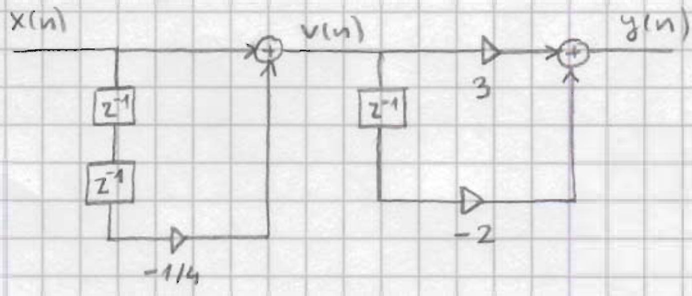
Løsningsforslag til eksamen i TTT4120 Digital signalbehandling desember 2009

1a)



$$\left.\begin{aligned} y(n) &= 3v(n) - 2v(n-1) \\ v(n) &= x(n) - \tfrac{1}{4}x(n-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(n) = 3x(n) - \frac{3}{4}x(n-2) - 2x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-3)$$

1b) Vi tar Z-transformen av differensligningen i 1a)

$$Y(z) = 3X(z) - \frac{3}{4}z^{-2}X(z) - 2z^{-1}X(z) + \frac{1}{2}z^{-3}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 3 - 2z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}$$

1c) Vi har at $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)$

Ved å sammenligne denne ligningen med differensligningen i 1a), ser vi at enhetspulsresponsen er gitt ved

$$h(n) = \begin{cases} 3 & n=0 \\ -2 & n=1 \\ -3/4 & n=2 \\ 1/2 & n=3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

1d) Dette er et FIR filter siden $h(n)$ har endelig lengde, $M = 4$

1e) Filteret har ikke en lineær faserespons siden $h(n) \neq \pm h(M-1-n)$

ser vi at enhetspulsresponsen er gitt ved

$$h(n) = \begin{cases} 3 & n=0 \\ -2 & n=1 \\ -3/4 & n=2 \\ 1/2 & n=3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

1d) Dette er et FIR filter siden $h(n)$ har endelig lengde, $M = 4$

H(z) består av to delfiltre koblet i serie, et 2. ordens FIR filter $H_1(z)$ og et 1. ordens FIR filter $H_2(z)$, dvs. $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

Ved å ta Z-transformen til ligningene i 1a) får vi

$$\left.\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{Y(z)}{V(z)} = 3 - 2z^{-1} \\ H_1(z) &= \frac{V(z)}{X(z)} = 1 - \frac{1}{4}z^{-2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad H(z) = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(3 - 2z^{-1}\right)$$

$$n_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \qquad n_3 = \frac{2}{3}$$

Vi ser at alle nullpunktene ligger innenfor enhetssirkelen. Dermed eksisterer det et kausalt og stabilt invers filter.

1g) $$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(3 - 2z^{-1}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(3 - 2z^{-1}\right)}$$

$$h_I(n) = Z^{-1}\left\{H_I(z)\right\}$$

Bruker delbrøksoppspalting:

$$H_I(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{3 - 2z^{-1}}$$

$$A = H_I(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right)\left(3 - 2\cdot 2\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = H_I(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\cdot(-2)\right)\left(3 - 2(-2)\right)} = \frac{1}{14}$$

$$C = H_I(z)\left(3 - 2z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{16}{7}$$

$$h_I(n) = Z^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{1}{14}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}\right.$$

$$B = H_I(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\cdot(-2)\right)\left(3 - 2(-2)\right)} = \frac{1}{14}$$

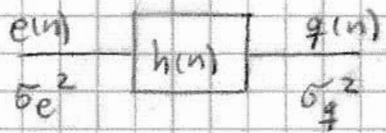
$$C = H_I(z)\left(3 - 2z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{16}{7}$$

2a) $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$

$$\Delta = \frac{X_{max} - X_{min}}{2^B} = \frac{1-(-1)}{2^8} = \frac{2}{2^8} = \frac{1}{2^7}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{12 \cdot 2^{14}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{16}}$$

2b)



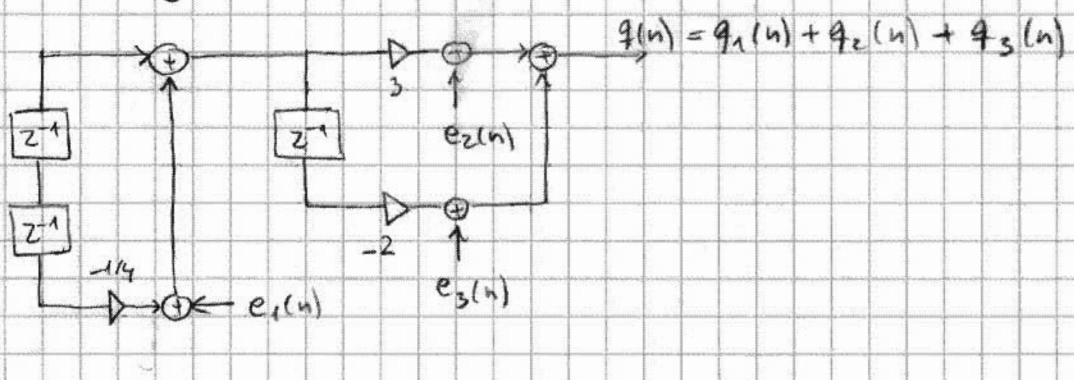
$$\sigma_q^2 = E\left[q^2(n)\right] = E\left[\left(e(n) * h(n)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e(n-k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)e(n-l)\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)\underbrace{E\left[e(n-k)e(n-l)\right]}_{=0 \text{ for } l \neq k \text{ siden } e(n) \text{ er hvit støy}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(k)E\left[e^2(n-k)\right] = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k) = \sigma_e^2\, r_{hh}(0)$$

2c) Vi modellerer avrundningsstøy som additiv støy etter hver multiplikasjon og antar at støybidragene er ukorrelerte med hverandre og med inngangssignalet.



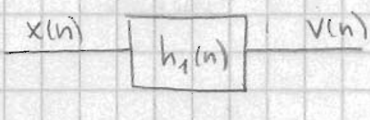
$e_1(n)$ går gjennom delfilteret $H_2(z)$ på sin vei mot utgang, mens $e_2(n)$ og $e_3(n)$ føres direkte til utgangen.

$$\sigma_q^2 = \sigma_{q1}^2 + \sigma_{q2}^2 + \sigma_{q3}^2 = \sigma_e^2\, r_{h_2h_2}(0) + \sigma_e^2 + \sigma_e^2$$

$$h_2(n) = \begin{cases} 3 & n=0 \\ -2 & n=1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad r_{h_2h_2}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2^2(n) = 9+4 = 13$$

$$\Rightarrow \sigma_q^2 = 15 \cdot \sigma_e^2 = \frac{15}{3 \cdot 2^{9}} = \frac{5}{2^9} = \frac{5}{512}$$

2d) Overflyt kan oppstå etter addisjon, så vi må finne de største verdiene av signalene etter de to addererne, $v(n)$ og $y(n)$.



$$h_1(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -\frac{1}{4} & n=2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$|v(n)| = |x(n) * h_1(n)| = \left|\sum h_1(k)\, x(n-k)\right| \leq \sum |h_1(n)|\underbrace{|x(n-k)|}_{\leq 1} \leq \sum |h_1(n)|$$

$$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$|y(n)| \leq \sum |h(n)| = 3 + 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$

For å unngå overflyt, må vi derfor skalere inngangssignalet med $\frac{4}{25}$.

3a) Dette er en MA(1) - prosess siden det ble generert ved å sende hvit støy gjennom et FIR-filter.

3b) $$\gamma_{xx}(l) = E[x(n)\,x(n-l)]$$
$$= E[(w(n) - 0{,}5\,w(n-1))(w(n-l) - 0{,}5\,w(n-l-1))]$$
$$= E[w(n)w(n-l)] - 0{,}5\,E[w(n-1)w(n-l)]$$
$$- 0{,}5\,E[w(n)w(n-l-1)] + 0{,}25\,E[w(n-1)w(n-l-1)]$$
$$= \gamma_{ww}(l) - 0{,}5\,\gamma_{ww}(l-1) - 0{,}5\,E\,\gamma_{ww}(l+1) + 0{,}25\,\gamma_{ww}(l)$$
$$= 1{,}25\,\sigma_w^2\,\delta(l) - 0{,}5\,\sigma_w^2\,\delta(l-1) - 0{,}5\,\sigma_w^2\,\delta(l+1)$$
$$= \begin{cases} -0{,}5 & l = -1 \\ 1{,}25 & l = 0 \\ -0{,}5 & l = 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\Gamma_{xx}(f) = \text{DTFT}\{\gamma_{xx}(l)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(l)\,e^{-j2\pi f l}$$
$$= -0{,}5\,e^{+j2\pi f} + 1{,}25 - 0{,}5\,e^{-j2\pi f} = 1{,}25 - \cos(2\pi f)$$

3c) Førsteordens lineær prediktor er gitt ved : $\hat{x}(n) = \alpha\,x(n-1)$

Prediksjonsfeil er gitt ved $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$

Vi skal finne α som minimaliserer prediksjonsfeileffekten

$$\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = E[(x(n) - \alpha\,x(n-1))^2]$$

$$\frac{d\sigma_e^2}{d\alpha} = E[2(x(n) - \alpha\,x(n-1)) \cdot (-x(n-1))] = 0$$

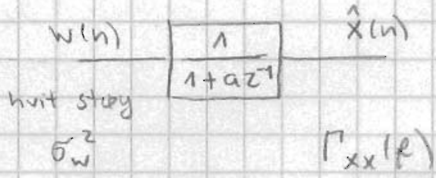
$$E[-x(n)\,x(n-1) + \alpha\,x^2(n-1)] = 0$$

$$\alpha\,E[x^2(n-1)] = E[x(n)x(n-1)]$$

$$\alpha = \frac{\gamma_{xx}(1)}{\gamma_{xx}(0)} = \frac{-0{,}5}{1{,}25} = -\frac{1}{2{,}5} = -0{,}4$$

$$\sigma_e^2 = E[x^2(n) - 2\alpha\,x(n-1)x(n) + \alpha^2 x^2(n-1)]$$
$$= E[x^2(n)] - 2\alpha\,E[x(n-1)x(n)] + \alpha^2\,E[x^2(n-1)]$$
$$= (1+\alpha^2)\,\gamma_{xx}(0) - 2\alpha\,\gamma_{xx}(1) = (1+0{,}4^2) \cdot 1{,}25 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}5) = 1{,}05$$

3d)



$$\hat{x}(n) = -a\,\hat{x}(n-1) + w(n)$$

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2\,|H(f)|^2 = \sigma_w^2 \cdot \left|\frac{1}{1+a e^{-j2\pi f}}\right|^2 = \frac{\sigma_w^2}{|1+a e^{-j2\pi f}|^2}$$

$$= \frac{\sigma_w^2}{[1+a\cos(2\pi f)]^2 + a^2 \sin^2 2\pi f} = \frac{\sigma_w^2}{1+a^2+2a\cos(2\pi f)}$$

Parametrene til den beste AR(1)-modellen er relatert til parametrene til den beste 1. ordens lineære prediktoren på følgende måte:

$$a = -\alpha \qquad \sigma_w^2 = \sigma_e^2$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{xx}(f) = \frac{\sigma_e^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi f)} = \frac{1{,}05}{1{,}16+0{,}8\cos(2\pi f)}$$

4a) • $\boxed{\uparrow I}$ er en interpolator. Den setter inn $I-1$ nuller mellom de påfølgende verdiene til inngangssignalet.

$$v(\ell) = \begin{cases} x_1(\ell/I), & \ell = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

• Filteret $h(\ell)$ fjerner uønskede spektrale repetisjoner etter interpolering (i.e. erstatter nullene med riktige signalverdiene) og sørger for at det ikke oppstår aliasing etter desimering (ikke relevant i denne oppgaven).

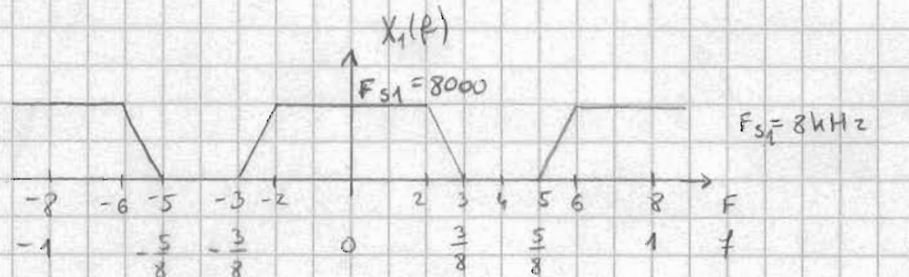
$$w(\ell) = v(\ell) * h(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\, h(\ell - n)$$

• $\boxed{\downarrow D}$ er en desimator som plukker ut hver D-te punktprøve fra inngangssignalet: $x_2(m) = w(mD)$

4b) $$\frac{F_{s2}}{F_{s1}} = \frac{12\text{ kHz}}{8\text{ kHz}} = \frac{3}{2} = \frac{I}{D}$$

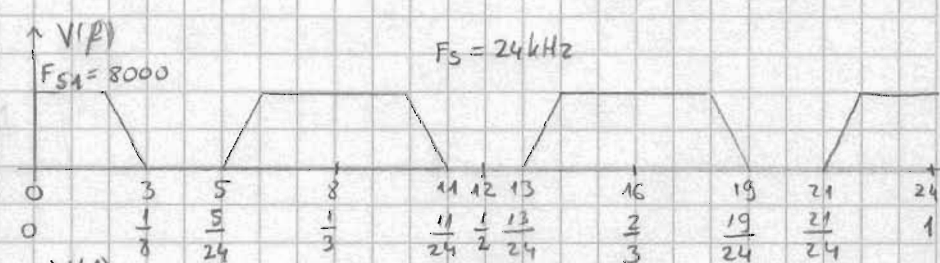
$I=3$ og $D=2$ er dermed de minste verdiene som gir ønsket konvertering av samplingsfrekvens.

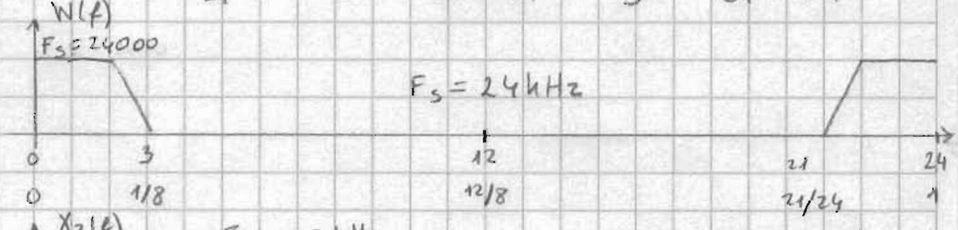
4c)



Punktrøving fører til repetisjoner av spekteret med periode lik F_{s1}. (punktprøvingsteorem)

Innsetting av nullpunkt endrer ikke spekteret til signalet sett som funksjon av F, men øker samplingsfrekv I ganger

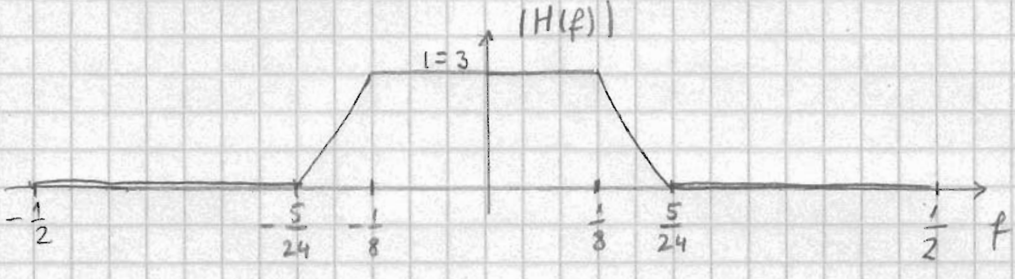




De to siste grafene følger fra samplingsteoremet med samplingsfrekvensene hhv. 24kHz og 12kHz.

Filteteret skal fjerne de uønskede spektrale repetisjoner fra $V(f)$ (to midterste) og beholde de ønskede repetisjonene uendret, slik at vi etter filtrering får spekteret $W(f)$.

Dette kan vi oppnå med et digitalt lavpassfilter med passbånd i $[0, \frac{1}{8})$ og stoppbånd i $(\frac{5}{24}, \frac{1}{2})$. Et filter som oppfyller spesifikasjonene er gitt i følgende figur:



4d) Ja, rekkefølgen er viktig. Hvis vi hadde startet med desimering, måtte vi begrense båndbredden til signalet til 2 kHz for å unngå aliasing. Dette vil føre til informasjonstap.