NTNU
Det skapende universitet

Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Eksamensoppgave i TTT4120 Digital signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen: Magne H. Johnsen
Tlf.: 93025534

Eksamensdato: 05.08.2013

Eksamenstid (fra - til): 09.00 - 13.00

Hjelpemiddelkode/tillatte hjelpemidler: D – Ingen trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Eksamen består av 4 oppgaver der
  - Oppgave 1 omhandler filtre.
  - Oppgave 2 omhandler stasjonære prosesser.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma implementering
  - Oppgave 4 omhandler frekvensanalyse.
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, henholdsvis en og tre timer etter oppstart. Lykke til!
- Sensurfrist 3 uker etter eksamensdato.

Målform/språk: Norsk - bokmål

Totalt antall sider: 12

Herav, antall vedleggsider: 3

Kontrollert av:

Dato Signatur

Oppgave 1 **(2+3+4+4+2=15)**

Et stabilt, kausalt tidsdiskret system med overføringssystem $H(z)$ er satt sammen av to delsystemer koblet i serie. Det første delsystemet $H_1(z)$ er gitt ved sin overføringsfunksjon

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{1}$$

Det andre delsystemet $H_2(z)$ er gitt ved følgende differanseligning

$$2y(n) - y(n-1) = x(n) - 2x(n-1) \tag{2}$$

1a) Vis at overføringsfunksjonen $H_2(z)$ er gitt ved

$$H_2(z) = \frac{1}{2}\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{3}$$

Answ :

$2Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = Y(z)/X(z) = (1 - 2z^{-1})/(2 - z^{-1}) = \frac{1}{2}(1 - 2z^{-1})/(1 - (1/2)z^{-1})$

1b) Skisser konvergensområdene (ROC) til både de to delsystemene og til deres seriekobling $H(z) = H_1(z)H_2(z)$

Answ : All three systems have ROC: $|z| > 1/2$

1c) Vis at enhetspulsresponsene til de to delsystemene er gitt ved

$$h_1(n) = (-\frac{1}{2})^n \quad n \geq 0 \tag{4}$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ -3(\frac{1}{2})^n & n > 0 \end{cases} \tag{5}$$

hvor $h_1(n) = h_2(n) = 0 \;\; n < 0$ på grunn av kausalitet.

Answ :
$h_1(n)$ is seen directly from the transfer function (eq. 1) as it is a basic building block
Defining $G(z) = 1/(1-(1/2)z^{-1}) \quad \to g(n) = (1/2)^n \quad n \geq 0$
Further $h_2(n) = (1/2)(g(n) - 2g(n-1)) = (1/2)[(1/2)^n u(n) - 2(1/2)^{n-1}u(n-1)]$
$h_2(0) = (1/2)(1/2)^0 = 1/2$
$h_2(n) = (1/2)[(1/2)^n - 4(1/2)^n] = -(3/2)(1/2)^n \quad n > 0$

1d) Vis at totalsystemet $H(z)$ er gitt ved :

$$H(z) = \frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{6}$$

$$h(n) = \frac{5}{4}(-\frac{1}{2})^n - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n \qquad n \geq 0 \tag{7}$$

hvor $h(n) = 0 \quad n < 0$ på grunn av kausalitet

Answ :

$$H(z) = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{(A+B)+\frac{1}{2}(B-A)z{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$A + B = 1/2$
$(1/2)(B - A) = -1 \quad \to \quad B = A - 2$
$A + A - 2 = 1/2 \quad \to A = 5/4 \quad \to B = -3/4$

1e) Har filteret $H(z)$ et kausalt og stabilt inversfilter? Begrunn svaret.

Answ : The zero in $z = 2$ will become a pole in the inverse filter. Poles outside the unit circle make causal filters unstable.

Oppgave 2 (4+5+4+2+3=18)

2a) Vis at filteret $H_2(z)$ er et allpassfilter, dvs. $H_2(f)H_2^*(f) = |H_2(f)|^2 = 1$

Vis også at autokorrelasjonssekvensen til $H_2(z)$ er gitt ved

$$r_{h_2h_2}(m) = \delta(m) \quad m = -\infty, \dots, \infty \tag{8}$$

Answ :

Proof for any z, i.e. including $z = e^{j2\pi f}$

$$H_2(z)H_2(z^{-1}) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1}{4}\frac{1-2z}{1-\frac{1}{2}z} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1}{4}\frac{2z}{\frac{1}{2}z}\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}} = 1$$

The filter energy spectrum is given by $S_{h_2h_2}(f) = |H_2(f)^2 = 1$. The spectrum and the autocorrelation $r_{h_2h_2}(m)$ are DTFT-pairs. The IDTFT of a constant is a unit pulse sequence; i.e. $r_{h_2h_2}(m) = \delta(m)$

2b) Vis ved hjelp av allpassegenskapene til $H_2(z)$ at autokorrelasjonsfunksjonen til $H(z)$ er gitt ved

$$r_{hh}(m) = r_{h_1h_1}(m) = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m \quad m \geq 0 \tag{9}$$

hvor i tillegg $r_{hh}(m) = r_{hh}(-m)$

Answ :
$h(m) = h_1(m) * h_2(m) \quad \rightarrow$
$r_{hh}(m) = h(m) * h(-m) = (h_1(m) * h_2(m)) * (h_1(-m) * h_2(-m)) = (h_1(m) * h_1(-m)) * (h_2(m) * h_2(-m)) = r_{h_1h_1}(m) * r_{h_2h_2}(m) = r_{h_1h_1}(m) * \delta(m) = r_{h_1h_1}(m)$

Assuming $m \geq 0 \quad \rightarrow$

$r_{h_1h_1}(m) = \sum_{n=0}^{\infty} h_1(n)h_1(n+m) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(-\frac{1}{2})^{n+m} =$

$(-\frac{1}{2})^m \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n = (-\frac{1}{2})^m \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m$

2c) Hvit støy med effekt σ_w^2 påtrykkes $H(z)$. En ønsker å modellere resulterende utgangssekvens $y(n)$ som en AR[P] prosess ved å bruke lineær prediksjon.

Hvilken modellorden P er optimal og hva blir tilsvarende prediksjonsparametre og prediksjonsfeileffekt?

Answ :
From just looking at $H(z)$ the output should be an ARMA[1,2]-process. However the process type is given by the Normal equations; i.e. the autocorrelation of the output $y(n)$ which is given by $\gamma_{yy}(m) = \sigma_w^2 r_{hh}(m)$. But due to the allpass property leading to eq. 9, we have $\gamma_{yy}(m) = \sigma_w^2 r_{h_1h_1}(m)$. This corresponds to filtering white noise through $H_1(z)$ resulting in an AR[1]-process!
Thus $P = 1$ is the optimal order and the corresponding prediction parameter and residual power are respectively $a_1 = -\frac{1}{2}$ and σ_w^2.

2d) Forklar prinsippet for generell Wiener-filtrering, gjerne med å inkludere en skisse.

Answ :
We observe a stochastic signal $x(n) = s(n) + w(n)$ where $w(n)$ is white noise. We want to find a filter $h(n)$ such that the output $y(n) = h(n) * x(n)$ resembles a wanted signal $d(n)$ in a MMSE sense. That is find $h(n)$ which minimizes $E[(d(n) - y(n))^2]$

2e) En sekvens $x(n) = s(n) + w(n)$ observeres hvor $w(n)$ er additiv hvit støy med effekt σ_w^2.

Forklar hvordan et Wiener-filter kan brukes til støyreduksjon.

Det tilsvarende teoretisk optimale ikke-kausale Wiener-filteret er gitt ved

$$H(f) = \frac{\Gamma_{ss}(f)}{\Gamma_{ss}(f) + \sigma_w^2} \tag{10}$$

hvor $\Gamma_{ss}(f)$ er effektspekteret til den støyfrie sekvensen $s(n)$.

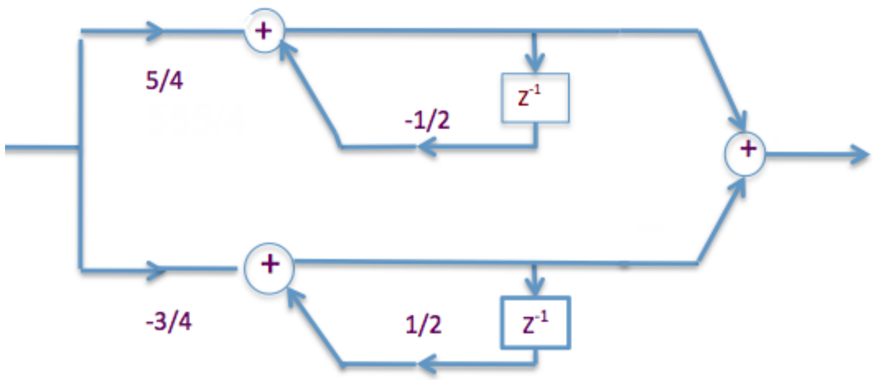
Forklar hvordan filteret fungerer i frekvensplanet for ulike signal/støy-forhold.

Answ :
Noise reduction is achieved by choosing $d(n) = s(n)$.

For frequencies where $S/N = \Gamma_{ss}(f)/\sigma_w^2$ is high we easily se that $H(f) \approx 1$, i.e. passband. However when S/N is small $H(f) \approx 0$, i.e. stopband.

Oppgave 3 (4+5+6=15)

Figur 1 viser parallellstrukturen til filteret $H(z)$ fra oppgave 1.
Parallellstrukturen skal realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1, 1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med effekt σ_z^2.



Figur 1: Parallellstruktur til $H(z)$.

3a) Finn den totale avrundingseffekten σ_z^2 på utgangen av parallellstrukturen i figur 1.

Answ :
The two branches have identical structure; i.e. two multiplications+roundings which result in two noise sources. Both sources see the same first order branch filter. Defining $h_3(n) = (\frac{1}{2})^n \quad n \geq 0$ we easily see from the answer to 2b that $r_{h_3h_3}(m) = \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^m$.

$$\sigma_z^2 = 2\sigma_e^2[r_{h_1h_1}(0) + r_{h_3h_3}(0)] = 4\frac{4}{3}\sigma_e^2 = \frac{16}{3}\sigma_e^2 \tag{11}$$

3b) Finn nødvendig skaleringsfaktor på inngangen til parallellestrukturen for å unngå overflyt.

Answ :
We have three summation nodes. The unit pulse responses from the input to the node outputs are respectively $\frac{5}{4}h_1(n)$, $-\frac{3}{4}h_3(n)$, and $h(n)$.

$\sum_n |h_1(n)| = \sum_n |h_3(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ Thus the h_1-branch has the largest value; i.e $2\frac{5}{4} = \frac{5}{2}$

For the total filter we have to split up the sum into odd/negativ and even/positive terms :
A) For even $n = 2j$ we have $\sum_n |h(n)| = \sum_n \frac{5}{4}(-\frac{1}{2})^n - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n = \sum_j \frac{5-3}{4}(\frac{1}{2})^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^j$
B) For odd $n = 2k+1$ we have $\sum_n |h(n)| = \sum_k \frac{5+3}{4}(\frac{1}{2})^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$

A and B gives together $\frac{3}{2}\sum_k(\frac{1}{4})^n = \frac{3}{2}\frac{4}{3} = 2$

Thus the largest value is $\frac{5}{2}$ which means we have to multiply at the input by $\frac{2}{5}$.

3c) En kan flytte skaleringskonstantene 5/4 og −3/4 i figur 1 til etter tilbakekoblingene i de to parallellgrenene.

Finn resulterende avrundingseffekt og skaleringskonstant for dette tilfellet.

Hvilken variant er den beste med hensyn på signal/støy-forhold på utgangen?

Answ :
The rounding errors for the gains are now at the output. The rounding errors in the loops now also see the gains. Thus the total power is now given by :

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2[(\frac{5}{4})^2 r_{h_1h_1}(0) + (\frac{3}{4})^2 r_{h_3h_3}(0) + 1 + 1] = [(\frac{25+9}{16})\frac{4}{3} + 2]\sigma_e^2 = (\frac{17}{6} + 2)\sigma_e^2 = \frac{29}{6}\sigma_e^2 < \frac{16}{3}\sigma_e^2 \tag{12}$$

Thus the power is reduced by moving the gains towards the output.

As to overflow, both the internal summation nodes now come before the gains. Thus the scaling is given by the max of $\sum_n |h_1(n)|$, $\sum_n |h_3(n)|$,and $\sum_n |h(n)|$. However, they all results in the value 2, .i.e. downscaling by $\frac{1}{2}$.

To sum up : this last structure both has less rounding noise power and less downscaling, and thus better S/N at the output.

Oppgave 4 **(2+3+4+3=12)**

4a) En ønsker å finne frekvensen f_0 til et sinus-signal utfra et signalutsnitt av lengde L,

$$x(n) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n) & n = 0, L-1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{13}$$

Vis at Fourier-transformen til utsnittet er gitt ved

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[W(f - f_0) + W(f + f_0)\right] \tag{14}$$

hvor

$$W(f) = \frac{\sin(\pi f L)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi f(L-1)} \tag{15}$$

Answ :

We define

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, L-1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Thus $x(n) = w(n)\cos(2\pi f_0 n) = w(n)[e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}]/2 \quad n = -\infty, \infty$
Taking the DTFT of the above expression gives eq. 14 and 15

4b) Gitt utsnittslengde $L = 100$ og ukjent frekvens $f_0 = 0.18$.
En ønsker å estimere frekvensen f_0 basert på en N-punkts DFT (Diskret Fourier Transform)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)\, e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, N-1 \tag{16}$$

Diskuter muligheten for å estimere frekvenstoppen ved f_0 korrekt når antall frekvenspunkter er gitt ved henholdsvis $N = 25$, 50 og 100.

Answ :
The frequency spacing is given by $1/N$. For $N = 25$ we then will calculate values at the frequencies $\ldots, 0.16, 0.20, \ldots$. As $|W(f)|$ is symmetric the values at $f = 0.16$ and $f = 0.20$ will be identical, i.e. one can not detect a peak at $f = 0.18$. However, for the two other cases 0.18 will be one of the frequency values and the harmonic will thus be detected.

4c) Gitt en sum av to sinussignaler

$$y(n) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n) + \cos(2\pi f_1 n) & n = 0, L-1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{17}$$

hvor $f_0 = 0.18$ og $f_1 = 0.19$.

Hvilke krav vil du sette til utsnittslengde L og antall frekvenspunkter N for å kunne skille de to harmoniske ved hjelp av DFT til signalet $y(n)$?

Answ :
The DFT is a sampled version of the DTFT. The resolution of the DTFT is given by L. In order for the two frequencies to be visible we need $L \geq 100$. This is seen from eq. 15 as a difference in frequency of $0.19 - 0.18 = 0.01$ corresponds to the width of the mainlobe of $|W(f)|$.
Further we need to sample at the two frequencies. Thus $N = 100$ or multiples of 100 are needed.

4d) Hvordan kan man ved bruk av DFT og IDFT beregne lineær foldning til to signaler $x_1(n)$ og $x_2(n)$ av lengde hhv. L_1 og L_2?

Answ :
The result $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ has length $L_3 = L_1 + L_2 - 1$. Thus we have to choose $N \geq L_3$. Then we can calculate the DFTs $X_1(k)$ and $X_2(k)$, multiply them $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$ and find $y(n)$ by the IDFT.

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\ Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \ \text{ for } \ k = 0, \ldots, N-1 \ \text{ where we write } \ Y(k) = Y(f_k) \end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h(n)z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n) \ e^{-j2\pi nf} \\ \text{DFT} \ : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n) \ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\ \text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1 \end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \quad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{18}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_{m} \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $$\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

Normal equations: $$\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$