Øving 1

Kybernetikk Intro, Øving 1
(Ønsker tilbakemelding)

Oppgave 1

a)

$$\sum F = ma$$
$$-r + u = ma$$
$$-kv + u = m\dot{v}$$
$$m\dot{v} + kv - u = 0$$
$$\dot{v} + \frac{k}{m}v - \frac{1}{m}u = 0$$

Pådraget i modellen er u og modellen er av første orden.

b)

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$

ganger alle ledd med $e^{\frac{k}{m}t}$

$$\dot{v}e^{\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$$

Ser at venstresiden er lik: $\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right) = \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}$$
$$ve^{\frac{k}{m}t} = \int \frac{1}{m}ue^{\frac{k}{m}t}dt$$

Pådraget og massen er konstanter.

$$ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{u}{m}\left(\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C_1\right)$$
$$ve^{\frac{k}{m}t} = \frac{u}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C, C = \frac{u}{m}C_1$$
$$v = \frac{u}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

c)

Tidskonstanten er gitt ved $T = -\frac{1}{a}$ når differensialligningen er på formen $\dot{x} = ax + bu$

I dette systemet er $a = \frac{k}{m}$ så da blir tidskonstanten $T = -\frac{m}{k}$

Tidskonstanten beskriver hvor lang tid systemet bruker på å nå stasjonærverdien. Jo større tidskonstanten er jo lengre tid bruker systemet på å stabilisere seg, og når det har gått en tid tilsvarende fem tidskonstanter vil systemet være ~99% av den stasjonære verdien og da sier vi at det er stabilt.

Hvis vi øker k blir tidskonstanten mindre (absoluttverdi). k er her hydrodynamisk motstand og hvis vi øker den vil AUV-en altså ha mer motstand. Dette gjør at den nærmer seg stasjonærverdien fortere, men den vil også ha mindre fart når den når den verdien.

Hvis vi øker m blir tidskonstanten større (absoluttverdi). Dette gir mening på et intuitivt nivå fordi hvis vi øker massen på AUV-en vil den ha mer treghetsmoment og dermed være tregere til å akselerere.

d)

Forsterkningen i et system er gitt ved $K = -\frac{b}{a}$ som i dette tilfellet gir $K = -\frac{1/m}{-k/m} = \frac{1}{k}$

Hvis k øker vil forsterkningen bli mindre. Altså hvis vi øker den hydrodynamiske motstanden (k) vil den endelige farten (proporsjonal med K) bli mindre fordi AUV-en har mer motstand i vannet.

e)

m = 200 kg
k = 100 kg/s

$$T = -\frac{m}{k} = -\frac{200\ kg}{100\,\frac{kg}{s}} = -2\ s$$

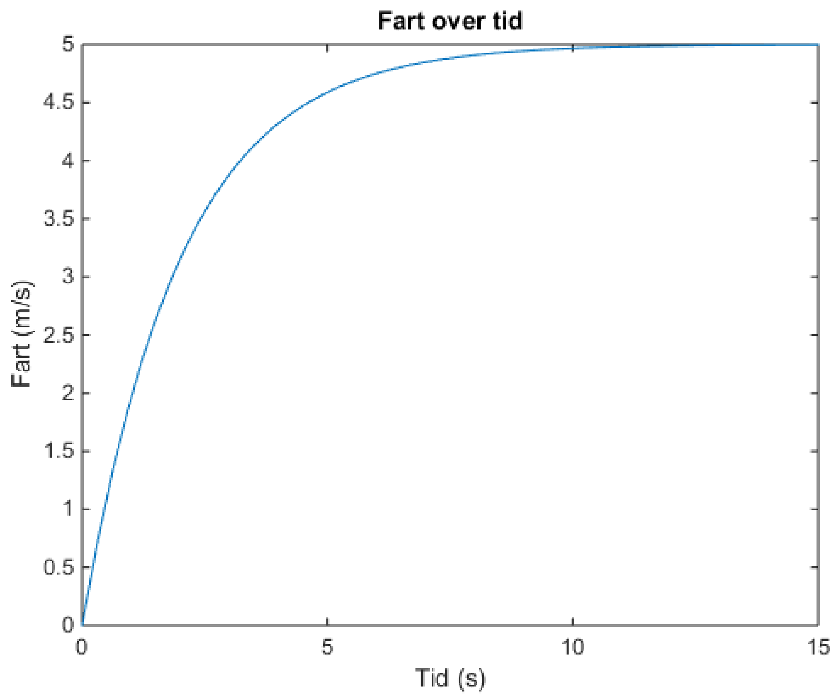
$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{100\ kg/s} = 0{,}01\ s/kg$$

Tidskonstanten er 2 sekunder og hvis vi sier at systemet akselererer i en tid lik fem tidskonstanter betyr det at AUV-en kommer til å akselerere i 10 sekunder før den når den ønskede hastigheten. Den endelige hastigheten er gitt ved $v_{stasjonær} = uK$, altså produktet av pådraget og forsterkningen. Hvis vi vet hva pådraget er så kan vi si hva den endelige hastigheten kommer til å være.

f)

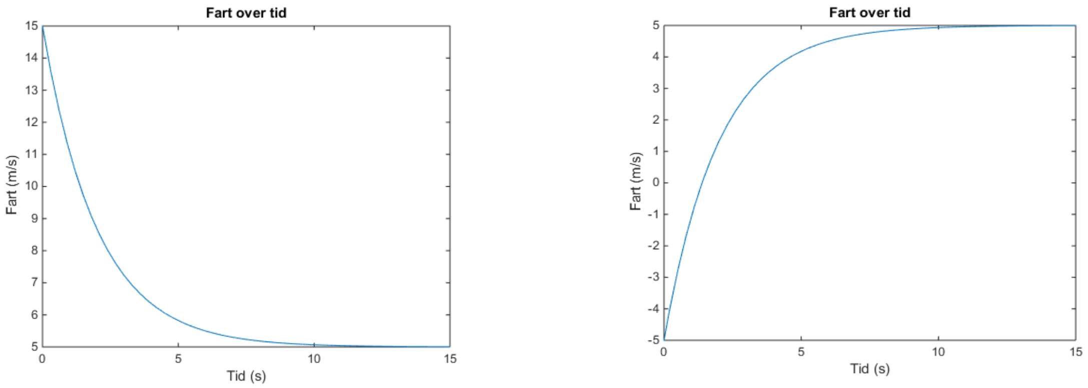
u = 500 N

$v_0 = 0$ m/s



Figur 1 – $v_0 = 0$

g)



Figur 2 - ulike initialtilstander

Figuren til venstre er med v_0=15 m/s og figuren til høyre er med v_0=-5 m/s. Ser i figurene at begge ender opp på samme stasjonærverdi (5 m/s). Kan utifra dette mønsteret si at i et 1. ordens system vil ikke initialbetingelsen påvirke den endelige verdien.

h)

1. *Regne på forsterkningen i systemet*

Farten til AUV-en er gitt av løsningen til differensialligningen:

$$v = \frac{1}{k}u + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Når tiden blir stor vil $Ce^{-\frac{k}{m}t} \to 0$ og ligningen reduseres til $v = \frac{1}{k}u = Ku$

Ligningen gir altså: $u = \frac{v}{K}$

Ønsker at v = 3 m/s og vet at $K = \frac{1}{k} = \frac{1}{100\ kg/s} = 0{,}01\ s/kg$

Pådraget blir $u = \frac{3\ m/s}{0{,}01\ s/kg} = 300\ N$

2. *Sette den deriverte lik null*

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v - \frac{1}{m} = 0$$
$$\frac{k}{m}v = \frac{1}{m}u$$
$$u = kv$$
$$u = 100\frac{kg}{s} * 3\frac{m}{s}$$
$$u = 300\ N$$

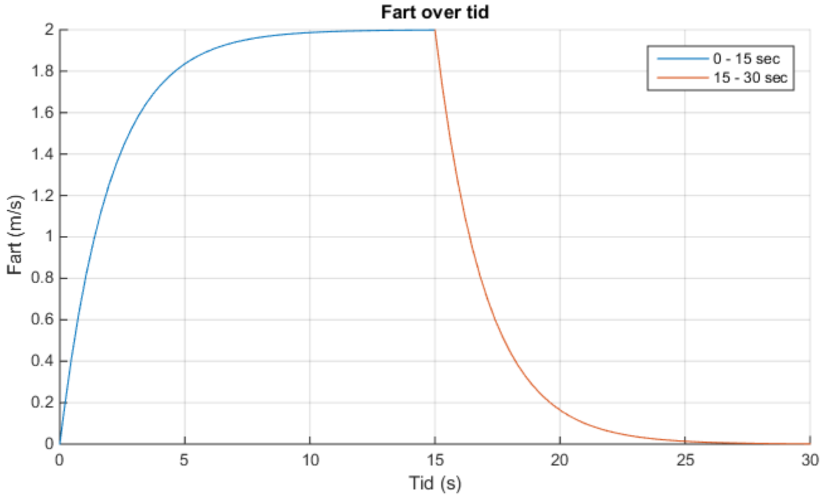
i)

Fra plottet ser vi følgende:

$$T_{AUV\ 1} > T_{AUV\ 2}$$
$$K_{AUV\ 1} > K_{AUV\ 2}$$

AUV 1 bruker lengre tid på å nå stasjonærverdien som vil si at den har høyere tidskonstant. Det kan kanskje være fordi den veier mer enn AUV 2. AUV 2 har lavere stasjonærverdi, og det kan være fordi den er større eller har dårligere hydrodynamiske egenskaper.

j)



Denne grafen minner veldig om grafen av spenning over en kondensator. Avhengig av kapasitansen til kondensatoren vil den kunne oppta en viss spenning som er det som skjer i den første delen av grafen. Den andre delen av grafen skjer når spenningskilden forsvinner og kondensatoren utlades (Store Norske Leksikon 2014).

Oppgave 2

a)

Kreftene som virker på klossen er fjærkraften og dempekraften. Begge kreftene virker mot bevegelsesretningen og vil derfor få negativt fortegn.

$$F_f = kx$$
$$F_d = d\dot{x}$$

Newtons andre lov gir da:

$$\sum F = ma$$
$$-kx - d\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Hvis vi sier $p = \frac{d}{m}$ og $q = \frac{k}{m}$ blir formlen:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

Dette er en 2. ordens differensialligning som betyr at vi trenger to initialtilstander for å løse den.

b)

m = 2, d = 4, k = 6

$$p = \frac{d}{m} = \frac{4}{2} = 2$$
$$q = \frac{k}{m} = \frac{6}{2} = 3$$

Den karakteristiske ligningen blir da $r^2 + 2r + 3$
Setter dette lik null for å finne røttene:

$$r^2 + 2r + 3 = 0$$
$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 3}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-8}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Røttene er $r_1 = -1 + i\sqrt{2}$ og $r_2 = -1 - i\sqrt{2}$

c)

$$x(t) = e^{at}\left(C\cos(bt) + D\sin(bt)\right)$$

Fra løsningen til den karakteristiske ligningen har vi at $a = -1$ og $b = \sqrt{2}$

$$x(t) = e^{-t}\left(C\cos(\sqrt{2}t) + D\sin(\sqrt{2}t)\right)$$

Vet at x(0) = 1

$$x(0) = 1 = e^{-0}\left(C\cos(\sqrt{2} * 0) + D\sin(\sqrt{2} * 0)\right)$$
$$C = 1$$

Vet også at den deriverte er lik null ved t=0.

$$\dot{x}(t) = -e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}t) + D\sin(\sqrt{2}t)\right) + e^{-t}\left(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}D\cos(\sqrt{2}t)\right)$$
$$\dot{x}(0) = 0 = -e^{-0}(1) + e^{-0}\left(-\sqrt{2}D\right) = -1 - \sqrt{2}D$$
$$-1 - \sqrt{2}D = 0 \rightarrow \sqrt{2}D = 1 \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Altså har vi $C = 1$ og $D = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)

Innfører konstantene $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og $\varsigma = \frac{d}{2\sqrt{km}}$

$$2\omega_0\varsigma = 2 * \sqrt{\frac{k}{m}} * \frac{d}{2\sqrt{km}} = \frac{d}{m} = p$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = q$$

Det medfører at

$$\ddot{x} + 2\omega_0\varsigma\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + p\dot{x} + qx$$

e)

Frekvens er gitt av den dempede resonansfrekvensen $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \varsigma^2}$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{6}{2}} * \sqrt{1 - \left(\frac{4}{2\sqrt{6 * 2}}\right)^2}$$
$$\omega_d = \sqrt{3} * \sqrt{1 - \frac{4}{12}}$$
$$\omega_d = \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41\ Hz$$

f)
Generelt vil alle 2. ordens systemer kunne gjøres om til et sett med to 1. ordens systemer slik:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -qx_1 + px_2 \end{aligned}$$

Vet at $p = \frac{d}{m}$ og $q = \frac{k}{m}$. Da blir ligningssettet til masse-fjær-demper systemet slik:

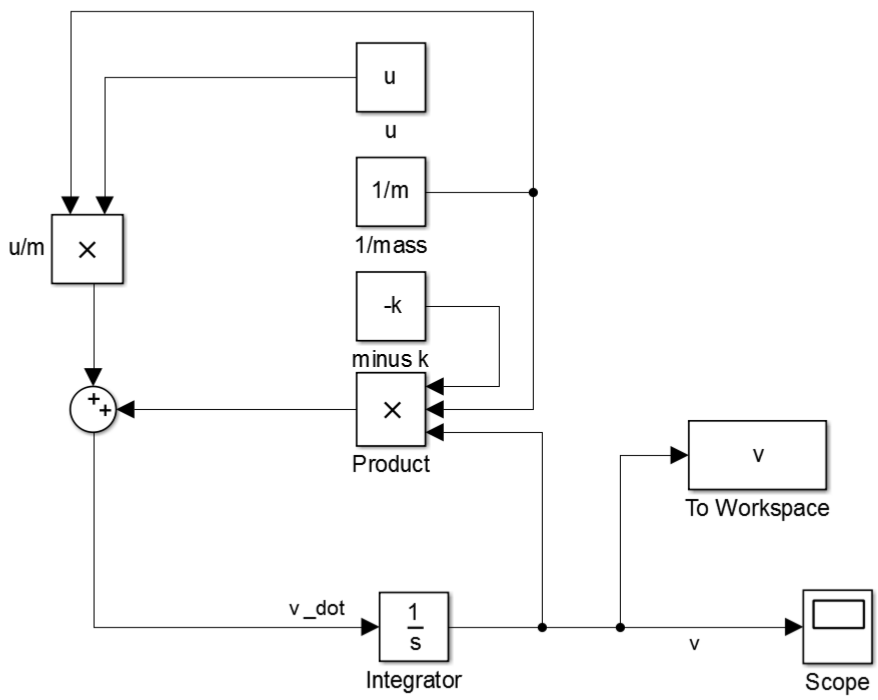
$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\frac{d}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

Tilstandene til systemet er x_1 (posisjon) og x_2 (fart).

Matlab og Simulink

Oppgave 1

Simulinkmodell



f)

```
%definerer variablene
u = 500;
v_0 = 0;
m = 200;
k = 100;
t_sim = 15;

sim('simulation1', t_sim)

%lager figur og plotter data
figure(1); clf(1);
grid on;
plot(v);
title('Fart over tid');
```

```
xlabel('Tid (s)'); ylabel('Fart (m/s)');
```

g)

Samme som f bare v_0 er definert som henholdsvis 15 og -5.

i)

```
m = 200;
k = 100;

%første simulering
v_0 = 0;
u = 200;
[t1,xVec1,y1] = sim('simulation1',[0 15]);

%andre simulering
v_0 = xVec1(end);
u = 0;
[t2,xVec2,y2] = sim('simulation1', [15 30]);

%lager figur og plotter data
figure(1); clf(1);
grid on; hold on;
plot(t1,xVec1); plot(t2,xVec2);
title('Fart over tid');
xlabel('Tid (s)'); ylabel('Fart (m/s)');
```

Referanseliste

Store Norske Leksikon (2014) *Kondensator: elektrisitetslære.* https://snl.no/kondensator/elektrisitetsl%C3%A6re [Hentet fra internett 15.9.2015]