Двойственные пространства

1 Определение

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Линейной формой(или линейным функционалом) будем называть такой гомоморфизм(который очевидно является линейным отображением) вида $\omega : V \to \mathbb{K}$. Множество $Hom(V, \mathbb{K})$ таких линейных форм принято называть двойственным к V и обозначаь V^*.

В силу обладания свойствами линейного отображения образ линейной формы однозначно определяется образом базиса:

$$v \in V, \omega(v) = \omega(\sum_{i \in I} x_i e_i) = \sum_{i \in I} x_i \omega(e_i).$$

Также важно заметить, что даже если базис бесконечен, в (однозначном) разложении любого вектора v по базису имеется лишь конечное число ненулевых коэффициентов коэффициентов x_i.

Справедливо сформулировать следущее

Предложение 1.*После фиксирования в V базиса $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in I}$ можно построить изоморфизм двойственного пространства V^* и координатного пространства (которое по сути является пространством функций $Hom(E, \mathbb{K})$) поля $\mathbb{K}$ в количестве $|\mathcal{E}|$ элементов базиса, который переводит линейную форму $\omega \in V^*$ в ее ограничение на базис.*

2 Координатные функционалы

Для каждого базиса $\{e_v\} \in V$ существует набор определенных линейных форм $\{e_v^*\} \in V^*$, которые переводят вектор $V \ni v = \sum_{i \in I} x_i e_i$ в его координату x_i вдоль e_i:

$$e_i^* : e_j \mapsto \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} \tag{1}$$

Предложение 2. Координатные функционалы любого базиса пространства V линейно независимы в V^*.

Доказательство. Пусть $\sum \lambda_j e_j^* = 0$ в V^*, где сумма в левой части может содержать лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Вычисляя обе части на базисном векторе e_i, получаем, что $\lambda_i = 0$ при любом i;

Пример: двойственное пространство для $\mathbb{K}[x]$. Применительно к простраству многочленов $V = \mathbb{K}[x]$ изоморфизм из предложения 1, построенный по стандартному базису $\{x^t\}_{t \geq 0}$ из мономов, отождествляет $\mathbb{K}[x]^*$ с прямым произведением счетного семейства одномерных пространств $\bigotimes_{t \geq 0} x^t$, которое можно в свою очередь отождествить с пространством формальных стпенных рядов от другой переменной q, обозначая базисный вектор i-го одномерного пространства q^i. Мы получаем изоморфизм $\mathbb{K}[x]^* \to \mathbb{K}[[q]]$, переводящий функцию для его значения на мономах от x:

$$\varphi \mapsto \sum_{k \geq 0} \varphi(x^k) q^k \in \mathbb{K}[[q]]. \tag{2}$$

Координатные функционалы мономиального базиса x^i переводят при этом в мономы q^i, которые не порождают всего пространства $\mathbb{K}[[q]]$. Так, с каждой точкой $a \in \mathbb{K}$ связян форма вычисления

$$ev_a : \mathbb{K}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(a)} \mathbb{K},$$

сопоставляющий многочленам их значения в точке a. Изоморфизм (2) переводит его в геометрическую прогрессию $\gamma_a(t) = (1 - at)^{-1}$, которая при $a \neq 0$ не лежит в линейной оболочке мономов q^i.