

Deux approches à L'IRRÉVERSIBILITÉ

Renaud Raquépas, NYU Courant
Université de Sherbrooke
14 mars 2025

coll. Cristadoro, Cuneo, Degli Esposti, Jakšić



Formulation du problème

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T ,

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T ,

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T , $C([0, T]; \mathbf{R}^d)$,

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T , $C([0, T]; \mathbf{R}^d)$, $\mathcal{D}_{\text{Sk}}([0, T]; T^*\mathcal{M})$

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T , $C([0, T]; \mathbf{R}^d)$, $\mathcal{D}_{\text{Sk}}([0, T]; T^*\mathcal{M})$

π_T — restrictions $\pi_T : \bigcup_{s \geq 0} \Gamma_{T+s} \rightarrow \Gamma_T$ Lipschitziennes telles que

$$\pi_T \circ \pi_{T+s} = \pi_T$$

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T , $C([0, T]; \mathbf{R}^d)$, $\mathcal{D}_{\text{Sk}}([0, T]; T^*\mathcal{M})$

π_T — restrictions $\pi_T : \bigcup_{s \geq 0} \Gamma_{T+s} \rightarrow \Gamma_T$ Lipschitziennes telles que

$$\pi_T \circ \pi_{T+s} = \pi_T$$

ϕ_s — décalages $\phi_s : \bigcup_{t \geq 0} \Gamma_{t+s} \rightarrow \Gamma_t$ Lipschitziens tels que

$$\phi_{s'} \circ \phi_s = \phi_{s+s'}$$

Formulation du problème

Γ_T — espaces métriques de trajectoires jusqu'au temps T
par exemple A^T , \mathcal{M}^T , $C([0, T]; \mathbf{R}^d)$, $\mathcal{D}_{\text{Sk}}([0, T]; T^*\mathcal{M})$

π_T — restrictions $\pi_T : \bigcup_{s \geq 0} \Gamma_{T+s} \rightarrow \Gamma_T$ Lipschitziennes telles que

$$\pi_T \circ \pi_{T+s} = \pi_T$$

ϕ_s — décalages $\phi_s : \bigcup_{t \geq 0} \Gamma_{t+s} \rightarrow \Gamma_t$ Lipschitziens tels que

$$\phi_{s'} \circ \phi_s = \phi_{s+s'}$$

Θ_T — isométries involutives $\Theta_T : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ telles que

$$\Theta_T \circ \pi_T \circ \Theta_{T+s} = \phi_s \quad \text{sur } \Gamma_{T+s}$$

Formulation du problème

On considère une famille *consistante* $(\mathbb{P}_T)_T$ constituée de mesures Boréliennes \mathbb{P}_T sur Γ_T :

$$\mathbb{P}_{T+s} \circ \pi_T^{-1} = \mathbb{P}_T$$

Formulation du problème

On considère une famille *consistante* $(\mathbb{P}_T)_T$ constituée de mesures Boréliennes \mathbb{P}_T sur Γ_T :

$$\mathbb{P}_{T+s} \circ \pi_T^{-1} = \mathbb{P}_T$$

Une telle famille être, ou ne pas être,

Stationnaire $\mathbb{P}_{T+s} \circ \phi_s^{-1} = \mathbb{P}_T$ c.-à-d. $\phi_s \gamma_{T+s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \gamma_T$,

Formulation du problème

On considère une famille *consistante* $(\mathbb{P}_T)_T$ constituée de mesures Boréliennes \mathbb{P}_T sur Γ_T :

$$\mathbb{P}_{T+s} \circ \pi_T^{-1} = \mathbb{P}_T$$

Une telle famille être, ou ne pas être,

Stationnaire $\mathbb{P}_{T+s} \circ \phi_s^{-1} = \mathbb{P}_T$ c.-à-d. $\phi_s \gamma_{T+s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \gamma_T$,

Réversible $\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1} = \mathbb{P}_T$ c.-à-d. $\Theta_T \gamma_T \stackrel{\mathcal{D}}{=} \gamma_T$.

Formulation du problème

On considère une famille *consistante* $(\mathbb{P}_T)_T$ constituée de mesures Boréliennes \mathbb{P}_T sur Γ_T :

$$\mathbb{P}_{T+s} \circ \pi_T^{-1} = \mathbb{P}_T$$

Une telle famille être, ou ne pas être,

Stationnaire	$\mathbb{P}_{T+s} \circ \phi_s^{-1} = \mathbb{P}_T$	c.-à-d.	$\phi_s \gamma_{T+s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \gamma_T,$
Réversible	$\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1} = \mathbb{P}_T$	c.-à-d.	$\Theta_T \gamma_T \stackrel{\mathcal{D}}{=} \gamma_T.$

Question centrale. Pour une famille consistante, comment quantifie-t-on un échec persistant de la réversibilité dans la limite $T \rightarrow \infty$?

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

Ho) La trajectoire γ_T est un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T ;

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

- H₀)** La trajectoire γ_T est un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T ;
- H₁)** La trajectoire γ_T est le *renversement* d'un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

H0) La trajectoire γ_T est un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T ;

H1) La trajectoire γ_T est le *renversement* d'un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T

La *théorie de Neyman–Pearson* suggère de décider en comparant à un certain seuil

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})},$$

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

H0) La trajectoire γ_T est un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T ;

H1) La trajectoire γ_T est le *renversement* d'un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T

La *théorie de Neyman–Pearson* suggère de décider en comparant à un certain seuil

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})},$$

ici appelée **production d'entropie (PE)**.

Approche 1 : la production d'entropie

On peut prendre le point de vue du test d'hypothèse pour $\gamma_T \in \Gamma_T$:

H0) La trajectoire γ_T est un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T ;

H1) La trajectoire γ_T est le *renversement* d'un échantillon de la mesure \mathbb{P}_T

La *théorie de Neyman–Pearson* suggère de décider en comparant à un certain seuil

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})},$$

ici appelée **production d'entropie (PE)**.

Note. La valeur moyenne de S_T p.r.à \mathbb{P}_T est positive et typiquement $O(T)$.

Approche 1 : la production d'entropie

L'analyse de l'asymptotique de la probabilité de se tromper devient un problème de *grandes déviations*

Approche 1 : la production d'entropie

L'analyse de l'asymptotique de la probabilité de se tromper devient un problème de *grandes déviations* : comment se comporte par exemple

$$\mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) < 0 \right\} ?$$

Approche 1 : la production d'entropie

L'analyse de l'asymptotique de la probabilité de se tromper devient un problème de *grandes déviations* : comment se comporte par exemple

$$\mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) < 0 \right\} ?$$

On cherche $I : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty]$ t.q.

$$\begin{aligned} - \inf_{\mathfrak{s} \in E^\circ} I(\mathfrak{s}) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \leq - \inf_{\mathfrak{s} \in \bar{E}} I(\mathfrak{s}) \end{aligned}$$

pour tout ensemble Borélien E .

Approche 1 : la production d'entropie

Principe des grandes déviations (PDG). Il existe $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ t.q.

$$\begin{aligned} -\inf_{\mathfrak{s} \in E^\circ} I(\mathfrak{s}) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \leq -\inf_{\mathfrak{s} \in \bar{E}} I(\mathfrak{s}) \end{aligned}$$

pour tout ensemble Borélien E .

Approche 1 : la production d'entropie

Principe des grandes déviations (PDG). Il existe $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ t.q.

$$\begin{aligned} -\inf_{s \in E^\circ} I(s) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbb{P}_T \left\{ \gamma_T \in \Gamma_T : \frac{1}{T} S_T(\gamma_T) \in E \right\} \leq -\inf_{s \in \bar{E}} I(s) \end{aligned}$$

pour tout ensemble Borélien E .

Travaux phares : L. Boltzmann (méca. stat., années 1870), F. Esscher (assurances, années 1930), H. Cramér (années 1930), V.V. Petrov et I.N. Sanov (années 1950)
M.D. Donsker et S.R.S. Varadhan (probabilités, années 1960 et 1970),
E.G.D. Cohen, G. Gallavotti et D. Ruelle (mécanique statistique, années 1990)

Approche 1 : la production d'entropie

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

et

$$\bar{R}_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \Theta_T \gamma_T\| < \epsilon\}$$

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

et

$$\bar{R}_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \Theta_T \gamma_T\| < \epsilon\}$$

dans la limite $T \rightarrow \infty$.

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

et

$$\bar{R}_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \Theta_T \gamma_T\| < \epsilon\}$$

dans la limite $T \rightarrow \infty$.

En première approximation,

$$R_T^\epsilon(\gamma) \sim \frac{1}{\mathbb{P}_T(B_\epsilon(\gamma_T))}$$

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

et

$$\bar{R}_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \Theta_T \gamma_T\| < \epsilon\}$$

dans la limite $T \rightarrow \infty$.

En première approximation,

$$R_T^\epsilon(\gamma) \sim \frac{1}{\mathbb{P}_T(B_\epsilon(\gamma_T))} \quad \text{et} \quad \bar{R}_T^\epsilon(\gamma) \sim \frac{1}{\mathbb{P}_T(B_\epsilon(\Theta_T \gamma_T))}.$$

Approche 2 : comparaison des récurrences

Comparer les lois des **temps de retour**

$$R_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \gamma_T\| < \epsilon\}$$

et

$$\bar{R}_T^\epsilon(\gamma) := \inf \{r \geq T : \|\phi_r \gamma_{r+T} - \Theta_T \gamma_T\| < \epsilon\}$$

dans la limite $T \rightarrow \infty$.

En première approximation,

$$R_T^\epsilon(\gamma) \sim \frac{1}{\mathbb{P}_T(B_\epsilon(\gamma_T))} \quad \text{et} \quad \bar{R}_T^\epsilon(\gamma) \sim \frac{1}{\mathbb{P}_T(B_\epsilon(\Theta_T \gamma_T))}.$$

Il y a donc espoir que

$$\ln \frac{\bar{R}_T^\epsilon}{R_T^\epsilon} \sim \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})} = S_T.$$

Approche 2 : comparaison des récurrences

Approche 1

La production d'entropie

mécanique Hamiltonienne • dynamique stochastique effective
outils analytiques • résultats de grandes déviations

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

on a une fonction lisse $H(q, -p) = H(q, p) = K(p) + V(q)$ aux ensembles de sous-niveaux compacts

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

on a une fonction lisse $H(q, -p) = H(q, p) = K(p) + V(q)$ aux ensembles de sous-niveaux compacts, et

$$\pi_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t), p(t))_{t \in [0, T]},$$

$$\phi_s : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t+s), p(t+s))_{t \in [0, T]},$$

$$\Theta_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T]} \mapsto (q(T-t), -p(T-t))_{t \in [0, T]}.$$

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

on a une fonction lisse $H(q, -p) = H(q, p) = K(p) + V(q)$ aux ensembles de sous-niveaux compacts, et

$$\pi_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t), p(t))_{t \in [0, T]},$$

$$\phi_s : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t+s), p(t+s))_{t \in [0, T]},$$

$$\Theta_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T]} \mapsto (q(T-t), -p(T-t))_{t \in [0, T]}.$$

Choix naturel pour \mathbb{P}_T : mesure image d'une condition init. aléatoire λ par le flot.

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

on a une fonction lisse $H(q, -p) = H(q, p) = K(p) + V(q)$ aux ensembles de sous-niveaux compacts, et

$$\pi_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t), p(t))_{t \in [0, T]},$$

$$\phi_s : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t+s), p(t+s))_{t \in [0, T]},$$

$$\Theta_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T]} \mapsto (q(T-t), -p(T-t))_{t \in [0, T]}.$$

Choix naturel pour \mathbb{P}_T : mesure image d'une condition init. aléatoire λ par le flot.
Dans ce cas,

$$S_T = \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0), p(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T), p(T))$$

ne croît pas linéairement en T .

Exemple : mécanique classique

En mécanique classique, les trajectoires sont des courbes

$$t \mapsto (q(t), p(t)) \in T^*\mathcal{M},$$

on a une fonction lisse $H(q, -p) = H(q, p) = K(p) + V(q)$ aux ensembles de sous-niveaux compacts, et

$$\pi_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t), p(t))_{t \in [0, T]},$$

$$\phi_s : (q(t), p(t))_{t \in [0, T+s]} \mapsto (q(t+s), p(t+s))_{t \in [0, T]},$$

$$\Theta_T : (q(t), p(t))_{t \in [0, T]} \mapsto (q(T-t), -p(T-t))_{t \in [0, T]}.$$

Choix naturel pour \mathbb{P}_T : mesure image d'une condition init. aléatoire λ par le flot.
Dans ce cas,

$$S_T = \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0), p(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T), p(T))$$

ne croît pas linéairement en T .

Un échec persistant de la réversibilité ne peut pas être observé dans ce cadre.

Exemple : diffusions non dégénérées

On oublie p et on considère une équation *effective* pour $q \in \mathbf{R}^d$ de la forme

$$dq_t = -\nabla V(q_t) dt + b(q_t) dt + \sqrt{2\epsilon} dw_t.$$

Exemple : diffusions non dégénérées

On oublie p et on considère une équation *effective* pour $q \in \mathbf{R}^d$ de la forme

$$dq_t = -\nabla V(q_t) dt + b(q_t) dt + \sqrt{2\epsilon} dw_t.$$

Exemple : diffusions non dégénérées

On oublie p et on considère une équation *effective* pour $q \in \mathbf{R}^d$ de la forme

$$dq_t = -\nabla V(q_t) dt + b(q_t) dt + \sqrt{2\epsilon} dw_t.$$

Exemple : diffusions non dégénérées

On oublie p et on considère une équation *effective* pour $q \in \mathbf{R}^d$ de la forme

$$dq_t = -\nabla V(q_t) dt + b(q_t) dt + \sqrt{2\epsilon} dw_t.$$

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}$$

est plutôt abstraite...

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}$$

est plutôt abstraite... on préférera travailler avec la représentation

$$\begin{aligned} S_T(\gamma) &= \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} V(q(0)) - \frac{1}{\epsilon} V(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(q_t), \circ dq_t \rangle. \end{aligned}$$

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}$$

est plutôt abstraite... on préférera travailler avec la représentation

$$\begin{aligned} S_T(\gamma) &= \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} V(q(0)) - \frac{1}{\epsilon} V(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(q_t), \circ dq_t \rangle. \end{aligned}$$

Deux avantages :

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}$$

est plutôt abstraite... on préférera travailler avec la représentation

$$\begin{aligned} S_T(\gamma) = & \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T)) \\ & + \frac{1}{\epsilon} V(q(0)) - \frac{1}{\epsilon} V(q(T)) \\ & + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(q_t), \circ dq_t \rangle. \end{aligned}$$

Deux avantages :

- La fonction génératrice des moments peut alors être décrite par une ÉDP : formalisme de Feynman–Kac

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}$$

est plutôt abstraite... on préférera travailler avec la représentation

$$\begin{aligned} S_T(\gamma) &= \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} V(q(0)) - \frac{1}{\epsilon} V(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(q_t), \circ dq_t \rangle. \end{aligned}$$

Deux avantages :

- La fonction génératrice des moments peut alors être décrite par une ÉDP : formalisme de Feynman–Kac
- Interprétation physique selon $dS = \beta \delta Q$ et $dV = -\delta W + \delta Q$.

Premières observations

La définition

$$S_T := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_t^{-1})}$$

est plutôt abstraite... on préférera travailler avec la représentation

$$\begin{aligned} S_T(\gamma) &= \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(0)) - \ln \frac{d\lambda}{d\text{Leb}}(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} V(q(0)) - \frac{1}{\epsilon} V(q(T)) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(q_t), \circ dq_t \rangle. \end{aligned}$$

Deux avantages :

- La fonction génératrice des moments peut alors être décrite par une ÉDP : formalisme de Feynman–Kac
- Interprétation physique selon $dS = \beta \delta Q$ et $dV = -\delta W + \delta Q$.

Résultats de grandes déviations

Théorème (Bertini–Di Gesù ‘15, Raquépas ‘24). Les familles

$$S_T(\gamma) := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}(\gamma) \quad \text{et} \quad W_T(\gamma) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(\gamma_t), \circ d\gamma_t \rangle.$$

satisfont le même principe des grandes déviations local

Résultats de grandes déviations

Théorème (Bertini–Di Gesù ‘15, Raquépas ‘24). Les familles

$$S_T(\gamma) := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}(\gamma) \quad \text{et} \quad W_T(\gamma) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(\gamma_t), \circ d\gamma_t \rangle.$$

satisfont le même principe des grandes déviations local avec une fonction de taux I obtenue comme transfo. de Legendre en α de la plus grande valeur propre de $\Lambda(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle$.

Résultats de grandes déviations

Théorème (Bertini–Di Gesù ‘15, Raquépas ‘24). Les familles

$$S_T(\gamma) := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}(\gamma) \quad \text{et} \quad W_T(\gamma) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(\gamma_t), \circ d\gamma_t \rangle.$$

satisfont le même principe des grandes déviations local avec une fonction de taux I obtenue comme transfo. de Legendre en α de la plus grande valeur propre de $\Lambda(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle$.

[LS99] donnent les argument formels.

Résultats de grandes déviations

Théorème (Bertini–Di Gesù ‘15, Raquépas ‘24). Les familles

$$S_T(\gamma) := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}(\gamma) \quad \text{et} \quad W_T(\gamma) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(\gamma_t), \circ d\gamma_t \rangle.$$

satisfont le même principe des grandes déviations local avec une fonction de taux I obtenue comme transfo. de Legendre en α de la plus grande valeur propre de $\Lambda(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle$.

[LS99] donnent les argument formels.

[BDG15] démontrent le PGD pour W_T avec $\|b\|_\infty < \infty$ et $\langle b, \nabla V \rangle \equiv 0$.

Résultats de grandes déviations

Théorème (Bertini–Di Gesù ‘15, Raquépas ‘24). Les familles

$$S_T(\gamma) := \ln \frac{d\mathbb{P}_T}{d(\mathbb{P}_T \circ \Theta_T^{-1})}(\gamma) \quad \text{et} \quad W_T(\gamma) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle b(\gamma_t), \circ d\gamma_t \rangle.$$

satisfont le même principe des grandes déviations local avec une fonction de taux I obtenue comme transfo. de Legendre en α de la plus grande valeur propre de $\Lambda(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle$.

- [LS99] donnent les argument formels.
- [BDG15] démontrent le PGD pour W_T avec $\|b\|_\infty < \infty$ et $\langle b, \nabla V \rangle \equiv 0$.
- [R24] démontre et relie les PGD locaux pour S_T et W_T avec $|b| \lesssim |\nabla V|$ Lipschitzien et $\langle b, \nabla V \rangle \leq \frac{1}{2+\delta} |\nabla V|^2$.

Démonstration des grandes déviations

Étapes clefs de la démonstration

- Démontrer la formule reliant S_T et W_T
 - Approximations pour b
 - Girsanov

Démonstration des grandes déviations

Étapes clefs de la démonstration

- Démontrer la formule reliant S_T et W_T
 - Approximations pour b
 - Girsanov
- Lier la fonction génératrice à une ÉDP
 - Choix des bons espaces L^p
 - Approximation pour b
 - Feynman–Kac
 - Girsanov

Démonstration des grandes déviations

Étapes clefs de la démonstration

- Démontrer la formule reliant S_T et W_T
 - Approximations pour b
 - Girsanov
- Lier la fonction génératrice à une ÉDP
 - Choix des bons espaces L^p
 - Approximation pour b
 - Feynman–Kac
 - Girsanov
- Étudier les propriétés spectrales de l'opérateur différentiel
 - Positivité, analyticité, compacité du semi-groupe

Démonstration des grandes déviations

Étapes clefs de la démonstration

- Démontrer la formule reliant S_T et W_T
 - Approximations pour b
 - Girsanov
- Lier la fonction génératrice à une ÉDP
 - Choix des bons espaces L^p
 - Approximation pour b
 - Feynman–Kac
 - Girsanov
- Étudier les propriétés spectrales de l'opérateur différentiel
 - Positivité, analyticité, compacité du semi-groupe
- Relier la fonction génératrice au PGD
 - Théorie de la perturbation à la Kato
 - Gärtner–Ellis

Résultats de grandes déviations

La fonction de taux $I = I^\epsilon$ qui nous intéresse n'est définie qu'implicitement via la plus grande valeur propre de

$$\Lambda^\epsilon(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle.$$

Résultats de grandes déviations

La fonction de taux $I = I^\epsilon$ qui nous intéresse n'est définie qu'implicitement via la plus grande valeur propre de

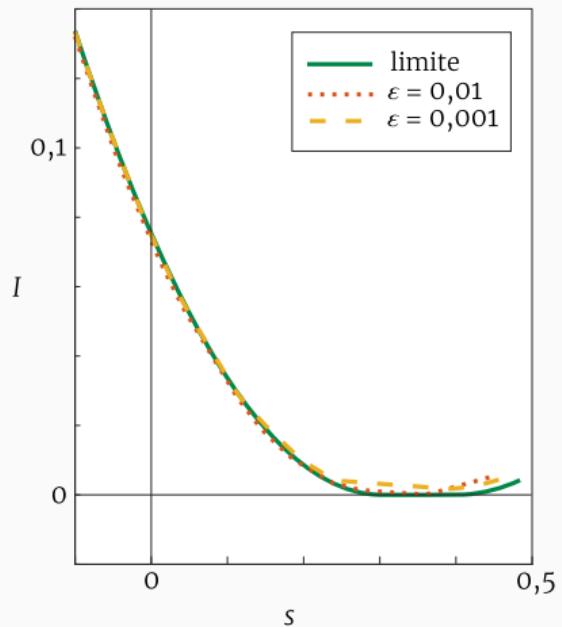
$$\Lambda^\epsilon(\alpha) := \epsilon \Delta + \langle -\nabla V + (1 - 2\alpha)b, \nabla \rangle - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\epsilon} |b|^2 + \frac{\alpha}{\epsilon} \langle b, \nabla V \rangle.$$

Théorème (Raquépas '24). Sous les hypothèses du théorème précédent, et si les points critiques de V sont non dégénérés, alors

$$I^0(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I^\epsilon(s)$$

existe et peut être calculée selon un algorithme matriciel simple.

Résultats de grandes déviations



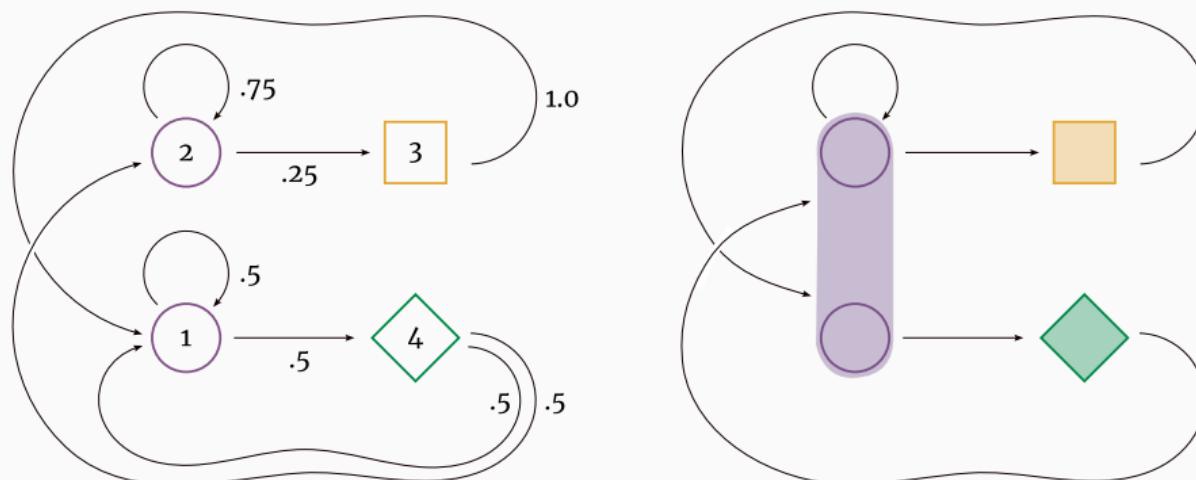
Approche 2 Comparaisons de récurrences

dynamiques symboliques • temps de retour • récurrence et entropie •
résultats de grandes déviations

Cadre discret

Sur l'ensemble A^N de suites à valeur dans l'ensemble fini A , on a les opérations

$$\begin{array}{lll} \pi_n(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) & \rightsquigarrow & \pi_n a_1^{n+1} = a_1^n, \\ \phi_1(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = (a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) & \rightsquigarrow & \phi_1 a_1^{n+1} = a_2^{n+1}, \\ \Theta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) & \rightsquigarrow & \Theta_n a_1^n = \overleftarrow{a_1^n}, \end{array}$$



Cadre discret

On s'intéresse à

$$R_n(x) := \inf\{r \geq n : x_{r+1}^{r+n} = x_1^n\},$$
$$\overleftarrow{R_n}(x) := \inf\{r \geq n : x_{r+1}^{r+n} = \overleftarrow{x_1^n}\}.$$

Cadre discret

La relation \mathbb{P} -presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\mathbb{P}_n(x_1^n)}$$

est valide pour toute mesure stationnaire et est comprise depuis les années 1990 (Wyner–Ziv, Nobel–Wyner, Orstein–Weiss, Kontoyiannis).

Cadre discret

La relation \mathbb{P} -presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\mathbb{P}_n(x_1^n)}$$

est valide pour toute mesure stationnaire et est comprise depuis les années 1990 (Wyner–Ziv, Nobel–Wyner, Orstein–Weiss, Kontoyiannis).

La relation \mathbb{P} -presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \overleftarrow{R}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\mathbb{P}_n(\overleftarrow{x_1^n})}$$

n'avait été établie que pour les mesures de Gibbs (Chazottes–Redig '03).

Résultats

Théorème (Cristadoro–Degli Esposti–Jakšić–Raquépas ‘23).

Si \mathbb{P} est une mesure ergodique *découplée*, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \overleftarrow{R}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\mathbb{P}_n(\overleftarrow{x_1^n})}$$

pour \mathbb{P} -presque toute suite x .

Résultats

Théorème (Cristadoro–Degli Esposti–Jakšić–Raquépas ‘23).

Si \mathbb{P} est une mesure ergodique *découplée*, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \overleftarrow{R}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\mathbb{P}_n(\overleftarrow{x_1^n})}$$

pour \mathbb{P} -presque toute suite x .

On veut maintenant comparer les événements rares de

$$\ln \frac{\overleftarrow{R}_n(x)}{R_n(x)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \ln \frac{\mathbb{P}_n(x_1^n)}{\mathbb{P}_n(\overleftarrow{x_1^n})}.$$

Mais le problème des grandes déviations de $\ln R_n$ et $\ln \overleftarrow{R}_n$ n'a été résolu que :

- pour des mesures de Gibbs ;
- dans un intervalle autour de sa moyenne

(Galves *et al.* ‘97–99, Chazottes–Redig ‘05, Abadi *et al.* ‘22).

Grandes déviations

Théorème (Cuneo–Raquépas ‘24).

Si \mathbb{P} est une mesure *ergodique découplée*, alors, p.r.à \mathbb{P} , la suite $(\ln R_n)_n$ satisfait le PGD avec une fonction de taux reliée explicitement, **sur tout \mathbf{R}** , à celle pour $(-\ln \mathbb{P}_n)_n$.

Grandes déviations

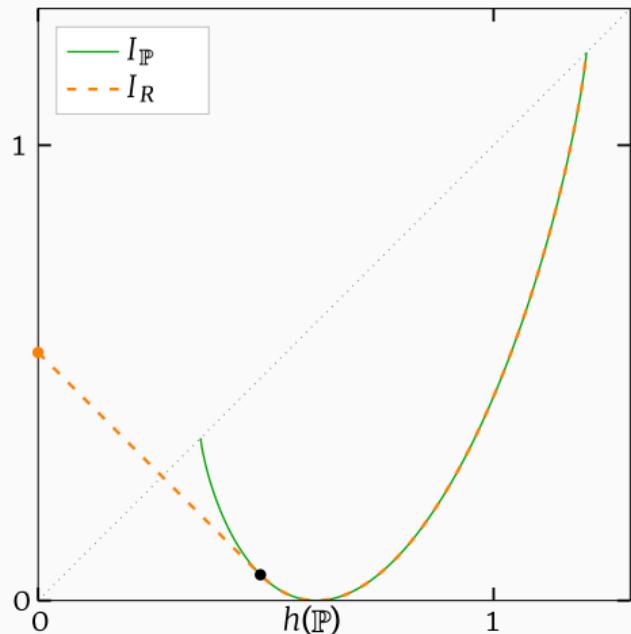
Théorème (Cuneo–Raquépas ‘24).

Si \mathbb{P} est une mesure *ergodique découplée*, alors, p.r.à \mathbb{P} , la suite $(\ln R_n)_n$ satisfait le PGD avec une fonction de taux reliée explicitement, *sur tout R*, à celle pour $(-\ln \mathbb{P}_n)_n$.

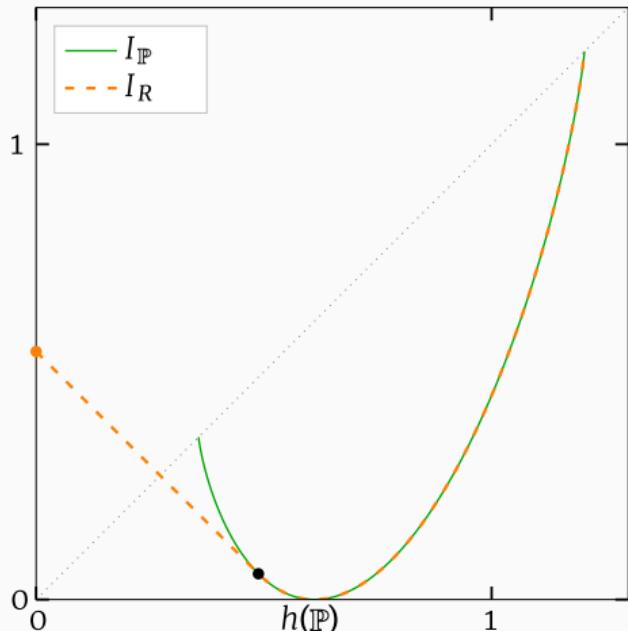
Théorème (Cuneo–Raquépas ‘24).

Si \mathbb{P} est une mesure ergodique *découplée*, alors, p.r.à \mathbb{P} , la suite $(\ln \overleftarrow{R}_n)_n$ satisfait le PGD avec une fonction de taux reliée explicitement, *sur tout R*, à celle pour $(-\ln \overleftarrow{\mathbb{P}}_n)_n$.

Grandes déviations



Grandes déviations



La figure est particulière à un choix de mesure, mais la relation

$$I_R(s) = \inf_{t \geq s} \{t - s + I_{\mathbb{P}}(t)\}$$
$$= \begin{cases} I_{\mathbb{P}}(s) & \text{if } s \geq s_0 \\ I_{\mathbb{P}}(s_0) + |s_0 - s| & \text{if } s < s_0 \end{cases}$$

est universelle dans la classe des mesures découplées.

Conclusion

Quelques questions ouvertes

- Étendre les résultats de l'approche 1 à des ÉDS dégénérées
- Compléter la comparaison des grandes déviations des $\ln \tilde{R}/R$ et $\ln \mathbb{P}/\tilde{\mathbb{P}}$
- Étude des fluctuations d'algorithmes de compression croisée à la Ziv–Merhav

Conclusion

Quelques questions ouvertes

- Étendre les résultats de l'approche 1 à des ÉDS dégénérées
- Compléter la comparaison des grandes déviations des $\ln \bar{R}/R$ et $\ln \bar{\mathbb{P}}/\mathbb{P}$
- Étude des fluctuations d'algorithmes de compression croisée à la Ziv–Merhav

Travaux

- Cristadoro, Degli Esposti, Jakšić et Raquépas. *Stoch. Proc. Appl.* **166** (2023)
- Cristadoro, Degli Esposti, Jakšić et Raquépas. *Lett. Math. Phys.* **112** (2023)
- Raquépas. *Ann. Inst. Henri Poincaré B Probab. Stat.* **60** (2024)
- Cuneo et Raquépas. *Commun. Math. Phys.* **405** (2024)
- Wu, Raquépas, Xin et Zhang. prépublication (2024)

Decoupling conditions

Our result applies to suitably **decoupled** measures,

Decoupling conditions

Our result applies to suitably **decoupled** measures, i.e. measures for which

$$\mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\tau_n}}^{\text{time } o(n)} \underbrace{x_{n+\tau_n+1} \cdots x_{n+\tau_n+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \leq e^{o(n)} \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

and

$$\mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\ell}}^{\text{time } o(n)} \underbrace{x_{n+\ell+1} \cdots x_{n+\ell+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \geq e^{o(n)} \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

Decoupling conditions

Our result applies to suitably **decoupled** measures, i.e. measures for which there exist $C_n = e^{o(n)}$ and $\tau_n = o(n)$ such that :

$$\mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\tau_n}}^{\text{time } \tau_n} \underbrace{x_{n+\tau_n+1} \cdots x_{n+\tau_n+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \leq C_n \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

and

$$\sup_{\ell \leq \tau_n} \mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\ell}}^{\text{time } \ell} \underbrace{x_{n+\ell+1} \cdots x_{n+\ell+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \geq \frac{1}{C_n} \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

for all finite a_1^n and b_1^m , and similarly for $\bar{\mathbb{P}}$.

Decoupling conditions

Our result applies to suitably **decoupled** measures, i.e. measures for which there exist $C_n = e^{o(n)}$ and $\tau_n = o(n)$ such that :

$$\mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\tau_n}}^{\text{time } \tau_n} \underbrace{x_{n+\tau_n+1} \cdots x_{n+\tau_n+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \leq C_n \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

and

$$\sup_{\ell \leq \tau_n} \mathbb{P} \left\{ \underbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}_{a_1^n} \overbrace{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{n+\ell}}^{\text{time } \ell} \underbrace{x_{n+\ell+1} \cdots x_{n+\ell+m}}_{b_1^m} \cdots \right\} \geq \frac{1}{C_n} \mathbb{P}_n(a_1^n) \mathbb{P}_m(b_1^m)$$

for all finite a_1^n and b_1^m , and similarly for $\bar{\mathbb{P}}$.

This is reminiscent of conditions used by Ellis '88, Bryc '92, Bryc–Dembo '96 or Feng '09, but is most directly inspired by works Pfister, Sullivan and Lewis over '95–'19.

Decoupling conditions

These conditions give the following concrete improvements :

- *Markov chains*
positive transition probabilities → irreducible
- *Gibbs measures*
summable-variation potentials on full shifts → Bowen potentials on TTSFTs
- *1-dimensional spin systems*
uniqueness regime → summable interactions (incl. phase-transition regime)

Decoupling conditions

These conditions give the following concrete improvements :

- *Markov chains*
positive transition probabilities → irreducible
- *Gibbs measures*
summable-variation potentials on full shifts → Bowen potentials on TTSFTs
- *1-dimensional spin systems*
uniqueness regime → summable interactions (incl. phase-transition regime)

and

- 1-block factors of irreducible finite-state Markov chains (hidden Markov models)
- g-measures on TTSFTs
- irreducible repeated quantum measurement processes