NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

Løsning til eksamen
TTK 4115 Lineær systemteori

Oppgave 1 (10 %)

a) Antar initialtilstander lik null og benytter Laplace transformasjon:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{-1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{-3t}-e^{t}\right) & e^{-3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A_d &= \Phi(\Delta t) = \Phi(0.25) = \begin{bmatrix} 1.28 & 0 \\ -0.20 & 0.47 \end{bmatrix}, \\ B_d &= A^{-1}(A_d - I)B = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 2 (25 %)

a) Systemet $\dot{x} = Ax$ er Lyapunov stabilt hvis enhver endelig initialtilstand $x(0)$ eksiterer en begrenset respons.

b) Systemet $\dot{x} = Ax$ er Lyapunov stabilt hvis og bare hvis

1. alle egenverdiene til A har ikke-positive realdeler og alle egenverdier med $Re(\lambda_i) = 0$ er enkle røtter av det minimale polynomet av A.
2. alle egenverdiene til A har ikke-positive realdeler og alle egenverdier med $Re(\lambda_i) = 0$ og algebraisk multiplisitet $q_i \geq 2$ har $rank(A - \lambda_i I) = n - q_i$, hvor n er dimensjonen til x.
3. alle egenverdiene til A har ikke-positive realdeler og alle egenverdier med $Re(\lambda_i) = 0$ har en assosiert Jordan blokk av orden 1.

c) Systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu,\\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

er BIBO stabilt hvis enhver begrenset input u eksiterer en bundet respons $y(t)$, altså $\|y(t)\| \leq K$, $\forall t \geq t_0$ for enhver $\|u(t)\| \leq k$.

d) Systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu,\\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

er BIBO stabilt hvis og bare hvis alle polene til transferfunksjonen $\frac{Y}{U}(s) = H(s)$ har alle polene in venstre halvplan.

e) Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$ og dermed er systemet ikke internt(Lyapunov)-stabilt. Transferfunksjonen blir

$$H(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{C(sI - A)^{-1}B\right\} = \frac{1}{s+1},$$

som har pol $p = -1$ og dermed er systemet BIBO-stabilt.

Oppgave 3 (40 %)

a) Systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

er observerbart hvis det for enhver ukjent initialtilstand $x(0)$ eksisterer en endelig tid $t_1 > 0$ slik at kjennskap til signalet u og utgangen y i tidsrommet $[0, t_1]$ er tilstrekkelig til å bestemme $x(0)$ entydig.

Observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$rank(\mathcal{O}) = 2 = n \Rightarrow$ systemet er observerbart.

b) Vi skal plassere polene til $A - LC$ i -5 og -8. Vi har

$$|sI - A + LC| = s^2 + (l_1 + 2)s + 2l_1 + l_2 + 1,$$

og

$$(s+5)(s+8) = s^2 + 13s + 40,$$

som gir $l_1 = 11$ og $l_2 = 17$.

c) Første ligning er kun modellen. Lukket sløyfe estimat er $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(Cx + w - C\hat{x})$. Vi får da

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} = A\hat{x} + L(Cx + w - C\hat{x}) - Ax - Iv \\ &= (A - LC)(\hat{x} - x) - Iv + Lw = (A - LC)\tilde{x} - Iv + Lw.\end{aligned}$$

Vi setter nå $w = 0$ og $v_2 = 0$ og finner transferfunksjonen fra v_1 til $\tilde{x}_1$ og $\tilde{x}_2$.

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} = -(sI - A + LC)^{-1} I \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-s-2}{s^2+13s+40} \\ \frac{18}{s^2+13s+40}\end{bmatrix} v_1$$

Vi ser ved hjelp av sluttverditeoremet at etimeringsfeilen blir konstant for begge tilstandene.

For å unngå dette kan estimatormodellen augmenteres med $\dot{v}_1 = 0$ slik at forstyrrelsen blir estimert. Videre tar vi med v_1 som en tilstand i modellen vår.

d) Skal finne transferfunksjonene $\frac{\tilde{x}_1}{w}(s)$ og $\frac{\tilde{x}_2}{w}(s)$. Setter $v = 0$ og får

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} = (sI - A + LC)^{-1} L w = \begin{bmatrix}\frac{11s+39}{s^2+13s+40} \\ \frac{17s-11}{s^2+13s+40}\end{bmatrix} w$$

Vi ser at målestøyen har innvirkning på estimeringsfeilen. Estimatoren virker som et lavpass filter for $\tilde{x}_1/w$ og som et båndpass rundt ca 6 rad/s for $\tilde{x}_2/w$. Valget av L-matrisen bestemmer hvilke frekvenser som slipper "gjennom" estimatoren og kan dermed velges slik at ønskede frekvenser dempes.

e) Vi skriver systemet på følgende form:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Iv, \\ y &= Cx + w,\end{aligned}$$

hvor matrisene er definert ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kalmanfilteret er gitt ved:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= AP + PA^T - PC^T W^{-1} CP + V,\\ P(0) &= P_0,\end{aligned}$$

hvor matrisene er gitt ved

$$V = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, W = 35.$$

Klamanfilterforsterkningen er gitt ved

$$K = PC^T W^{-1}.$$

f) Vi setter

$$\begin{aligned} AP + PA^T - PC^T W^{-1} CP + V &= 0 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - & \\ \frac{1}{35} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har benyttet at løsningen til Riccati-ligningen er symmetrisk. Vi får tre ligninger:

$$\begin{aligned} -\frac{p_{11}^2}{35} + 2p_{12} + 10 &= 0,\\ -\frac{p_{11}p_{12}}{35} - p_{11} - 2p_{12} + p_{22} &= 0,\\ -\frac{p_{12}^2}{35} - 2p_{12} - 4p_{22} + 2 &= 0, \end{aligned}$$

Etter mye regning kommer en frem til at den positivt definitte løsningen er

$$P = \begin{bmatrix} 10.21 & -3.51 \\ -3.51 & 2.17 \end{bmatrix}.$$

Kalmanfilter-forsterkningen blir da:

$$K = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 10.21 & -3.51 \\ -3.51 & 2.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29 \\ -0.10 \end{bmatrix}.$$

Regner vi ut transferfunksjonen fra målestøyen til estimeringsfeilen i dette tilfellet får vi:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = (sI - A + KC)^{-1}Kw = \begin{bmatrix} \frac{0.29s+0.48}{s^2+2.29s+1.48} \\ \frac{-0.10s-0.29}{s^2+2.29s+1.48} \end{bmatrix} w$$

For lave frekvenser ser vi at målestøyen dempes mer enn sammenlignet med observeren. Vi har også kvittet oss med båndpasseffekten vi hadde med observeren.

Oppgave 4 (15 %)

a) En hvitstøyprosess er stasjonær.

Autokorrelasjonsfunksjonen til $u(t)$ er:

$$R_u(\tau) = \sigma_u^2 \delta(\tau),$$

og effektspekteret er:

$$S_u(j\omega) = \sigma_u^2.$$

b) Vi starter med å finne forventningsverdien:

$$E[x(t)] = E\left[\int_0^t u(\tau)d\tau\right] = \int_0^t E\left[u(\tau)\right]d\tau = 0$$

Variansen blir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x(t)) &= E\left[(x(t) - E[x(t)])^2\right] = E[x(t)^2] \\ &= E\left[\int_0^t u(\tau)d\tau \int_0^t u(\upsilon)d\upsilon\right] = \int_0^t \int_0^t E[u(\tau)u(\upsilon)]d\tau d\upsilon \\ &= \int_0^t \int_0^t R_u(\tau - \upsilon)d\tau d\upsilon = \int_0^t \int_0^t \sigma_u^2 \delta(\tau - \upsilon)d\tau d\upsilon \end{aligned}$$

Så når $\tau = \upsilon$

$$\mathrm{Var}(x(t)) = \int_0^t \int_0^t \sigma_u^2 \delta(\tau - \upsilon)d\tau d\upsilon = \int_0^t \sigma_u^2 d\upsilon = \sigma_u^2 t.$$

Som vi ser er variansen avhengig av t og prosessen er dermed ikke stasjonær.

c)

$$S_x(s) = \frac{s+1}{s+10} \cdot \frac{-s+1}{-s+10} = G(s)G(-s) \Rightarrow G(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

Oppgave 5 (10 %)

Gitt transferfunksjonen

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}e^{-\tau s}.$$

a) Her har vi to klare alternativer la $Y(s) = G(s)U(s)$ eller $Y(s) = G(s)D(s)$, hvor $U(s)$ og $D(s)$ er hendholdvis sprang- og impuls-input.

- Vi starter med sprang, la amplituden være lik 1, altså $U(s) = \frac{1}{s}$. Invers Laplace av $Y(s)$ gir:

  $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\} = K\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right)\mu(t-\tau)$$

  hvor $\mu(t-\tau)$ er enhetssprang i $t = \tau$. Altså, tidsforsinkelsen leses av der responsen blir forskjellig fra null.

- For impulsrespons tar vi inverstransformen av $G(s)$ for å finne $y(t)$

  $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{t-\tau}{T}}\mu(t-\tau)$$

  Tilsvarende finner vi tidsforsinkelsen når responsen blir ulik null.

b) Se på krysskorrelasjonen mellom inngang og utgang. Krysskorrelasjonen er gitt av

$$R_{yu}(\tau) = E[y(t)u(t+\tau)]$$

som vi kan finne ved et måleforsøk. Tiden $R_y u(\tau)$ oppnår sitt maksimum indikerer tidsforsinkelsen.