Øving 3

appg 1

$$I = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

a) Langs x-aksen er D begrenset av $x=0$ og $x=2$, og langs y-aksen er D begrenset oppe av $y=\sqrt{4-x^2}$ og nede av $y=\sqrt{2x-x^2}$.

$y=\sqrt{4-x^2}$ for $0\leq x\leq 2$ er kvartsirkel med radius 2 og sentrum i origo.

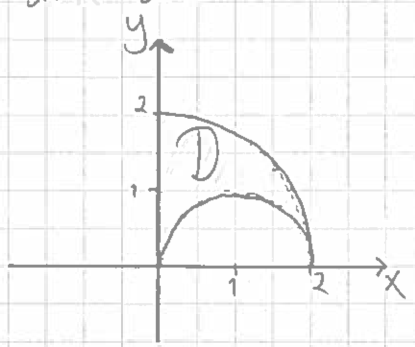
$y=\sqrt{2x-x^2}$ kan manipuleres for å få på et mer gjenkjennbart format.

$y=\sqrt{2x-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 2x-x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+y^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{(x-1)^2+y^2 = 1^2}$

$y=\sqrt{2x-x^2}$ er altså en halvsirkel på $0\leq x\leq 2$ med senter i $(1,0)$ og radius 1.

Setter alt sammen og får at D må se slik ut:

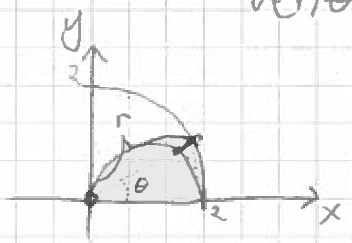


b) Lar $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Bruker polarkoordinater; $x = r\cos\theta$, $x^2+y^2=r^2$

$y = r\sin\theta$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$



Kan se på figuren at $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ og at r går fra $y=\sqrt{2x-x^2}$ til $r=2$.

$y = \sqrt{2x-x^2}$

$\iff r\sin\theta = \sqrt{2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta}$

$\iff r^{\cancel{2}}\sin^2\theta = 2\cancel{r}\cos\theta - r^{\cancel{2}}\cos^2\theta$

$\iff r = 2\cos\theta$

Har også $f_p(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$= \sqrt{4-r^2}$

Alt dette gir at integralet blir

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{2} \sqrt{4-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

La $u = 4-r^2 \Rightarrow du = -2r\,dr$

$4-(2\cos\theta)^2 \le u \le 4-2^2$

$4(1-\cos^2\theta) \le u \le 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\int_{4(1-\cos^2\theta)}^{0} \sqrt{u}\,du\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{u=0}^{u=4(1-\cos^2\theta)} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} 8\cdot(1-\cos^2\theta)^3\,d\theta$$

Vet at $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,
så har da $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta$$

La $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta$,
slik at

$$I = -\frac{8}{3}\int_{u=1}^{u=0} 1-u^2 \, du$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 1-u^2 \, du$$

$$= \frac{8}{3}\left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

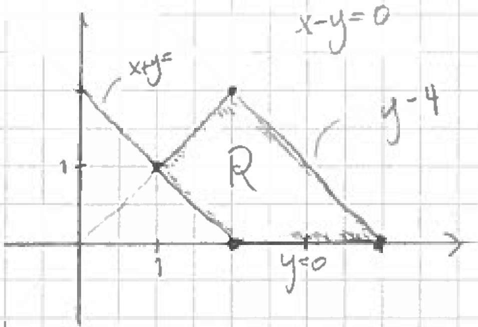
$$= \underline{\frac{16}{9}}$$

Konklusjon:

$$\underline{\underline{\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} \, dy\,dx = \frac{16}{9}}}$$

Oppg 2

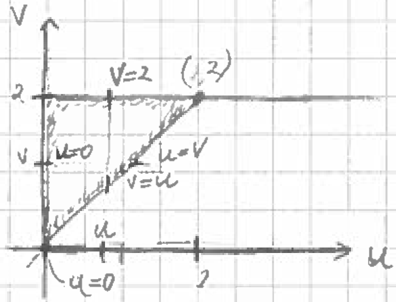
Tegner R:



Med variabelsubstutisjonen $u = x-y$ og $= x+$

får vi da

$y = 0 \Rightarrow u = v = x$



Jacobideterminanten: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$$

Integralet blir da

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^v \sin\left(\frac{u}{v}\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[-v\cos\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{u=0}^{u=v} dv$$

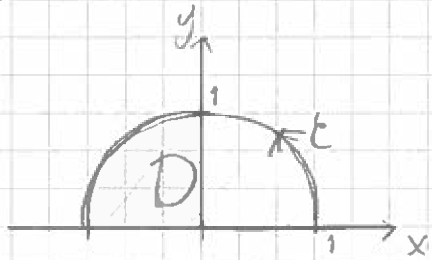
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 v(1-\cos 1)\;dv$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot(1-\cos 1)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2^2} = \underline{\underline{1-\cos 1}}$$

Oppg 3

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

$$C = \partial D$$



$$I = \oint_C \left(xy + \ln(x^2+1)\right)dx + \left(4x + e^{y^2} + 3\arctan y\right)dy$$

La $\vec{F}(x,y) = \left(xy + \ln(x^2+1)\right)\hat{\imath} + \left(4x + e^{y^2} + 3\arctan y\right)\hat{\jmath}$

Slik at $I = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\ln(x^2+1)$ er definert og kont. i hele D, og det er også $\arctan y$. Kan også se at $\vec{F}$ er glatt ved at alle komponentene kan deriveres uendelig mange ganger og fremdeles være kontinuerlige.
Kan derfor bruke Green's teorem:

$$I = \oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA$$

$$= \iint_D 4 - x \, dA$$

Vi kan se på figuren at D kan beskrives med ulikhetene $-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 4 - x \, dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{-x^2} \, dx$$

Slår opp i integraltabell og får:

$$\int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\cdot\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\cdot\left[\left(0+\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= 2\pi$$

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$$ fordi det er en odde ganger en like funksjon på et intervall $[-a,a]$.

Dette gir $I = 2\pi - 0 = 2\pi$

Så linjeintegralet bli 2π.