Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 - Kybernetikk introduksjon
Eksamen Høsten 2014
Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax \\
\int \frac{dx}{x} &= \int a dt \\
\ln x &= at + c \\
x &= e^c e^{at} \\
x(0) &= x_0 \Rightarrow x_0 = e^c e^0 = e^c \\
x(t) &= x_0 e^{at} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b)

$$
T = -\frac{1}{a} \qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
x(t_{1/2}) = \frac{1}{2}x_0 &= x_0 e^{at_{1/2}} \\
e^{at_{1/2}} &= \frac{1}{2} \\
at_{1/2} &= \ln\frac{1}{2} \\
t_{1/2} &= \frac{1}{a}\ln\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{a}\ln 2 \\
&= T\ln 2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

c)

$$K = \frac{x}{u} \quad \text{når} \quad \dot{x} = 0\,(\text{stasjonær})$$

$$\begin{aligned} 0 &= ax + u \\ K &= \frac{x}{u} = -\frac{1}{a} = T = t_{1/2}/\ln 2 \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot 138\,\text{dager} \\ &= 1.72 \cdot 10^7\,\text{s} \end{aligned} \tag{4}$$

evt. $K = 199.1\,\text{dager}$.

d)

$$\begin{aligned} K &= \frac{x_s}{u} \\ u &= \frac{x_s}{K} \\ &= \frac{10}{1.72 \cdot 10^7} \quad [\text{g/s}] \\ &= 5.81 \cdot 10^{-7}\,\text{g/s} \end{aligned} \tag{5}$$

evt. $u = 5.02 \cdot 10^{-2}\,\text{g/dag}$. Alternativ utregning uten forsterkning:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow 0 = ax_s + u$$

$$\begin{aligned} u &= -ax_s \\ &= \frac{1}{T}x_s \\ &= \frac{\ln 2}{t_{1/2}}x_s \\ &= \frac{\ln 2}{138 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 10 \;\; [\text{g/s}] \\ &= 5.81 \cdot 10^{-7}\,\text{g/s} \end{aligned} \tag{6}$$

Oppgave 2

a)

Kraftbalanse, Newtons 2. lov.

b)

Monovariabelt og ulineært.

c)

```
v(n)=v(n-1)+1/m*(k_p*(v_r-v(n-1))-k*v(n-1)-k_l*v(n-1)^2)*h;
```

d)

$$m\dot{v} = u - kv - k_l v^2, \quad u = k_p(v_r - y), \quad y = v$$

Ser bort ifra luftmotstand:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= k_p(v_r - y) - kv \\ 0 &= k_p(v_r - v_s) - kv_s \\ 0 &= k_p v_r - k_p v_s - kv_s \\ v_s &= \frac{k_p v_r}{k_p + k} \end{aligned}$$

Med denne stasjonærverdien blir altså avviket:

$$\begin{aligned} e_s &= v_r - v_s \\ &= \frac{(k_p + k)v_r - k_p v_r}{k_p + k} \\ &= \frac{k}{k_p + k} v_r \end{aligned} \tag{7}$$

e)

$$e_s = \frac{50}{150 + 50} \cdot 5 = \tfrac{5}{4} = 1.25 \tag{8}$$

Oppgave 3

a)

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p \\ J\dot{p} &= K_1 p + K_2 \phi + u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi} &= K_1 \dot{\phi} + K_2 \phi + u \qquad (9) \\ J\ddot{\phi} - K_1 \dot{\phi} - K_2 \phi &= 0 \\ \ddot{\phi} - \frac{K_1}{J}\dot{\phi} - \frac{K_2}{J}\phi &= 0 \end{aligned}$$

Kan nå sammenligne med standardform $\ddot{x} + 2\omega_0\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ og ser at:

$$
\begin{aligned}
\omega_0^2 &= -\frac{K_2}{J} \\
\omega_0 &= \sqrt{-\frac{-8.9 \cdot 10^8}{1.40 \cdot 10^{10}}} = 0.252
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
2\zeta\omega_0 &= -\frac{K_1}{J} \\
\zeta &= -\frac{K_1}{2\omega_0 J} \\
&= -\frac{-1.50 \cdot 10^9}{2 \cdot 0.252 \cdot 1.40 \cdot 10^{10}} = 0.213
\end{aligned} \tag{11}
$$

b)

Underdempet: $\zeta < 1$.

c)

Har nå et pådrag $u = -K_p\phi$, satt inn i (9) får vi

$$
\begin{aligned}
J\ddot{\phi} &= K_1\dot{\phi} + K_2\phi - K_p\phi \\
\ddot{\phi} - \frac{K_1}{J}\dot{\phi} - \frac{K_2 - K_p}{J}\phi &= 0
\end{aligned}
$$

som gir ny udempet resonansfrekvens

$$
\hat{\omega}_0 = \sqrt{-\frac{-8.9 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^7}{1.40 \cdot 10^{10}}} = 0.259
$$

Den relative økningen er dermed gitt ved

$$
\frac{0.259 - 0.252}{0.252} = 2.78\% \tag{12}
$$

d)

Metning i pådraget.

e)

PI-regulator er ikke spesielt lurt her fordi et stasjonært pådrag forskjellig fra null vil gi en rorvinkel forskjellig fra null og skipet vil svinge og endre kurs. Generelt kan man si at I-leddet hovedsakelig hjelper mot konstante (eller veldig lavfrekvente) forstyrrelser, mens her prøver vi å kompensere for bølger.

f)

Med pådraget $u = -K_d\dot{\phi}$ satt inn i (9) får vi

$$\begin{aligned} J\ddot{\phi} &= K_1\dot{\phi} + K_2\phi - K_d\dot{\phi} \\ \ddot{\phi} - \frac{K_1 - K_d}{J}\dot{\phi} - \frac{K_2}{J}\phi &= 0 \end{aligned}$$

Sammenligner med standardform og løser for K_d,

$$\begin{aligned} 2\omega_0\hat{\zeta} &= -\frac{K_1 - K_d}{J} \\ K_d &= K_1 + 2\omega_0\hat{\zeta}J \\ &= -1.50 \cdot 10^9 + 2 \cdot 0.252 \cdot 0.3 \cdot 1.4 \cdot 10^{10} \\ &= 6.17 \cdot 10^8 \end{aligned} \tag{13}$$

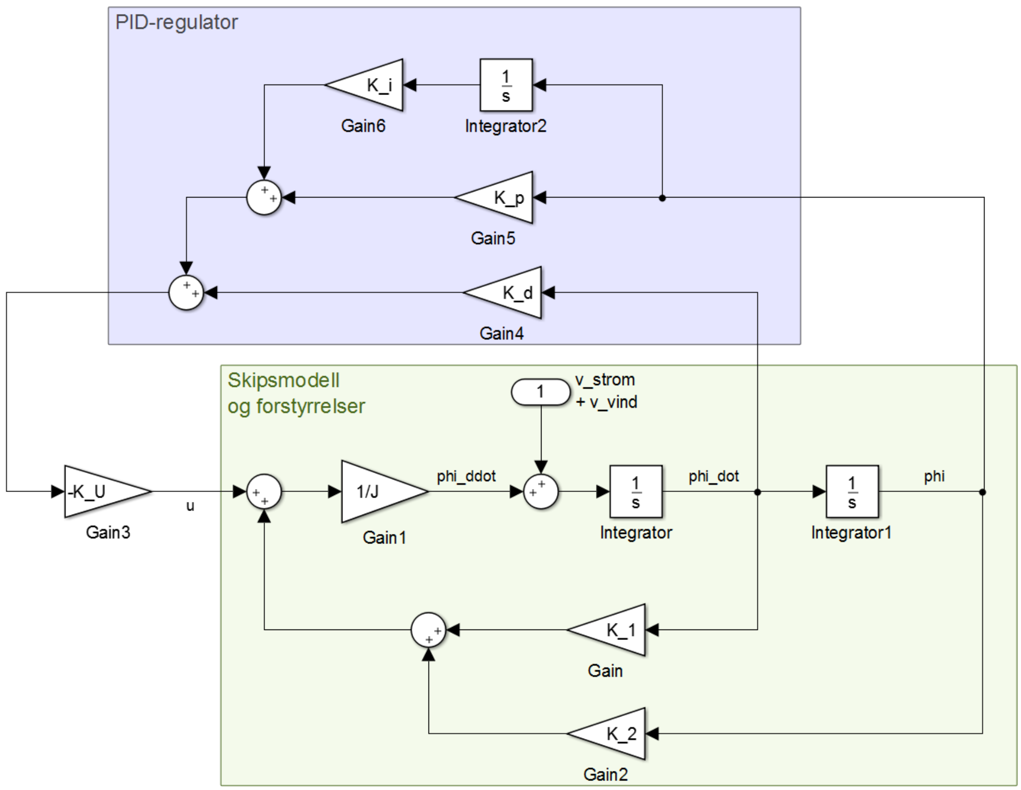
Evt. om man bruker $\hat{\omega}_0$ istedenfor ω_0 får vi $K_d = 6.75 \cdot 10^8$.

g)

$$u = -K_u\tilde{u}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \text{PID} \\ &= K_p\phi + K_i\int\phi dt + K_d\dot{\phi} \end{aligned} \tag{14}$$

h)



Figur 1: Blokkdiagram over rullebevegelse til skip med tilbakekobling.

i)

Her kan vi bruke en foroverkobling fra v_{vind}. I figur 1 har vi antatt at v_{vind} dukker opp som en forstyrrelse i vinkelakselerasjonen. I dette tilfellet kan vi dermed kompensere ved hjelp av et ekstra ledd i pådraget,

$$u_{vind} = -Jv_{vind}$$

Oppgave 4

a)

Programmet forholder seg til tiden slik vi er vant til å måle den i den ytre verden. Veggklokketid. Typisk har vi krav av typen "denne beregningen må være ferdig før et gitt tidspunkt".

b)

En scheduler holder rede på aktive tråder i systemet, og bestemmer hvem som til enhver tid skal få kjøre.

c)

En preemptive scheduler vil kunne avbryte oppgaver som kjører på et hvilket som helst tidspunkt, før de er ferdige, og legge dem til side for senere gjenopptagelse.

d)

En tråd kan bli avbrutt etter at den har lest `i` fra minnet, men før den har skrevet resultatet av beregningen tilbake til `i` igjen. Dermed vil evt. resultater i den andre tråden bare bli overskrevet når den første får kjøre igjen.

Oppgave 5

a)

Vi har tastefrekvens

$$f_s = 10\,\mathrm{kHz}$$

Den høyeste frekvensen signalet vårt kan inneholde blir da etter Nyquist-Shannons teorem

$$f = 5\,\mathrm{kHz} \tag{15}$$

b)

Se kompendiet for forklaring på nedfolding.