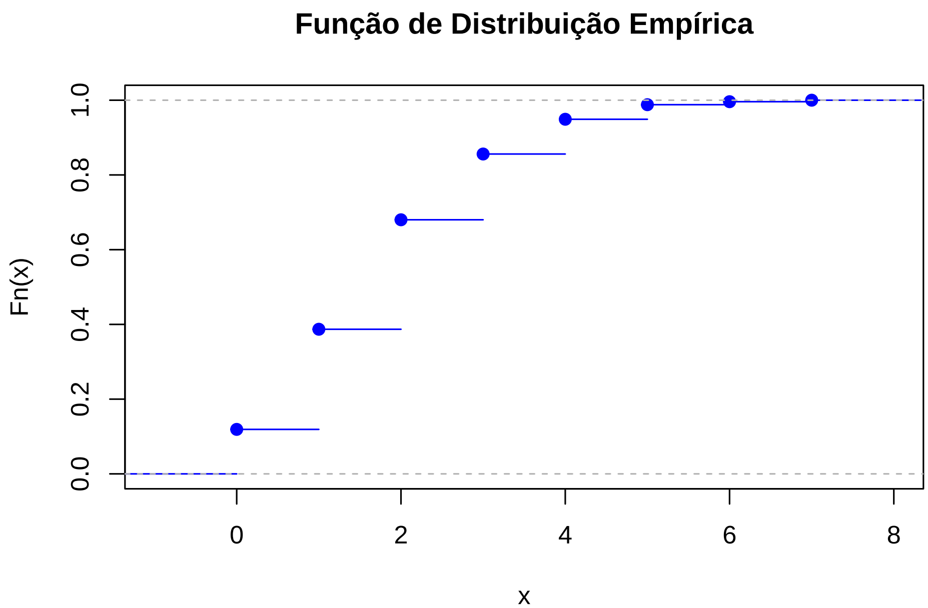
21.4.5 Função de distribuição

```
# Definir os parâmetros da distribuição binomial
n <- 20 # Número de tentativas
p <- 0.1 # Probabilidade de sucesso

# Valores possíveis de sucessos (0 a n)
x <- 0:n

# Calcular a FD
cdf_values <- pbinom(x, size = n, prob = p)

# Plotar a FD
plot(x, cdf_values, type = "s", lwd = 2, col = "blue",
xlab = "Número de Sucessos", ylab = "F(x)",
main = "Função de Distribuição Acumulada da Binomial(n = 20, p = 0.1)")
```

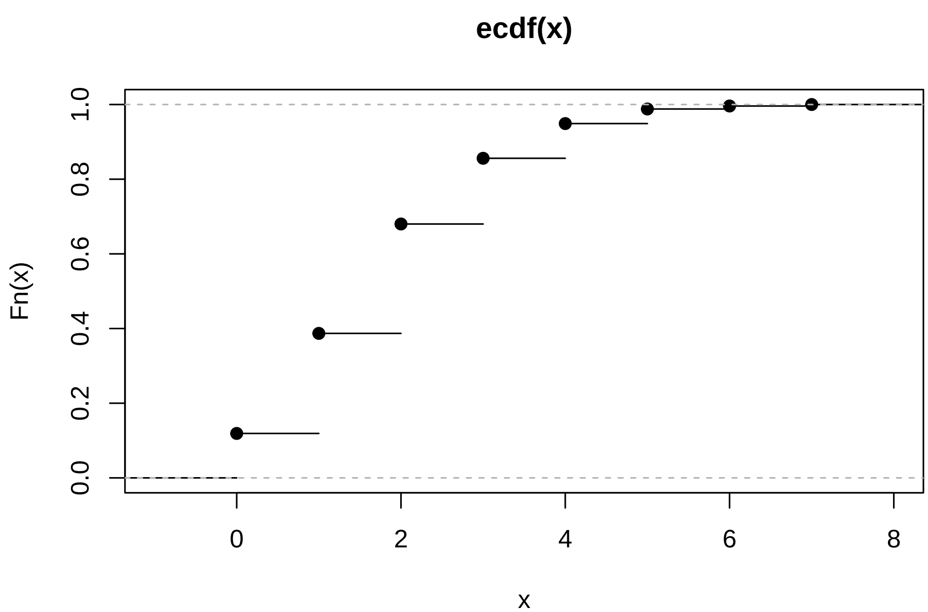


21.4.6 Função de distribuição empírica

```r
# Definir os parâmetros da distribuição binomial
n <- 20 # Número de tentativas
p <- 0.1 # Probabilidade de sucesso

set.seed(1234)
# Amostra aleatória de dimensão 1000
amostra <- rbinom(1000,size = n, prob = p)

# Distribuição empírica
Fn <- ecdf(amostra)

# Plotar CDF
plot(Fn, main = "Função de Distribuição Empírica", xlab = "x",
ylab = "Fn(x)", col = "blue")
```




```
# OU
plot.ecdf(amostra)
```



Cálculo de probabilidade: Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 20, p = 0.1)$.

$P(X \leq 4) =$ `pbinom(4,20,0.1)` $= 0.9568255$

$P(X \leq 4) \approx$ `Fn(4)` $= 0.956$

21.4.7 Exercícios

1. Considere que você está realizando 10 lançamentos de uma moeda justa ($p = 0.5$).

(a) Calcule a probabilidade de obter exatamente 6 caras.
(b) Calcule a probabilidade de obter no máximo 4 caras.
(c) Calcule a probabilidade de obter mais de 7 caras.

2. Um dado equilibrado é lançado 12 vezes. O sucesso é definido como "tirar um 6" ($p = \frac{1}{6}$).

(a) Calcule a probabilidade de tirar no máximo cinco 6.
(b) Gere uma amostra de 1000 experimentos e registre o número de sucessos em cada experimento.
(c) Faça um gráfico de barras de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.
(d) Use a função de distribuição empírica para estimar a probabilidade da alínea (a) e compare com o valor teórico.
(e) Calcule a média e a variância da amostra.
(f) Compare os resultados com os valores teóricos $\mathbb{E}[X] = np$ e $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

3. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda não viciada e observar a face que fica voltada para cima. Suponha que a experiência é realizada 7 vezes, sendo o objetivo verificar se sai "cara". Defina-se a variável aleatória

$$X - \text{número de vezes, em 7 lançamentos, que sai cara}$$

(a) Calcule a probabilidade de, em 7 lançamentos, sair 2 vezes cara.

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que saíram 3 vezes cara.

(c) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

4. Um teste de múltipla escolha tem 10 questões, e cada questão tem 4 alternativas, sendo apenas uma correta ($p = 0.25$).

(a) Calcule a probabilidade de acertar exatamente k questões, para $k = 0, 1, \dots, 10$.

(b) Faça um gráfico para visualizar a distribuição de probabilidades.
(c) Identifique o valor de k que tem maior probabilidade.

5. Um time de basquete tem uma probabilidade de acerto de 0.6 em cada lance livre. Durante um jogo, o time tenta 15 lances livres.

(a) Calcule a probabilidade de acertar exatamente 9 lances livres.
(b) Calcule a probabilidade de acertar entre 8 e 12 (inclusive).
(c) Gere uma amostra de 500 jogos e estime a proporção de jogos em que o time acerta entre 8 e 12 lances livres.

6. Em um processo de fabricação, uma variável aleatória X representa o número de peças defeituosas em um lote de 40 peças. A probabilidade de uma peça ser defeituosa é $p = 0.05$.

(a) Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 10.000 observações de X.
(b) Conte a frequência de lotes com exatamente 2 peças defeituosas.
(c) Calcule a proporção de lotes com exatamente 2 peças defeituosas e compare com a probabilidade teórica $P(X = 2)$, onde $X \sim \text{Binomial}(40, 0.05)$.

7. Em uma loja, a probabilidade de um cliente fazer uma compra é $p = 0.3$. Suponha que 25 clientes entram na loja em um determinado período. A variável aleatória X representa o número de clientes que fazem uma compra.

(a) Usando R e fixando a semente em 456, gere uma amostra aleatória de 5.000 observações de X.
(b) Conte a frequência de períodos em que pelo menos 10 clientes fizeram compras.
(c) Calcule a proporção de períodos em que pelo menos 10 clientes fizeram compras e compare com a probabilidade teórica $P(X \geq 10)$, onde $X \sim \text{Binomial}(25, 0.3)$.
(d) Use a função de distribuição empírica para estimar a probabilidade de pelo menos 10 clientes fazerem compras e compare com o valor teórico.
(e) Encontre o número médio de clientes que fizeram compras na amostra gerada.
(f) Compare a média amostral com o valor esperado teórico de $\mathbb{E}[X]$.

8. O número de acertos num alvo em 30 tentativas onde a probabilidade de acerto é 0.4, é modelado por uma variável aleatória X com distruibuição Binomial de parâmetros $n = 30$ e $p = 0.4$. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra de dimensão $n = 700$ dessa variável. Para essa amostra:

(a) Faça um gráfico de barras de frequências relativas associada aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Calcule a função de distribuição empírica e com base nessa função estime a probabilidade do número de acertos no alvo, em 30 tentativas, ser maior que 15. Calcule ainda o valor teórico dessa probabilidade.

21.5 Distribuição Geométrica

Definição: A variável aleatória discreta $X =$ *"número de provas de Bernoulli (independentes e com probabilidade de sucesso comum igual a p) realizadas até à ocorrência do primeiro sucesso"* diz-se com **distribuição geométrica com parâmetro p** e possui f.m.p. dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação

- $X \sim \text{Geométrica}(p)$
- $p = P(\text{sucesso})$
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

A variável aleatória discreta com distribuição geométrica pode ser defina de outro modo… (O R trabalha com essa definição).

Definição: A variável aleatória discreta $Y = X - 1 =$ *"número de insucessos até obter o primeiro sucesso"* diz-se com **distribuição geométrica com parâmetro** p e possui f.m.p. dada por

$$P(Y = y) = \begin{cases} p(1-p)^{y}, & y = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação

- $Y \sim \text{Geométrica}(p)$
- $p = P(\text{sucesso})$
- $E(Y) = \frac{1-p}{p}$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$

21.5.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Geométrica}(p = 0.5)$.

$P(X = 0) \rightarrow$ `dgeom(x = 0, prob = 0.5)` $= 0.5$

$P(X = 1) \rightarrow$ `dgeom(x = 1, prob = 0.5)` $= 0.25$

$P(X \leq 1) \rightarrow$ `pgeom(q = 1, prob = 0.5)` $= 0.75$

$P(X > 1) \rightarrow$ `pgeom(q = 1, prob = 0.5, lower.tail = FALSE)` $= 0.25$

Amostra aleatória de dimensão 5: `rgeom(n = 5, prob = 0.5)` $= 3\ 0\ 0\ 0\ 1$

Exemplo: Seja X a variável aleatória que indica o número de lançamentos de um dado equilibrado até surgir a primeira face 2.

(a) Qual a probabilidade da face 2 surgir no terceiro lançamento?

(b) Qual o número esperado de lançamentos do dado até sair a face 2?

(c) Qual a probabilidade de serem necessários mais de 10 lançamentos sabendo que já houve 6 lançamentos do dado sem que a face 2 saísse?

(d) Lembre que no R a geométrica é definida como $Y = X - 1$, então $P(X = 3) = P(Y = 2)$.

```
# P(Y=2)
dgeom(x = 2, prob = 1/6)
## [1] 0.09645062
```

21.5.2 Exercícios

1. Suponha que um dado equilibrado seja lançado repetidamente até que o número "6" apareça. A probabilidade de sucesso em cada tentativa é $p = \frac{1}{6}$.

- Simule 1000 experimentos e registre o número de tentativas necessárias em cada caso.
- Calcule a frequência relativa para cada valor possível e compare com as probabilidades teóricas usando a função `dgeom()`.

2. Fixando a semente em 123 simule 5000 valores de uma variável aleatória geométrica com $p = 0.2$. - Calcule a probabilidade empírica de que o número de tentativas até o primeiro sucesso seja menor ou igual a 5. - Compare o resultado empírico com o valor teórico utilizando a função `pgeom()`.

3. Gere a distribuição geométrica para diferentes valores de p: $p = 0.1$, $p = 0.5$, e $p = 0.9$.

- Plote gráficos de barras para comparar como a probabilidade muda conforme p aumenta.

- Descreva como o parâmetro p afeta a forma e o decaimento da distribuição.

4. Defina uma variável geométrica com $p = 0.3$.

- Fixando a semente em 123 simule 10.000 valores dessa variável e calcule a média e a variância empíricas.
- Compare os resultados empíricos com os valores teóricos:
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}$
- $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

5. Considere uma pesquisa de opinião em que 80% das pessoas entrevistadas concordam com uma determinada afirmação ($p = 0.8$).

- Simule o número de entrevistas necessárias até encontrar uma pessoa que discorde ($1 - p = 0.2$).
- Realize 5000 simulações e calcule a média e a variância do número de entrevistas.
- Visualize a distribuição empírica do número de entrevistas.

6. Uma central de suporte técnico está analisando o número de chamadas necessárias até resolver o problema de um cliente. A probabilidade de sucesso em resolver o problema em cada tentativa é $p = 0.3$, e o número de tentativas segue uma distribuição geométrica.

(a) Qual é a probabilidade de resolver o problema em no máximo 5 tentativas?

(b) Qual é a probabilidade de precisar de mais de 8 tentativas para resolver o problema?

(c) Simule o número de tentativas necessárias para resolver o problema em 500 casos.

- (i) Crie um vetor de amostras aleatórias de tamanho 500 usando `rgeom()`.
- (ii) Calcule a frequência relativa de casos em que o número de tentativas foi menor ou igual a 5. Compare este valor com a probabilidade calculada no item (a).

(d) Usando a simulação do item (c), calcule a média e o desvio padrão da amostra gerada. Compare com os valores teóricos da média $\mu = \frac{1-p}{p}$ e do desvio padrão $\sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$.

(e) Construa um gráfico que compare a distribuição teórica $P(X = x)$ com a frequência relativa observada na simulação do item (c).

21.6 Distribuição de Poisson

Considera-se a contagem do número de ocorrências aleatórias de um acontecimento num intervalo de tempo (comprimento, área, volume, etc.) que verifica as seguintes propriedades:

1. O número de ocorrências de um acontecimento num intervalo é independente do número de ocorrências noutro intervalo disjunto, dizendo-se que não tem memória.
2. A probabilidade de ocorrência de um acontecimento é a mesma para intervalos com a mesma amplitude.
3. A probabilidade de ocorrer mais do que um acontecimento num intervalo suficientemente pequeno é nula.

Então, esta experiência aleatória chama-se **Processo de Poisson**.

Definição: A variável aleatória discreta $X =$ *"número de ocorrências de um acontecimento por unidade de tempo ou de espaço (comprimento, área, volume, etc.)"*

diz-se com **distribuição de Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$ e possui f.m.p. dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

> λ representa o número médio de ocorrências de um acontecimento por unidade de tempo ou espaço.

Aditividade da Distribuição de Poisson: Se $X_1, ..., X_n$ são variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ para $i = 1, 2, ..., n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

21.6.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$.

$P(X = 4) \rightarrow$ `dpois(4,5)` $= 0.1755$

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `ppois(4,5)` $= 0.4405$

$P(X > 4) \rightarrow$ `ppois(4,5,lower.tail=FALSE)`$= 0.5595$

21.6.2 Função massa de probabilidade (teórica)

```r
# Definir os valores de lambda e x
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
x <- 0:50

# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  teorico <- data.frame(x = x, y = dpois(x, lambda = p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(teorico) +
    geom_point(aes(x = x, y = y), color = "blue") +
    scale_x_continuous(breaks = seq(0, 50, by = 10)) +
    labs(title = TeX(paste0("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")), x="x", y="Probabilidade") +
    theme_light()
}

# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```

21.6.3 Função massa de probabilidade (simulação)

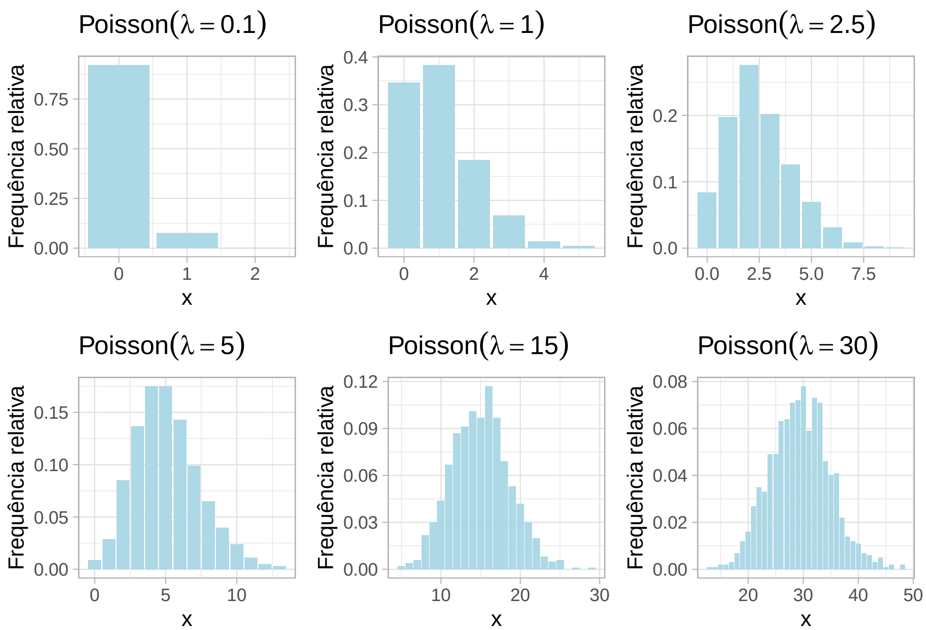
```r
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
n <- 1000
```

```r
# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)
```

```
##
## Attaching package: 'gridExtra'
```

```
## The following object is masked from 'package:dplyr':
##
##     combine
```

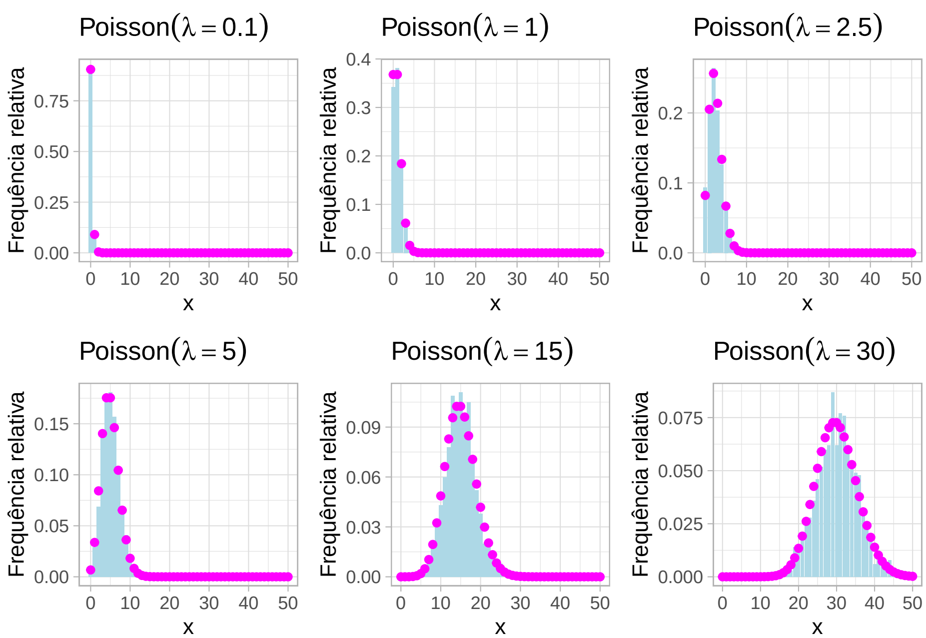
```r
# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  dados <- data.frame(X = rpois(n, lambda = p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(dados) +
    geom_bar(aes(x = X, y =after_stat(prop)), fill="lightblue") +
    labs(title=TeX(paste("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")),
    x = "x", y = "Frequência relativa") +
    theme_light()
}

# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```



21.6.4 Comparação

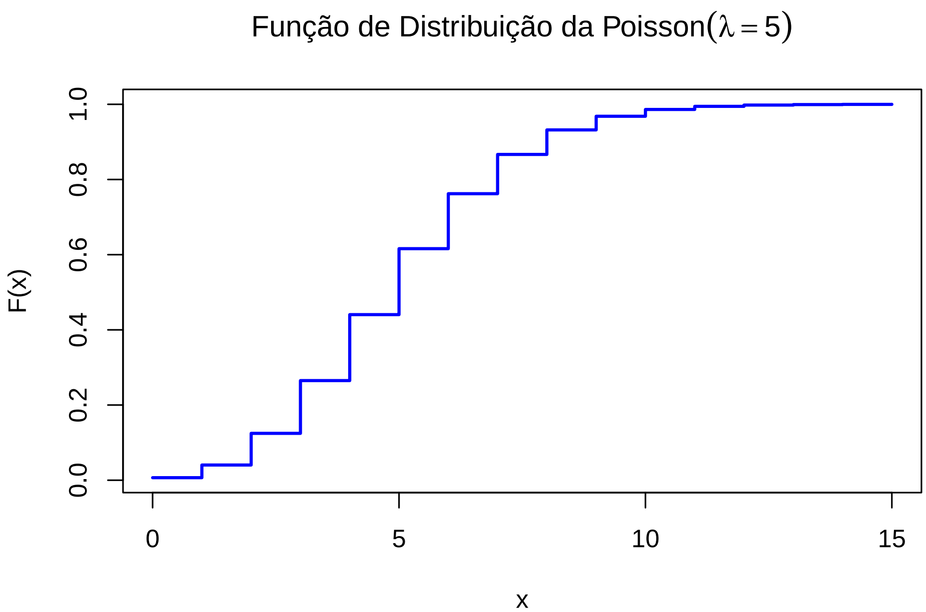
```
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
n <- 1000

# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  dados <- data.frame(X = rpois(n, lambda = p[i]))
  teorico <- data.frame(x=0:50, y=dpois(0:50,p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(dados) +
    geom_bar(aes(x = X, y =after_stat(prop)), fill="lightblue") +
    geom_point(data = teorico, aes(x, y), color = "magenta") +
    scale_x_continuous(breaks = seq(0, 50, by = 10)) +
    labs(title=TeX(paste("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")),
```

```
    x = "x", y = "Frequência relativa") +
    theme_light()
}

# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```



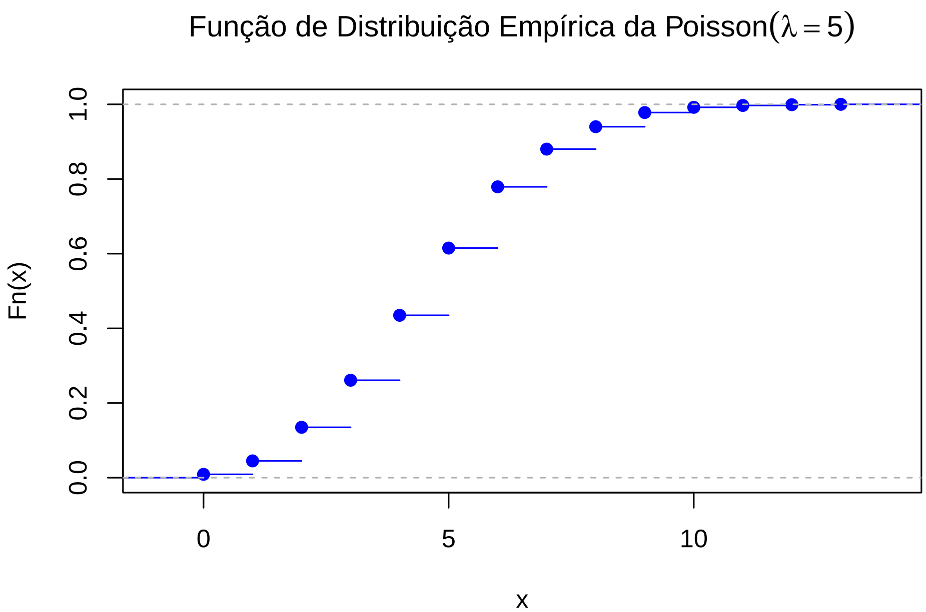
21.6.5 Função de distribuição

```
lambda <- 5  # Parâmetro da Poisson
x <- 0:15    # Valores de x para plotar a distribuição

# Calcular a FD
y <- ppois(x, lambda = lambda)

# Plotar a FD
plot(x,y, type="s", lwd=2, col="blue",
  main=TeX(paste("Função de Distribuição da $Poisson (lambda =", lambda, ")$")),
  xlab = "x",
  ylab = "F(x)")
```

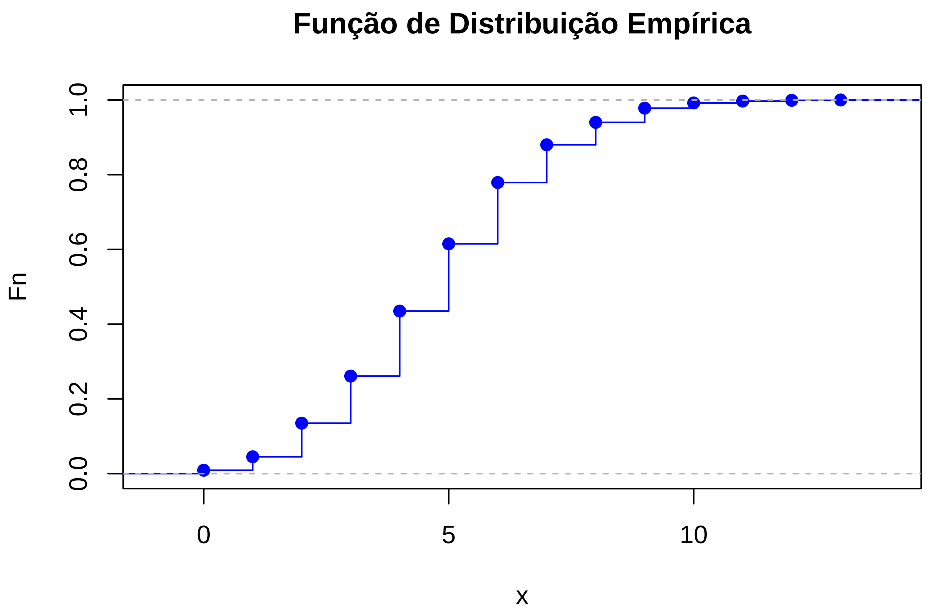


21.6.6 Função de distribuição empírica

```
library(latex2exp)
# Definir os parâmetros da distribuição de Poisson
lambda <- 5

dados <- rpois(1000,lambda = lambda)
Fn <- ecdf(dados)

# Plotar CDF
plot(Fn, main=TeX("Função de Distribuição Empírica da $Poisson(lambda = 5)$"),
  xlab = "x",
  ylab = "Fn(x)",
  col = "blue")
```




```
# OU
#plot.ecdf(dados)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue",
     verticals = TRUE)
```



Cálculo de probabilidades: Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$.

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `ppois(4,5)` $= 0.4405$

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `Fn(4)` $= 0.433$

Exemplo: Geólogos estão a estudar a ocorrência de terramotos numa região específica. Eles observaram que, em média, ocorrem 3 terramotos por mês nessa região. O número de terramotos por mês pode ser modelado por uma distribuição de Poisson.

(a) Calcule a probabilidade de ocorrer exatamente 2 terramotos em um mês.

(b) Calcule a probabilidade de ocorrer mais de 4 terramotos em um mês.

(c) Suponha que a equipa de geólogos está a planear um sistema de alerta para terramotos. Eles querem saber a probabilidade de ocorrer pelo menos 1 terramoto num período de 2 semanas.

Variável Aleatória

$X =$ "número de terramotos por mês numa região específica"

Distribuição de X

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 3)$
- $E(X) = 3 = \lambda$

(a) $P(X = 2)$

```r
# P(X=2)
dpois(x = 2, lambda = 3)
## [1] 0.2240418
```

(b) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

```r
# P(X>4)
ppois(q = 4, lambda = 3, lower.tail = FALSE)
## [1] 0.1847368
# ou
1 - ppois(q = 4, lambda = 3, lower.tail = TRUE)
## [1] 0.1847368
```

(c)

Variável aleartória de interesse

$\tilde{X} =$ "número de terramotos em 2 semanas"

$\tilde{X} \sim$ Poisson$(\lambda = 1.5)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

```r
# P(X >= 1)
1-dpois(x = 0, lambda = 1.5)
## [1] 0.7768698
```

21.6.7 Exercícios

1. Uma fábrica produz em média 4 defeitos por dia em sua linha de produção. Suponha que o número de defeitos por dia segue uma distribuição de Poisson.

(a) Qual é a probabilidade de ocorrer exatamente 5 defeitos em um dia?
(b) Qual é a probabilidade de ocorrerem 3 ou menos defeitos em um dia?

2. Simule o número de defeitos em 30 dias consecutivos. Use `rpois()` para gerar uma amostra com média de 4 defeitos por dia.

(a) Gere uma amostra de tamanho 30 com $\lambda = 4$.
(b) Calcule a média e o desvio padrão da amostra gerada.
(c) Compare a média e o desvio padrão da amostra com os valores teóricos.

3. O número de pedidos recebidos por uma linha de suporte técnico de uma empresa num intervalo de 10 minutos é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson. Neste intervalo de 10 minutos, espera-se que cheguem, em média, 20 pedidos.

(a) Calcule a probabilidade de, num período de 10 minutos, chegarem 20 pedidos.

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que chegam exatamente 20 pedidos.

(c) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

4. Uma loja recebe uma média de 12 clientes por hora. Suponha que o número de clientes por hora siga uma distribuição de Poisson.

(a) Qual é a probabilidade de a loja receber no máximo 10 clientes em uma hora?

(b) Qual é a probabilidade de receber mais de 15 clientes em uma hora?

(c) Simule o número de clientes recebidos em 500 horas.

- (i) Crie um vetor de amostras aleatórias de tamanho 500.
- (ii) Calcule a frequência relativa de horas em que o número de clientes foi menor ou igual a 10. Compare este valor com a probabilidade calculada no item (a).

(d) Usando a simulação do item (c), calcule a média e o desvio padrão da amostra gerada. Compare com os valores teóricos da média e do desvio padrão de uma distribuição de Poisson com $\lambda = 12$.

(e) Construa um gráfico que compare a distribuição teórica $P(X = x)$ com a frequência relativa observada na simulação do item (c).

5. Em uma área de conservação, o número de aves avistadas em uma hora segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 8$.

(a) Simule o número de aves avistadas em 1000 horas.

(b) Construa a função de distribuição empírica (usando `ecdf()`).

(c) Compare a função de distribuição empírica com a função de distribuição teórica $F(x) = P(X \leq x)$, calculada com `ppois()`.

6. Usando o R e fixando a semente em 543, gere uma amostra aleatória de 2400 observações de uma variável aleatória Y de Poisson com parâmetro $\lambda = 6$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de Y.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(Y > 5)$ e compare com o valor teórico.

7. Para $\lambda = 5$, construa o gráfico da distribuição de probabilidade $P(X = x)$, onde x varia de 0 a 15.

(a) Use `dpois()` para calcular as probabilidades.

(b) Crie um gráfico de barras para representar os valores.

8. Para $\lambda = 50$, use a aproximação normal para calcular:

(a) A probabilidade de $X \geq 55$ usando a distribuição de Poisson.

(b) A mesma probabilidade usando a aproximação normal com $N(\mu = 50, \sigma^2 = 50)$.

(c) Compare os resultados.

9. Suponha que o número de acidentes por dia em uma rodovia siga uma distribuição de Poisson com $\lambda = 2$.

(a) Simule 1000 amostras de tamanho 30 do número de acidentes por dia.

(b) Calcule a média de cada amostra.

(c) Plote o histograma das médias amostrais e sobreponha a densidade de uma distribuição normal com média $\mu = 2$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{\lambda/n}$. Use `curve(dnorm(x, mean = mu, sd = sigma), col = "red", lwd = 2, add = TRUE)`.

10. Em um hospital, o número de pacientes atendidos por hora segue uma distribuição de Poisson com média de 5 pacientes por hora. Um pesquisador deseja estimar a média do número de pacientes atendidos por hora coletando amostras de diferentes tamanhos.

Usando o R e fixando a semente em 456, realize o seguinte:

- Simule 1000 amostras de tamanho 50, 100 e 1000 do número de pacientes atendidos por hora, onde $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$.
- Para cada tamanho de amostra, calcule a média de cada amostra.
- Plote o histograma das médias amostrais para cada tamanho de amostra (50, 100 e 1000).
- Sobreponha em cada histograma a densidade de uma distribuição normal com: Média teórica: $E(X) = \lambda$ e Desvio padrão teórico: $\sigma = \sqrt{\lambda/n}$, onde n é o tamanho da amostra.
- Comente sobre como as distribuições das médias amostrais se aproximam de uma distribuição normal à medida que o tamanho da amostra aumenta. Relacione suas observações com o Teorema do Limite Central.

21.7 Distribuição Uniforme Contínua

Definição: A variável aleatória contínua X diz-se ter **distribuição uniforme contínua** no intervalo (a, b) (onde $a < b$), se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função de distribuição acumulada (f.d.a.) de X é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

21.7.1 Notação

- $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

21.7.2 Cálculo de probabilidades

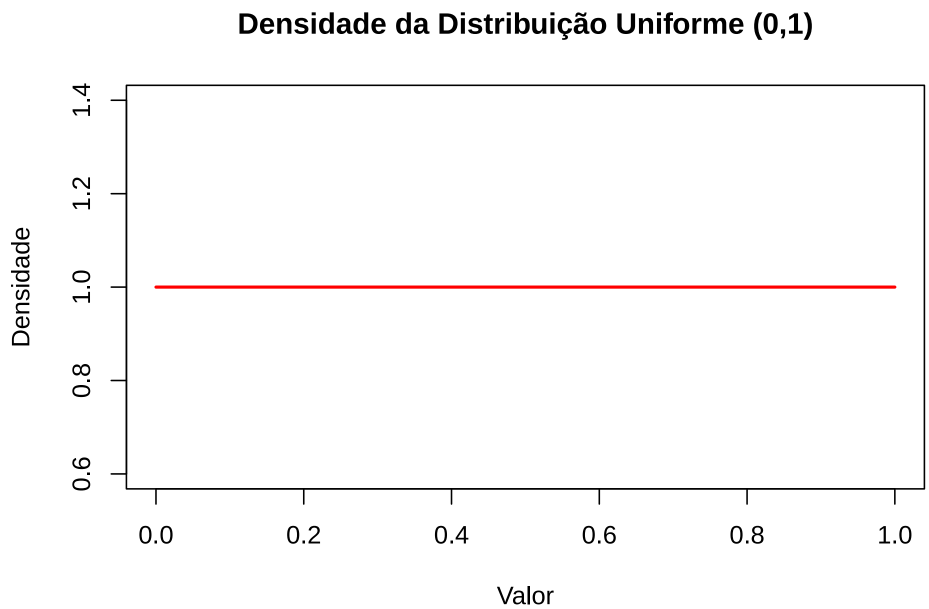
Seja $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$

- $P(X \leq 0.5) \rightarrow$ `punif(0.5, min = 0, max = 1)` $= 0.5$
- $P(X > 0.5) \rightarrow$ `punif(0.5, min = 0, max = 1, lower.tail = FALSE)` $= 0.5$

21.7.3 Função densidade de probabilidade

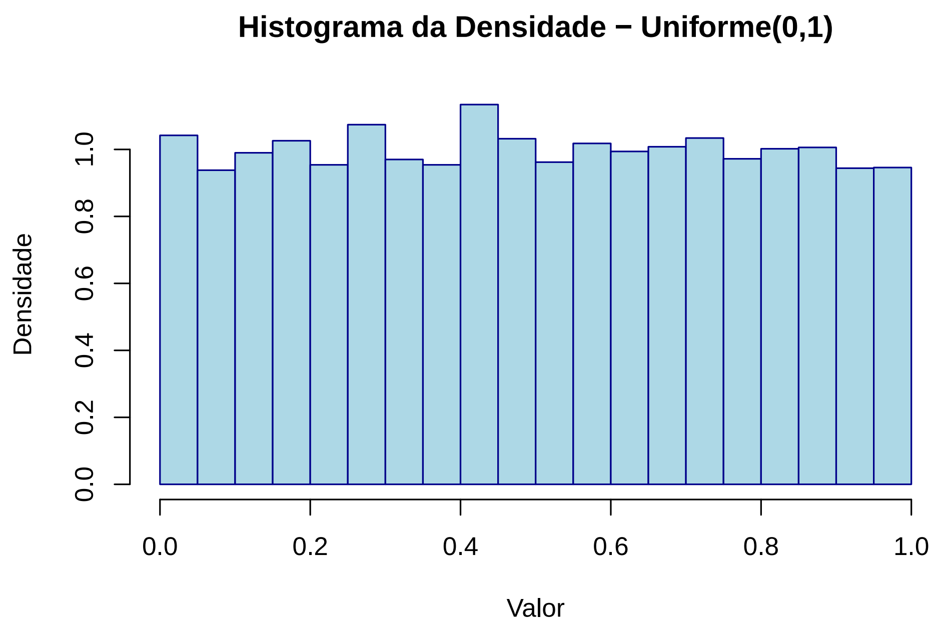
```r
# Gerar os valores x para a densidade teórica
x_vals <- seq(0, 1, length.out = 100)

# Calcular a densidade teórica para os valores x
y_vals <- dunif(x_vals, min = 0, max = 1)

# Desenhar o gráfico da função densidade de probabilidade
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
```

```
     col = "red", lwd = 2,
     main = "Densidade da Distribuição Uniforme (0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "Densidade")
```



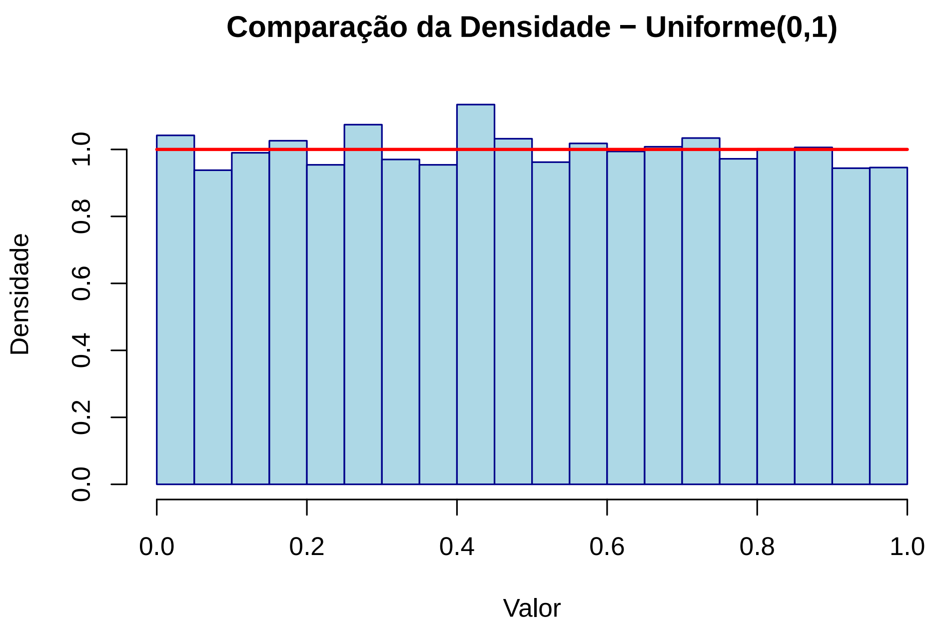
21.7.4 Função densidade de probabilidade (simulação)

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Criar um histograma da amostra
hist(uniform_data, probability = TRUE,
     main = "Histograma da Densidade - Uniforme(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")
```



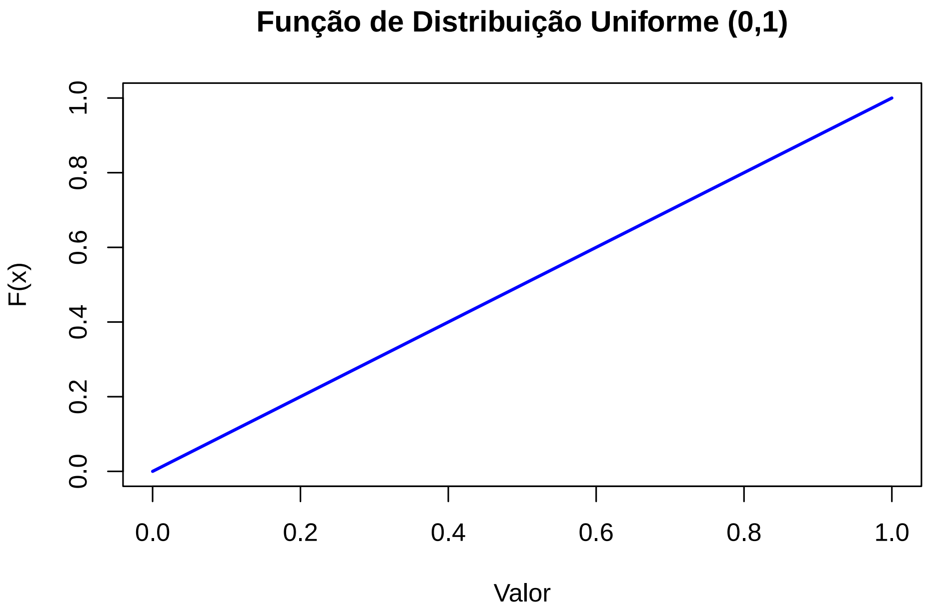
21.7.5 Comparação

```r
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Criar um histograma da amostra com densidade
hist(uniform_data, probability = TRUE,
     main = "Comparação da Densidade - Uniforme(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")

# Adicionar a curva da densidade teórica
curve(dunif(x, min = 0, max = 1),
      add = TRUE,
      col = "red",
      lwd = 2)
```



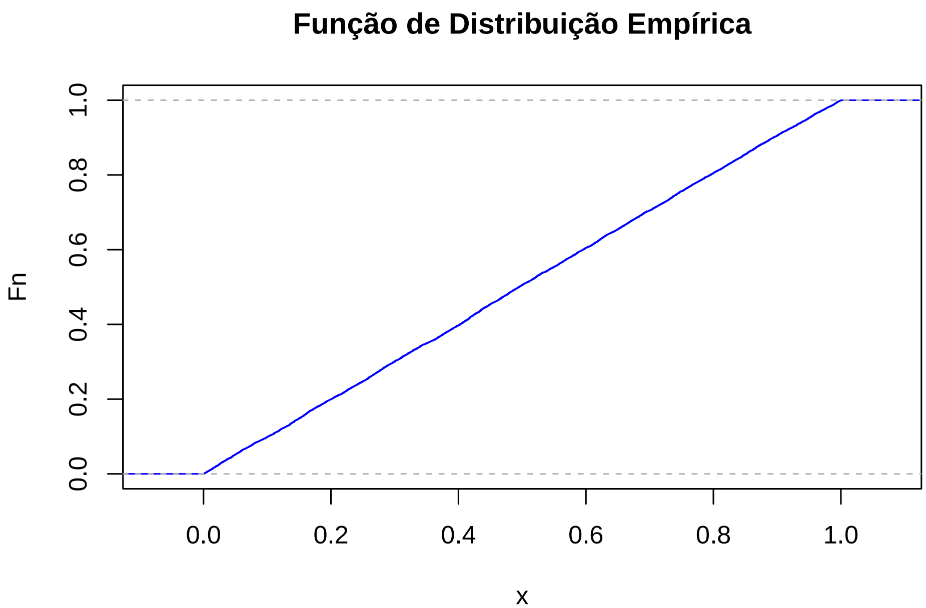
21.7.6 Função de distribuição

```r
# Gerar os valores x para a FD teórica
x_vals <- seq(0, 1, length.out = 100)

# Calcular a FD teórica para os valores x
y_vals <- punif(x_vals, min = 0, max = 1)

# Desenhar o gráfico da função de distribuição acumulada
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "blue", lwd = 2,
     main = "Função de Distribuição Uniforme (0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "F(x)")
```



21.7.7 Função de distribuição empírica

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(uniform_data)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue")
```




```
# OU
#plot.ecdf(uniform_data)
```

21.7.8 Exercícios

1. Simule 1000 valores de uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, 1]$.

(a) Calcule a média e a variância dos valores simulados.

(b) Compare os resultados com os valores teóricos da média ($E(X) = 0.5$) e da variância ($V(X) = 1/12$).

2. Simule 500 valores de uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua no intervalo $[-3, 7]$.

(a) Plote o histograma dos valores simulados.

(b) Adicione ao gráfico a linha da densidade teórica da distribuição uniforme.

3.: O peso real de uma barra de chocolate de uma determinada marca (que supostamente pesa 100 gramas) é uma variável aleatória, em gramas, com distribuição uniforme no intervalo de 85 a 105 gramas.

(a) Qual a probabilidade de uma barra de chocolate ter um peso inferior a 100 gramas?

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que o peso é inferior a 100 gramas.

4. Simule 10.000 valores de uma variável aleatória $X \sim U(2, 8)$.

(a) Calcule a probabilidade empírica de que $X > 5$.

(b) Compare o resultado com a probabilidade teórica calculada usando a função `punif()`.

5. Suponha que uma variável aleatória Y segue uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[10, 20]$. Simule 1000 valores de Y.

(a) Calcule a proporção empírica de valores em $[12, 15]$.

(b) Compare com o valor teórico usando a função `punif()`.

6. Simule 1000 amostras de tamanho 30 de uma variável aleatória $X \sim U(-5, 5)$.

(a) Calcule a média de cada amostra.

(b) Plote o histograma das médias amostrais e sobreponha a curva de densidade de uma normal com $E(X) = 0$ e $V(X) = \frac{(5-(-5))^2}{12 \cdot n}$.

7. Considere que a variável $Z = 3X + 2$, onde $X \sim U(0, 1)$. Simule 1000 valores de X e transforme-os em Z.

(a) Calcule a média e a variância de Z.

(b) Compare os resultados empíricos com os valores teóricos $E(Z) = 3E(X) + 2$ e $V(Z) = 9V(X)$.

8. Uma fábrica produz itens com peso uniformemente distribuído entre 100 e 120 gramas. Simule 2000 itens e analise:

(a) Calcule a proporção de itens com peso inferior a 105 gramas.

(b) Construa um gráfico que compare a densidade empírica com a densidade teórica da distribuição uniforme no intervalo $[100, 120]$.

9. Usando o R e fixando a semente em 123, gere amostras de tamanho crescente $n = 100, 1000, 10000, 100000$ de uma variável aleatória W com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Para cada tamanho de amostra, calcule a média amostral e compare-a com o valor esperado teórico. Observe e comente a convergência das médias amostrais.

10. O tempo necessário para um drone realizar a entrega de um pacote (em minutos) é modelado por uma variável aleatória X com distribuição Uniforme($a = 10, b = 30$). Usando o R e fixando a semente em 1430, gere 8000 amostras de dimensão $n = 100$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras, obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule a média de cada uma das amostras, obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(d) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)/n}$.

11. Em um data center, o número de servidores que falham em uma hora segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 4$. O tempo necessário para reparar cada servidor falho segue uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[2, 6]$ horas. A energia consumida durante o reparo de cada servidor é dada por:

$E_i = T_i^2$

onde T_i é o tempo de reparo do servidor i.

- Simule 1000 horas de operação do data center, onde o número de servidores que falham em cada hora segue uma distribuição de Poisson.
- Para cada hora, calcule o consumo total de energia como:

$E_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} T_i^2$

onde N é o número de servidores falhos e $T_i \sim U(2, 6)$.

21.8 Distribuição Exponencial

O modelo exponencial é frequentemente utilizado na caracterização da duração de equipamentos, modelação dos tempos entre ocorrências consecutivas de eventos do mesmo tipo, por exemplo, chegadas de clientes a um sistema, falhas mecânicas, colisões, etc.

Definição: Uma variável aleatória contínua X diz-se ter **distribuição exponencial** de parâmetro $\lambda > 0$, se sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

A função de distribuição de X é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Notação

- $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

21.8.1 Cálculo de probabilidades

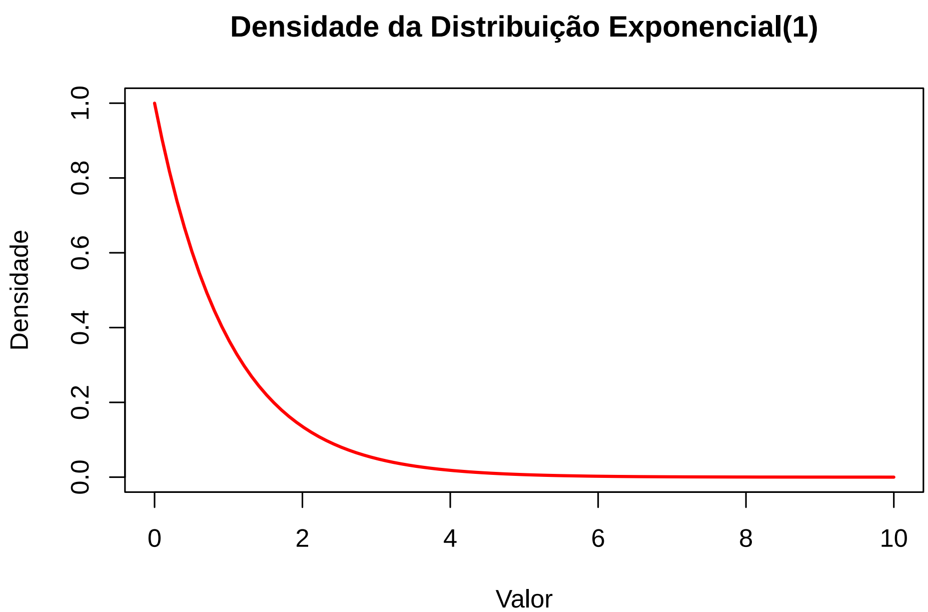
Seja $X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1)$.

$P(X \leq 0.5) \rightarrow$ `pexp(0.5,rate=1)`$=0.3935$

$P(X > 0.5) \rightarrow$ `pexp(0.5,rate=1,lower.tail=FALSE)`$=0.6065$

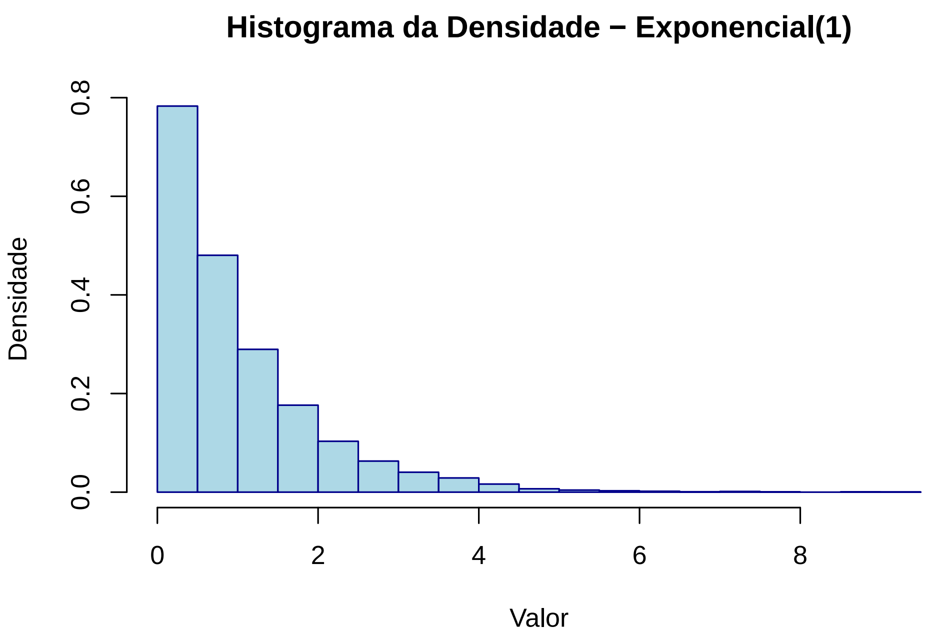
21.8.2 Função densidade de probabilidade (teórica)

```r
# Gerar os valores x para a densidade teórica
x_vals <- seq(0, 10, length.out = 100)

# Calcular a densidade teórica para os valores x
y_vals <- dexp(x_vals, rate=1)

# Desenhar o gráfico da função densidade de probabilidade
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
     main = "Densidade da Distribuição Exponencial(1)",
     xlab = "Valor", ylab = "Densidade")
```



21.8.3 Função densidade de probabilidade (simulação)

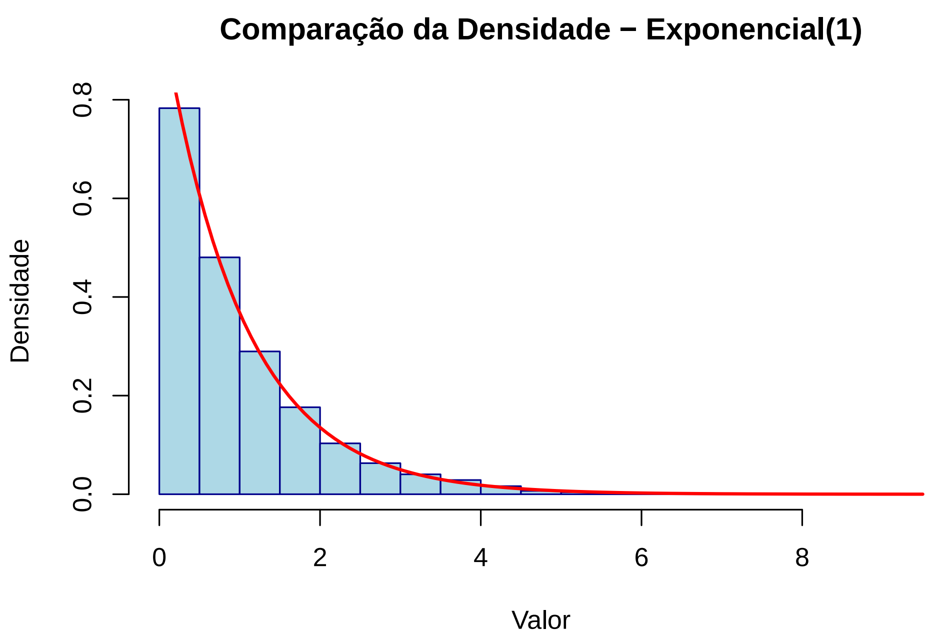
```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Criar um histograma da amostra
hist(expo_data, probability = TRUE,
     main = "Histograma da Densidade - Exponencial(1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")
```



21.8.4 Comparação

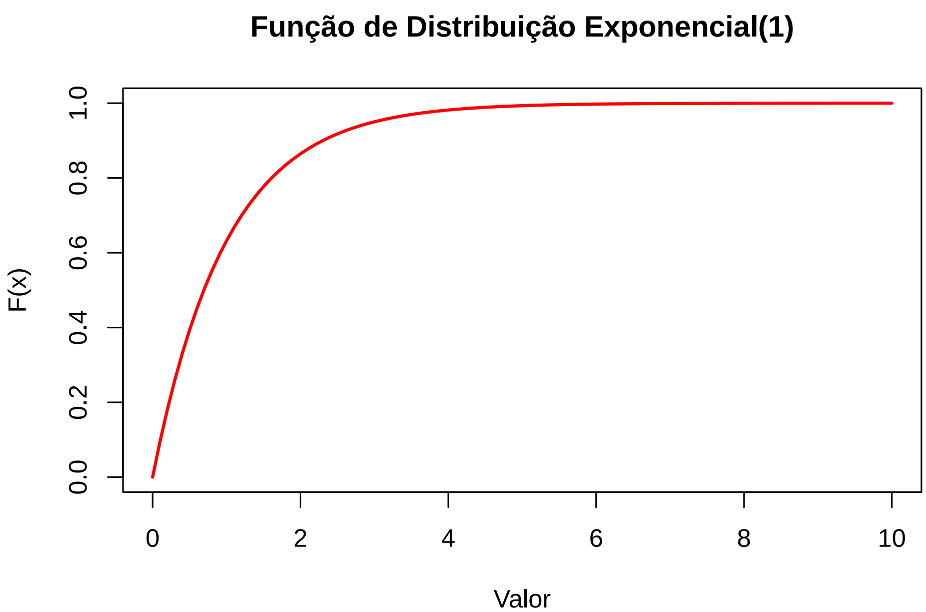
```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Criar um histograma da amostra
hist(expo_data, probability = TRUE,
     main = "Comparação da Densidade - Exponencial(1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")

# Adicionar curva da densidade teórica
curve(dexp(x,rate=1),
      add=TRUE,
      col="red",
```

```
      lwd=2)
```



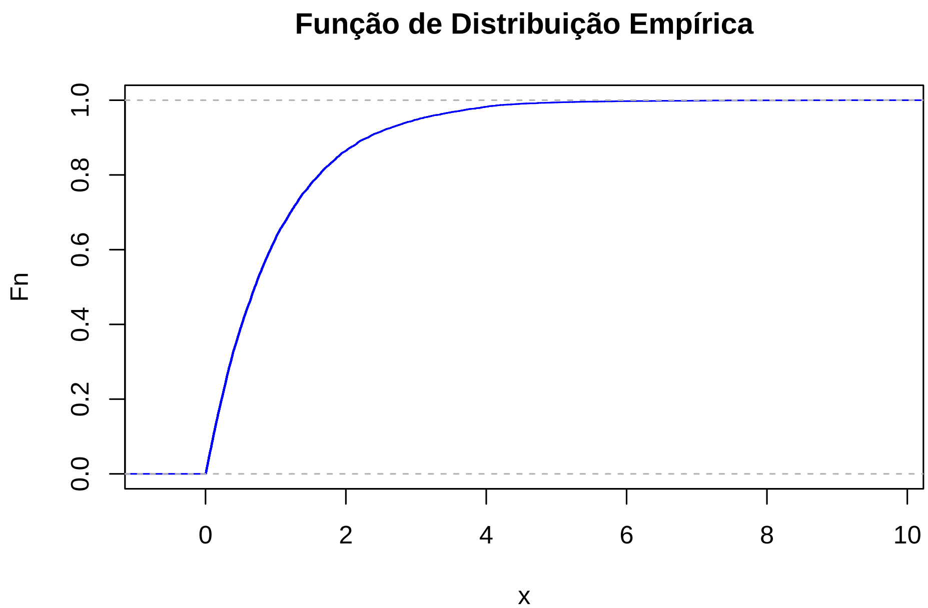
21.8.5 Função de distribuição

```
# Gerar os valores x para a FD teórica
x_vals <- seq(0, 10, length.out = 100)

# Calcular a FD teórica para os valores x
y_vals <- pexp(x_vals, rate=1)

# Desenhar o gráfico da FD
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
     main = "Função de Distribuição Exponencial(1)",
     xlab = "Valor", ylab = "F(x)")
```



21.8.6 Função de distribuição empírica

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(expo_data)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue")
```



21.8.7 Exercícios

1. Uma central de atendimento recebe chamadas a cada intervalo de tempo, que segue uma distribuição exponencial com taxa $\lambda = 2$ (chamadas por minuto).

(a) Simule 1000 intervalos de tempo entre chamadas.

(b) Calcule o tempo médio entre chamadas e compare com o valor teórico $1/\lambda$.

(c) Plote o histograma dos intervalos simulados e sobreponha a densidade teórica.

2. Em uma fila de espera, o tempo entre chegadas de clientes segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 0.5$.

(a) Calcule a probabilidade teórica de o tempo entre duas chegadas ser maior que 3 minutos.

(b) Simule 5000 intervalos e estime empiricamente a probabilidade de o tempo entre chegadas ser maior que 3 minutos.

(c) Compare o resultado empírico com o teórico.

3. O tempo necessário para atender clientes em um restaurante segue uma distribuição exponencial com taxa $\lambda = 0.25$ (atendimentos por minuto).

(a) Simule os tempos de atendimento para $n = 50$ clientes.

(b) Calcule o tempo total necessário para atender todos os clientes.

(c) Plote o histograma do tempo total de atendimento após 1000 simulações e sobreponha a curva de densidade normal com média $nE(X) = n/\lambda$ e desvio padrão $\sqrt{nV(X)} = \sqrt{n/\lambda^2}$.

4. Um engenheiro está monitorando dois processos independentes, cujos tempos seguem distribuições exponenciais com $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$.

(a) Simule 1000 tempos para cada processo.

(b) Calcule a soma dos tempos de ambos os processos.

(c) Plote o histograma dos tempos somados e discuta se a soma ainda segue uma distribuição exponencial.

5. Simule 5000 amostras de tamanho 30 de uma variável $X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1.5)$.

(a) Calcule a média de cada amostra.

(b) Plote o histograma das médias amostrais e sobreponha a curva de densidade normal com média $1/\lambda$ e desvio padrão $1/(\lambda\sqrt{n})$.

(c) Explique como o Teorema do Limite Central se aplica nesse contexto.

6. O tempo até o primeiro evento de falha em uma máquina segue uma distribuição exponencial com taxa $\lambda = 0.1$.

(a) Simule o tempo de falha para 10000 máquinas.

(b) Estime a probabilidade de uma máquina falhar em menos de 15 horas.

(c) Compare o valor empírico com o teórico calculado pela função de distribuição acumulada.

7. Uma rodovia registra acidentes em intervalos de tempo que seguem uma distribuição exponencial com $\lambda = 0.8$ (acidentes por hora).

(a) Simule os tempos entre acidentes para um período de 1000 horas.

(b) Calcule a probabilidade empírica de um intervalo ser inferior a 2 horas.

(c) Plote um histrograma para os tempos simulados e compare com a densidade teórica.

8. Considere dois processos relacionados:

- O tempo de falha do primeiro componente segue $X_1 \sim$ Exponencial$(\lambda = 0.5)$.
- O tempo de falha do segundo componente é dado por $X_2 = 2X_1 + 1$.

(a) Simule 5000 pares (X_1, X_2).

(b) Calcule a média e a variância de X_2.

(c) Plote o gráfico de dispersão entre X_1 e X_2 e comente sobre a relação entre as variáveis.

9. Uma central de atendimento registra o tempo entre chamadas, que segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 2$ (chamadas por minuto).

(a) Simule 5000 amostras de tamanho $n = 5$ de uma variável aleatória $X \sim$ Exponencial$(\lambda = 2)$.

(b) Para cada amostra, calcule a soma $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(c) Compare o histograma de S com a densidade de uma distribuição Gama$(k = 5, \theta = 1/\lambda)$ sobreposta.

(d) Verifique a média e a variância de S empiricamente e compare com os valores teóricos de uma Gama(k, θ), dados por $E(S) = k\theta$ e $V(S) = k\theta^2$.

10. O tempo até a falha de uma máquina segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 0.5$. Um engenheiro monitora o tempo até a ocorrência de 10 falhas consecutivas.

(a) Simule 10.000 observações do tempo total para 10 falhas consecutivas ($S = \sum_{i=1}^{10} X_i$, onde $X \sim$ Exponencial$(\lambda = 0.5)$).

(b) Compare o histograma dos tempos totais simulados com a densidade de uma distribuição Gama$(k = 10, \theta = 1/\lambda)$.

(c) Calcule a probabilidade teórica de o tempo total ser maior que 25 horas usando a densidade Gama. Compare com a probabilidade empírica obtida dos dados simulados.

11. Suponha que o tempo para a conclusão de uma tarefa em um laboratório é modelado como uma soma de $n = 7$ tempos de processamento individuais, cada um seguindo uma Exponencial$(\lambda = 3)$.

(a) Simule 5000 amostras do tempo total para completar a tarefa ($S = \sum_{i=1}^{n} X_i$).

(b) Ajuste os valores simulados a uma distribuição Gama($k = 7, \theta = 1/\lambda$).

(c) Plote um histograma dos valores simulados e compare com a densidade teórica da distribuição gama.

(d) Estime o valor do 90º percentil da soma simulada e compare com o percentil teórico calculado para uma Gama($k = 7, \theta = 1/\lambda$). Use as funções `qgamma()` e `quantile()`.

21.9 Distribuição Normal

Vamos ver alguns exemplos com a distribuição normal padrão. Por `default` as funções assumem a distribuição normal padrão $N(\mu = 0, \sigma = 1)$.

```
dnorm(-1)
## [1] 0.2419707

pnorm(-1)
## [1] 0.1586553

qnorm(0.975)
## [1] 1.959964

rnorm(10)
##  [1]  1.76200539  0.53084557  0.53913434 -0.06506084 -1.45792042 -0.19281038
##  [7]  0.26686001  1.16138850  0.60575811  1.21451547
```

O primeiro valor acima, de `dnorm(-1)`, corresponde ao valor da densidade da normal reduzida ou normal padrão $N(\mu = 0, \sigma = 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})}$$

no ponto $x = -1$. Portanto, o mesmo valor seria obtido substituindo x por -1 na expressão da normal:

```
mu <- 0
sigma <- 1
x <- -1
(1/(sigma * sqrt(2*pi))) * exp((-1/2) * ((x - mu)/sigma)^2)
```

```
## [1] 0.2419707
```

- A função `pnorm(-1)` calcula a probabilidade $P(X \leq -1)$.
- A função `qnorm(0.975)` calcula o valor de x tal que $P(X \leq x) = 0.975$.
- A função `rnorm(10)` gera uma amostra aleatória de 10 elementos da normal padrão.

As funções relacionadas à distribuição normal possuem os argumentos `mean` e `sd` para definir a média e o desvio padrão da distribuição que podem ser modificados como nos exemplos a seguir. Note nestes exemplos que os argumentos podem ser passados de diferentes formas.

```
qnorm(0.975, mean = 100, sd = 8)
## [1] 115.6797

qnorm(0.975, m = 100, s = 8)
## [1] 115.6797

qnorm(0.975, 100, 8)
## [1] 115.6797
```

Cálculos de probabilidades usuais, para os quais utilizavamos tabelas estatísticas podem ser facilmente obtidos como no exemplo a seguir.

Seja X uma variável aleatória com distribuição $N(\mu = 100, \sigma = 10)$. Calcular as probabilidades:

- $P(X < 95)$
- $P(90 < X < 110)$
- $P(X > 95)$

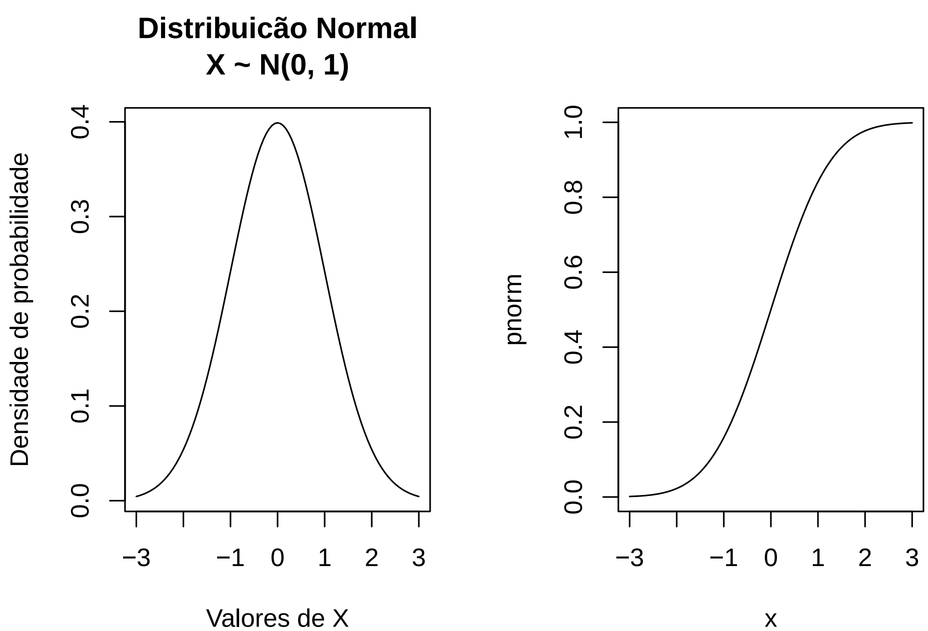
Calcule estas probabilidades de forma usual, usando a tabela da normal. Depois compare com os resultados fornecidos pelo R. Os comandos do R para obter as probabilidades pedidas são:

```
# P(X < 95)
pnorm(95, 100, 10)
## [1] 0.3085375

# P(90 < X < 110)
pnorm(110, 100, 10) - pnorm(90, 100, 10)
## [1] 0.6826895

# P(X > 95) = 1 - P(X < 95)
```

```r
1 - pnorm(95, 100, 10)
## [1] 0.6914625

# ou
pnorm(95, 100, 10, lower.tail = FALSE) # melhor
## [1] 0.6914625
```

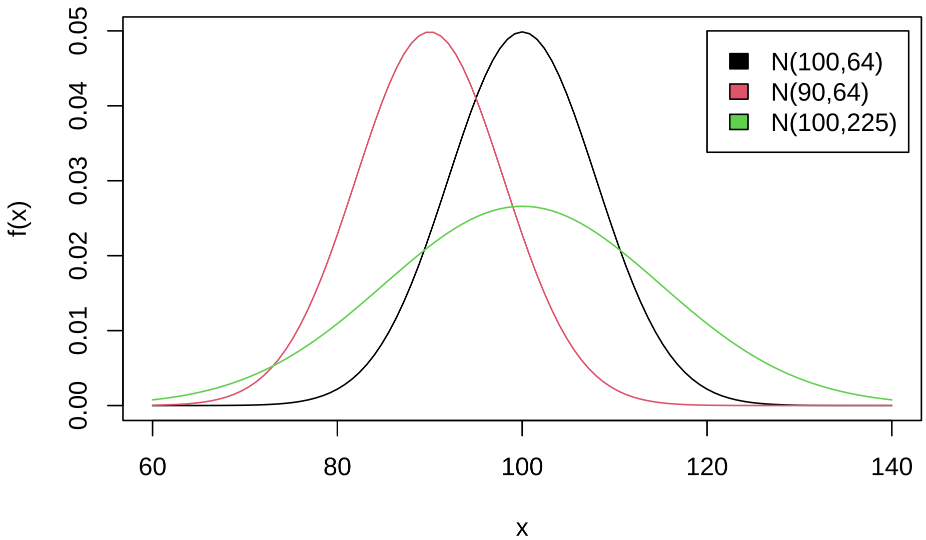
Função densidade de probabilidade e função de distribuição.

```r
par(mfrow = c(1, 2))
plot(dnorm, from = -3, to = 3,
     xlab = "Valores de X",
     ylab = "Densidade de probabilidade")
title("Distribuicão Normal\nX ~ N(0, 1)")
plot(pnorm, from = -3, to = 3)
```




```r
par(mfrow = c(1, 1))
```

```r
plot(function(x) dnorm(x, 100, 8), 60, 140, ylab = 'f(x)')
plot(function(x) dnorm(x, 90, 8), 60, 140, add = TRUE, col = 2)
plot(function(x) dnorm(x, 100, 15), 60, 140, add = TRUE, col = 3)
legend(120, 0.05, fill = 1:3,
       legend = c("N(100,64)", "N(90,64)", "N(100,225)"))
```



21.9.1 Exercícios

1. Um experimento mede o peso de um mineral em gramas, que segue uma distribuição normal com média $\mu = 50$ e desvio padrão $\sigma = 5$.

(a) Simule 1000 pesos desse mineral.

(b) Calcule a média e o desvio padrão dos pesos simulados e compare com os valores teóricos.

(c) Plote o histograma dos pesos simulados e sobreponha a densidade teórica da distribuição normal.

2. Duas variáveis aleatórias $X_1 \sim N(\mu_1 = 5, \sigma_1 = 2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = 10, \sigma_2 = 3)$ são independentes.

(a) Simule 1000 pares de (X_1, X_2).

(b) Calcule a soma $S = X_1 + X_2$.

(c) Plote o histograma de S e sobreponha a densidade de uma normal com média $\mu_S = \mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma_S^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

3. Considere duas variáveis $X_1 \sim N(0, 1)$ e $X_2 \sim N(0, 1)$.

(a) Simule 5000 pares (X_1, X_2).

(b) Calcule $Q = X_1^2 + X_2^2$.

(c) Compare o histograma de Q com a densidade teórica de uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Use `dchisq()`.

4. Um pesquisador deseja estudar o comportamento da média de amostras extraídas de uma população normal padrão $X \sim N(0, 1)$. Para isso, ele realiza as seguintes etapas:

(a) Extraia 1000 amostras para cada um dos tamanhos de amostra: $n = 5$, $n = 10$, $n = 30$, e $n = 100$.

(b) Para cada amostra, calcule:

- A média amostral.

(c) Plote o histograma das médias amostrais para cada n, e sobreponha:

- A densidade de uma distribuição t-Student com $n - 1$ graus de liberdade.
- A densidade de uma distribuição normal com $E(\bar{X}) = 0$ e $\text{Var}(\bar{X}) = 1/n$.

(d) Compare os histogramas e comente:

- Como a densidade da t-Student se aproxima da normal com o aumento de n.
- O impacto do tamanho da amostra na variabilidade das médias.

5. Simule 1000 amostras de tamanho 20 de $X \sim N(0, 1)$:

(a) Calcule a soma dos quadrados de cada amostra.

(b) Compare o histograma da soma dos quadrados com a densidade teórica de uma distribuição qui-quadrado com 20 graus de liberdade.

(c) Interprete os resultados e discuta as diferenças.

6. Simule 5000 amostras de tamanho 30 de uma variável $X \sim N(\mu = 10, \sigma = 4)$:

(a) Calcule a média de cada amostra.

(b) Plote o histograma das médias amostrais e sobreponha uma curva normal com média $\mu = 10$ e desvio padrão $\sigma = 4/\sqrt{30}$.

(c) Explique como o Teorema do Limite Central justifica os resultados.

7. Considere duas variáveis $X_1 \sim N(0,1)$ e $X_2 = 0.5X_1 + Z$, onde $Z \sim N(0,1)$ é independente de X_1.

(a) Simule 5000 pares (X_1, X_2).

(b) Calcule a soma $S = X_1 + X_2$.

(c) Plote o histograma de S.

8. Simule 1000 amostras de tamanho 10 de $X \sim N(0,1)$. Para cada amostra, calcule:

(a) A média $\bar{X}$,

(b) A variância S^2.

(c) Construa a estatística:

$T = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}$

e compare o histograma de T com a densidade de uma distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

9. Considere a variável $X \sim N(0,1)$. Simule 1000 amostras de tamanho $n = 10$. Para cada amostra, realize as seguintes etapas:

(a) Calcule a variância amostral $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}}{n-1}$.

(b) Construa a estatística qui-quadrado:

$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$,

onde $\sigma^2 = 1$ é a variância populacional de X.

(c) Construa o histograma dos valores de Q e compare com a densidade teórica de uma distribuição $\chi^2(n-1)$.

(d) Verifique a média e a variância empíricas de Q e compare com os valores teóricos da distribuição $\chi^2(n-1)$, dados por:

$E(Q) = n - 1, \quad \mathrm{Var}(Q) = 2(n-1).$

Chapter 22

Exercícios extra

1. Usando o R e fixando a semente em 123, simule 1000 lançamentos de uma moeda com probabilidade de 0.5 de sair cara. Conte o número de caras em cada lançamento e plote um histograma dos resultados.

2. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 5000 observações de uma variável aleatória binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.3$. Calcule a média e a variância das observações geradas.

3. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 2300 observações de uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Calcule a média e o desvio padrão das observações geradas.

4. Em um processo de qualidade, considere uma variável aleatória X que representa o número de produtos defeituosos em um lote de 50 produtos, onde a probabilidade de um produto ser defeituoso é 0.1. Usando o R e fixando a semente em 123 gere uma amostra aleatória de 10000 observações de X. Conte a frequência de lotes com exatamente 5 produtos defeituosos. Calcule a proporção de lotes com exatamente 5 produtos defeituosos e compare o valor obtido com a probabilidade $P(X = 5)$, onde $X \sim \text{Binomial}(50, 0.1)$.

5. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 5000 observações de uma variável aleatória X binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 0.7$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(X \leq 10)$ e compare com o valor teórico.

6. Usando o R e fixando a semente em 543, gere uma amostra aleatória de 2400 observações de uma variável aleatória Y de Poisson com parâmetro $\lambda = 6$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(Y > 5)$ e compare com o valor teórico.

7. Usando o R e fixando a semente em 345, gere uma amostra aleatória de 3450 observações de uma variável aleatória Z uniforme no intervalo $[0, 1]$. Use a função de distribuição empírica para estimar $P(Z \leq 0.5)$ e compare com o valor teórico.

8. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 3467 observações de uma variável aleatória W normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(W > 1)$ e compare com o valor teórico.

9. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 1234 observações de uma variável aleatória V exponencial com parâmetro $\lambda = 0.5$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(V > 2)$ e compare com o valor teórico.

10. O número de acertos num alvo em 30 tentativas onde a probabilidade de acerto é 0.4, é modelado por uma variável aleatória X com distruibuição Binomial de parâmetros $n = 30$ e $p = 0.4$. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra de dimensão $n = 700$ dessa variável. Para essa amostra:

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Calcule a função de distribuição empírica e com base nessa função estime a probabilidade do número de acertos no alvo, em 30 tentativas, ser maior que 15. Calcule ainda o valor teórico dessa probabilidade.

11. Usando o R e fixando a semente em 123, gere amostras de tamanho crescente $n = 100, 1000, 10000, 100000$ de uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$. Para cada tamanho de amostra, calcule a média amostral e compare-a com o valor esperado teórico. Observe e comente a convergência das médias amostrais.

12. Usando o R e fixando a semente em 123, gere amostras de tamanho crescente $n = 100, 1000, 10000, 100000$ de uma variável aleatória W com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Para cada tamanho de amostra, calcule a média amostral e compare-a com o valor esperado teórico. Observe e comente a convergência das médias amostrais.

13. Um grupo de estudantes de Estatística está realizando uma pesquisa para avaliar o grau de satisfação dos alunos com um novo curso oferecido pela universidade. Cada estudante responde a uma pergunta onde pode indicar se está satisfeito ou insatisfeito com o curso. A probabilidade de um estudante estar satisfeito é de 0.75.

- Usando o R e fixando a semente em 42, simule amostras de tamanho crescente $n = 100, 500, 1000, 5000, 10000$ de uma variável aleatória X com distribuição binomial, onde X representa o número de estudantes satisfeitos. Para cada tamanho de amostra, calcule a proporção de estudantes satisfeitos e compare-a com a probabilidade teórica de satisfação (0.75).

14. Usando o R e fixando a semente em 1058, gere 9060 amostras de dimensão 9 de uma população, $X \sim \text{Binomial}(41, 0.81)$. Calcule a média de cada uma dessas amostras, obtendo uma amostra de médias. Calcule ainda o valor esperado da distribuição teórica de X e compare com a média da amostra de médias.

15. Em um hospital, o tempo de atendimento de pacientes segue uma distribuição exponencial com média de 30 minutos. Um pesquisador deseja estimar o tempo médio de atendimento coletando amostras de diferentes tamanhos.

- Usando o R e fixando a semente em 456, simule 1000 amostras de tamanho 50, 100 e 1000 do tempo de atendimento. Para cada tamanho de amostra, calcule a média de cada amostra e plote o histograma das médias amostrais para cada tamanho. Compare essas distribuições com a distribuição normal com média $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$ e comente sobre a aplicação do Teorema do Limite Central.

16. O tempo de espera (em minutos) para o atendimento no setor de informações de um banco é modelado por uma variável aleatória X com distribuição Uniforme$(a = 5, b = 20)$. Usando o R e fixando a semente em 1430, gere 8000 amostras de dimensão $n = 100$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(d) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

17. O tempo de atendimento (em minutos), de doentes graves num determinado hospital, é modelado por uma variável aleatória X com distribuição Exponencial($\lambda = 0.21$). Usando o R e fixando a semente em 1580, gere 1234 amostras de dimensão $n = 50$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

18. A altura (em centímetros) dos alunos de uma escola é modelada por uma variável aleatória X com distribuição Normal($\mu = 170, \sigma = 10$). Usando o R e fixando a semente em 678, gere 9876 amostras de dimensão $n = 80$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

(f) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média padronizada

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$$

e sobreponha no gráfico com uma curva com distribuição Normal com valor esperado 0 e desvio padrão 1.

19. A chegada de clientes em uma loja durante 1 hora, assumindo uma taxa média de 20 clientes por hora pode ser modelada por uma variável aleatória X com distribuição de Poisson($\lambda = 20$). Usando o R e fixando a semente em 1222, gere 8050 amostras de dimensão 30 de X.

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

(f) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média padronizada

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$$

e sobreponha no gráfico com uma curva com distribuição Normal com valor esperado 0 e desvio padrão 1.

Chapter 23

Método da transformada inversa

O **método da transformada inversa** é uma técnica fundamental na geração de variáveis aleatórias com distribuições específicas. Embora o R ofereça funções prontas para gerar números aleatórios de diversas distribuições, compreender e aplicar o método da transformada inversa é essencial em situações como:

- **Distribuições Não Implementadas**: Quando se lida com distribuições que não possuem funções dedicadas no R, o método da transformada inversa permite gerar amostras dessas distribuições a partir de números uniformemente distribuídos.
- **Simulações Personalizadas**: Em simulações que requerem distribuições específicas ou personalizadas, o método oferece flexibilidade para definir e gerar variáveis aleatórias conforme necessário.
- **Fins Educacionais**: Para estudantes e profissionais que desejam aprofundar-se nos fundamentos da geração de variáveis aleatórias, implementar o método manualmente proporciona uma compreensão mais profunda dos processos subjacentes.

Este método é baseado no seguinte resultado.

Seja $U \sim U(0,1)$. Para qualquer função de distribuição F, a variável aleatória X definida por

$$X = F^{-1}(U)$$

possui distribuição F, onde

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$$

é a inversa generalizada de F. Além disso, segue que $F(X) \sim U(0,1)$.

Este resultado afirma que podemos simular um valor de uma variável aleatória X (X com distribuição F) aplicando o seguinte algoritmo:

```
Algoritmo: método da transformação inversa
Entrada: invGF() # inversa generalizada de F
  1 Gere um número aleatório u
  2 Calcule x <- invGF(u)
Saída: x
```

É simples verificar o seguinte resultado acima. Em geral, observe que

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Logo $X \sim F$. Em particular, o método também é válido no caso de variáveis aleatórias discretas.

23.1 Variável aleatória discreta

Suponha que queremos gerar o valor de uma variável aleatória discreta X com função massa de probabilidade $P(X = x_i) = p_i$, $i = 0, 1, ...$, $\sum_i p_i = 1$. Para isso, basta gerar um número aleatório $U \sim U(0, 1)$ e considerar:

$$X = \begin{cases} x_0, & \text{se} \quad U < p_0 \\ x_1, & \text{se} \quad p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ x_i, & \text{se} \quad \sum_{j=0}^{i-1} p_j \leq U < \sum_{j=0}^{i} p_j \\ \vdots & \end{cases}$$

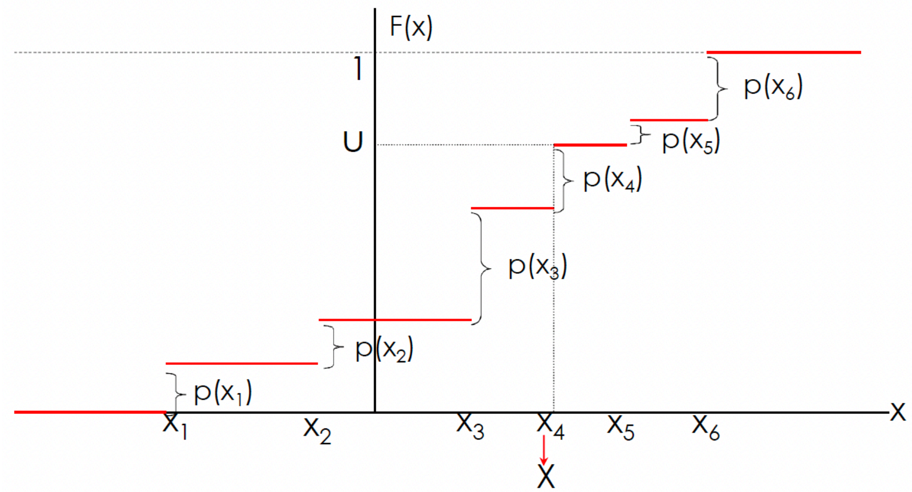
Como, para $0 < a < b < 1$, $P(a \leq U < b) = b - a$, temos que

$$P(X = x_i) = P\left(\sum_{j=0}^{i-1} p_j \leq U < \sum_{j=0}^{i} p_j\right) = p_{i.}$$

Se os x_i, $i \geq 0$, estão ordenados $x_0 < x_1 < \cdots$ e se denotarmos por F a função de distribuição de X, então $F(x_k) = \sum_{i=0}^{k} p_i$ e assim

$$X = x_i \quad \text{se} \quad F(x_{i-1}) \leq U < F(x_i)$$

Em outras palavras, depois de gerar um número aleatório U nós determinamos o valor de X encontrando o intervalo $[F(x_{i-1}), F(x_i)]$ no qual U pertence (ou, equivalentemente, encontrando a inversa de $F(U)$).



Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória discreta tal que $p_1 = 0.20$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.25$, $p_4 = 0.40$ onde $p_j = P(X = j)$. Gere 1000 valores dessa variável aleatória.

Para a variável aleatória X, a função de distribuição acumulada é dada pela soma cumulativa das probabilidades:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ p_1, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ p_1 + p_2, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Com os valores fornecidos:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 0.20, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.35, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.60, & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Gerar um número aleatório uniforme U no intervalo [0,1]. Para determinar o valor de X correspondente a U:

- Se $U < 0.20$, então $X = 1$
- Se $0.20 \leq U < 0.35$, então $X = 2$
- Se $0.35 \leq U < 0.60$, então $X = 3$

- Se $0.60 \leq U \leq 1$, então $X = 4$

Exemplo 2: Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os valores: $1, 2, \ldots, 10$ com probabilidade $1/10$ para $x = 1, 2, \ldots, 10$. Gerar 5000 valores dessa variável aleatória. Representar graficamente e determinar: média, desvio padrão e mediana.

```
gerar_va_inversa <- function(){
  # Gerar número aleatório entre 0 e 1
  u <- runif(1,0,1)
  p <- 1/10 # primeira probabilidade P(X=1)
  F <- p # inicializar a função de distribuição acumulada
  X <- 1 # inicializar o valor da va X

  while(u > F){
    X <- X+1
    F <- F+p
  }
  return(X)
}
valores <- replicate(5000,gerar_va_inversa())
hist(valores, freq = FALSE)
```

```
mean(valores)
```

```
## [1] 5.4564
```

```
sd(valores)
```

```
## [1] 2.859184
```

```
median(valores)
```

```
## [1] 5
```

Exemplo 3: Geração de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. A variável aleatória X é de Bernoulli com parâmetro p se

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - p, & \text{se} \quad x = 0 \\ p, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Para gerar uma $Bernoulli(p)$ podemos usar o seguinte algoritmo que é equivalente ao método da transformada inversa

1. Gerar um número aleatório U;
2. Se $U \leq p$ então $X = 1$ senão $X = 0$.

```
# Gerando uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli(p)
gerar_bernoulli_inversa <- function(p){
  U <- runif(1)
  if (U <= p){
    X <- 1
  } else {
    X <- 0
  }
  return(X)
}

valores <- replicate(100,gerar_bernoulli_inversa(0.8))
sum(valores)/100
```

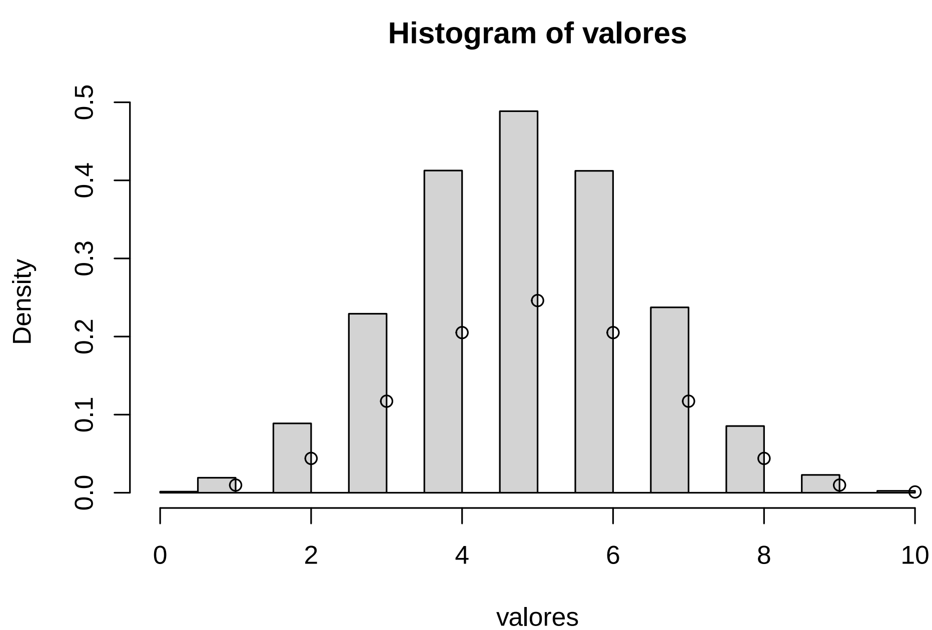
```
## [1] 0.78
```

Exemplo 4: Gerar uma variável aleatória com distribuição $Binomial(n, p)$. Aqui podemos usar o facto de que se $X_1, X_2, ..., X_n$ são Bernoullis i.i.d., então

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

é uma $Binomial(n, p)$.

```
# Gerando uma variável aleatória com distribuição Binomial(n,p)

gerar_binomial_inversa <- function(n,p){
  X <- sum(replicate(n,gerar_bernoulli_inversa(p)))
  return(X)
}

valores <- replicate(10000,gerar_binomial_inversa(10,0.5))
hist(valores, freq = FALSE)
points(1:10, dbinom(1:10,10,0.5))
```



Exemplo 5: Geração de uma variável aleatória com distribuição $Geomtrica(p)$. Seja $X \sim Geometrica(p)$. Lembre que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

e que

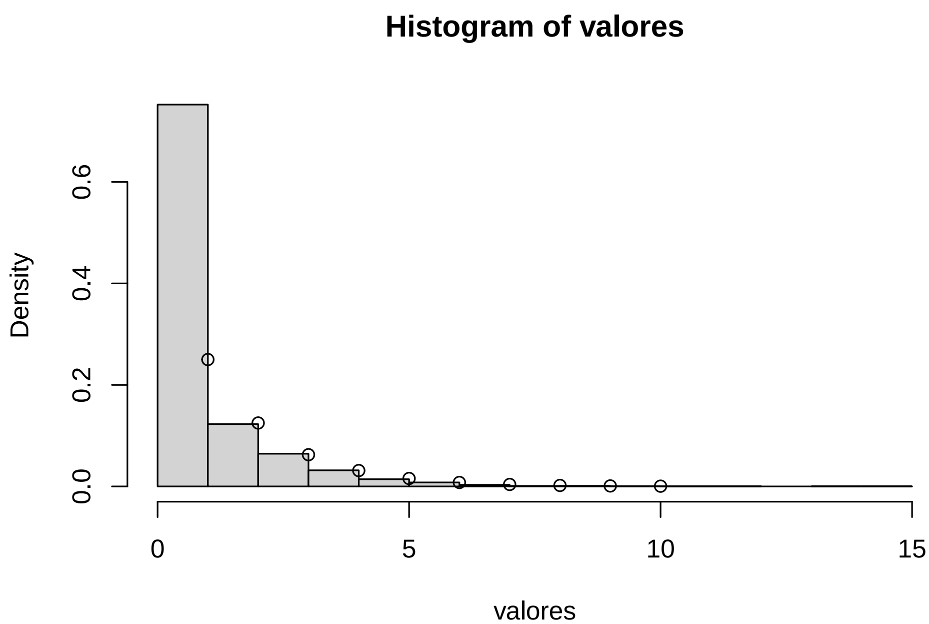
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 - (1-p)^x, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

O seguinte algoritmo é equivalente ao método da transformada inversa:

1. Gerar um número aleatório U;
2. Fazer $X = \lfloor ln(1-U)/ln(1-p) \rfloor$

onde $\lfloor\rfloor$ = maior inteiro.

```
# Gerar uma variável aleatória com distribuição Geométrica(p)

gerar_geometrica_inversa <- function(p){
  U <- runif(1)
  X <- ceiling(log(1-U)/log(1-p))-1
  return(X)
}

valores <- replicate(10000, gerar_geometrica_inversa(0.5))
hist(valores, freq = FALSE)
points(1:10, dgeom(1:10,0.5))
```



Exemplo 6: Geração de uma variável aleatória com distribuição de Poisson. A variável aleatória X é de Poisson com média λ se

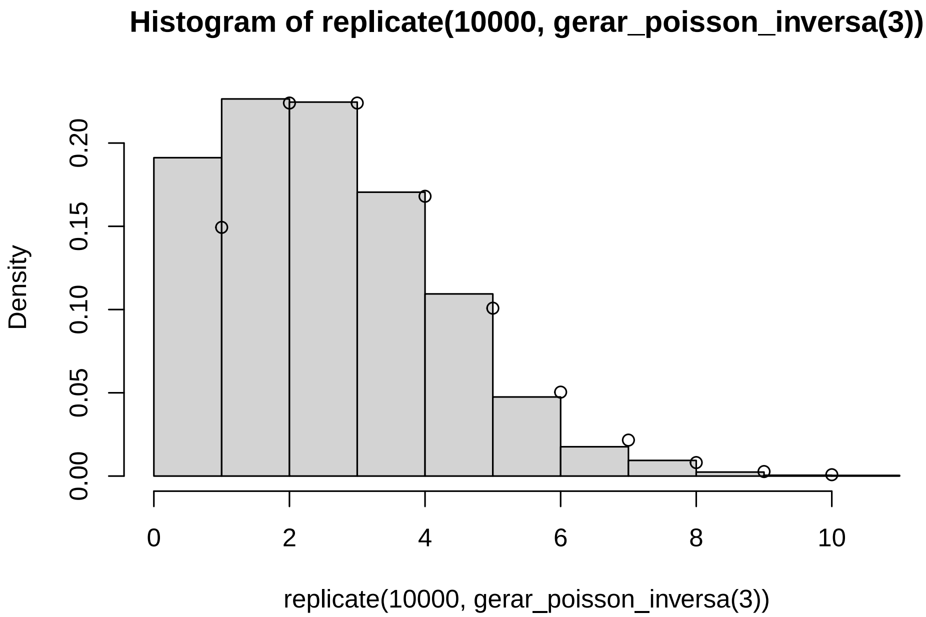
$$p_i = P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, ...$$

A chave para usar o método da transformada inversa para gerar uma tal variável aleatória é dada pela seguinte identidade:

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i, \quad i \geq 0.$$

Ao utilizar a recursão acima para calcular as probabilidades de Poisson quando elas são necessárias, o algoritmo da transformada inversa para gerar uma variável aleatória de Poisson com média λ pode ser expresso da seguinte forma.

```r
# Gerando uma va com distribuição de Poisson

lambda <- 3  # exemplo com lambda = 3

# Função para gerar uma variável aleatória de Poisson usando o método da transformada
gerar_poisson_inversa <- function(lambda) {
  U <- runif(1)  # Gerar um número aleatório uniforme entre 0 e 1
  p <- exp(-lambda)  # Inicializar a primeira probabilidade P(X=0)
  F <- p  # Inicializar a função de distribuição acumulada (CDF)
  X <- 0  # Inicializar o valor da variável aleatória

  # Acumular probabilidades até que a CDF exceda U
  while (U > F) {
    X <- X + 1
    p <- p * lambda / X  # Atualizar a probabilidade P(X=k)
    F <- F + p  # Atualizar a CDF
  }

  return(X)
}

hist(replicate(10000,gerar_poisson_inversa(3)),freq = FALSE)
points(1:10,dpois(1:10,3))
```



23.2 Exercícios

1. Considere uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$P(X = 1) = 0.2, \quad P(X = 2) = 0.5, \quad P(X = 3) = 0.3$$

Use o método da transformada inversa para gerar 1000 valores de X em R.

2. Uma moeda viciada é tal que a probabilidade de cara (C) é 0.7 e a probabilidade de coroa (K) é 0.3.

Use o método da transformada inversa para simular 500 lançamentos desta moeda.

3. Considere uma variável aleatória X com a seguinte distribuição:

$$P(X = 1) = 0.1, \quad P(X = 2) = 0.3, \quad P(X = 3) = 0.4, \quad P(X = 4) = 0.2$$

Gere 2000 amostras de X usando o método da transformada inversa e compare a distribuição empírica com a teórica.

4. Considere uma variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro $p = 0.2$. Isso significa que:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Fixando a semente em 1234, gere 1000 valores de X usando o método da transformada inversa.

Indique a proporção de valores simulados que são superiores à soma da média com o desvio padrão amostrais, de entre os que são superiores à respetiva média amostral. Apresente o resultado com 4 casas decimais. Note que você terá que calcular a função de distribuição acumulada para X.

23.3 Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória X tem densidade $f(x) = 2x$, para $0 < x < 1$, e 0, caso contrário. Suponha que queremos simular observações de X. Nesta secção, apresentaremos um método simples e flexível para simulação de uma distribuição contínua.

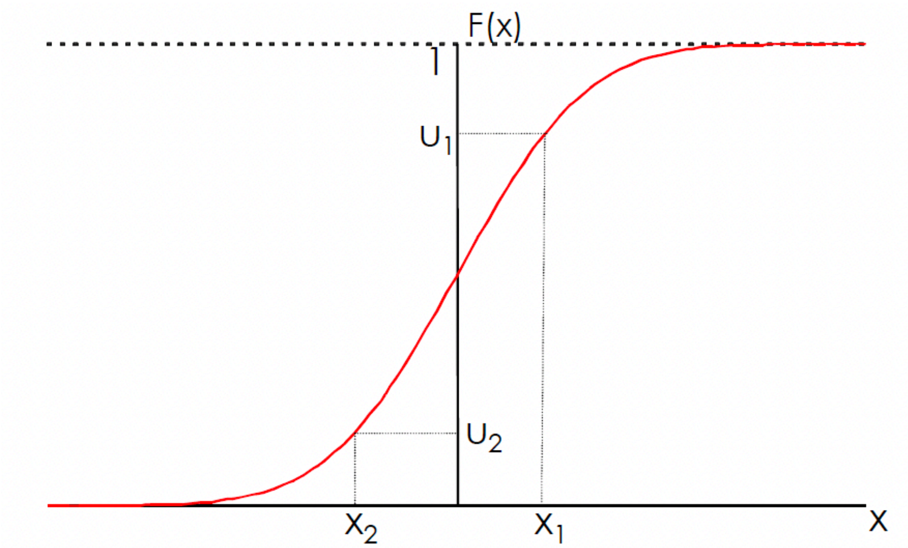
Proposição: Suponha que X é uma variável aleatória com função de distribuição F, onde F é invertível com função inversa F^{-1}. Seja U uma variável aleatória uniforme $(0, 1)$. Então a distribuição de $F^{-1}(U)$ é igual a distribuição de X, ou seja, a variável aleatória X definida por $X = F^{-1}(U)$ tem distribuição F.

A prova desta proposição é fácil e rápida. Precisamos mostrar que $F^{-1}(U)$ tem a mesma distribuição que X. Assim,

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= P(F^{-1}(U) \leq x) = P(FF^{-1}(U) \leq F(x)) \\
&= P(U \leq F(x)) = P(0 \leq U \leq F(x)) \\
&= F(x) - 0 \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do facto de que $U \sim U(0, 1)$ e $0 \leq F(x) \leq 1$.

Esta proposição mostra que se pode gerar uma variável aleatória X de uma função de distribuição contínua F, gerando um número aleatório U e tomando $X = F^{-1}(U)$.

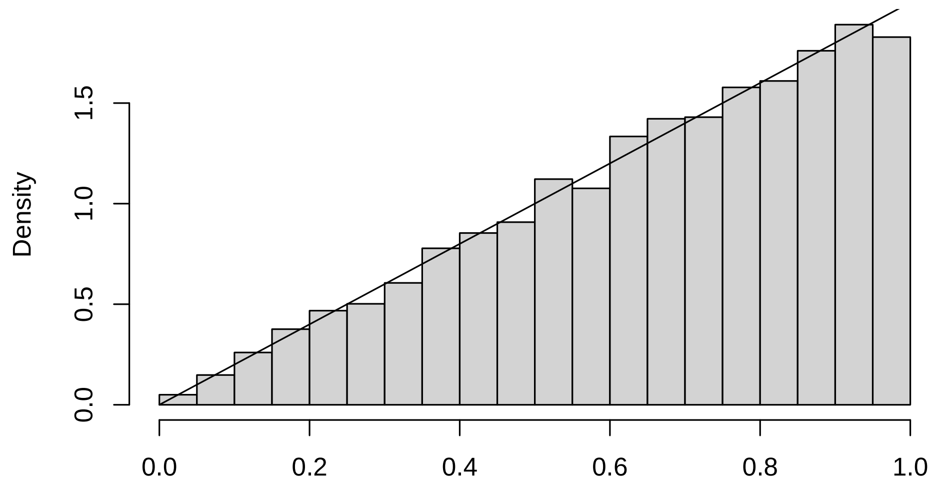


Exemplo 1: Considere nossa varíavel aleatória X com densidade $f(x) = 2x$. A função de distribuição de X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2, \quad \text{para} \quad 0 < x < 1.$$

A função $F(x) = x^2$ é invertível no intervalo $(0,1)$ e $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$. O método da transformada inversa diz que se $U \sim U(0,1)$, então $F^{-1}(U) = \sqrt{U}$ tem a mesma distribuição que X. Portanto, para simular X, basta gerar $\sqrt{U}$.

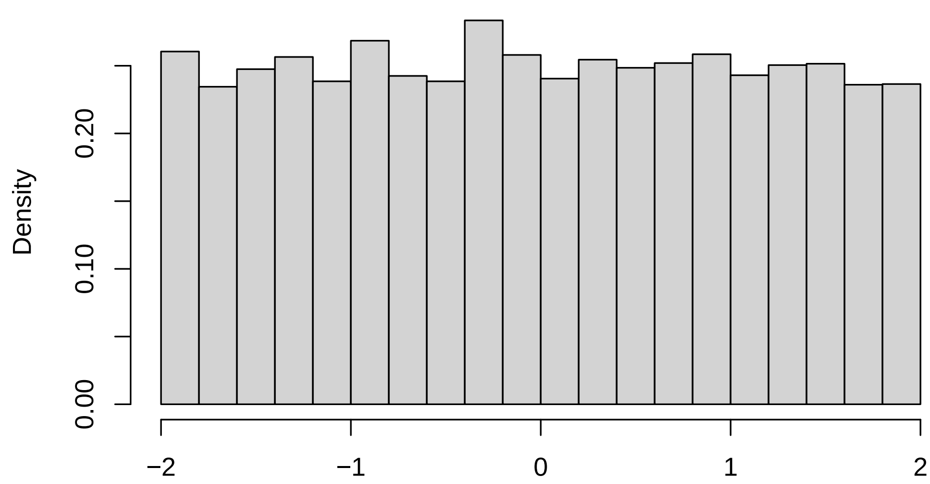
```
n <- 10000
set.seed(123)
simlist <- sqrt(runif(n))
hist(simlist, prob=T, main="", xlab="")
curve(2*x, 0,1, add=T)
```



Exemplo 2: Geração de uma variável aleatória $Uniforme(a, b)$. A geração é feita através de

$$X = a + (b - a)U.$$

```
# Geração de uma va uniforme(-2,2)
a <- -2
b <- 2
n <- 10000
set.seed(123)
simlist <- a+(b-a)*runif(n)
hist(simlist, prob=T, main="",xlab="")
```



Exemplo 3: Geração de uma variável aleatória exponencial. Seja X uma variável aleatória exponencial com taxa 1, então sua função de distribuição é

dada por

$$F(x) = 1 - e^x.$$

Como $0 \leq F(x) \leq 1$, tomando $F(x) = u$, onde $u \sim U(0,1)$ tem-se:

$$u = F(x) = 1 - e^x$$

ou

$$1 - u = e^{-x}$$

ou, aplicando o logaritmo

$$x = -ln(1 - u).$$

Daí, pode-se gerar uma exponencial com parâmetro 1 gerando um número aleatório U e em seguida fazendo

$$X = F^{-1}(U) = -ln(1 - U).$$

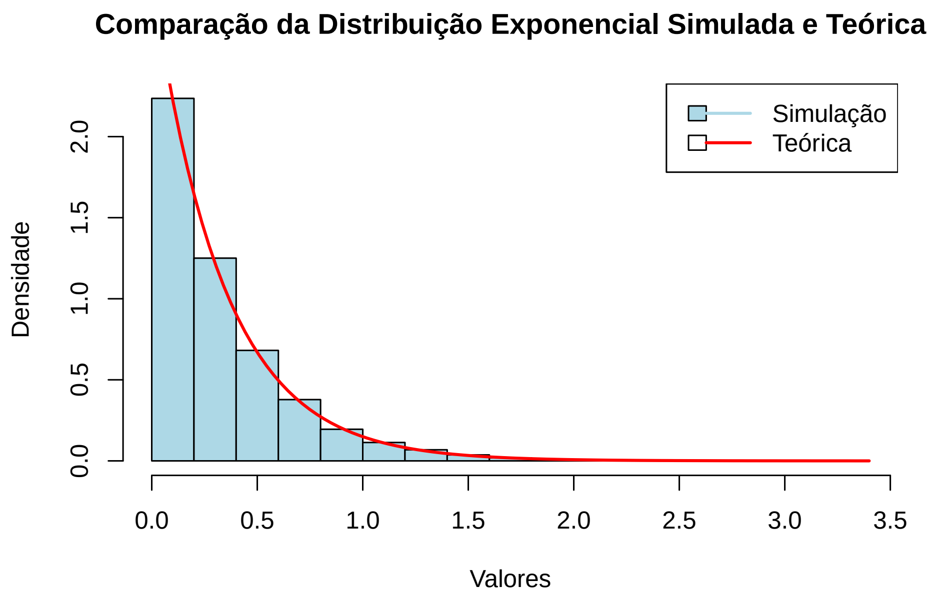
Uma pequena economia de tempo pode ser obtida ao notar que $1-U$ também é uniforme em $(0,1)$, e assim, $-ln(1-U)$ tem a mesma distribuição que $-ln(U)$. Isto é, o logaritmo negativo de um número aleatório é exponencialmente distribuído com taxa 1.

Além disso, note que se X é uma exponencial com média 1, então para qualquer constante c, cX é uma exponencial com média c. Assim, uma variável aleatória exponencial X com taxa λ (média $\frac{1}{\lambda}$) pode ser gerada através da geração de um número aleatório U e fazendo

$$X = -\frac{1}{\lambda}ln(U).$$

```r
# Definir a sequência de valores x
x <- seq(0,3, by = 0.02)

# Definir o parâmetro lambda da distribuição exponencial
lambda <- 3

# Número de simulação
n <- 10000

# Simular valores de uma distribuição exponencial
set.seed(123)
simlist <- -log(runif(n))/lambda

# Plotar o histograma da simulação com a densidade de probabilidade
hist(simlist, probability = TRUE, main = "Comparação da Distribuição Exponencial Simulada e Teóri
     xlab = "Valores", ylab = "Densidade", col = "lightblue", border = "black")

# Adicionar a curva de densidade teórica
```

```
curve(dexp(x, rate = lambda), add = TRUE, col = "red", lwd = 2)

# Adicionar uma legenda
legend("topright", legend = c("Simulação", "Teórica"), col = c("lightblue", "red"), lwd
```



23.4 Exercícios

1. Dada uma variável aleatória X com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 2$, use o Método da Transformada Inversa para gerar 1000 valores de X e visualize a distribuição com um histograma. Lembre que $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ e mostre que $X = -\frac{ln(1-u)}{\lambda}$.

2. Use o Método da Transformada Inversa para gerar 500 valores de uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo $(2, 5)$. Lembre que a função de distribuição de uma uniforme $U(a, b)$ é $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Mostre que $X = a + u(b - a)$.

3. Dada uma variável aleatória X com distribuição Cauchy padrão (com mediana 0 e escala 1), use o Método da Transformada Inversa para gerar 1000 valores de X e visualizar sua distribuição. Lembre que $F_X(x) = \frac{1}{\pi} arctan(x) + \frac{1}{2}$. Mostre que $X = tan[\pi(u - 0.5)]$.

4.: Seja X uma variável aleatória com distribuição $W(\alpha, \beta)$. Assim a f.d.p de X é

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

A função de distribuição de X é:

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Mostre que $X = \beta[-ln(U)]^{1/\alpha}$. Gere 10000 valores de uma $W(2,3)$. Represente graficamente a distribuição.

5. Obtenha o gerador de números aleatórios das distribuições especificadas abaixo usando o método da transformada inversa

- $F(x) = 1 - (x-1)^2, \quad 0 < x < 1.$
- $F(x) = x^\theta, \quad 0 < x < 1, \theta > 1.$
- $F(x) = 1 - exp(-x^2/2\tau^2), \quad x > 0, \tau > 0.$
- $f(x) = \frac{1}{2} sin(x), \quad 0 < x < \pi.$
- $f(x) = \frac{sec^2(x)}{\sqrt{3}}, \quad 0 < x < \pi/3.$

Soluções

- $F^{-1}(u) = 1 - \sqrt{1-u}$ ou apenas $F^{-1}(u) = 1 - \sqrt{u}$ por simetria.
- $F^{-1}(u) = u^{1/\theta}$.
- $F^{-1}(u) = \sqrt{-2\tau \cdot \log(1-u)}$.
- $F(x) = \frac{1-\cos(x)}{2}$ e $F^{-1}(u) = arcos(1-2u)$.
- $F(x) = \frac{tan(x)}{\sqrt{3}}$ e $F^{-1}(u) = arctan(u\sqrt{3})$.

Quando usar o método da transformada inversa?

Sempre que possível.

- O método funciona quando $F^{-1}(u)$ existe.
- Existem distribuições onde $F(x)$ é não inversão analítica.
- Existem distribuições onde $F(x)$ não existe (apenas $f(x)$).

Alternativas

- Pode-se aproximar numericamente $F(x)$ e/ou $F^{-1}(u)$ para gerador de número aleatório.
- Pode-se considerar métodos não baseados em $F^{-1}(u)$.

Chapter 24

Método da aceitação-rejeição

Exercícios

1. Gere variáveis aleatórias com distribuição exponencial $Exp(\lambda = 1)$ usando o método da aceitação-rejeição. Use uma função de proposta uniforme no intervalo [0, 5] e visualize o histograma das amostras geradas.

2. Gere variáveis aleatórias com distribuição normal $N(0, 1)$ usando uma distribuição proposta Cauchy padrão $C(0, 1)$. Gere 1000 amostras e compare com a densidade da distribuição normal padrão.

3. Use o método da aceitação-rejeição para gerar amostras de uma variável Beta $B(2, 3)$. Use uma distribuição proposta uniforme $U(0, 1)$.

4. Use o método de aceitação-rejeição para gerar variáveis aleatórias $X \sim \Gamma(3, 2)$ usando uma distribuição proposta exponencial $Exp(2)$.

5. Use o método da aceitação-rejeição para gerar variáveis aleatórias Log-Normais $X \sim \text{LogNormal}(0, 1)$ usando uma distribuição proposta normal $N(0, 1)$.

6. Use o método da aceitação-rejeição para gerar variáveis Weibull $W(1, 2)$ usando uma distribuição proposta exponencial.

Chapter 25

Teoremas limites

Os teoremas limites clássicos de probabilidade se referem à sequencias de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Se $X_1, X_2, \ldots$ é uma sequência de variáveis aleatórias com média comum $E(X) = \mu < \infty$, e seja a v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

A **Lei dos Grandes Números** informa que a sequência das médias S_n/n converge para μ, quando $n \to +\infty$. Existem duas versões da Lei, a *fraca* e a *forte*.

25.1 Lei fraca dos grandes números

A Lei Fraca dos Grandes Números é um resultado em Teoria da Probabilidade também conhecido como Teorema de Bernoulli's. De acordo com a lei, a média dos resultados obtidos por um grande número de tentativas é próximo a média da população.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas e independentes (i.i.d.), cada uma possuindo média μ e variância σ^2.

Chapter 26

Usando números aleatórios para o cálculo de Integrais

Seja $g(x)$ uma função e suponha que se quer calcular θ onde:

$$\theta = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Um método eficiente para realizar esse cálculo é o *método de Monte Carlo*, que utiliza números aleatórios para aproximar o valor do integral. Vamos ver como isso funciona em detalhes.

Aproximação do Integral Usando Variáveis Aleatórias

Considere U, variável aleatória que segue uma distribuição uniforme no intervalo (0,1). Sabemos que o valor esperado de $g(U)$, ou seja, $E[g(U)]$, pode ser usado para calcular o integral de $g(x)$ no intervalo (0,1). Isto é, podemos reescrever:

$$\theta = \int_0^1 g(x)\,dx = E[g(U)].$$

Agora, se $U_1, \dots, U_k$ são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo (0,1), então as variáveis aleatórias $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_k)$ também são independentes e identicamente distribuídas, com média θ. Portanto, pela Lei Forte dos Grandes Números, segue que, com probabilidade 1,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \longrightarrow E[g(U)] = \theta, \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Em outras palavras, à medida que o número k de variáveis aleatórias U_i aumenta, a média das avaliações de g nestes U_i's se aproxima do valor do integral θ.

Portanto, para aproximar θ, podemos gerar uma grande quantidade de números aleatórios $u_1, u_2, \dots, u_k$ no intervalo (0,1) e calcular a média dos valores de $g(u_i)$:

$$\theta \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} g(u_i).$$

Esta abordagem é o que chamamos de *método de Monte Carlo* para o cálculo de integrais.

26.1 Cálculo de $\int_a^b g(x)\, dx$

Agora, suponha que queremos calcular a integral de $g(x)$ em um intervalo diferente, digamos [a, b]. Podemos resolver este problema realizando uma substituição de variáveis.

Definimos uma nova variável y como

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad \text{de modo que} \quad y = \frac{dx}{(b-a)}.$$

Isso transforma o integral original em:

$$\theta = \int_0^1 g(a + [b-a]y)(b-a)\, dy = \int_0^1 h(y)\, dy,$$

onde $h(y) = (b-a)g(a + [b-a]y)$. Assim, podemos usar novamente o método de Monte Carlo para aproximar essa integral. Basta gerar números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo (0,1), calcular a função $h(y)$ nesses pontos, e tomar a média. Ou seja, podemos aproximar:

$$\theta \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} h(y_i),$$

onde $y_1, y_2, \dots, y_k$ são números aleatórios uniformemente distribuídos em (0,1), e $h(y) = (b-a)g(a + (b-a)y)$.

Exemplo prático: Vamos considerar um exemplo simples para ilustrar o uso do método de Monte Carlo. Suponha que queremos calcular a integral de $g(x) = x^2$ no intervalo [0, 1]:

$$\theta = \int_0^1 x^2\, dx.$$

Sabemos que a resposta exata é $\theta = \frac{1}{3}$, mas vamos usar o método de Monte Carlo para aproximar este valor.

Geramos $n = 10.000$ números aleatórios u_i no intervalo [0, 1], calculamos $g(u_i) = u_i^2$ para cada um desses valores e tomamos a média:

$$\theta \approx \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} u_i^2.$$

Ao rodar este processo no R, esperamos obter uma aproximação próxima de $\frac{1}{3}$.

```
# Função a ser integrada
f <- function(x) x^2
# Quantidade de números aleatórios
n <- 10000
# Números aleatórios no intervalo [0,1]
u <- runif(n = n, min = 0, max = 1)
# Valor aproximado do integral
sum(f(u))/n
```

```
## [1] 0.3293839
```

```
# Solução exata do integral
integrate(f, lower = 0, upper = 1)
```

```
## 0.3333333 with absolute error < 3.7e-15
```

Vamos calcular agora o

$$\int_1^2 x^2\,dx.$$

```
# Limites de integração
a <- 1
b <- 2
# Função a ser integrada
f <- function(x) x^2
# Quantidade de números aleatórios
n <- 10000
# Números aleatórios no intervalo [0,1]
u <- runif(n = n, min = 0, max = 1)
# Valor aproximado do integral
sum(f(a+(b-a)*u)*(b-a))/n
```

```
## [1] 2.33584
```

```
# Solução exata do integral
integrate(f, lower = 1, upper = 2)
```

```
## 2.333333 with absolute error < 2.6e-14
```

```r
# ou
u1 <- runif(n, a, b)
(b-a)*mean(f(u1))
```

```
## [1] 2.311123
```

26.2 Cálculo de $\int_0^\infty g(x)\,dx$

Se o interesse é calcular $\int_0^\infty g(x)\,dx$, pode-se aplicar a substituição

$$y = \frac{1}{(x+1)}, \quad \text{de modo que} \quad dy = \frac{-dx}{(x+1)^2} = -y^2\,dx,$$

para obter a identidade:

$$\theta = \int_0^1 h(y)\,dy,$$

onde $h(y) = \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}$.

26.3 Cálculo de integrais multidimensionais

O método também pode ser utilizado para o caso de integrais multidimensionais. Suponha que g é uma função com argumento n-dimensional e se quer calcular:

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n.$$

Tem-se que θ pode ser expresso como $\theta = E[g(U_1, \dots, U_n)]$, onde $U_1, \dots, U_n$ são variáveis aleatórias independentes uniformes no intervalo (0,1). Portanto, para calcular θ é preciso gerar k cojuntos independentes, cada um consistindo de n variáveis uniformes (0,1) independentes:

$$\begin{gathered} U_1^1, \dots, U_n^1 \\ U_1^2, \dots, U_n^2 \\ \vdots \\ U_1^k, \dots, U_n^k. \end{gathered}$$

Assim, as variáveis $g(U_1^i, \dots, U_n^i)$, $i = 1, \dots, k$ são todas independentes e identicamente distribuídas com média μ. Pode-se estimar θ por $\sum_{i=1}^k g(U_1^i, \dots, U_n^i)/k$.

26.4 Exercícios

Use simulação para aproximar as seguintes integrais. Compare sua estimativa com a resposta exata, se conhecida.

1. $\int_0^1 exp(e^x)\,dx$.

2. $\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx$.

3. $\int_{-2}^2 e^{x+x^2}\,dx$.

4. $\int_0^{\pi/2} cos(x)\,dx$.

5. $\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}\,dx$.

6. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$.

7. $\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}\,dy\,dx$.

8. $\int_0^1 \int_0^1 x^2+y^2\,dx\,dy$.

Chapter 27

Distribuições univariadas no R

No R temos acesso as mais comuns distribuições univariadas. Todas as funções tem as seguintes formas:

Função	Descrição
pnome(...)	função de distribuição
dnome(...)	função de probabilidade ou densidade de probabilidade
qnome(...)	calcula o quantil correspondente a uma dada probabilidade
rnome(...)	retorna uma amostra aleatória da distribuição

o **nome** é uma abreviatura do nome usual da distribuição (`binom`, `geom`, `pois`, `unif`, `exp`, `norm`, ...).

27.1 Gerando uma variável aleatória com distribuição de Binomial

Distribuição de Bernoulli

- Uma experiência aleatória diz-se uma **prova de Bernoulli** se possuir apenas dois resultados possíveis: um sucesso, que ocorre com probabilidade p, e um insucesso que ocorre com probabilidade $1 - p$.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se sucesso} \\ 0, & \text{se insucesso} \end{cases}$$

- Função massa de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & \text{se} \quad x = 0, 1 \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}$$

- Notação: $X \sim Bernoulli(p)$
- $p = P(sucesso)$
- $E(X) = p$ e $V(X) = p(1-p)$

Exemplo: Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda não viciada e observar a face que fica voltada para cima. Sendo o objetivo verificar se sai "cara", defina-se a variável aleatória

$$X - \text{número de vezes, em 1 lançamento, que sai cara}$$

(a) Simule a situação descrita, determinando a percentagem de vezes em que saiu cara, para um número total de lançamentos: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$.

(b) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

```
# Parâmetro
p <- 0.5
# Número de lançamentos
n <- c(5,10,100,1000)
# Gerando amostra
amostra <- list()
percentagens <- c()
media <- c()
variancia <- c()
# Loop para criar listas
for (i in 1:length(n)) {
  amostra[[i]] <- rbinom(n[i], size=1, prob=p)
  percentagens[i] <- sum(amostra[[i]]/n[i])
  media[i] <- mean(amostra[[i]])
  variancia[i] <- var(amostra[[i]])
```

```
}
resultados <- data.frame(n,percentagens,media,variancia,comp_media = abs(media-p), comp_var = abs
resultados
```

```
##      n percentagens media variancia comp_media     comp_var
## 1    5        0.200 0.200 0.2000000      0.300 0.0500000000
## 2   10        0.200 0.200 0.1777778      0.300 0.0722222222
## 3  100        0.560 0.560 0.2488889      0.060 0.0011111111
## 4 1000        0.525 0.525 0.2496246      0.025 0.0003753754
```

Distribuição Binomial

- Utiliza-se para contar, numa sequência de n provas de Bernoulli, o número de sucessos observados.
- $X-$ número de sucessos em n provas de Bernoulli
- Notação: $X \sim Binomial(n, p)$
- Função massa de probabilidade de X

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}$$

- n e p são os parâmetros caracterizadores da distribuição.
- $E(X) = np$ e $V(X) = np(1-p)$

27.1.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 20, p = 0.1)$.

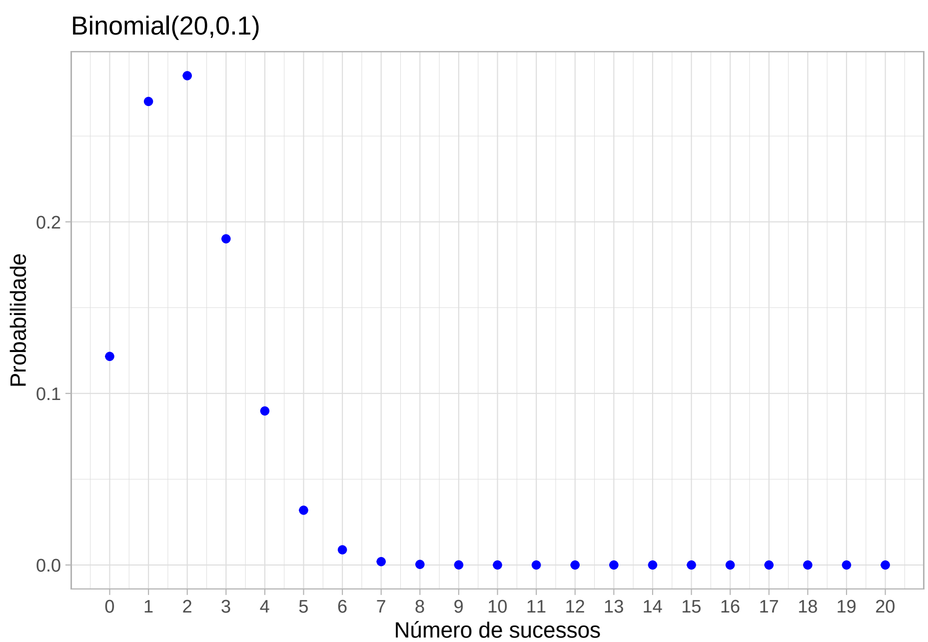
$P(X = 4) \rightarrow$ `dbinom(x=4, size=20, prob=0.1)` $= 0.08977883$

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `pbinom(q=4, size=20, prob=0.1)` $= 0.9568255$

$P(X > 4) \rightarrow$ `pbinom(q=4, size=20, prob=0.1, lower.tail=FALSE)` $=$ 0.0431745

27.1.2 Função massa de probabilidade (teórica)

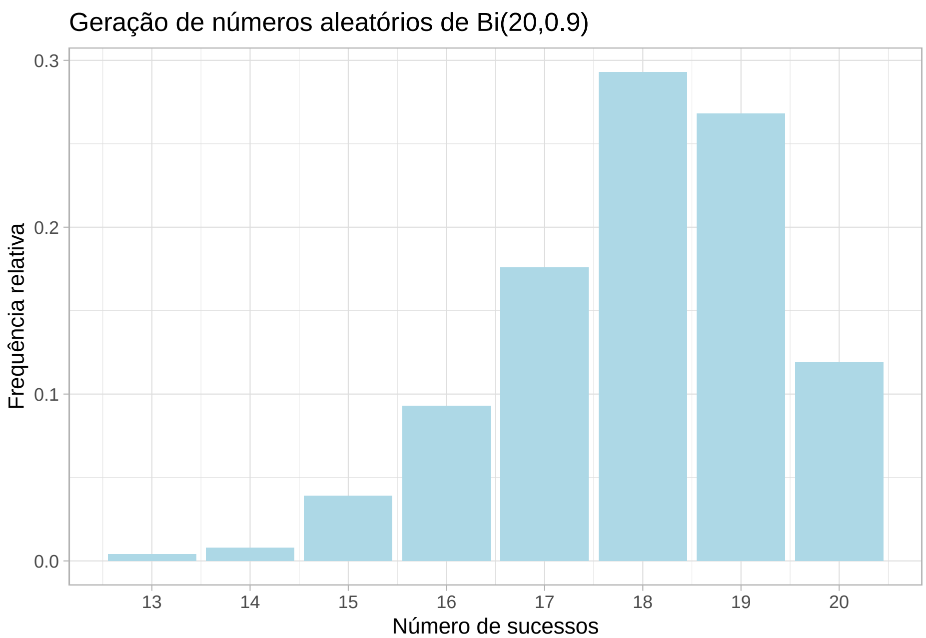
```r
# Simulação de Variáveis aleatórias

# Função massa de probabilidade Binomial(n,p)
n <- 20
p <- 0.1
x <- 0:20

teorico <- data.frame(x = x, y=dbinom(x, size = n, prob = p))

# Carregue o pacote ggplot2
library(ggplot2)

ggplot(teorico) +
  geom_point(aes(x = x, y=y), color = "blue") +
  scale_x_continuous(breaks = 0:n) +
  labs(title = "Binomial(20,0.1)", x = "Número de sucessos", y = "Probabilidade") +
  theme_light()
```



27.1.3 Função massa de probabilidade (simulação)

```r
set.seed(1234)
```

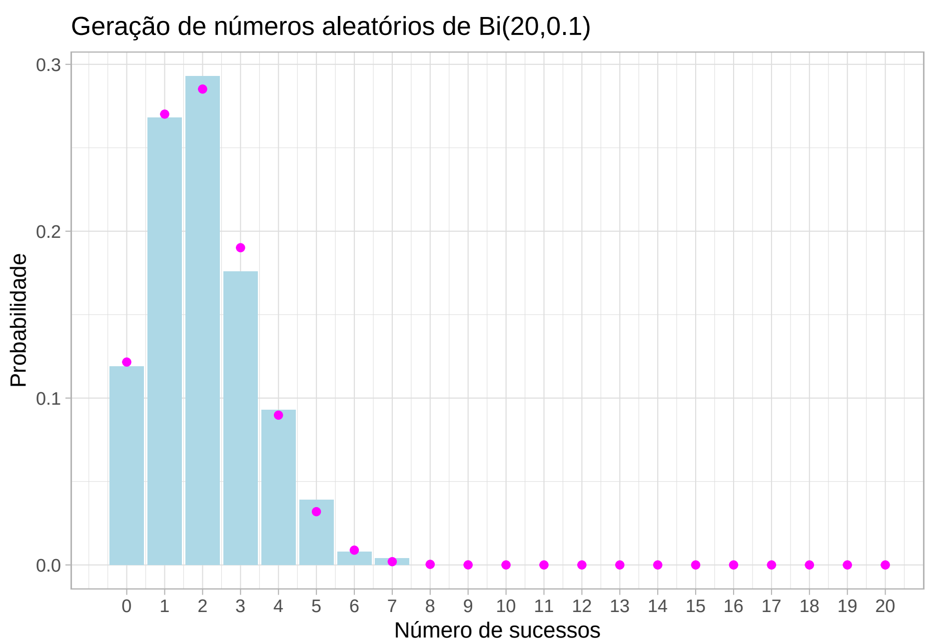
```
n <- 20
p <- 0.9
k <- 1000 # número de simulações

dados <- data.frame(X = rbinom(k, size = n, prob = p))

# Carregue o pacote ggplot2library(ggplot2)

ggplot(dados) +
geom_bar(aes(x=X, y=after_stat(prop)), fill = "lightblue") +
  scale_x_continuous(breaks = 0:n) +
  labs(title = "Geração de números aleatórios de Bi(20,0.9)", x="Número de sucessos",
  y="Frequência relativa") +
  theme_light()
```



27.1.4 Comparação

```
set.seed(1234)

n <- 20
p <- 0.1
k <- 1000 # número de simulações
```

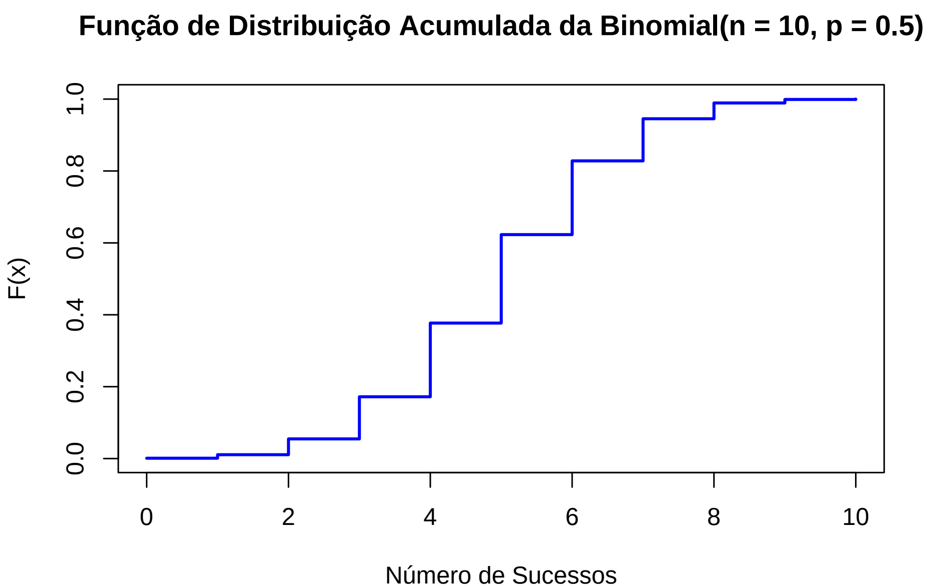
```
dados <- data.frame(X = rbinom(k, size = n, prob = p))
teorico <- data.frame(x = 0:n, y=dbinom(0:n, size = n, prob = p))

# Carregue o pacote ggplot2
library(ggplot2)

ggplot(dados) +
  geom_bar(aes(x = X, y = after_stat(prop)), fill = "lightblue") +
  geom_point(data = teorico, aes(x, y), color = "magenta") +
  scale_x_continuous(breaks = 0:n) +
  labs(title = "Geração de números aleatórios de Bi(20,0.1)", x = "Número de sucessos"
  y = "Probabilidade") +
  theme_light()
```



27.1.5 Função de distribuição

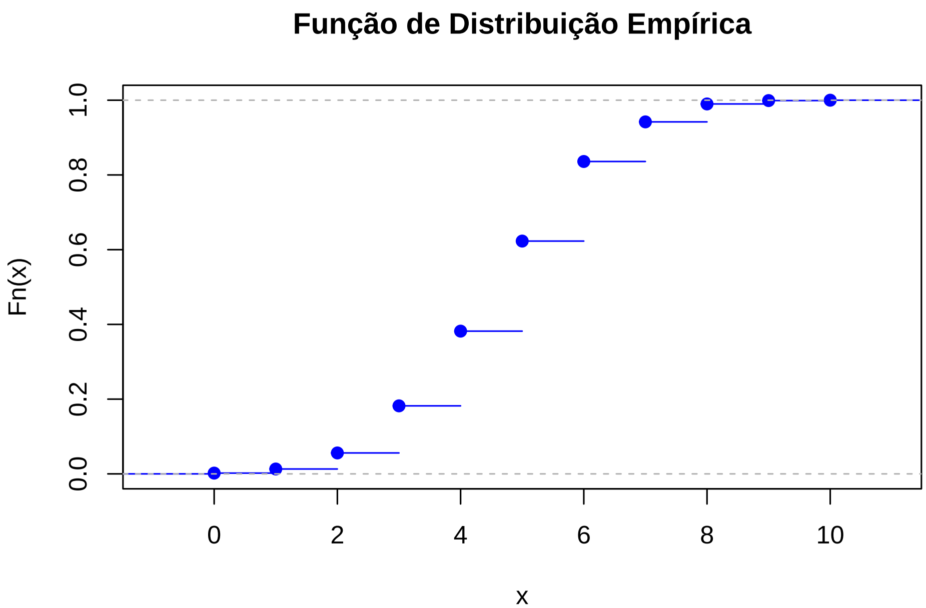
```
# Definir os parâmetros da distribuição binomial
n <- 10 # Número de tentativas
p <- 0.5 # Probabilidade de sucesso

# Valores possíveis de sucessos (0 a n)
x <- 0:n
```

```r
# Calcular a FD
cdf_values <- pbinom(x, size = n, prob = p)

# Plotar a FD
plot(x, cdf_values, type = "s", lwd = 2, col = "blue",
xlab = "Número de Sucessos", ylab = "F(x)",
main = "Função de Distribuição Acumulada da Binomial(n = 10, p = 0.5)")
```

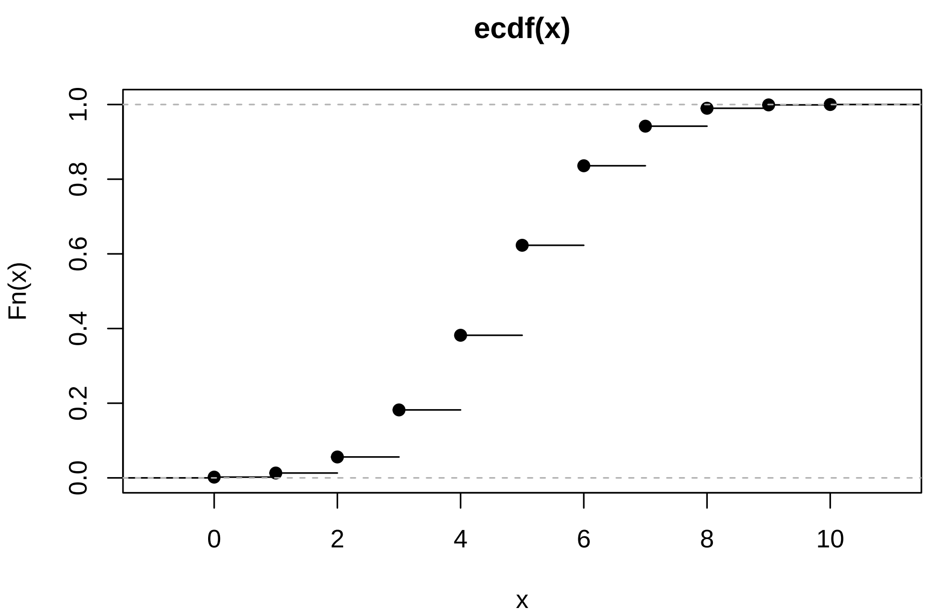


27.1.6 Função de distribuição empírica

```r
# Definir os parâmetros da distribuição binomial
n <- 10 # Número de tentativas
p <- 0.5 # Probabilidade de sucesso

set.seed(123)
# Amostra aleatória de dimensão 1000
amostra <- rbinom(1000,size = n, prob = p)

# Distribuição empírica
Fn <- ecdf(amostra)

# Plotar CDF
plot(Fn, main = "Função de Distribuição Empírica", xlab = "x",
ylab = "Fn(x)", col = "blue")
```




```r
# OU
plot.ecdf(amostra)
```



Cálculo de probabilidade: Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 10, p = 0.5)$.

$P(X \leq 4) =$ `pbinom(4,10,0.5)` $= 0.377$

$P(X \leq 4) \approx$ `Fn(4)` $= 0.382$

Exemplo: Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda não viciada e observar a face que fica voltada para cima. Suponha que a experiência é realizada 7 vezes, sendo o objetivo verificar se sai "cara". Defina-se a variável aleatória

$$X - \text{número de vezes, em 7 lançamentos, que sai cara}$$

(a) Calcule a probabilidade de, em 7 lançamentos, sair 2 vezes cara.

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que saíram 3 vezes cara.

(c) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

27.2 Gerando uma variável aleatória com distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

- Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$
- Função massa de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se} \quad x = 0, 1, 2, ... \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}$$

- λ é o parâmetro caracterizador da distribuição.
- $E(X) = \lambda$ e $V(X) = \lambda$.

27.2.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim$ Poisson($\lambda = 5$).

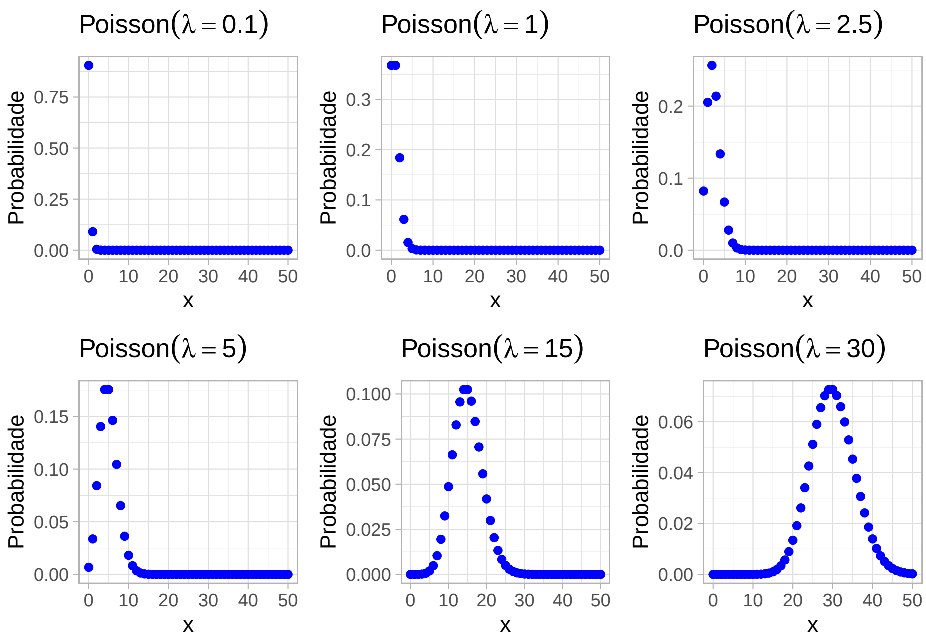
$P(X = 4) \rightarrow$ `dpois(4,5)` $= 0.1755$

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `ppois(4,5)` $= 0.4405$

$P(X > 4) \rightarrow$ `ppois(4,5,lower.tail=FALSE)`$= 0.5595$

27.2.2 Função massa de probabilidade (teórica)

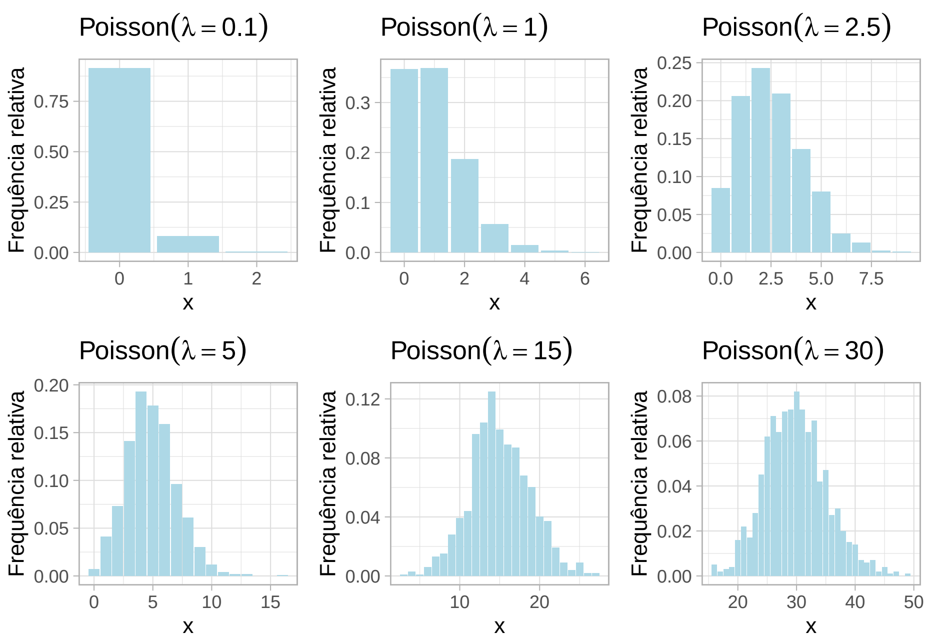
```r
# Definir os valores de lambda e x
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
x <- 0:50

# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  teorico <- data.frame(x = x, y = dpois(x, lambda = p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(teorico) +
    geom_point(aes(x = x, y = y), color = "blue") +
    scale_x_continuous(breaks = seq(0, 50, by = 10)) +
    labs(title = TeX(paste0("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")), x="x", y="Probabilidade")
    theme_light()
}

# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```



27.2.3 Função massa de probabilidade (simulação)

```r
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
n <- 1000

# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  dados <- data.frame(X = rpois(n, lambda = p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(dados) +
    geom_bar(aes(x = X, y =after_stat(prop)), fill="lightblue") +
    labs(title=TeX(paste("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")),
    x = "x", y = "Frequência relativa") +
    theme_light()
}
```

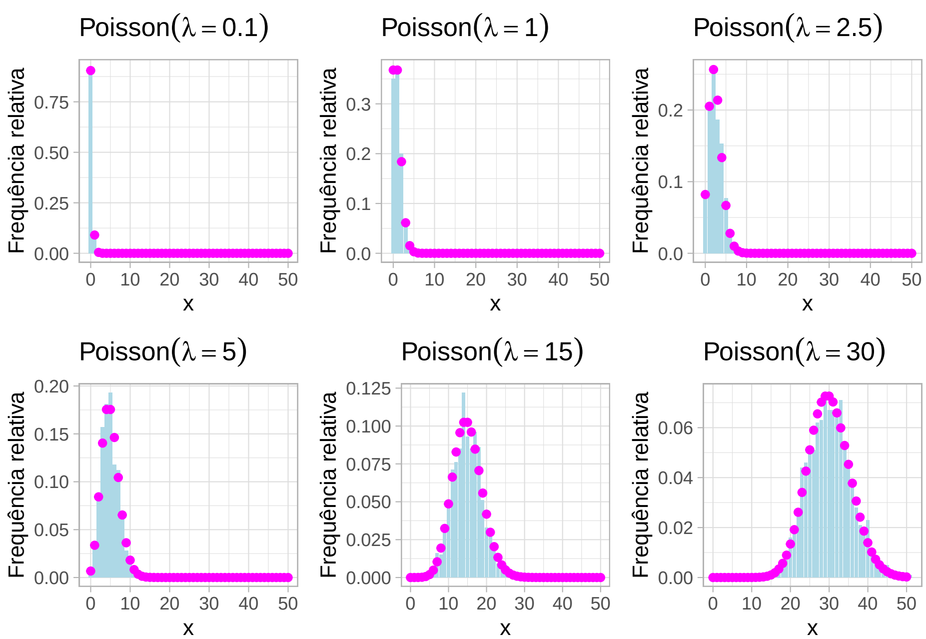
```r
# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```



27.2.4 Comparação

```r
p <- c(0.1, 1, 2.5, 5, 15, 30)
n <- 1000

# Carregar os pacotes necessários
library(ggplot2)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

# Inicializar uma lista para armazenar os gráficos
plots <- list()

# Loop para criar os data frames e gráficos
for (i in 1:length(p)) {
  dados <- data.frame(X = rpois(n, lambda = p[i]))
  teorico <- data.frame(x=0:50, y=dpois(0:50,p[i]))

  plots[[i]] <- ggplot(dados) +
```

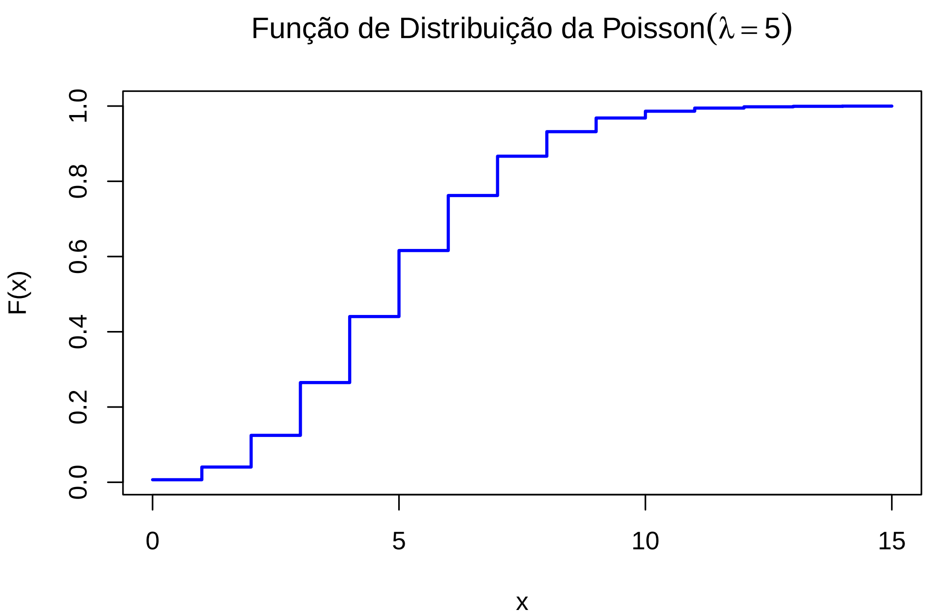
```
    geom_bar(aes(x = X, y =after_stat(prop)), fill="lightblue") +
    geom_point(data = teorico, aes(x, y), color = "magenta") +
    scale_x_continuous(breaks = seq(0, 50, by = 10)) +
    labs(title=TeX(paste("$Poisson(lambda=", p[i], ")$")),
    x = "x", y = "Frequência relativa") +
    theme_light()
}

# Dispor os gráficos em uma grade 2x3
grid.arrange(grobs = plots, nrow = 2, ncol = 3)
```



27.2.5 Função de distribuição

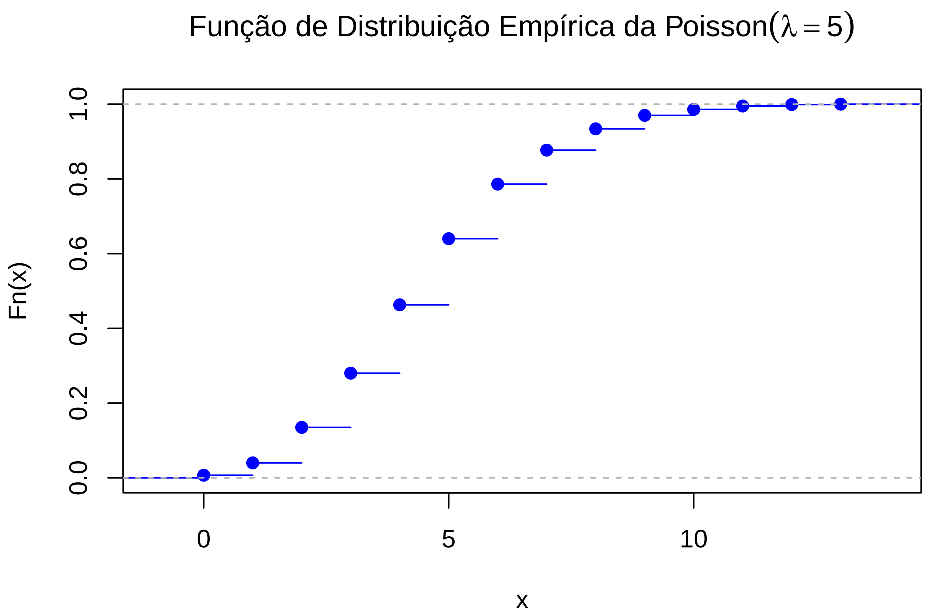
```
lambda <- 5  # Parâmetro da Poisson
x <- 0:15    # Valores de x para plotar a distribuição

# Calcular a FD
y <- ppois(x, lambda = lambda)

# Plotar a FD
plot(x,y, type="s", lwd=2, col="blue",
  main=TeX(paste("Função de Distribuição da $Poisson (lambda =", lambda, ")$")),
```

```
  xlab = "x",
  ylab = "F(x)")
```

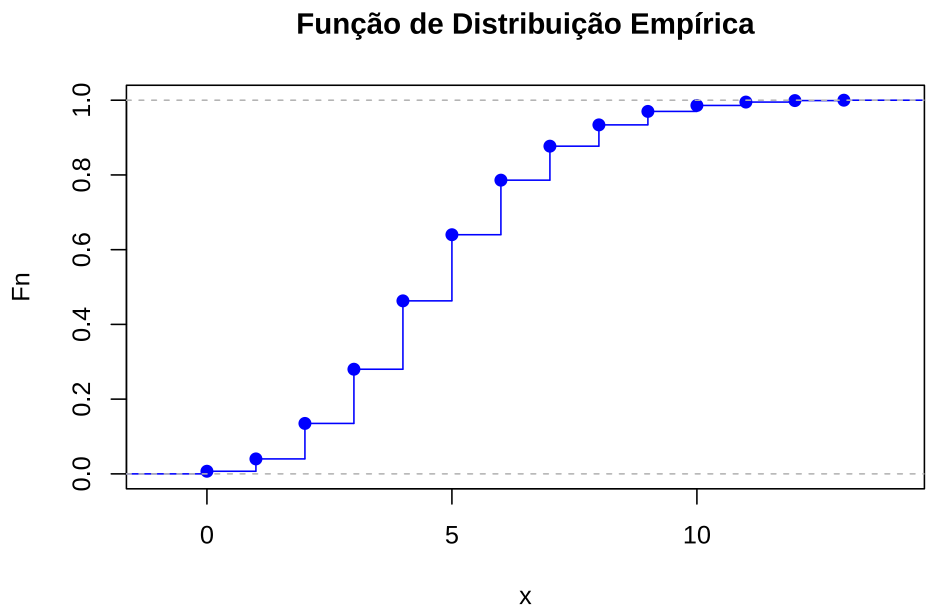


27.2.6 Função de distribuição empírica

```
library(latex2exp)
# Definir os parâmetros da distribuição de Poisson
lambda <- 5

dados <- rpois(1000,lambda = lambda)
Fn <- ecdf(dados)

# Plotar CDF
plot(Fn, main=TeX("Função de Distribuição Empírica da $Poisson(lambda = 5)$"),
  xlab = "x",
  ylab = "Fn(x)",
  col = "blue")
```




```r
# OU
#plot.ecdf(dados)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue",
     verticals = TRUE)
```



Cálculo de probabilidades: Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 5)$.

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `ppois(4,5)` $= 0.4405$

$P(X \leq 4) \rightarrow$ `Fn(4)` $= 0.433$

Exemplo: O número de pedidos recebidos por uma linha de suporte técnico de uma empresa num intervalo de 10 minutos é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson. Neste intervalo de 10 minutos, espera-se que cheguem, em média, 20 pedidos.

(a) Calcule a probabilidade de, num período de 10 minutos, chegarem 20 pedidos.

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que chegam exatamente 20 pedidos.

(c) Determine, para cada amostra, o valor da média e da variância. Compare com os valores de $E(X)$ e $V(X)$.

27.3 Gerando uma variável aleatória com distribuição de Uniforme

Distribuição Uniforme Contínua

- A função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

- A função de distribuição é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se} \quad x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$ e $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Notação: $X \sim Uniforme(a, b)$

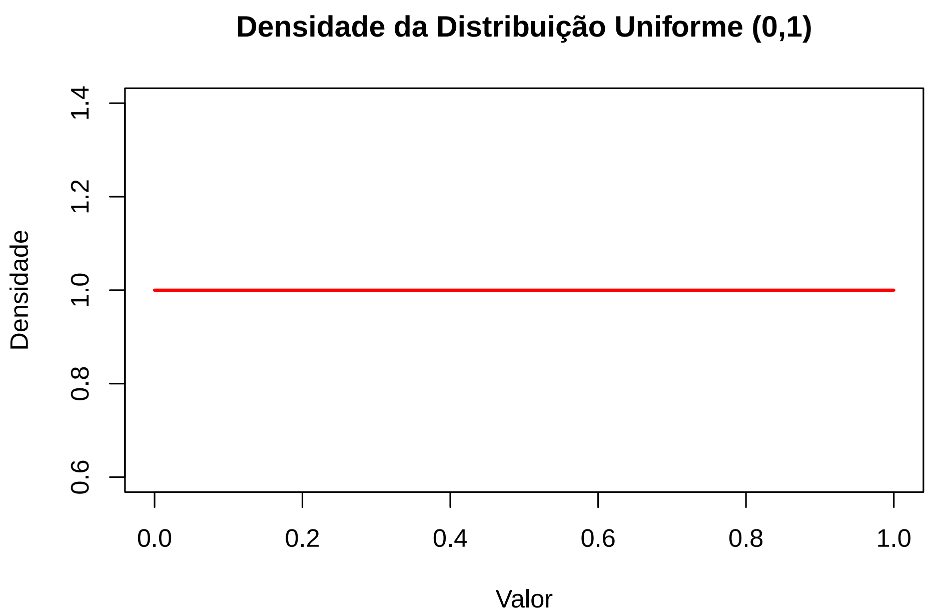
27.3.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$

- $P(X \leq 0.5) \rightarrow$ `punif(0.5, min = 0, max = 1)` $= 0.5$
- $P(X > 0.5) \rightarrow$ `punif(0.5, min = 0, max = 1, lower.tail = FALSE)` $= 0.5$

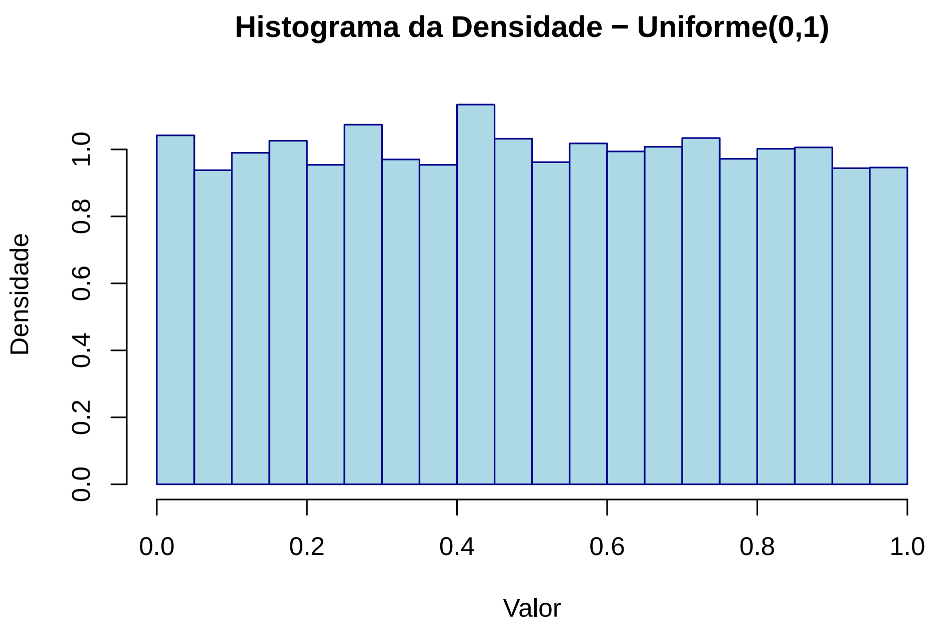
27.3.2 Função densidade de probabilidade

```r
# Gerar os valores x para a densidade teórica
x_vals <- seq(0, 1, length.out = 100)

# Calcular a densidade teórica para os valores x
y_vals <- dunif(x_vals, min = 0, max = 1)

# Desenhar o gráfico da função densidade de probabilidade
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
     main = "Densidade da Distribuição Uniforme (0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "Densidade")
```



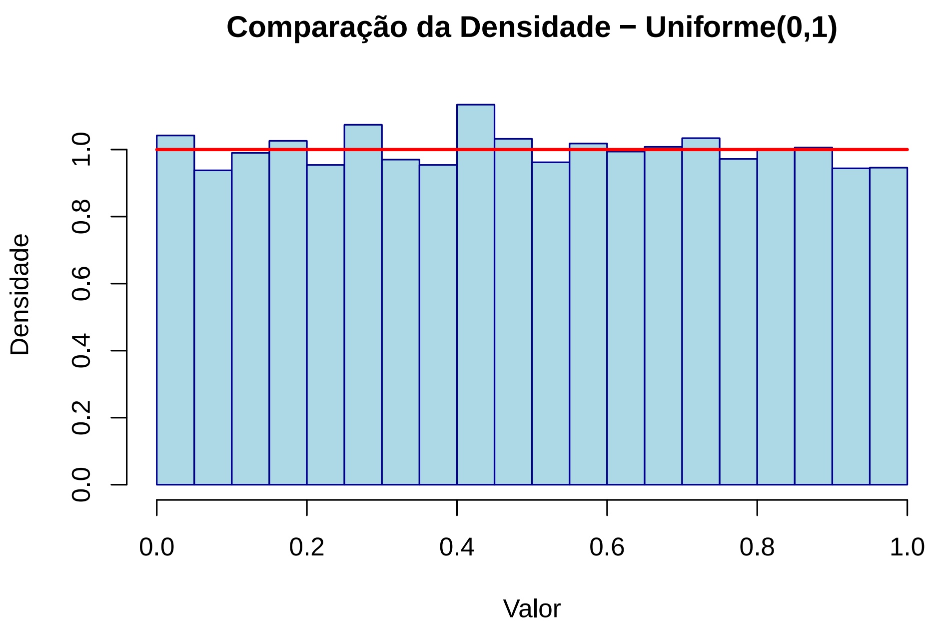
27.3.3 Função densidade de probabilidade (simulação)

```r
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Criar um histograma da amostra
hist(uniform_data, probability = TRUE,
     main = "Histograma da Densidade - Uniforme(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")
```



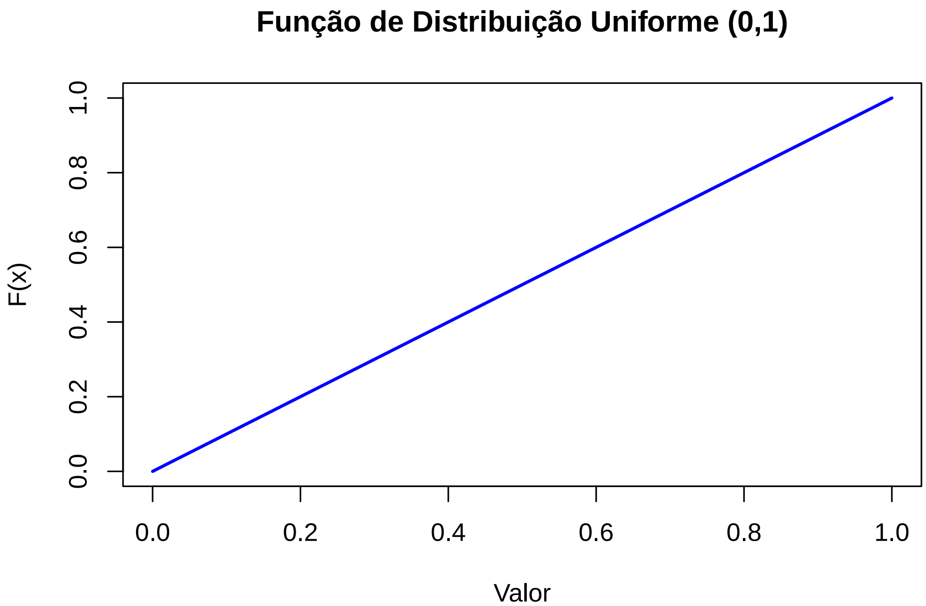
27.3.4 Comparação

```r
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Criar um histograma da amostra com densidade
hist(uniform_data, probability = TRUE,
     main = "Comparação da Densidade - Uniforme(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")

# Adicionar a curva da densidade teórica
curve(dunif(x, min = 0, max = 1),
      add = TRUE,
      col = "red",
      lwd = 2)
```



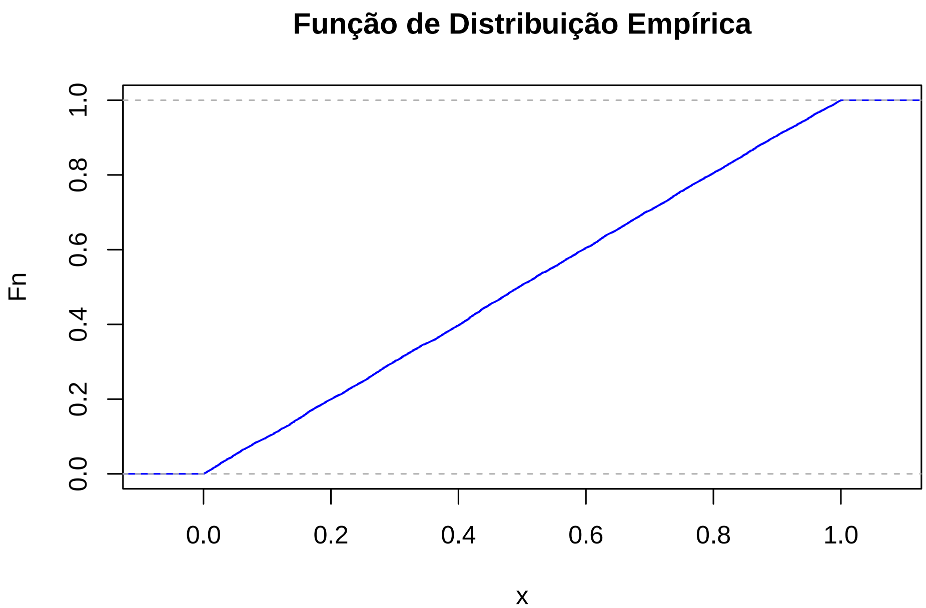
27.3.5 Função de distribuição

```
# Gerar os valores x para a FD teórica
x_vals <- seq(0, 1, length.out = 100)

# Calcular a FD teórica para os valores x
y_vals <- punif(x_vals, min = 0, max = 1)

# Desenhar o gráfico da função de distribuição acumulada
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "blue", lwd = 2,
     main = "Função de Distribuição Uniforme (0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "F(x)")
```



27.3.6 Função de distribuição empírica

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição uniforme (0,1)
uniform_data <- runif(n, min = 0, max = 1)

# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(uniform_data)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue")
```




```
# OU
#plot.ecdf(uniform_data)
```

Exemplo: O peso real de uma barra de chocolate de uma determinada marca (que supostamente pesa 100 gramas) é uma variável aleatória, em gramas, com distribuição uniforme no intervalo de 85 a 105 gramas.

(a) Qual a probabilidade de uma barra de chocolate ter um peso inferior a 100 gramas?

(b) Simule a situação descrita para um número total de repetições da experiência: $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 100$ e $n_4 = 1000$. Para cada caso, determine a percentagem de casos em que o peso é inferior a 100 gramas.

27.4 Gerando uma variável aleatória com distribuição Exponencial

27.4.1 Cálculo de probabilidades

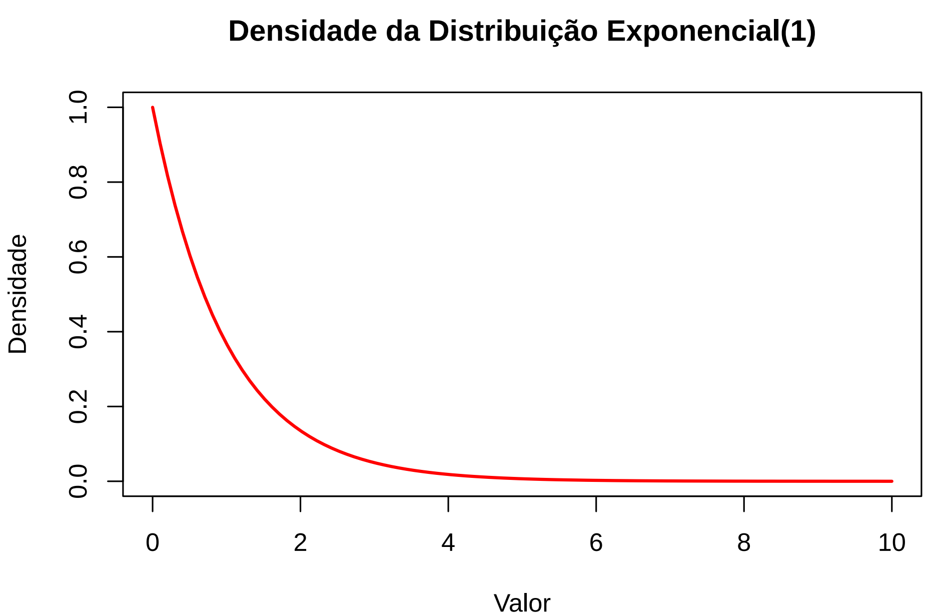
Seja $X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1)$.

$P(X \leq 0.5) \rightarrow$ `pexp(0.5,rate=1)`$=0.3935$

$P(X > 0.5) \rightarrow$ `pexp(0.5,rate=1,lower.tail=FALSE)`$=0.6065$

27.4.2 Função densidade de probabilidade (teórica)

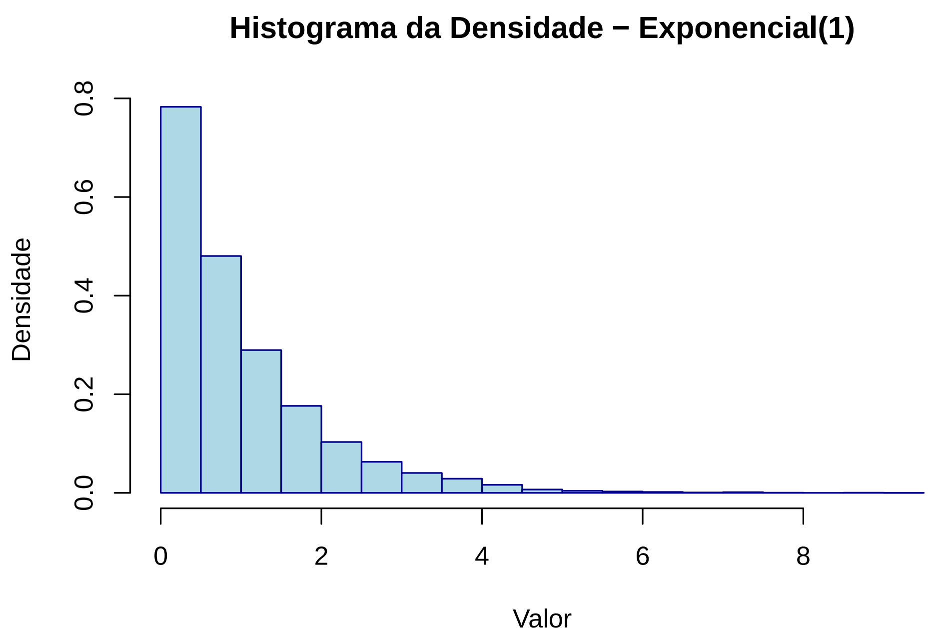
```
# Gerar os valores x para a densidade teórica
x_vals <- seq(0, 10, length.out = 100)

# Calcular a densidade teórica para os valores x
y_vals <- dexp(x_vals, rate=1)

# Desenhar o gráfico da função densidade de probabilidade
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
     main = "Densidade da Distribuição Exponencial(1)",
     xlab = "Valor", ylab = "Densidade")
```



27.4.3 Função densidade de probabilidade (simulação)

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
```

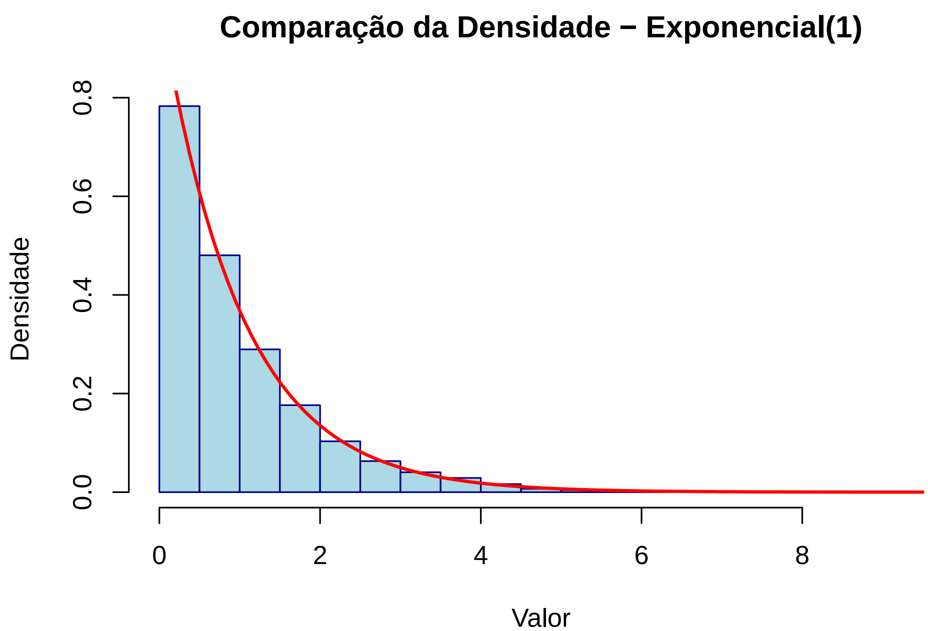
```
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Criar um histograma da amostra
hist(expo_data, probability = TRUE,
     main = "Histograma da Densidade - Exponencial(1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")
```



27.4.4 Comparação

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Criar um histograma da amostra
hist(expo_data, probability = TRUE,
```

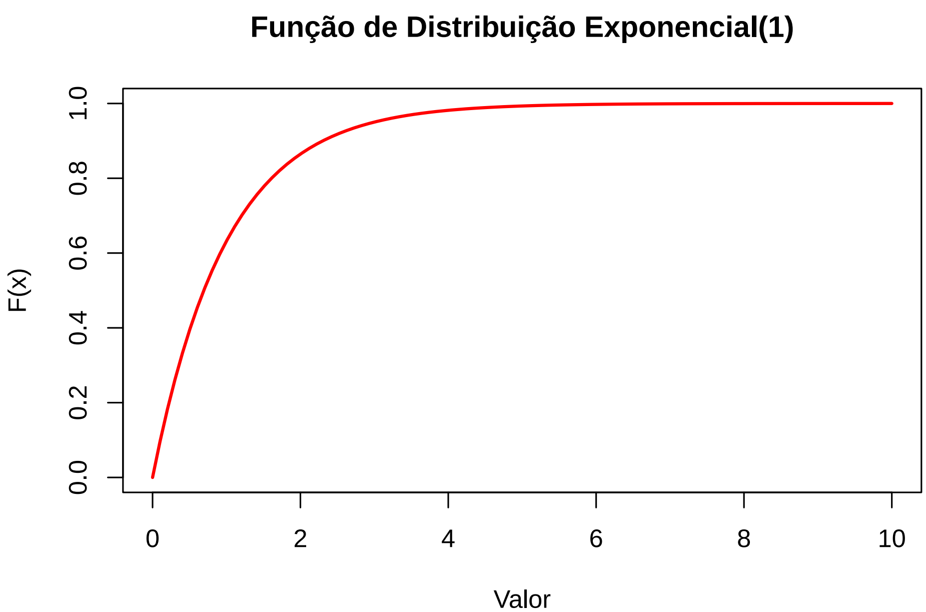
```
     main = "Comparação da Densidade - Exponencial(1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")

# Adicionar curva da densidade teórica
curve(dexp(x,rate=1),
      add=TRUE,
      col="red",
      lwd=2)
```



27.4.5 Função de distribuição

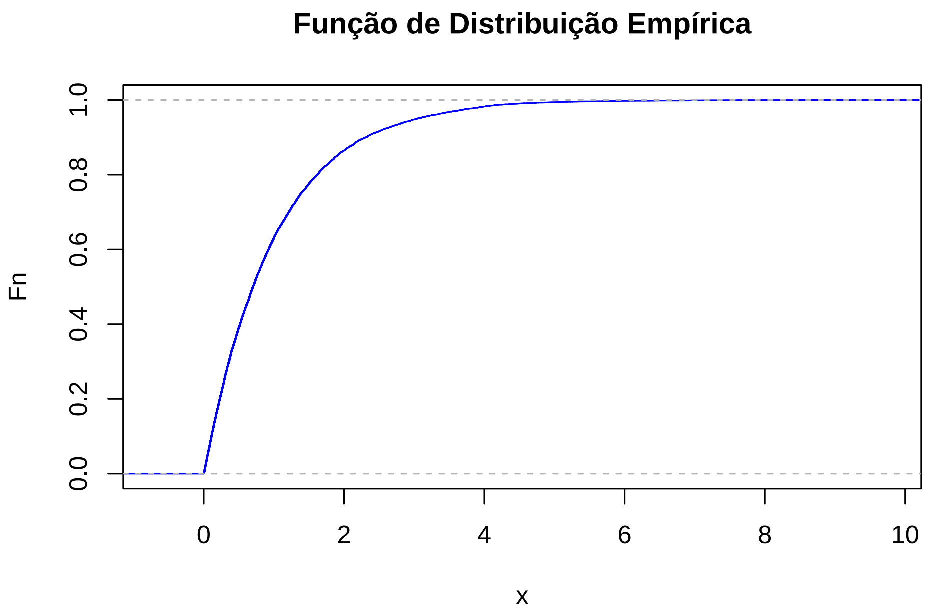
```
# Gerar os valores x para a FD teórica
x_vals <- seq(0, 10, length.out = 100)

# Calcular a FD teórica para os valores x
y_vals <- pexp(x_vals, rate=1)

# Desenhar o gráfico da FD
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
```

```
     main = "Função de Distribuição Exponencial(1)",
     xlab = "Valor", ylab = "F(x)")
```



27.4.6 Função de distribuição empírica

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição exponencial(1)
expo_data <- rexp(n, rate=1)

# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(expo_data)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue")
```



27.5 Gerando uma variável aleatória com distribuição Normal

27.5.1 Cálculo de probabilidades

Seja $X \sim \text{Normal}(0, 1)$.

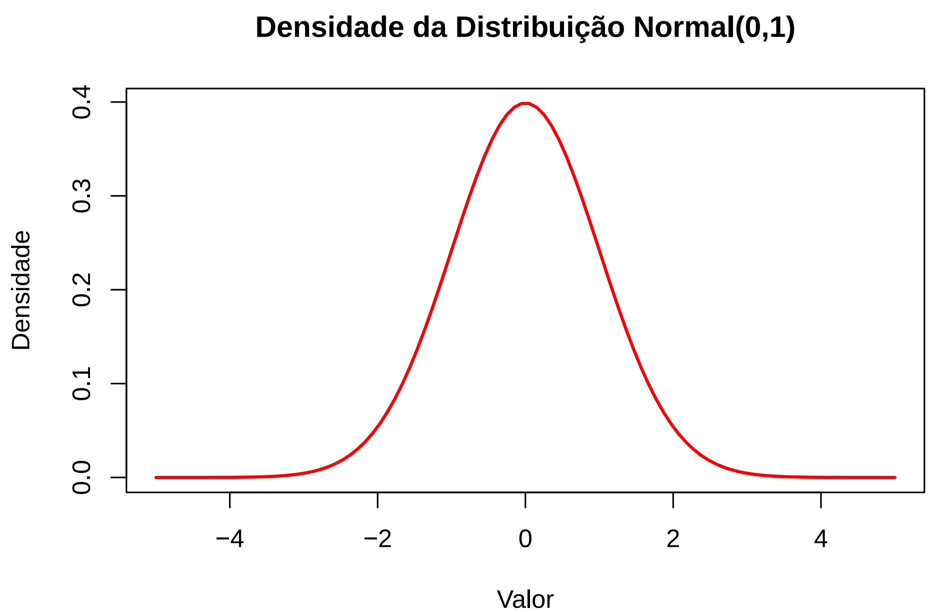
$P(X \leq 0.5) \rightarrow$ `pnorm(0.5,mean=0,sd=1)`$=0.6915$

$P(X > 0.5) \rightarrow$ `pnorm(0.5,mean=0,sd=1,lower.tail=FALSE)`$=0.3085$

27.5.2 Função densidade de probabilidade (teórica)

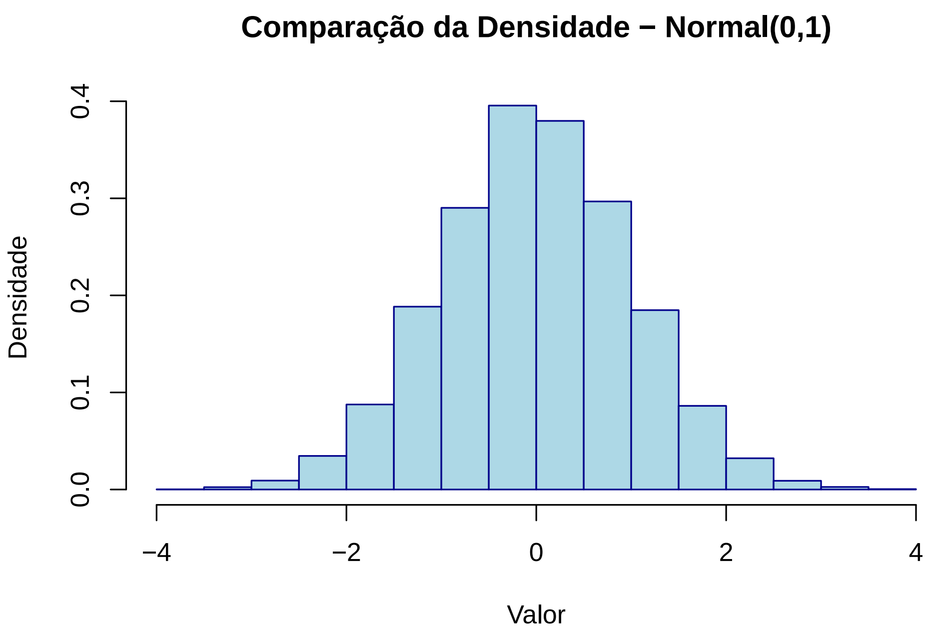
```
# Gerar os valores x para a densidade teórica
x_vals <- seq(-5, 5, length.out = 100)

# Calcular a densidade teórica para os valores x
y_vals <- dnorm(x_vals, mean = 0, sd = 1)

# Desenhar o gráfico da função densidade de probabilidade
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "red", lwd = 2,
```

```
     main = "Densidade da Distribuição Normal(0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "Densidade")
```



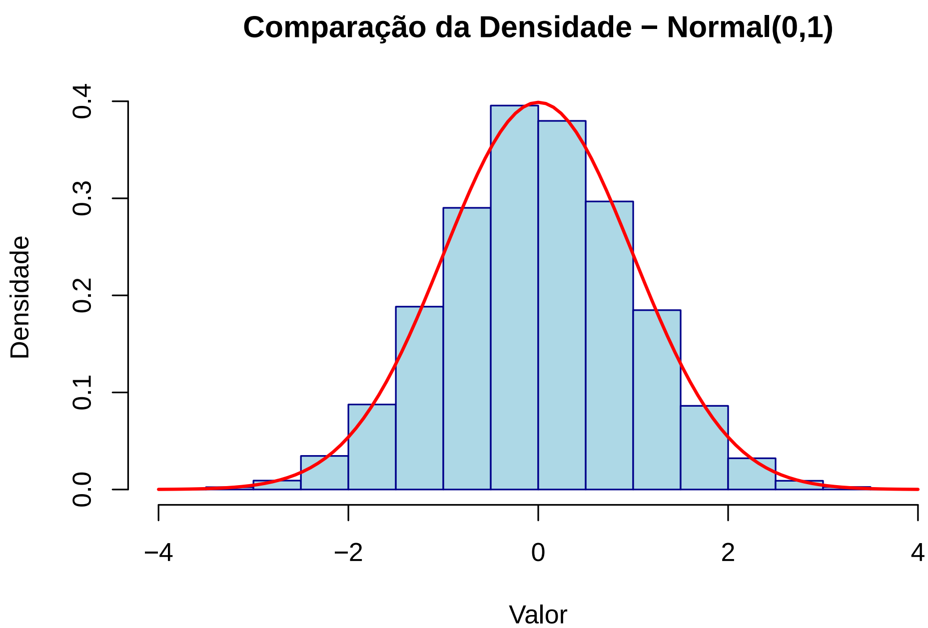
27.5.3 Função densidade de probabilidade (simulação)

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição Normal(0,1)
normal_data <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1)

# Criar um histograma da amostra com densidade
hist(normal_data, probability = TRUE,
     main = "Comparação da Densidade - Normal(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")
```



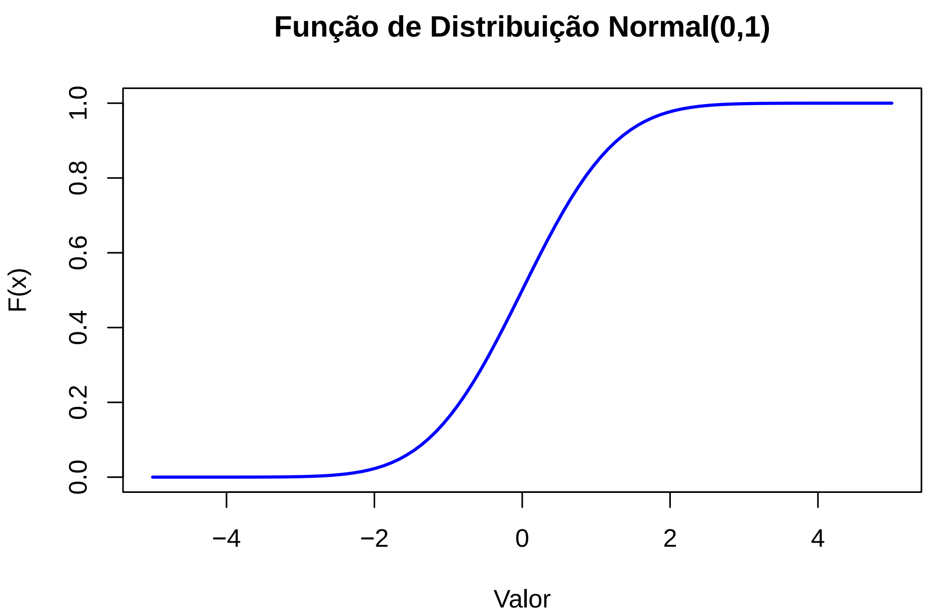
27.5.4 Comparação

```
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição Normal(0,1)
normal_data <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1)

# Criar um histograma da amostra com densidade
hist(normal_data, probability = TRUE,
     main = "Comparação da Densidade - Normal(0,1)",
     xlab = "Valor",
     ylab = "Densidade",
     col = "lightblue",
     border = "darkblue")

# Adicionar a curva da densidade teórica
curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 1),
      add = TRUE,
      col = "red",
      lwd = 2)
```



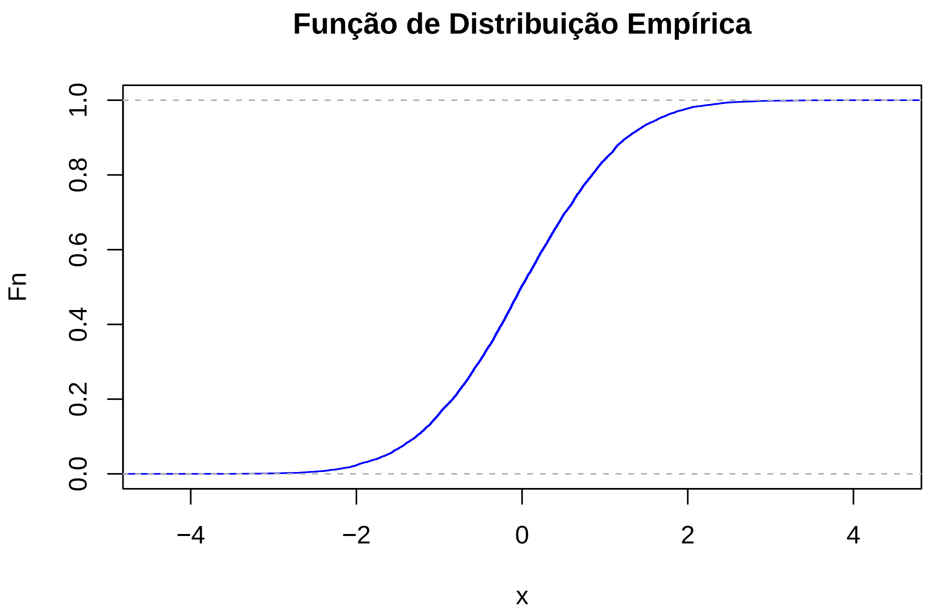
27.5.5 Função de distribuição

```
# Gerar os valores x para a FD teórica
x_vals <- seq(-5, 5, length.out = 100)

# Calcular a FD teórica para os valores x
y_vals <- pnorm(x_vals, mean = 0, sd = 1)

# Desenhar o gráfico da função de distribuição
plot(x_vals, y_vals, type = "l",
     col = "blue", lwd = 2,
     main = "Função de Distribuição Normal(0,1)",
     xlab = "Valor", ylab = "F(x)")
```



27.5.6 Função de distribuição empírica

```r
# Definir o tamanho da amostra
n <- 10000

# Fixar a semente para reprodutibilidade
set.seed(123)

# Gerar a variável aleatória com distribuição Normal(0,1)
normal_data <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1)

# Função de distribuição empírica
Fn <- ecdf(normal_data)

plot(Fn, main="Função de Distribuição Empírica",
     xlab="x",
     ylab="Fn",
     col="blue")
```



27.6 Exercícios

1. Usando o R e fixando a semente em 123, simule 1000 lançamentos de uma moeda com probabilidade de 0.5 de sair cara. Conte o número de caras em cada lançamento e plote um histograma dos resultados.

2. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 5000 observações de uma variável aleatória binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0.3$. Calcule a média e a variância das observações geradas.

3. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 2300 observações de uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 4$. Calcule a média e o desvio padrão das observações geradas.

4. Em um processo de qualidade, considere uma variável aleatória X que representa o número de produtos defeituosos em um lote de 50 produtos, onde a probabilidade de um produto ser defeituoso é 0.1. Usando o R e fixando a semente em 123 gere uma amostra aleatória de 10000 observações de X. Conte a frequência de lotes com exatamente 5 produtos defeituosos. Calcule a proporção de lotes com exatamente 5 produtos defeituosos e compare o valor obtido com a probabilidade $P(X = 5)$, onde $X \sim \text{Binomial}(50, 0.1)$.

5. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 5000 observações de uma variável aleatória X binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 0.7$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(X \leq 10)$ e compare com o valor teórico.

6. Usando o R e fixando a semente em 543, gere uma amostra aleatória de 2400 observações de uma variável aleatória Y de Poisson com parâmetro $\lambda = 6$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(Y > 5)$ e compare com o valor teórico.

7. Usando o R e fixando a semente em 345, gere uma amostra aleatória de 3450 observações de uma variável aleatória Z uniforme no intervalo $[0, 1]$. Use a função de distribuição empírica para estimar $P(Z \leq 0.5)$ e compare com o valor teórico.

8. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 3467 observações de uma variável aleatória W normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(W > 1)$ e compare com o valor teórico.

9. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra aleatória de 1234 observações de uma variável aleatória V exponencial com parâmetro $\lambda = 0.5$.

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Use a função de distribuição empírica para estimar $P(V > 2)$ e compare com o valor teórico.

10. O número de acertos num alvo em 30 tentativas onde a probabilidade de acerto é 0.4, é modelado por uma variável aleatória X com distruibuição Binomial de parâmetros $n = 30$ e $p = 0.4$. Usando o R e fixando a semente em 123, gere uma amostra de dimensão $n = 700$ dessa variável. Para essa amostra:

(a) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores amostrais. Sobreponha no gráfico a distribuição de probabilidade de X.

(b) Calcule a função de distribuição empírica e com base nessa função estime a probabilidade do número de acertos no alvo, em 30 tentativas, ser maior que 15. Calcule ainda o valor teórico dessa probabilidade.

11. Usando o R e fixando a semente em 123, gere amostras de tamanho crescente $n = 100, 1000, 10000, 100000$ de uma variável aleatória X com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$. Para cada tamanho de amostra, calcule a média amostral e compare-a com o valor esperado teórico. Observe e comente a convergência das médias amostrais.

12. Usando o R e fixando a semente em 123, gere amostras de tamanho crescente $n = 100, 1000, 10000, 100000$ de uma variável aleatória W com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Para cada tamanho de amostra, calcule a média amostral e compare-a com o valor esperado teórico. Observe e comente a convergência das médias amostrais.

13. Um grupo de estudantes de Estatística está realizando uma pesquisa para avaliar o grau de satisfação dos alunos com um novo curso oferecido pela universidade. Cada estudante responde a uma pergunta onde pode indicar se está satisfeito ou insatisfeito com o curso. A probabilidade de um estudante estar satisfeito é de 0.75.

- Usando o R e fixando a semente em 42, simule amostras de tamanho crescente $n = 100, 500, 1000, 5000, 10000$ de uma variável aleatória X com distribuição binomial, onde X representa o número de estudantes satisfeitos. Para cada tamanho de amostra, calcule a proporção de estudantes satisfeitos e compare-a com a probabilidade teórica de satisfação (0.75).

14. Usando o R e fixando a semente em 1058, gere 9060 amostras de dimensão 9 de uma população, $X \sim \text{Binomial}(41, 0.81)$. Calcule a média de cada uma dessas amostras, obtendo uma amostra de médias. Calcule ainda o valor esperado da distribuição teórica de X e compare com a média da amostra de médias.

15. Em um hospital, o tempo de atendimento de pacientes segue uma distribuição exponencial com média de 30 minutos. Um pesquisador deseja estimar o tempo médio de atendimento coletando amostras de diferentes tamanhos.

- Usando o R e fixando a semente em 456, simule 1000 amostras de tamanho 50, 100 e 1000 do tempo de atendimento. Para cada tamanho de amostra, calcule a média de cada amostra e plote o histograma das médias amostrais para cada tamanho. Compare essas distribuições com a distribuição normal com média $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$ e comente sobre a aplicação do Teorema do Limite Central.

16. O tempo de espera (em minutos) para o atendimento no setor de informações de um banco é modelado por uma variável aleatória X com distribuição Uniforme($a = 5, b = 20$). Usando o R e fixando a semente em 1430, gere 8000 amostras de dimensão $n = 100$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(d) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

17. O tempo de atendimento (em minutos), de doentes graves num determinado hospital, é modelado por uma variável aleatória X com distribuição Exponencial($\lambda = 0.21$). Usando o R e fixando a semente em 1580, gere 1234 amostras de dimensão $n = 50$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

18. A altura (em centímetros) dos alunos de uma escola é modelada por uma variável aleatória X com distribuição Normal($\mu = 170, \sigma = 10$). Usando o R e fixando a semente em 678, gere 9876 amostras de dimensão $n = 80$ dessa variável. Para essas amostras:

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

(f) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média padronizada

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$$

e sobreponha no gráfico com uma curva com distribuição Normal com valor esperado 0 e desvio padrão 1.

19. A chegada de clientes em uma loja durante 1 hora, assumindo uma taxa média de 20 clientes por hora pode ser modelada por uma variável aleatória X com distribuição de Poisson($\lambda = 20$). Usando o R e fixando a semente em 1222, gere 8050 amostras de dimensão 30 de X.

(a) Calcule a soma de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

(b) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma e sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado $nE(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(X)n}$.

(c) Calcule agora a soma padronizada

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$$

e faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da soma padronizada. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal de valor esperado 0 e desvio padrão 1.

(d) Calcule a média de cada uma das amostras obtendo assim valores da distribuição da média $\bar{X}_n$.

(e) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média $\bar{X}_n$. Sobreponha no gráfico uma curva com distribuição normal com valor esperado $E(X)$ e desvio padrão $\sqrt{V(x)/n}$.

(f) Faça um histograma de frequência relativa associado aos valores obtidos da distribuição da média padronizada

$$\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$$

e sobreponha no gráfico com uma curva com distribuição Normal com valor esperado 0 e desvio padrão 1.

Chapter 28

Relatórios

Com a ajuda do R Markdown, uma interface de anotações que combina texto livre com códigos em R, podemos construir relatórios não só reprodutíveis, mas elegantemente bem formatados, sem sair do R!

Antes de mais nada, vamos instalar os pacotes `{rmarkdown}` e `{knitr}`. O primeiro reúne todas as funcionalidades para juntar nossos textos narrativos e códigos de R. O segundo vai fazer a magia de transformar nossos simples arquivos de texto em arquivos HTML, PDF e Word (.doc).

```
install.packages(c("rmarkdown", "knitr"))
```

Nas seções a seguir, vamos mostrar como começar a utilizar o R Markdown para criar esses documentos. Não se esqueça de conferir (e deixar por perto) as folhas de cola sobre R Markdown:

…

28.1 Markdown

Se você é uma pessoa que utiliza R, sabe das possibilidades de utilizar R Markdown (e os pacotes que expandem mais ainda as possibilidades) e gostaria de começar a utilizá-lo, é importante conhecer o Markdown. Por quê? O R Markdown tem como base a linguagem de marcação Markdown.

Os arquivos markdown podem ser abertos por qualquer software que suporte este formato aberto. Além disso, independente da plataforma de trabalho, pode-se migrar para um arquivo de texto sem perder a formatação. O Markdown também é usado em outros lugares, como no GitHub.

Uma referência interessante para ter sempre em mãos é a Folha de cola (Cheatsheet) do Markdown.

Nas seções seguintes, descreveremos como podemos marcar os nossos textos e códigos usando markdown, e você poderá usar isso tanto em arquivos .Rmd, quanto em outros lugares que também utilizam essa marcação.

28.1.1 Ênfase

Negrito

Para destacar um texto em negrito, coloque `**` ou `__` ao redor do texto.

Por exemplo:

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`Esse é um texto com uma palavra destacada em **negrito**.`	Esse é um texto com uma palavra destacada em **negrito**.
`Esse é um texto com uma palavra destacada em __negrito__.`	Esse é um texto com uma palavra destacada em **negrito**.

Itálico

Para destacar um texto em itálico, coloque `*` ou `_` ao redor do texto.

Por exemplo:

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`Esse é um texto com uma palavra destacada em *itálico*.`	Esse é um texto com uma palavra destacada em *itálico*.
`Esse é um texto com uma palavra destacada em _itálico_.`	Esse é um texto com uma palavra destacada em *itálico*.

Riscado (ou tachado)

Para riscar/tachar um texto, coloque `~~` ao redor do texto.

Por exemplo:

Esse é um texto com uma palavra riscada/tachada.

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`Esse é um texto com uma palavra ~~riscada/tachada~~.`	Esse é um texto com uma palavra ~~riscada/tachada~~.

28.1.2 Títulos

Os títulos funcionam como uma hierarquia, e para criar um título é necessário colocar um `#` no início da linha. Então, um `#` marca um título, `##` marca um subtítulo, e assim sucessivamente. Veja os exemplos:

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`# Título 1`	# Título 1
`## Título 2`	## Título 2
`### Título 3`	### Título 3

28.1.3 Listas

Você pode fazer uma lista ordenada usando somente números. Você pode repetir o número quantas vezes quiser:

Como é escrito no código:

```
1. Maçã

1. Banana

1. Uva
```

Como aparece no relatório:

1. Maçã
2. Banana
3. Uva

Listas não ordenadas

Você pode fazer uma lista não ordenada escrevendo com hífens ou asteriscos, como a seguir:

```
* Maçã

* Banana

* Uva

- Maçã

- Banana

- Uva
```

O resultado será:

- Maçã

- Banana
- Uva

Você também pode adicionar sub-itens na lista indicando a hierarquia através da identação no Markdown (dica: utilize a tecla `tab` do teclado):

- Frutas
  - Maçã
  - Banana
  - Uva

28.1.4 Equações

Você pode adicionar equações utilizando LaTeX. Você pode saber mais na página do Overleaf sobre expressões matemáticas. Além disso, existem geradores de equações online que ajudam a escrevê-las em LaTeX, HTML, entre outras linguagens de marcação.

É possível centralizar a equação envolvendo o código com `$$`. Veja o exemplo abaixo:

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`$$y = \mu + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \epsilon$$`	$y = \mu + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \epsilon$

Também é possível adicionar a equação na mesma linha que o texto, envolvendo o código com `$`. Veja o exemplo abaixo:

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`Ou também na linha $y = \mu + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \epsilon$, junto ao texto!`	Ou também na linha $y = \mu + \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \epsilon$, junto ao texto!

28.1.5 Código

É possível **marcar textos para que fiquem formatados como códigos**, usando a crase: `

Mas atenção: o texto será **formatado como código**, porém não será executado!

Como é escrito no código	Como aparece no relatório
`` `mean(pinguins$massa_corporal, na.rm = TRUE)` ``	`mean(pinguins$massa_corporal, na.rm = TRUE)`

Também é possível delimitar um trecho maior de código, utilizando três crases.

Exemplo:

```
library(dados)
mean(pinguins$massa_corporal, na.rm = TRUE)
```

Como o código aparece no relatório

```r
library(dados)
mean(pinguins$massa_corporal, na.rm = TRUE)
```

28.2 R Markdown

Chapter 29

Referências

- https://cemapre.iseg.ulisboa.pt/~nbrites/CTA/index.html
- https://livro.curso-r.com/
- https://www.cs.upc.edu/~robert/teaching/estadistica/TheRBook.pdf
- Ross, S. M.: *Simulation*. Sixth edition. Academic Press, 2022.

Chapter 30

Respostas

30.1 O pacote dplyr

30.1.1 Selecionando colunas

1. Teste aplicar a função `glimpse()` do pacote ‘`dplyr` à base `sw`. O que ela faz?

```r
glimpse(sw)
```

```
## Rows: 87
## Columns: 14
## $ name       <chr> "Luke Skywalker", "C-3PO", "R2-D2", "Darth Vader", "Leia Or~
## $ height     <int> 172, 167, 96, 202, 150, 178, 165, 97, 183, 182, 188, 180, 2~
## $ mass       <dbl> 77.0, 75.0, 32.0, 136.0, 49.0, 120.0, 75.0, 32.0, 84.0, 77.~
## $ hair_color <chr> "blond", NA, NA, "none", "brown", "brown, grey", "brown", N~
## $ skin_color <chr> "fair", "gold", "white, blue", "white", "light", "light", "~
## $ eye_color  <chr> "blue", "yellow", "red", "yellow", "brown", "blue", "blue",~
## $ birth_year <dbl> 19.0, 112.0, 33.0, 41.9, 19.0, 52.0, 47.0, NA, 24.0, 57.0, ~
## $ sex        <chr> "male", "none", "none", "male", "female", "male", "female",~
## $ gender     <chr> "masculine", "masculine", "masculine", "masculine", "femini~
## $ homeworld  <chr> "Tatooine", "Tatooine", "Naboo", "Tatooine", "Alderaan", "T~
## $ species    <chr> "Human", "Droid", "Droid", "Human", "Human", "Human", "Huma~
## $ films      <list> <"A New Hope", "The Empire Strikes Back", "Return of the J~
## $ vehicles   <list> <"Snowspeeder", "Imperial Speeder Bike">, <>, <>, <>, "Imp~
## $ starships  <list> <"X-wing", "Imperial shuttle">, <>, <>, "TIE Advanced x1",~
```

Mostra os nomes das variáveis, os tipos de dados e os primeiros valores de cada coluna em uma única visualização, tudo de forma horizontal.

2. Crie uma tabela com apenas as colunas `name`, `gender`, e `films`. Salve em um objeto chamado `sw_simples`.

```
sw_simples <- select(sw, name, gender, films)
sw_simples
```

```
## # A tibble: 87 x 3
##    name               gender    films
##    <chr>              <chr>     <list>
##  1 Luke Skywalker     masculine <chr [5]>
##  2 C-3PO              masculine <chr [6]>
##  3 R2-D2              masculine <chr [7]>
##  4 Darth Vader        masculine <chr [4]>
##  5 Leia Organa        feminine  <chr [5]>
##  6 Owen Lars          masculine <chr [3]>
##  7 Beru Whitesun Lars feminine  <chr [3]>
##  8 R5-D4              masculine <chr [1]>
##  9 Biggs Darklighter  masculine <chr [1]>
## 10 Obi-Wan Kenobi     masculine <chr [6]>
## # i 77 more rows
```

3. Selecione apenas as colunas `hair_color`, `skin_color` e `eye_color` usando a função auxiliar `contains()`.

```
select(sw, contains("color"))
```

```
## # A tibble: 87 x 3
##    hair_color    skin_color  eye_color
##    <chr>         <chr>       <chr>
##  1 blond         fair        blue
##  2 <NA>          gold        yellow
##  3 <NA>          white, blue red
##  4 none          white       yellow
##  5 brown         light       brown
##  6 brown, grey   light       blue
##  7 brown         light       blue
##  8 <NA>          white, red  red
##  9 black         light       brown
## 10 auburn, white fair        blue-gray
## # i 77 more rows
```

4. Usando a função `select()` (e suas funções auxiliares), escreva códigos que retornem a base `sw` sem as colunas `hair_color`, `skin_color` e `eye_color`. Escreva todas as soluções diferentes que você conseguir pensar.

```r
select(sw, -hair_color, -skin_color, -eye_color)

select(sw, -contains("color"))

select(sw, -ends_with("color"))

select(sw, name:mass, birth_year:starships)
```

30.1.2 Ordenando a base

1. Ordene `mass` em ordem crescente e `birth_year` em ordem decrescente e salve em um objeto chamado `sw_ordenados`.

```r
sw_ordenados <- arrange(sw, mass, desc(birth_year))
sw_ordenados
```

```
## # A tibble: 87 x 14
##    name      height  mass hair_color skin_color eye_color birth_year sex   gender
##    <chr>      <int> <dbl> <chr>      <chr>      <chr>          <dbl> <chr> <chr>
##  1 Ratts T~      79    15 none       grey, blue unknown           NA male  mascu~
##  2 Yoda          66    17 white      green      brown            896 male  mascu~
##  3 Wicket ~      88    20 brown      brown      brown              8 male  mascu~
##  4 R2-D2         96    32 <NA>       white, bl~ red               33 none  mascu~
##  5 R5-D4         97    32 <NA>       white, red red               NA none  mascu~
##  6 Sebulba      112    40 none       grey, red  orange            NA male  mascu~
##  7 Padmé A~     185    45 brown      light      brown             46 fema~ femin~
##  8 Dud Bolt      94    45 none       blue, grey yellow            NA male  mascu~
##  9 Wat Tam~     193    48 none       green, gr~ unknown           NA male  mascu~
## 10 Sly Moo~     178    48 none       pale       white             NA <NA>  <NA>
## # i 77 more rows
## # i 5 more variables: homeworld <chr>, species <chr>, films <list>,
## #   vehicles <list>, starships <list>
```

2. Selecione apenas as colunas `name` e `birth_year` e então ordene de forma decrescente pelo `birth_year`.

```r
# Aninhando funções
arrange(select(sw, name, birth_year), desc(birth_year))

# Criando um objeto intermediário
sw_aux <- select(sw, name, birth_year)
arrange(sw_aux, desc(birth_year))
```

```
# Usando pipe
sw %>%
  select(name, birth_year) %>%
  arrange(desc(birth_year))
```

30.1.3 Filtrando linhas

Utilize a base `sw` nos exercícios a seguir.

1. Crie um objeto chamado `humanos` apenas com personagens que sejam humanos.

```
humanos <- filter(sw, species == "Human")

# O pipe
humanos <- sw %>%
  filter(species == "Human")
```

2. Crie um objeto chamado `altos_fortes` com personagens que tenham mais de 200 cm de altura e peso maior que 100 kg.

```
altos_fortes <- filter(sw, height > 200, mass > 100)
```

3. Retorne tabelas (`tibbles`) apenas com:

a. Personagens humanos que nasceram antes de 100 anos antes da batalha de Yavin (`birth_year < 100`).

```
filter(sw, species == "Human", birth_year < 100)
```

b. Personagens com cor `light` ou `red`.

```
filter(sw, skin_color == "light" | skin_color == "red")
```

c. Personagens com massa maior que 100 kg, ordenados de forma decrescente por altura, mostrando apenas as colunas `name`, `mass` e `height`.

```
select(arrange(filter(sw, mass > 100), desc(height)), name, mass, height)

# usando o pipe
sw %>%
  filter(mass > 100) %>%
  arrange(desc(height)) %>%
  select(name, mass, height)
```

d. Personagens que sejam "Humano" ou "Droid", e tenham uma altura maior que 170 cm.

```
filter(sw, species == "Human" | species == "Droid", height > 170)

# usando o pipe
sw %>%
  filter(species %in% c("Human", "Droid"), height > 170)
```

e. Personagens que não possuem informação tanto de altura quanto de massa, ou seja, possuem NA em ambas as colunas.

```
filter(sw, is.na(height), is.na(mass))
```

30.1.4 Modificando e criando novas colunas

1. Crie uma coluna chamada `dif_peso_altura` (diferença entre altura e peso) e salve a nova tabela em um objeto chamado `sw_dif`. Em seguida, filtre apenas os personagens que têm altura maior que o peso e ordene a tabela por ordem crescente de `dif_peso_altura`.

```
sw_dif <- mutate(sw, dif_peso_altura = height-mass)

arrange(filter(sw_dif, height > mass), dif_peso_altura)

# usando o pipe
sw_dif <- sw %>%
  mutate(dif_peso_altura = height-mass)

sw_dif %>%
  filter(height > mass) %>%
  arrange(dif_peso_altura)
```

2. Fazendo apenas uma chamada da função `mutate()`, crie as seguintes colunas novas na base `sw`:

a. `indice_massa_altura` = `mass` / `height`

b. `indice_massa_medio` = `mean(mass, na.rm = TRUE)`

c. `indice_relativo` = `(indice_massa_altura - indice_massa_medio) / indice_massa_medio`

d. `acima_media` = `ifelse(indice_massa_altura > indice_massa_medio, "sim", "não")`

```
mutate(sw,
       indice_massa_altura = mass/height,
       indice_massa_medio = mean(mass, na.rm = TRUE),
       indice_relativo = (indice_massa_altura - indice_massa_medio) / indice_massa_medi
       acima_media = ifelse(indice_massa_altura > indice_massa_medio, "sim", "não"))
```

30.1.5 Sumarizando a base

Utilize a base `sw` nos exercícios a seguir.

1. Calcule a altura média e mediana dos personagens.

```
summarize(sw,
          media_altura = mean(height, na.rm=TRUE),
          mediana_altura = median(height, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 1 x 2
##   media_altura mediana_altura
##          <dbl>          <int>
## 1         175.            180
```

2. Calcule a massa média dos personagens cuja altura é maior que 175 cm.

```
sw %>%
  filter(height > 175) %>%
  summarize(media_massa = mean(mass, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 1 x 1
##   media_massa
##         <dbl>
## 1        87.2
```

3. Apresente na mesma tabela a massa média dos personagens com altura menor que 175 cm e a massa média dos personagens com altura maior ou igual a 175 cm.

```
sw %>%
  mutate(alturas = ifelse(height < 175, "menor 175", "maior 175")) %>%
  filter(!is.na(height)) %>%
  group_by(alturas) %>%
  summarize(altura_media = mean(height, na.rm=TRUE)
  )
```

```
## # A tibble: 2 x 2
##   alturas   altura_media
##   <chr>            <dbl>
## 1 maior 175         193.
## 2 menor 175         142.
```

4. Retorne tabelas (`tibbles`) apenas com:

a. A altura média dos personagens por espécie.

```
sw %>%
  group_by(species) %>%
  summarize(altura_media = mean(height, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 38 x 2
##    species   altura_media
##    <chr>            <dbl>
##  1 Aleena             79
##  2 Besalisk          198
##  3 Cerean            198
##  4 Chagrian          196
##  5 Clawdite          168
##  6 Droid             131.
##  7 Dug               112
##  8 Ewok               88
##  9 Geonosian         183
## 10 Gungan            209.
## # i 28 more rows
```

b. A massa média e mediana dos personagens por espécie.

```
sw %>%
  filter(!is.na(mass)) %>%
  group_by(species) %>%
  summarize(massa_media = mean(mass, na.rm = TRUE),
            massa_mediana = median(mass, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 32 x 3
##    species   massa_media massa_mediana
##    <chr>           <dbl>         <dbl>
##  1 Aleena             15            15
##  2 Besalisk          102           102
##  3 Cerean             82            82
##  4 Clawdite           55            55
```

```
##  5 Droid            69.8          53.5
##  6 Dug              40            40
##  7 Ewok             20            20
##  8 Geonosian        80            80
##  9 Gungan           74            74
## 10 Human            81.3          79
## # i 22 more rows
```

c. Apenas o nome dos personagens que participaram de mais de 2 filmes.

```
sw %>%
  filter(length(films) > 2) %>%
  select(name)
```

```
## # A tibble: 87 x 1
##    name
##    <chr>
##  1 Luke Skywalker
##  2 C-3PO
##  3 R2-D2
##  4 Darth Vader
##  5 Leia Organa
##  6 Owen Lars
##  7 Beru Whitesun Lars
##  8 R5-D4
##  9 Biggs Darklighter
## 10 Obi-Wan Kenobi
## # i 77 more rows
```