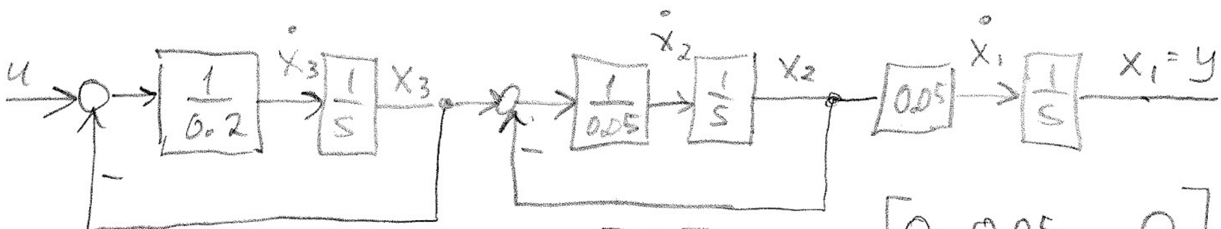
Løsningsforslag TTK 4105 reguleringsteknikk
9. august 2005 (T.A.)

1a) $h_{\varphi z} = \dfrac{0.05}{s(1+0.2s)(1+0.05s)} = \dfrac{5}{s^3+25s^2+100s}$

Metode I: fasevariabel form, (V.13):

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -100 & -25 \end{bmatrix}$$

Metode II: danne elementært blokkdiagram:



$$\Rightarrow \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Begge svar godtas!

1b) h_0 med bare K_p får to reine integrasjoner i serie med to 1.-ordensledd. $\angle h_0$ vil da $< -180^\circ \ \forall K_p$. Systemet vil være ustabilt $\forall K_p$.

1c) $h_t = K_t$ endrer h_{uz} til $h_{uz}^{(2)} = \dfrac{\frac{50}{s(1+0.02s)}}{1 + K_t \frac{50}{s(1+0.02s)}}$

$\Rightarrow h_{uz}^{(2)} = \dfrac{50}{0.02s^2 + s + 50K_t} \Rightarrow \angle h_{uz}^{(2)} = 0$ for lave frekvenser, og kan holdes nær 0 til høy båndbredde ved å velge K_t stor. Mens $\angle h_{uz}$ starter med -90° ved lav frekvens, og faller mot -180° for $\omega > 50$. $\Rightarrow h_{uz}^{(2)}$ gjør stabilt system mulig! MEN:

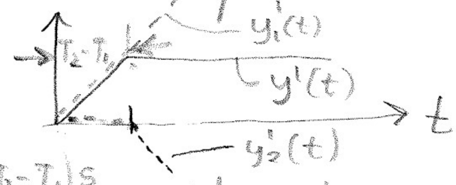
Samtidig forsvinner den ene av to rene integrasjoner i h_0. Dermed mister systemet evnen til å følge referansen uten stasjonært avvik.

2a) Sprangresponsen kan betraktes som en sum av to responser: $k_1\mu_1(t) + (k_2-k_1)(1-e^{-\frac{t}{T}})$

Laplacetransformert er dette $\frac{k_1}{s} + (k_2-k_1)\frac{1}{s(1+Ts)} = h(s)\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow h(s) = k_1 + \frac{k_2-k_1}{1+Ts} = \frac{k_1+k_1Ts+k_2-k_1}{1+Ts} = k_2\frac{1+\frac{k_1}{k_2}Ts}{1+Ts}$$

2b) Deler problemet i to. Setter først $T_1=0$ og finner en transferfunksjon $h'(s)$. Responsen kan spaltes opp i komponenter som vist her:



$$y'(t) = y_1'(t) + y_2'(t)$$

$$y'(s) = y_1'(s) + y_2'(s) = \frac{k}{T_2-T_1}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{k}{T_2-T_1}\frac{1}{s^2}e^{-(T_2-T_1)s} = h'(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow h'(s) = \frac{k}{T_2-T_1}\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-(T_2-T_1)s}\right)$$

Siden den egentlige responsen er forskjøvet T_1 til høyre, blir da $h(s) = h'(s)e^{-T_1s} = \frac{k}{T_2-T_1}\cdot\frac{1}{s}\left(e^{-T_1s}-e^{-T_2s}\right)$

2c) Begge er a.s.! For impulsresponsene $\rightarrow 0$ når sprangresponsene $\rightarrow$ konst.

3a) $h_0 = K_p\frac{1+T_is}{T_is}\cdot\frac{e^{-\tau s}}{1+Ts} = \frac{K_p}{Ts}e^{-\tau s}$ når $T_i = T$.

$\angle h_0 = -90° - \omega\tau$, spesielt er $-180° = -90° - \omega_{180}\tau \Rightarrow \omega_{180} = \frac{180}{2\tau}$ eller $\frac{\pi}{2\tau}$ i radianer, som brukes fra nå av (dette mellomresultatet var jo oppgitt.)

$|h_0| = \frac{K_p}{T\omega} \Rightarrow \frac{K_{p,krit}}{T\omega_{180}} = 1$, da er $\omega_c = \omega_{180}$, og vi er på stab.grensa.

Dette gir $K_{p,krit.} = \omega_{180}\cdot T = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{T}{\tau}$

3b) $\Delta K = 6dB$ betyr at $K_p = 0{,}5\cdot K_{p,krit} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{T}{\tau}$

Vi må sjekke hva slags φ dette innebærer: Kryssfrekvensen ω_c gis av $|h_0(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{K_p}{T\omega_c} = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{K_p}{T} = \frac{\pi}{4\tau}$

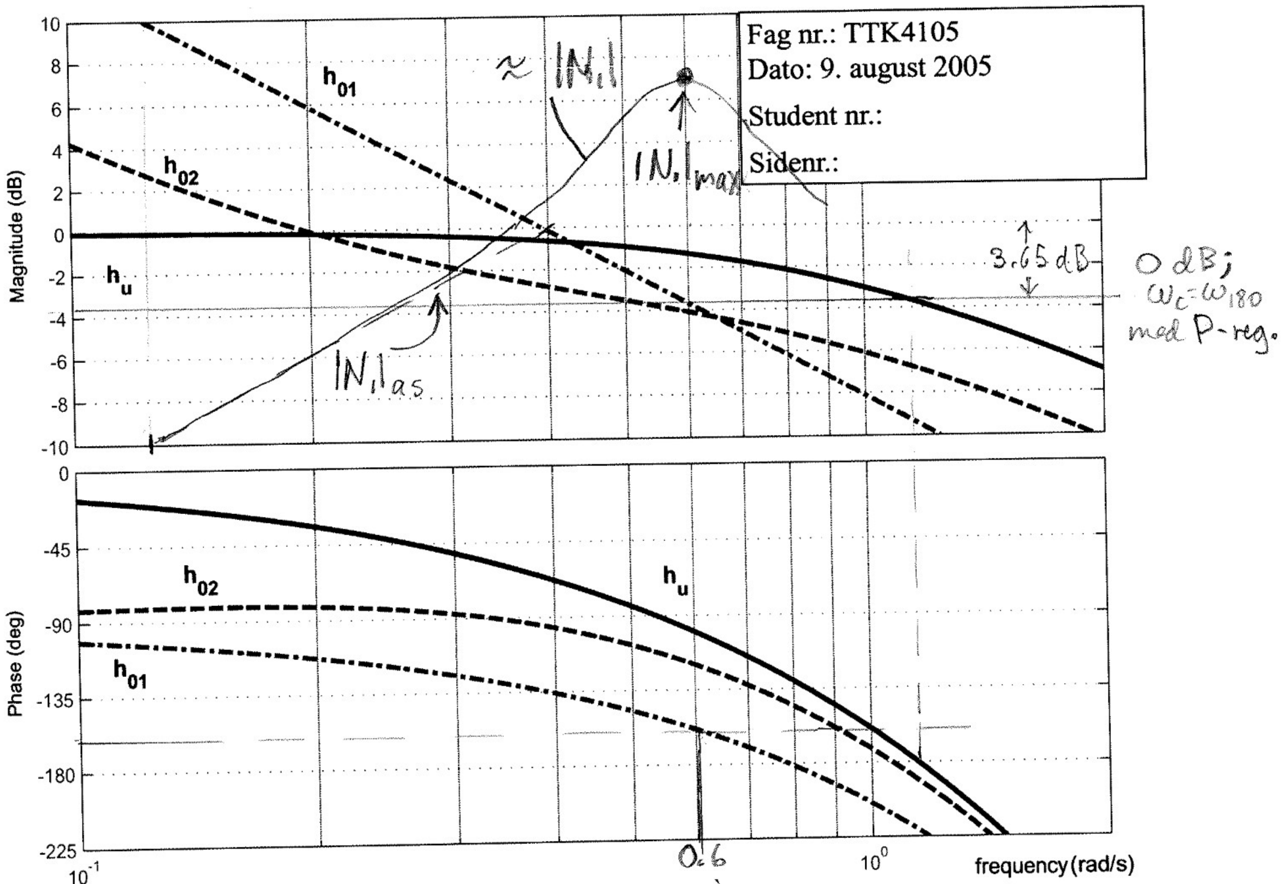
$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - \angle h_0(j\omega_{180}) = -\frac{\pi}{2} - \omega_c\tau - (-\pi)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\tau}\cdot\tau = \frac{\pi}{4} = 45°$. Med andre ord innfrir den initielt valgte K_p også akkurat kravet til ψ, noe som er uvanlig, og som vi måtte sjekke. Vi står derfor fast ved $K_p = \frac{\pi T}{4\tau}$.

3c) Fra h_u i Bodediagrammet: 0-dB linja kan flyttes ≈ 3.65 dB ned. Dette svarer til at $K_{p,krit.} = K_{pk} = 10^{(3.65/20)} \doteq 1.52$. Fra tabell (V.12): $K_p = 0.45\, K_{pk} = \underline{0.685}$

Vi leser av ω_{180} i Bodediagrammet: $\omega_{180} \doteq 1.14$

Fra tabell (V.12): $T_i = T_k/1.2 = \frac{2\pi}{\omega_{180}\cdot 1.2} = \frac{2\pi}{1.14\cdot 1.2} = \underline{4.6}$

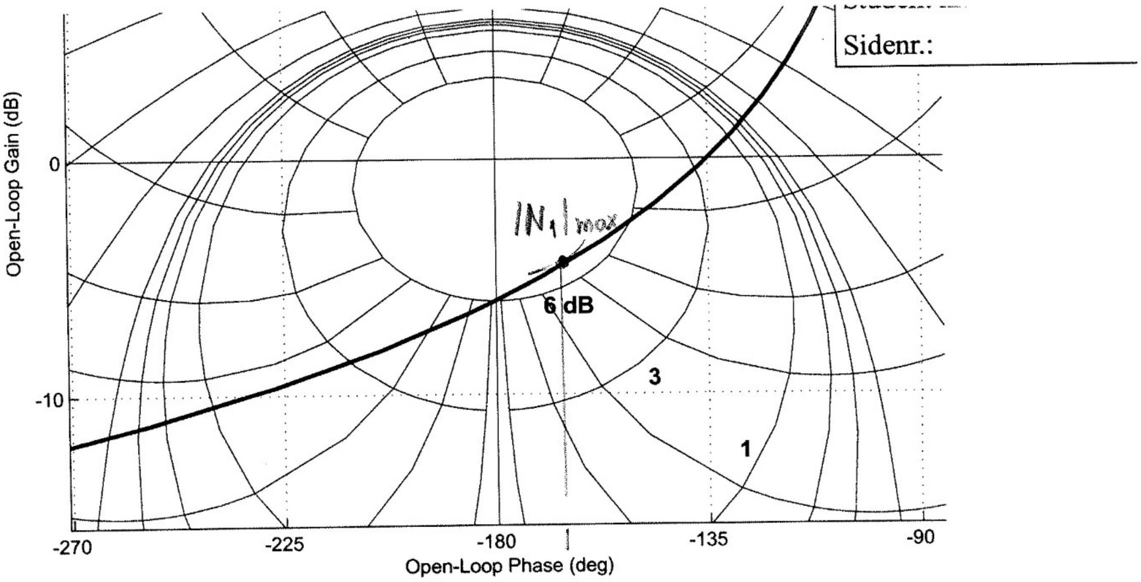


figur 3.2

$\omega \approx 0.6$ ved $|N_1|_{max}$ eller litt større

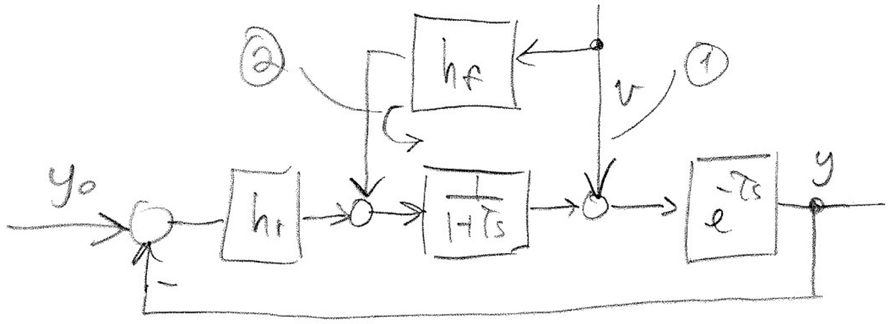
3d)

h_{o2} har betydelig lavere kryssfrekvens enn h_{o1}, ⇒ h_{r2} gir langsommere regulering enn h_{r1}. Samtidig oppfyller h_{r1} kravene til ΔK og ψ, jfr. a). (uten at dette kreves, så kan man avlese en unødvendig stor fasemargin for $h_{o2} \approx 100°$!). Vi velger derfor h_{r1}, altså den første metoden!



3e) $|N_1|_{max}$ avleses til ca. 7 dB. Litt høy. K_p i h_{r1} kan reduseres litt, eller T_i kan økes litt, slik at $|N_1|_{max} < 6$ dB.
Vi ser at $\angle h_{o1} \approx -167°$ ved $|N_1|_{max}$. Fra Bode-diagrammet gir dette at ω er ca. 0.6 ved $|N_1|_{max}$
(tilsvarende kunne vi ha brukt $|h_{o1}|$; godtas også!)
Se grov skisse av $|N_1|$ i Bodediagram forrige side.

3 f)



3g) For fullstendig kansellering av v's virkning:

$$h_{fi} \cdot \frac{1}{1+Ts} + 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -(1+Ts)$$

Erstattes med mer realistisk $h_f = -\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$, $0<\alpha<1$ som ikke har $h_f(j\infty) = \infty$.

3h) Fra blokkdiagrammet i 3f): Liten T gjör den parallelle greina ② nesten like rask som greina ①. Stor τ gjör at virkninga av v fås hånd om av h_r mye seinere, og h_f blir dermed relativt viktigere. $\frac{T}{\tau}$ bör derfor være minst mulig for å få störst effekt av h_f.

4) Se læreboka, eksempel 11.6

Oppgave 5 a)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \alpha(x_1^2-1)x_2 \end{aligned}\right\} = \underline{f}(\underline{x})$$

5b)

Bruker (V.8): $A = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\alpha x_1^p x_2^p & -\alpha({x_1^p}^2-1) \end{bmatrix}$

5c)

Newtons 2. lov for lineært m-f-d-system

$$F = ma \Leftrightarrow -kx - f\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$$

Sammenholdes dette med (4.1), får vi $\begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ f = \alpha(x^2-1) \end{cases}$

Egenverdier fra 5b) gis av

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha((x_1^p)^2-1)\lambda + (1-2\alpha x_1^p x_2^p)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha((x_1^p)^2-1) \pm \sqrt{(\alpha^2(x_1^p)^2-1)^2 - 4(1-2\alpha x_1^p x_2^p)}}{2}$$

Hvis $|x_1^p| \ll 1$, ser vi at $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ når $\alpha > 0$; systemet er ustabilt. Dermed kan systemet aldri komme til ro i det eneste mulige likevektspunkt $\underline{x} = \underline{0}$.

Alternativt, enklere og mer "fysisk":
"Dempekonstanten" f blir < 0 for små x.
Systemet blir da ustabilt.