NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 930 25 534

EKSAMEN I EMNE TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Torsdag 9 august 2012
Tid: kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- Eksamen består av 4 oppgaver.
  - Oppgave 1 omhandler grunnleggende egenskaper ved systemer/filtre.
  - Oppgave 2 omhandler flerhastighets-systemer.
  - Oppgave 3 omhandler filter-strukturer.
  - Oppgave 4 omhandler stasjonære prosesser og parametrisk estimering.
- Vekting av hver deloppgave er angitt i parentes. Totalt antall poeng er 100.
- **Fremgangsmåten skal vises tydelig og alle svar skal begrunnes!**
- Noen grunnleggende formler finnes i vedlegget.
- Faglærer vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10 og andre gang ca. kl. 12:00.

Lykke til!

Oppgave 1 **(6+8+6+5=25 poeng)**

1a) Hvilke egenskaper må være oppfylt hvis et system skal kunne beskrives ved hjelp av en enhetspulsrespons $h(n)$?

Definer egenskapene stabilitet og kausalitet ved hjelp av $h(n)$.

1b) Definer z-transformen $H(z)$ ved hjelp av $h(n)$, $n = -\infty, \infty$.

Hva menes med konvergensområdet (ROC) til $H(z)$?

Hvilket område i z-planet må inngå i ROC hvis et system skal være stabilt? Begrunn svaret.

Skisser ROC i z-planet for et kausalt system.

1c) Gitt et filter med følgende transferfunksjon

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1}}{1 - bz^{-1}} \tag{1}$$

Gitt $a \geq 0$ og $b \geq 0$.

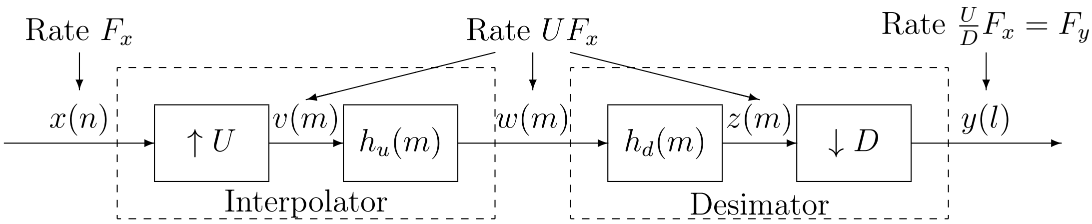
Definer lovlig område for filterkoeffisientene $\{a, b\}$ samt tilsvarende ROC når systemet skal være både stabilt, kausalt og ha minimum fase.

1d) Vis at enhetspulsresponsen $h(n)$ er gitt ved

$$h(n) = b^n u(n) + ab^{n-1} u(n-1) \tag{2}$$

Oppgave 2 (7+8+8=25 poeng)

Gitt følgende blokkdiagram for en generell rate-konverterer. Anta ideelle filtre.



2a) Sett opp uttrykk for $w(m)$, uttrykt ved $x(n)$ og $h_u(m)$.

Sett opp uttrykk for $y(l)$, uttrykt ved $w(m)$ og $h_d(m)$.

Sett opp uttrykk for $y(l)$, uttrykt ved $x(n)$ og $h(m) = h_u(m) * h_d(m)$.

I resten av oppgave 2 er inngangssignalet gitt ved ligning 3 hvor $F_1 = 200$ Hz, $F_2 = 400$ Hz og $F_x = \frac{1}{T_x} = 2000$ Hz

$$x(n) = x_a(nT_x) = \sin(2\pi F_1 nT_x) + 2\sin(2\pi F_2 nT_x) \qquad (3)$$

2b) Skisser $|X(f)|$ for $f \in [0, 0.5]$ hvor $f = \frac{F}{F_x}$.

Skisser $|Y(f)|$ for $f \in [0, 0.5]$ hvor $f = \frac{F}{F_y}$ samt oppgi grensefrekvensen for filteret $h(m)$ i Hz (fysisk frekvens) når $\frac{U}{D} = \frac{1}{2}$.

Skisser $|Y(f)|$ for $f \in [0, 0.5]$ hvor $f = \frac{F}{F_y}$ samt oppgi grensefrekvensen for filteret $h(m)$ i Hz (fysisk frekvens) når $\frac{U}{D} = \frac{2}{1}$.

2c) Skisser $|Y(f)|$ for $f \in [0, 0.5]$ hvor $f = \frac{F}{F_y}$ samt oppgi grensefrekvensen for filteret $h(m)$ i Hz (fysisk frekvens) når $\frac{U}{D} = \frac{2}{3}$.

Skisser $|Y(f)|$ for $f \in [0, 0.5]$ hvor $f = \frac{F}{F_y}$ samt oppgi grensefrekvensen for filteret $h(m)$ i Hz (fysisk frekvens) når $\frac{U}{D} = \frac{1}{3}$.

Oppgave 3 (6+8+5+6=25 poeng)

3a) Gitt følgende stabile filter $H_1(z)$.

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{4}$$

Vis at filteret er et allpass-filter.

I resten av oppgave 3 skal en bruke et stabilt, kausalt filter $H(z)$ på formen

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{5}$$

hvor $H_1(z)$ er gitt i oppgave 3a og $H_2(z)$ er gitt ved

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{6}$$

3b) Vis at $H(z)$ kan omformes til følgende parallellform

$$H(z) = H_3(z) + H_4(z) = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{7}$$

3c) Utled enhetspulsresponsen til $H(z)$

3d) Skisser henholdsvis kaskade og parallell strukturene til $H(z)$.

Oppgave 4 **(7+6+4+8=25 poeng)**

Hvit støy $w(n)$ med effekt σ_w^2 påtrykkes et generelt kausalt, stabilt filter med enhetspulsrespons $g(n) \quad n = 0, \infty$.

Autokorrelasjonsfunksjonen $\gamma_{yy}(m), \quad m = -\infty, \infty$, og effektspekteret $\Gamma_{yy}(z)$ til utgangssignalet $y(n)$ er da gitt ved henholdsvis

$$\gamma_{yy}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g(n)g(n+m) & m \geq 0 \\ \gamma_{yy}(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_w^2 \; G(z)G(z^{-1}) \tag{9}$$

I oppgave 4 skal en bruke filtrene $H_1(z)$ og $H_3(z)$ fra oppgave 3.

4a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen til utgangen $y(n)$ når $G(z) = H_3(z)$.

4b) Finn autokorrelasjonsfunksjonen til utgangen $y(n)$ når $G(z) = H_1(z)$.

4c) Hvilke typer parametriske prosesser representerer utgangen $y(n)$ når hvit støy påtrykkes henholdsvis $H_1(z)$ og $H_3(z)$?

4d) Finn prosess-parametrene til den beste AR[1]-modellen til utgangssignalet $y(n)$ når filteret er gitt av henholdsvis $H_1(z)$ og $H_3(z)$.

Gi en kort begrunnelse for resultatene.

Some basic equations and formulaes.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k)$$
$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow Y(k) = H(k)X(k) \quad k = 0, ..., N-1$$

C. Transforms :

$$H(z) = \sum_n h(n)z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf}$$
$$H(k) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1$$
$$h(n) = \sum_k H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., N-1$$

D. The sampling theorem :

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $x(n)$ with finite energy E_x :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{xx}(m) = \sum_n x(n)x(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}) \Rightarrow S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_x = \sum_n x^2(n) = \int_0^{2\pi} |X(f)|^2 df = \int_0^{2\pi} S_{xx}(f) df$$

F. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

$$\text{Autocorrelation :} \quad \gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \ m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Power spectrum:} \quad \Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$$

$$\text{Wiener-Khintchin :} \quad \Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m) = \sum_m \gamma_{xx}(m) \ e^{-j2\pi mf}$$

G. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

$$\text{Yule-Walker equations :} \quad \sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \ \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

$$\text{Normal equations:} \quad \sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$