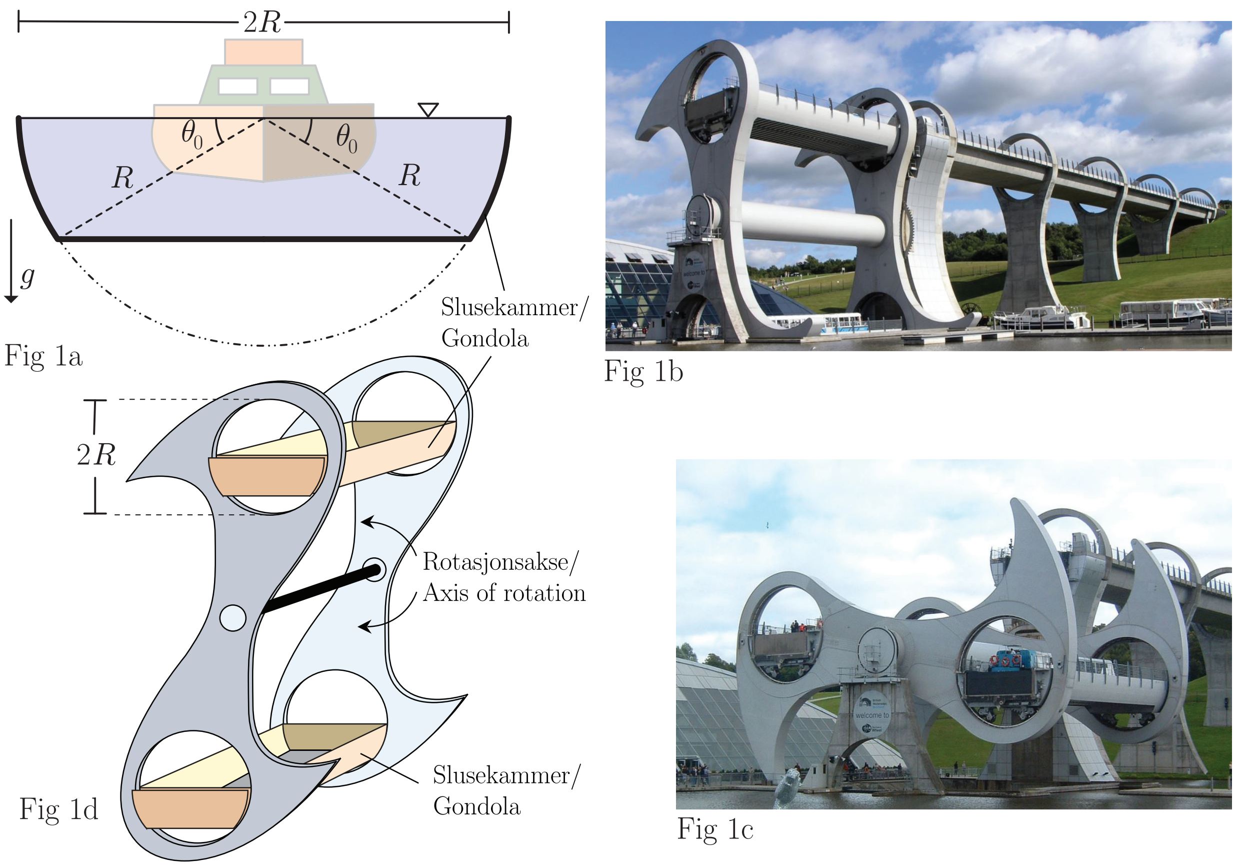
Oppgave 1



Figur 1: **(a)** Tverrsnitt av et kammer sett forfra. **(b)** Hjulet i av- og påseilingsposisjon. **(c)** Hjulet omtrent halvveis rundt. **(d)** Prinsippskisse.

Hjulet i Falkirk i Skottland er en roterende båtheis. To slusekammer forbinder to kanaler som har mange meter i høydeforskjell, se figur 1 a)-c). Når heisen står i vertikal posisjon er slusene åpne og båter kan seile inn og ut av kamrene. Slusene lukkes og hjulet roteres av motorer slik at kamrene bytter plass. Så åpnes slusene og båter kan igjen seile inn og ut ved sin nye høyde. Kamrene har lengde $L = 30\,\text{m}$ og er formet som en del av en halvsirkel med radius $R = 3.23\,\text{m}$ og vinkelen $\theta_0 = 30^\circ$ (se figur 1a).

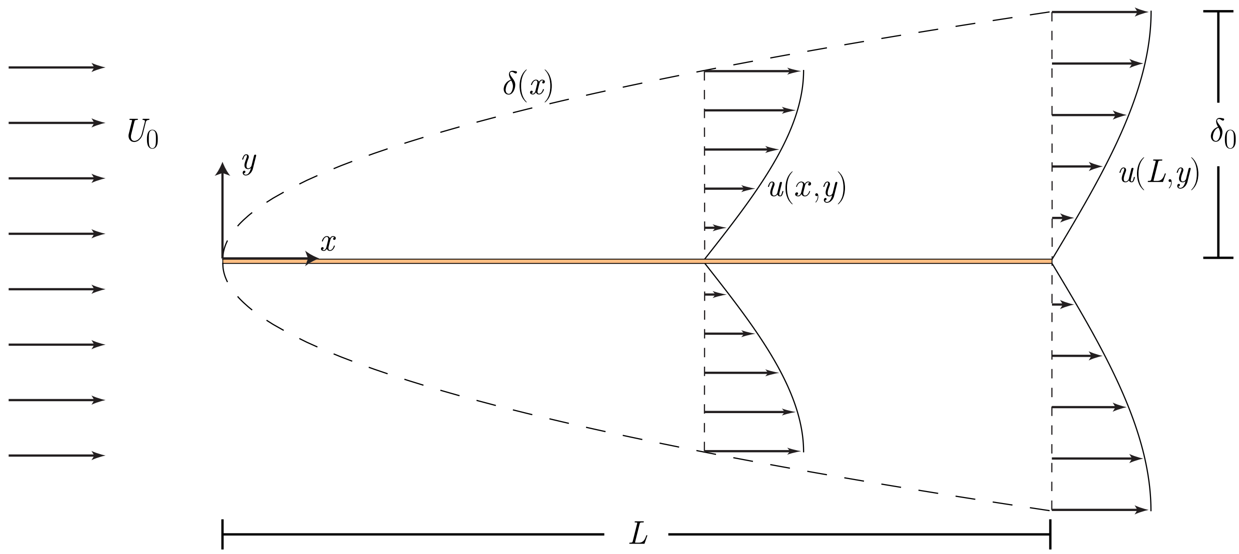
a) (25%) Når det er like høy vannstand i de to kamrene, vil det være perfekt balanse mellom dem (innholdet i de to kamrene vil veie like mye) uavhengig om de inneholder båter eller ikke. Vis at massen til et kammer med gitt vannsdybde h er den samme med og uten båt. Du kan anta at båten ikke er i direkte berøring med kammerets bunn eller vegger.

b) (25%) Finn vekten til vannet (eller vann og båt) i ett kammer. Anta tetthet $\rho = 1000$ kg/m^3 og tyngdeakselerasjon $g = 9.81$ m/s^2 .

c) (25%) Anta nå at hjulet står i ro i posisjon som vist i figur 1c). Se på ett kammer og finn netto vertikal og horisontal kraft fra vannet på en av sideveggene i kammeret.

d) (25%) Ved samme antagelser som i deloppgave c); finn netto vertikal kraft på sideflaten ved å integrere trykk-kreftene over sideveggen.

Oppgave 2



Ei uniform strømning faller inn mot ei tynn, flat plate som holdes i ro, og det dannes et laminært grensesjikt symmetrisk over og under plata (se figur). I området over plata er hastighetskomponenten i x-retning gitt som

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}U_0(3\eta - \eta^3) & y < \delta(x) \\ U_0 & y \geq \delta(x) \end{cases} \tag{1}$$

der U_0 er den konstante innfallende hastigheten, $\eta = y/\delta(x)$, og $\delta(x)$ er grensesjikttykkelsen. Grensesjiktet øker med avstanden x fra framkanten av plata som

$$\delta(x) = \delta_0\sqrt{x/L} \tag{2}$$

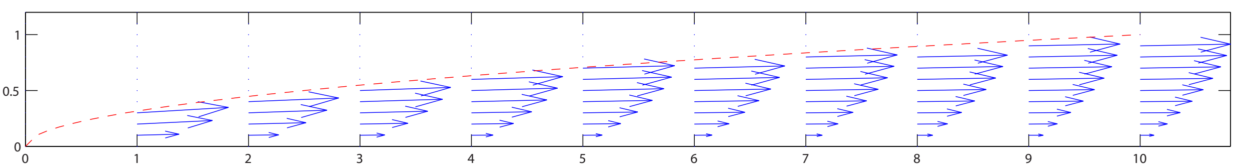
der L er lengden til plata. Plata har stor bredde b inn i planet slik at strømninga er tilnærma todimensjonal, og vi ser bort fra tyngdekrefter.

a) (20%) Hastighetskomponenten i y-retning over plata kan skrives

$$v = \frac{U_0\delta(x)}{x}(A\eta^2 + B\eta^4) \tag{3}$$

for $y < \delta(x)$ (v utenfor grensesjiktet ser vi ikke på). Bestem konstantene A og B når strømninga er inkompressibel.

b) (20%) Vi skal fullføre følgende MATLAB-script slik at vi får en figur som viser grensesjikttykkelsen $\delta(x)$ og det vektorielle hastighetsfeltet inne i grensesjiktet. Figuren ser slik ut:



Hastighetsvektorer (u, v) skal plottes på et gitter med x-verdier fra 0 til L i skritt på $0.1L$ og y-verdier fra 0 til $1.2\delta_0$ i skritt på $0.1\delta_0$. Grensesjikttykkelsen plottes for x-verdier fra 0 til L i skritt på $0.01L$.

```
delta0 = 1;                  % 1
U0 = 1;                      % 2
L = 10;                      % 3
A = ...;                     % 4 (from excercise a)
B = ...;                     % 5 (from excercise a)
                             % 6
[X, Y] = meshgrid(---, ---); % 7
DELTA = delta0*sqrt(X/L);    % 8
ETA = ---;                   % 9
                             %10
U = ---;                     %11
V = ---;                     %12
                             %13
U = U.*(Y < DELTA);          %14
V = V.*(Y < DELTA);          %15
                             %16
quiver(X,Y,U,V);             %17
                             %18
x = ---;                     %19
delta = delta0*sqrt(x/L);    %20
hold on                      %21
plot(x, delta, 'r--');       %22
hold off                     %23
```

Forklaringer: Linje 9 beregner η (gresk bokstav "eta") som funksjon av y og δ. Linje 11 og 12 beregner u og v som gitt i oppgaven (koeffisientene A og B kan du anta kjent). Linje 14 og 15 sørger for at `U` og `V` er lik null i alle punkter utenfor grensesjiktet. Uttrykket `'r--'` i linje 22 betyr "rød, stipla linje".

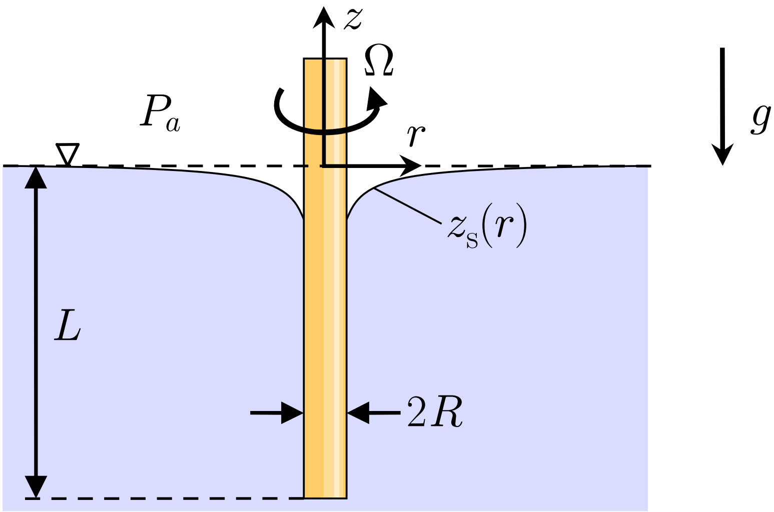
Fullfør linjene som inneholder "`---`" .

c) (40%) Bruk kraftloven for kontrollvolum til å beregne krafta fra strømningen på plata når fluidets tetthet er ρ.

d) (20%) Beregn skjærspenningen τ_w ved veggen og bruk denne til å regne ut samme kraft som i (c), men nå uttrykt ved fluidets dynamiske viskositet μ. Sjekk om resultatet stemmer med formelen for laminær grensesjikttykkelse (se vedlagt formelark), som tilsier at

$$\frac{\delta_0}{L} = \frac{4.91}{\mathrm{Re}_L^{1/2}}.$$

Oppgave 3



En lang, rett sylinder med sirkulært tverrsnitt er montert i en drill. Sylinderen stikkes vertikalt ned i vann med tetthet ρ og dynamisk viskositet μ. Sylinderen roteres om sin egen akse med konstant vinkelhastighet Ω slik at det etableres en todimensjonal, laminær og stasjonær strømning i horisontalplanet. Sylinderens lengde L er mye større enn dens radius R slik at endeeffekter kan neglisjeres. Tyngdens akselerasjon er g og atmosfæretrykket er P_a.

Vi antar at hastighetsfeltet rundt sylinderen kan skrives som

$$u_\theta = Ar^n, \quad u_r = u_z = 0,$$

der A er en positiv konstant og n er et heltall.

a) (20%) For hvilke verdier av n blir de viskøse leddene i Navier-Stokes-ligningene null? Beskriv kort strømningene disse verdiene av n representerer.

b) (20%) Verifiser at strømningsfeltet er virvlingsfritt kun for $n = -1$. Finn konstanten A uttrykt ved kjente størrelser i oppgaven.

Bruk kun $n = -1$ i resten av oppgaven.

c) (20%) Eksisterer strømfunksjonen ψ og/eller hastighetspotensialet ϕ? Hvorfor/hvorfor ikke? Finn ϕ og ψ dersom de eksisterer. Hvilke SI-enheter har ϕ og ψ?

d) (20%) Finn trykket $P(r, z)$ i strømningen, og finn formen $z_s(r)$ på vannoverflaten.

e) (20%) Finn et uttrykk for effekten som drillen må yte for å holde sylinderen i konstant rotasjon.

Attachment 1 (1 page)

Equations in cylindrical coordinates

Vorticity vector:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)\vec{e}_z$$

Incompressible continuity equation:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z)}{\partial z} = 0$$

r-component of the incompressible Navier-Stokes equation:

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right]$$

θ-component of the incompressible Navier-Stokes equation:

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right]$$

z-component of the incompressible Navier-Stokes equation:

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

Viscous stress tensor:

$$\begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Løsningsforslag TEP4100 Fluidmekanikk 4. juni 2014

Oppgave 1

a) Båten fortrenger vann som har like stor vekt som seg selv, slik at når vannivået da er konstant vil det være konstant vekt uavhengig av om det er en båt der eller ikke.

$$W_1 = W_{\text{vann 1}}$$

$$W_2 = W_{\text{vann 2}} + W_{\text{båt}} = W_{\text{vann 1}} - W_{\text{båt}} + W_{\text{båt}} = W_{\text{vann 1}} = W_1$$

b)

Vekten av vannet er rett og slett tyngdekraften som virker på vannmassen. Vannmassen må finnes ved å finne vannvolumet som så multipliseres med tettheten.

$$V_{totalt} = \left(\underbrace{2\frac{\theta_0}{2\pi}\pi R^2}_{\substack{\text{arealet av to seksjoner á } \theta_0 \\ \text{grader av en hel sirkel}}} + \underbrace{\frac{2R\cos\theta_0 R\sin\theta_0}{2}}_{\substack{\text{arealet av den gjenværende} \\ \text{trekanten i midten}}} \right) L = \left(\theta_0 + \cos\theta_0 \sin\theta_0\right) R^2 L = 299[m^3]$$

$$W = mg = \rho V_{total} g = 1000\left[\frac{kg}{m^3}\right]\cdot 299\left[m^3\right]\cdot 9,81\left[\frac{m}{s^2}\right] = 2933\left[kN\right]$$

c)

Vi skal finne netto trykkrefter, så vi regner med overtrykk (”gage pressure”).

Den vertikale kraften fra vannet over en krum flate er lik vekten av væsken over flaten.

Volumet med vann over de krumme sideveggene er lik det totale volum minus volumet med det rektangulære frontarealet:

$$2V_{\substack{\text{over}\\\text{sideflate}}} = V_{\text{totalt}} - V_{\substack{\text{midtvolum med}\\\text{rektangulært}\\\text{frontareal}}} = V_{totalt} - B_{redde} H_{øyde} L_{engde}$$

$$= \left(\theta_0 + \cos\theta_0 \sin\theta_0\right) R^2 L - 2R\cos\theta \cdot R\sin\theta \cdot L = \left(\theta_0 - \cos\theta_0 \sin\theta_0\right) R^2 L$$

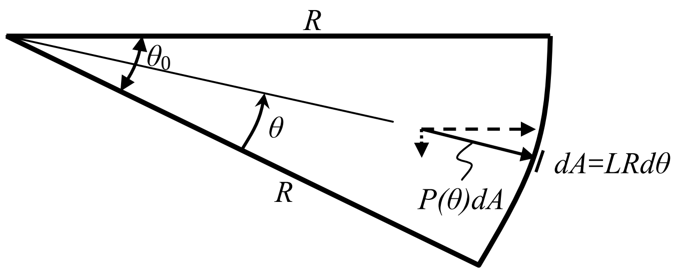
$$V_{\substack{\text{over}\\\text{sideflate}}} = \left(\theta_0 - \cos\theta_0 \sin\theta_0\right) R^2 L / 2 = 14.18\left[m^3\right]$$

$$W_{\substack{\text{over}\\\text{sideflate}}} = m_{\substack{\text{over}\\\text{sideflate}}} g = \rho V_{\substack{\text{over}\\\text{sideflate}}} g = 139\left[kN\right]$$

Den horisontale kraften fra vannet på den krumme flaten finnes som trykket ved arealsenter til arealet som den krumme flaten projiserer i horisontal retning (dvs ved den halve dybden siden det projiserte arealet er et rektangel) multiplisert med det projiserte, rektangulære arealet:

$$F_{\text{horisontal}} = P_{\substack{\text{arealsenter til}\\\text{projisert}\\\text{areal}}} A_{\text{projisert}} = \underbrace{\rho g \frac{R\sin\theta}{2}}_{P_{\substack{\text{arealsenter til}\\\text{projisert}\\\text{areal}}}} \cdot \underbrace{R\sin\theta \cdot L}_{A_{\text{projisert}}} = \rho g \frac{\left(R\sin\theta\right)^2}{2} L = 383,8\left[kN\right]$$

d)



Integrerer trykk-kreftene fra vannet over høyre sideflate. Trykket langsmed sideflaten blir $P(\theta) = \rho g R \sin(\theta)$ som funksjon av en vilkårlig vinkel θ. Kraften blir $P(\theta)dA$, og vi skal ha vertikal-komponenten, så integralet blir

$$F_{vertikal} = \int_A P(\theta)\sin(\theta)\,dA = \int_0^{\theta_0} \rho g R \sin^2\theta LRd\theta = \rho g R^2 L \int_0^{\theta_0} \sin^2\theta d\theta$$

$$= \rho g R^2 L\left[\frac{\theta_0}{2} - \frac{\cos\theta_0 \sin\theta_0}{2}\right]$$

som er identisk med svaret i c).

<u>Oppgave 2</u>

a)

Inkompressibel strømning: $\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Deriverer først u for $y < \delta$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \delta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x} = \underbrace{\frac{U_0 y}{2}\left[\frac{-1}{\delta^2}\left(3 - \frac{y^2}{\delta^2}\right) + \frac{2y^2}{\delta^4}\right]}_{=\frac{\partial u}{\partial \delta}} \cdot \underbrace{\frac{\delta_0}{2\sqrt{xL}}}_{=\frac{\partial \delta}{\partial x}=\frac{\delta}{2x}} = \frac{3U_0}{4x}\cdot\frac{y}{\delta}\left(\frac{y^2}{\delta^2} - 1\right) = \frac{3U_0}{4x}\left(\eta^3 - \eta\right)$$

Deriverer så v:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \underbrace{\frac{U_0\delta}{x}\left(2A\eta + 4B\eta^3\right)}_{=\frac{\partial v}{\partial \eta}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{=\frac{\partial \eta}{\partial y}} = \frac{2U_0}{x}\left(A\eta + 2B\eta^3\right)$$

Setter disse uttrykkene inn i kontinuitetslikningen:

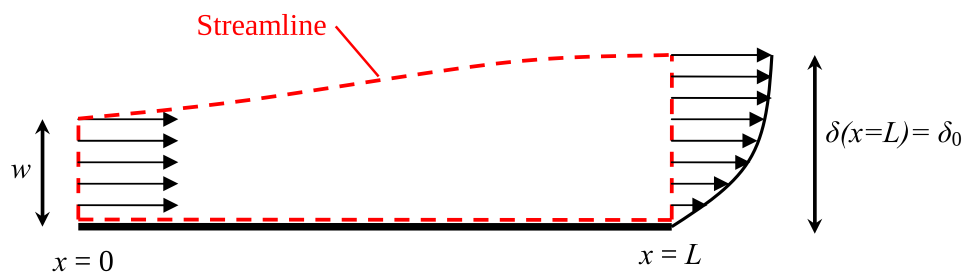
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U_0}{x}\left[\left(-\frac{3}{4} + 2A\right)\eta + \left(\frac{3}{4} + 4B\right)\eta^3\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A = \frac{3}{8}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B = -\frac{3}{16}}}$$

b)

```
delta0 = 1;
U0 = 1;
L = 10;
A = 3/8;            %From a
B = -3/16;          %From a

% Range of X and Y values goes here:
[X, Y] = meshgrid(0:0.1*L:L, 0:0.1*delta0:1.2*delta0);
DELTA = delta0*sqrt(X/L);

% Remember the "./" operator for element-wise division!
ETA = Y./DELTA;

% From the expressions given in the exercise text.
% Remember to use ".^", "./" and ".*" here!
U = .5*U0*(3*ETA - ETA.^3);
V = U0*DELTA.*(A*ETA.^2 + B*ETA.^4)./X;

U = U.*(Y < DELTA);
V = V.*(Y < DELTA);

quiver(X,Y,U,V);

% Range of x values:
x = (0:0.01:1)*L;
delta = delta0*sqrt(x/L);
hold on
plot(x, delta, 'r--');
hold off

%EXTRA (not part of the exercise, but good to know): if we want the figure
%automatically scaled as shown, use:
axis equal          %Scale x and y axis equally
axis tight          %Get rid of extra blank space
```

c)

Vi vil (og må!) legge kontrollvolumet slik at toppen blir en strømlinje:



Når toppen av kontrollvolumet er en strømlinje får vi kun transport gjennom kontrollflaten ved $x = 0$ og ved $x = L$. Finner først høyden w på innstrømningen fra massebevarelse:

$$\oint_{CS} \vec{V}\cdot\vec{n}dA = -\int_{Innløp} udA + \int_{Utløp} udA = -bwU_0 + b\int_0^{\delta_0} \tfrac{1}{2}U_0\left(3\frac{y}{\delta_0} - \frac{y^3}{\delta_0^3}\right)$$

$$= -bwU_0 + \tfrac{1}{2}bU_0\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}\right) = bU_0\left(\tfrac{5}{8}\delta_0 - w\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{w = \tfrac{5}{8}\delta_0}$$

Antar konstant trykk i strømningen slik at netto kraft på plata i y-retning blir null.
Kraftloven i x-retning:

$$\sum F_x = F_{kontakt} = \oint_{CS} \rho u\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dA = \underbrace{-\rho wbU_0^2}_{Inn} \underbrace{+\rho b\int_0^{\delta_0} u^2 dy}_{Ut} \qquad y\big|_{x=L} = \delta_0\eta, \quad dy = \delta_0 d\eta$$

$$= -\rho wbU_0^2 + \rho b\int_0^1 \frac{U_0^2}{4}\left(3\eta - \eta^3\right)\delta_0 d\eta = -\rho wbU_0^2 + \rho b\frac{U_0^2}{4}\delta_0\int_0^1\left(9\eta^2 - 6\eta^4 + \eta^6\right)d\eta$$

$$= -\rho \underbrace{w}_{=\frac{5}{8}\delta_0} bU_0^2 + \frac{1}{4}\rho bU_0^2\delta_0 \underbrace{\left(9\tfrac{1}{3} - 6\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}\right)}_{=\frac{68}{35}} = \rho b\delta_0 U_0^2\left(\tfrac{17}{35} - \tfrac{5}{8}\right) = \underline{-\tfrac{39}{280}\rho b\delta_0 U_0^2}$$

Dette er kraften fra en side av veggen på fluidet inne i kontrollvolumet. Kraften som plata kjenner fra strømningen blir

$$F_{Drag} = -2F_{kontakt} = \underline{\underline{\tfrac{39}{140}\rho b\delta_0 U_0^2}} \quad \left(= 0.279\rho b\delta_0 U_0^2\right)$$

d)
Skjærspenningen på hver side av plata:

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu\frac{3U_0}{2\delta(x)}$$

Dragkraften kan nå finnes ved å integrere τ_w over begge flatene:

$$F_{Drag} = 2\int_{bL}\tau_w dA = 2b\int_0^L \mu\frac{3U_0}{2\delta(x)}dx = \frac{3U_0\mu\sqrt{L}b}{\delta_0}\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{6\mu U_0 Lb}{\delta_0}}}$$

Setter dragkraften fra spørsmål c) og d) lik hverandre:

$$F_{Drag} = \tfrac{39}{140}\rho b\delta_0 U_0^2 = \frac{6\mu U_0 Lb}{\delta_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_0^2}{L} = \frac{6\mu}{\frac{39}{140}\rho U_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_0}{L} = \sqrt{\frac{280}{13}\frac{\mu}{\rho U_0 L}} = \underline{\underline{\frac{4.64}{\mathrm{Re}_L^{1/2}}}}$$

Dette er ca 5% unna formelen for laminært grensesjikt, så likning (1) er en god modell.

Oppgave 3

a)

Hastighetsfeltet består av kun en hastighetskomponent u_θ, så alle ledd som inneholder u_r eller u_z forsvinner. Videre er u_θ kun en funksjon av r slik at θ- og z-deriverte av u_θ forsvinner. Kun de to leddene som er understreket blir igjen:

$$r\text{-retn.:}\quad \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right)\quad =0$$

$$\theta\text{-retn.:}\quad \mu\left(\underline{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)}-\underline{\frac{u_\theta}{r^2}}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$$z\text{-retn.:}\quad \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\quad =0$$

Setter inn for u_θ:

θ-retn.:

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\left(Ar^n\right)}{\partial r}\right)-\frac{Ar^n}{r^2}\right)=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(nAr^n\right)-Ar^{n-2}\right)=\mu\left(n^2Ar^{n-2}-Ar^{n-2}\right)=\mu Ar^{n-2}\left(n^2-1\right)$$

Dette blir null for $n = \pm 1$. $n=1$ er stivt legeme rotasjon, mens $n=-1$ er en potensialhvirvel.

b)

Dette er en strømning kun i horisontalplanet ($r\theta$). Da er det nok å undersøke z-komponenten av hvirvlingen. Setter inn for u_θ:

$$\vec{\zeta}_z=\left(\nabla\times\vec{V}\right)_z=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(ru_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot Ar^n\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(Ar^{n+1}\right)$$

For å få dette lik null må $n=-1$.

Konstanten A finnes fra grensebetingelsen: $u_\theta(r=R)=\Omega R \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{R}=\Omega R \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{A=\Omega R^2}}$

c)

Kravet for strømfunksjon ψ: Strømningsfeltet er to-dimensjonalt, Ok!

Kravet for hastighetspotensial φ: Strømningsfeltet er hvirvlingsfritt. Ok!

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\quad\Rightarrow\quad \underline{\psi=\psi(r)}\ \text{ og }\ \underline{\varphi=\varphi(\theta)}$$

$$u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{A}{r}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\psi=-A\ln r}}\ \text{ og }\ \underline{\underline{\varphi=A\theta}}$$

Dette er strømfunksjonen og hastighetspotensialet for en potensialvirvel. SI-enhetene for ψ og φ er de samme som for konstanten A: $\left[\psi\ \text{ og }\ \varphi\right]=\left[A\right]=\left[u_\theta\cdot r\right]=\underline{\underline{\mathrm{m^2/s}}}$

d)
Hastighetsfeltet er hvirvlingsfritt. Da kan Bernoulli's likning benyttes uavhengig av strømlinjer. Bernoulli fra et vilkårlig punkt (r, z) til vannoverflaten langt unna der u_θ er null:

$$\frac{P(r,z)}{\rho}+\frac{u_\theta^2}{2}+gz=\frac{P_a}{\rho} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{P(r,z)=P_a-\tfrac{1}{2}\rho\frac{A^2}{r^2}-\rho gz}}$$

Alternativt kan trykket finnes fra de reduserte Navier-Stokes likningene:

θ-retn.: $0=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\theta} \quad\Rightarrow\quad P=P(r,z)$

r-retn.: $-\frac{1}{r}u_\theta^2=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial r}=\rho\frac{A^2}{r^3} \quad\Rightarrow\quad \underline{P=-\frac{\rho A^2}{2r^2}+F(z)}$

z-retn.: $0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-g \quad\Rightarrow\quad \underline{P=-\rho gz+G(r)}$

Begge disse uttrykkene for P skal være gyldige, dermed: $P(r,z)=-\rho\frac{A^2}{2r^2}-\rho gz+C$

Integrasjonskonstanten C finnes fra betingelsen $\lim_{r\to\infty}P(r,z=0)=P_a=C$

Formen på vannoverflaten finnes ved å kreve $P(r, z) = P_a$:

$$0=-\rho\frac{A^2}{2r^2}-\rho gz \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{z=-\frac{A^2}{2gr^2}}}$$

e)
Finner først skjærspenningen som virker på overflaten av den roterende sylinderen:

$$\tau_{r\theta}=\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)=\mu\left(r\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r^2}\right)\right)=\mu\left(-2\frac{A}{r^2}\right)=-2\mu\frac{A}{r^2}, \quad \tau_W=\tau_{r\theta}\big|_{r=R}=-2\mu\frac{A}{R^2}$$

Finner deretter hvor mye av sylinder-lengden L som er under vann. Fra uttrykket for vannoverflaten: $z=-A^2/2gR^2$. Da er lengden $\left(L-A^2/2gR^2\right)$ under vann.

Momentet M som drillen må yte: $M=|\tau_W|\cdot\text{Overflate}\cdot\text{arm}=2\mu\frac{A}{R^2}\cdot2\pi R\left(L-\frac{A^2}{2gR^2}\right)\cdot R$

Effekt: $\dot{W}=M\cdot\Omega=2\mu\frac{A}{R^2}\cdot2\pi R\left(L-\frac{A^2}{2gR^2}\right)\cdot R\Omega=\underline{\underline{4\mu\pi\Omega A\left(L-\frac{A^2}{2gR^2}\right)}}$

Innsatt for A: $\underline{\underline{\dot{W}=4\mu\pi\Omega^2R^2\left(L-\frac{\Omega^2R^2}{2g}\right)}}$