Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt:

Navn: Esten Ingar Grøtli
Tlf.: 920 99 036

Eksamen - TTK 4100 Kybernetikk Introduksjon
Løsningsforslag

21. mai 2012, 09:00 – 13:00

Hjelpemidler: D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Da tidligere vurdering i faget teller 20% av den endelige karakteren, teller denne eksamenen 80%. Oppgavenes vekting er i forhold til endelig karakter.

Oppgave 1 (28%)

Gitt differensiallikninga

$$\dot{x} = ax + b\,, \tag{1}$$

hvor a og b er konstanter.

(a) (4%) Vis at den generelle løsninga til differensiallikninga (1) er gitt av

$$x = Ce^{at} - \frac{b}{a}\,, \tag{2}$$

hvor C er en konstant.
Hint: Du kan finne det nyttig å vite at

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|\,. \tag{3}$$

Løsning:
Fra utledningen i kompediet har vi at

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + b\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax + b\\ \int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ved å bruke den oppgitte formelen for integralet på venstre side av likhetstegnet får vi at

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\ln|ax+b| =& t + C_1 \\
|ax+b| =& e^{a(t+C_1)} \\
ax+b =& e^{at}e^{aC_1} \\
x = Ce^{at} - \frac{b}{a}&\,,
\end{aligned}
$$

hvor konstanten $C = \frac{e^{aC_1}}{a}$.

(b) (4%) Anta at likninga har en initialverdi gitt ved $x(0) = x_0$. Vis da at løsninga på differensiallikninga (1) er gitt av

$$x = x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)\,. \tag{4}$$

Løsning:
Som i kompendiet løser vi først for C ved å sette inn $x(0) = x_0$ i den generelle løsninga:

$$x(0) = x_0 = Ce^{a\cdot 0} - \frac{b}{a} \implies C = x_0 + \frac{b}{a}\,.$$

Så setter vi inn for C i den generelle løsninga og får at

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a} &(5)\\
=& x_0 e^{at} + \frac{b}{a}e^{at} - \frac{b}{a} &(6)\\
=& x_0 e^{at} + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)\,. &(7)
\end{aligned}
$$

(c) (2%) En forenklet modell for temperaturen til ei kokeplate er gitt av differensiallikninga

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P - kT_{\text{rom}})\,, \tag{8}$$

hvor P er effekten vi tilfører plata, T_{rom} er temperaturen på lufta i rommet, c er varmekapasiteten og k er varmeovergangstallet mellom kokeplata og lufta i rommet. Hvilken balanselov er brukt for å komme fram til denne differensiallikninga?

Løsning:
Energibalanse.

(d) (8%) Forklar begrepene stasjonærverdi og tidskonstant, og bruk tallverdiene $P = 500\,\mathrm{W}$, $k = 2\,\mathrm{W\,^\circ C^{-1}}$, $T_{\text{rom}} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ og $c = 400\,\mathrm{J\,^\circ C^{-1}}$ til å finne disse.

Løsning:

Stasjonærverdien til et førsteordens system (hvis den finnes) er verdien til tilstandsvariabelen etter at alle transienter har dødd ut, og representerer systemets likevektspunkt. For likning (1) vil det si at venstresiden settes lik null, og stasjonærverdien er da gitt av

$$x_{\text{stasjonær}} = -\frac{b}{a}\,,$$

forutsatt at $a < 0$.

Tidskonstanten er tallverdien hvor tangenten til responsen i initialtidspunktet krysser stasjonærverdien. For likning (1) er tidskonstanten gitt av

$$T_{\text{tidskonstant}} = -\frac{1}{a}\,.$$

For tilfellet med kokeplata kan vi for utregning av stasjonærverdi og tidskonstant bruke at $a = -\frac{k}{c}$, $b = \frac{1}{c}(P - kT_{\text{rom}})$. Vi får da at

$$T^{\text{kokeplate}}_{\text{stasjonær}} = \frac{\frac{1}{c}(P - kT_{\text{rom}})}{-\frac{k}{c}} = \frac{1}{k}(P - kT_{\text{rom}}) = 230\,°\text{C}\,,$$

og

$$T^{\text{kokeplate}}_{\text{tidskonstant}} = -\frac{1}{-\frac{k}{c}} = \frac{c}{k} = 200\,\text{s}\,.$$

Dessverre inneholdt likning (8) en fortegnsfeil. Modellen for temperaturen i kokeplata skulle vært gitt som

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom})\,.$$

Dette gir en stasjonærverdi på $T^{kokeplate}_{stasjonær} = 270\,°\text{C}$. *Siden det ikke ble opplyst om fortegnsfeilen ved eksamen ga begge svarene full uttelling. Dette gjelder også for resten av deloppgavene.*

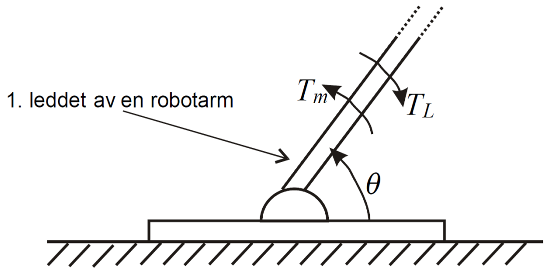
(e) (5%) Sett opp løsninga for kokeplatetemperaturen $T(t)$, og bruk initialbetingelsen $T(0) = T_0 = 20\,°\text{C}$ og tallverdiene for P, k, T_{rom} og c fra forrige oppgave til å finne temperaturen for $t = 5\,\text{s}$ og $t = 10\,\text{s}$. *Husk at løsninga til denne typen differensiallikninger er gitt av (4).*

Løsning:
Ved å sette inn for $a = -\frac{k}{c}$, $b = \frac{1}{c}(P - kT_{\text{rom}})$ i (4) får vi at

$$\begin{aligned} T(t) =& T_0 e^{-\frac{k}{c}t} + \frac{\frac{1}{c}(P - kT_{\text{rom}})}{-\frac{k}{c}}\left(e^{-\frac{k}{c}t} - 1\right) \\ =& T_0 e^{-\frac{k}{c}t} - \frac{(P - kT_{\text{rom}})}{k}\left(e^{-\frac{k}{c}t} - 1\right)\,. \end{aligned}$$

Setter så inn for $t = 5$ og $t = 10$ og får at $T(5) \approx 25.18\,°\text{C}$ og $T(10) \approx 30.24\,°\text{C}$.
Ved bruk av korrekt modell,

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom})\,,$$



Figur 1: Det første leddet av en robotarm.

får man at $T(5) \approx 26.17\,°\mathrm{C}$ *og* $T(10) \approx 32.19\,°\mathrm{C}$

(f) (5%) Dersom man ikke kan finne en analytisk løsning til differensiallikninga $\dot{x} = f(x)$, kan man beregne løsninga numerisk for eksempel ved hjelp av Eulers metode. Løsninga x_{n+1} (det vil si løsninga ved tidspunkt t_{n+1}) er gitt av

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n)\,, \tag{9}$$

hvor h er skrittlengden. La $h = 5\,\mathrm{s}$, og bruk Eulers metode til å regne ut løsninga for $t = 5\,\mathrm{s}$ og $t = 10\,\mathrm{s}$. Sammenlikn med svaret fra forrige oppgave, og forklar eventuelle avvik.

Løsning:
I dette tilfellet må vi regne ut T_1 og T_2 ut fra

$$T_{n+1} = T_n + h(-\frac{k}{c}T_n + \frac{1}{c}(P - kT_{\mathrm{rom}}))\,, \tag{10}$$

med $T_0 = T(0) = 20\,°\mathrm{C}$. Dette gir $T_1 = T(nh = 5) \approx 25.25\,°\mathrm{C}$ og $T_2 = T(nh = 10) \approx 30.37\,°\mathrm{C}$. Den numeriske løsningen er bare en tilnærming til den eksakte (analytiske) løsningen i forrige oppgave. Avviket kunne blitt gjort mindre ved at vi hadde minsket steglengden h.
Ved bruk av korrekt modell,

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom})\,,$$

får man at $T_1 = T(nh = 5) \approx 26.25\,°\mathrm{C}$ *og* $T_2 = T(nh = 10) \approx 32.34\,°\mathrm{C}$.

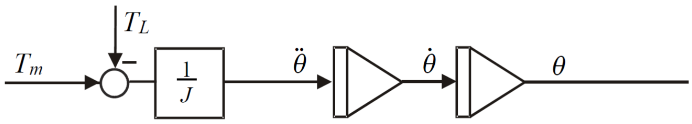
Oppgave 2 (22%)
Figur 1 viser det første leddet av en robotarm (robotmanipulator). Ved å sette opp momentbalanse for systemet kommer man fram til følgende modell

$$J\ddot{\theta} = T_m - T_L\,, \tag{11}$$

der J er treghetsmomentet, θ er vinkelen, T_m er momentet fra en motor som driver leddet og T_L er et lastmoment som skriver seg fra resten av robotarmen, gravitasjonsmoment, og en eventuell last i enden.

(a) (4%) Tegn et blokkdiagram for modellen. T_m og T_L skal være inngangssignaler, og θ er utgangen.

Løsning:
Blokkdiagram for likning (11):



(b) (2%) Momentet fra motoren T_m betraktes som pådrag. Vinkelen til armen skal styres ved hjelp av en PD-regulator

$$u(t) = T_m(t) = -K_p(\theta + T_d\dot{\theta})\,, \tag{12}$$

der $K_p > 0$ og $T_d > 0$ er regulatorparametre. Det er antatt her at referansevinkelen er null. Hva må måles for å realisere denne regulatoren?

Løsning:
Vinkelen θ og vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ må måles. I noen tilfeller kan $\dot{\theta}$ beregnes fra θ. Numerisk derivasjon av θ for å oppnå $\dot{\theta}$ er ofte ikke å anbefale, da målestøy vil forsterkes.

(c) (2%) Det er ønskelig at reguleringssystemet skal ha kritisk demping. Hvorfor det?

Løsning:
Kritisk demping ($\zeta = 1$) gir raskest mulig respons uten svingninger.

(d) (6%) Sett foreløpig $T_L = 0$. Gitt at $J = 1$, finn verdier for regulatorparametrene K_p og T_d slik at systemet får kritisk demping og udempet resonansfrekvens $\omega_0 = 1$.

Løsning:
Ved å sette inn $u(t) = T_m(t) = -K_p(\theta + T_d\dot{\theta})$ i (11) får vi

$$\ddot{\theta} + \frac{K_pT_d}{J}\dot{\theta} + \frac{K_p}{J}\theta = 0\,.$$

Hvis vi sammenlikner med

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0\,,$$

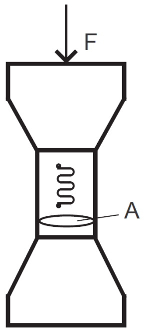
fra kompendiet, finner vi at

$$\omega_0^2 = \frac{K_p}{J} \implies K_p = J\omega_0^2 = 1\,,$$

og at

$$2\zeta\omega_0 = \frac{K_pT_d}{J} \implies T_d = \frac{2J\zeta\omega_0}{K_p} = 2\,.$$

(e) (4%) Anta så at vi har et lastmoment T_L som virker på armen. Dette kan betraktes som en forstyrrelse som kan måles. Hvordan vil du modifisere regulatoren



Figur 2: Strekklapp i lastcelle.

for å kompensere for denne forstyrrelsen? (Skriv opp uttrykket for regulatoren $u(t) = \ldots$) Hva kalles denne teknikken?

Løsning:
Teknikken kalles *foroverkobling*, og regulatoren får nå formen

$$u(t) = -K_p(\theta + T_d\dot{\theta}) + T_L\,. \tag{13}$$

(f) (4%) Forklar kort hva vi ønsker å oppnå med *proporsjonal-*, *integral-* og *derivat-* leddene i en PID-regulator.

Løsning:
Proporsjonalleddet består av en konstant multiplisert med reguleringsavviket og skal sørge for at reguleringsavviket blir mindre. Effekten av dette leddet minker når reguleringsavviket blir mindre.

Integralleddet skal sørge for at vi unngår stasjonæravvik.

Derivatleddet brukes for å oppnå hurtigere regulering ved sprang i referansen, og bidrar generelt til økt demping i systemet.

Oppgave 3 (18%)

Gauge Factor for en strekklapp er definert som

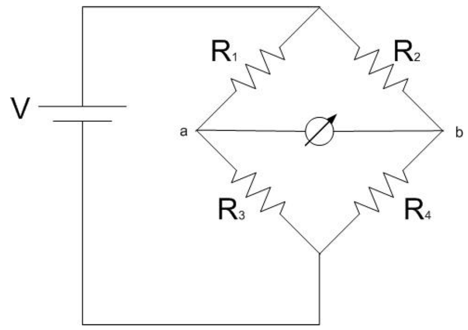
$$G_F = \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l}\,. \tag{14}$$

En strekklapp med $G_F = 2.1$ og nominell motstand $R = 240\,\Omega$ er montert i en lastcelle som skal måle en kraft F. Lastcellen er utformet som en stolpe med tverrsnittareal $A = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ som vist i Figur 2. Stolpen er laget av aluminium med elastisitetsmodul $E = 6.89 \times 10^{10}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Sammenhengen mellom stress og strekk er gitt av

$$E = \frac{\text{stress}}{\text{strekk}} = \frac{F/A}{\Delta l/l}\,. \tag{15}$$

(a) (5%) Strekklappen R_4 er plassert i en helbro (Wheatstonebro), se Figur 3. Vis at

$$V_{ab} = \Delta V = \frac{R_3R_2 - R_1R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}V\,. \tag{16}$$



Figur 3: Helbro.

Løsning:
Vi har at
$$\Delta V = V_a - V_b\,,$$
hvor V_a (henholdsvis V_b) er spenningen mellom punkt a (b) og bunnen av broen. Videre har vi at V_a er forsyningsspenningen V delt mellom R_1 og R_3:
$$V_a = \frac{VR_3}{R_1 + R_3}\,.$$
Tilsvarende har vi at
$$V_b = \frac{VR_4}{R_2 + R_4}\,.$$
Ved å kombinere likningene over får vi at
$$\begin{aligned}\Delta V =& \frac{VR_3}{R_1 + R_3} - \frac{VR_4}{R_2 + R_4}\\ =& \frac{R_3R_2 - R_1R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}V\end{aligned}$$

(b) (4%) Helbroens driftsspenning er på 12 V. Finn resistanseendringen i strekklappen når målebroens avvik ΔV fra likevekt er 12 mV, og de tre andre motstandene i broa har resistans $R_1 = R_2 = R_3 = 240\,\Omega$.

Løsning:
Vi bruker at $R_1 = R_2 = R_3 = 240\,\Omega$, $V = 12\,\mathrm{V}$ og $\Delta V = 12\,\mathrm{mV}$. Innsatt i (16) får vi at
$$\frac{12}{1000} = \frac{240(240 - R_4)}{480(240 + R_4)}12\,.$$
Vi løser likningen for R_4 og finner at $R_4 \approx 239.04\,\Omega$. Resistanseendringen er altså på ca $0.96\,\Omega$.

(c) (3%) Hva er lasten dersom resistanseendringen til strekklappen er $\Delta R = 5\,\mathrm{m}\Omega$?

Løsning:
Vi finner fra likning (14) og likning (15) at

$$\begin{aligned} F =& E\frac{\Delta l}{l}A \\ =& \frac{E\Delta RA}{G_F R}\,, \end{aligned}$$

som innsatt med tallverdier gir at $F \approx 1367\,\mathrm{N}$.

(d) (2%) Anta at den ukjente motstanden er plassert langt fra resten av målebroen. Hvilke teknikker vil du anbefale for å opprettholde nøyaktighet, med tanke på at du vil redusere feil i målingene på grunn av temperaturendringer og motstand i ledningene.

Løsning:
For å minske effekten av temperaturendring kan man benytte en *treled-erkobling* som beskrevet i kompendiet.

Målebroer kan drives av *konstante strømkilder* for at motstand i ledningene ikke skal introdusere feil i målingene.

(e) (4%) I stedet for å plassere strekklappen i en helbro kunne man brukt en halvbro. Forklar prinsippet bak en halvbro, og forklar hvorfor en helbro oftest er å foretrekke.

Løsning:
I en halvbro vil en kjent referansemotstand R_r og en ukjent motstand R_x seriekobles. Spenningen U_r over R_r måles, og siden strømmen I gjennom begge motstandene er lik har vi at

$$\frac{U_r}{R_r} = \frac{U_x}{R_x}\,,$$

der spenningen over den ukjente motstanden beregnes som

$$U = U_r + U_x \implies U_x = U - U_r\,.$$

Dermed følger det at

$$\frac{U_r}{R_r} = \frac{U - U_r}{R_x}\,,$$

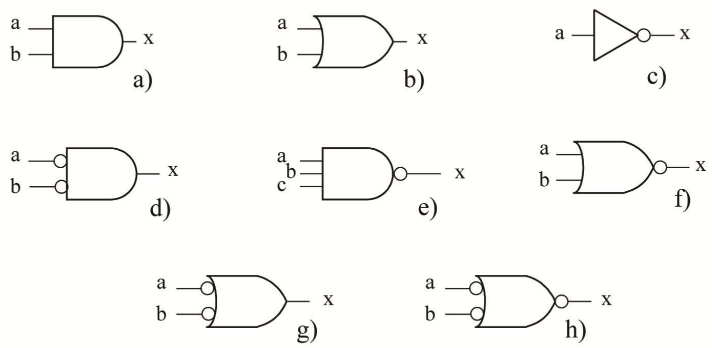
og at

$$R_x = R_r\frac{U - U_r}{U_r}\,.$$

Ulempen med denne metoden er avhegigheten av forsyningsspenningen U som igjen varierer med ledningsmotstanden. Dette problemet kan løses ved å bruke en helbro.

Oppgave 4 (12%)

(a) (1%) Forklar kort hva vi mener med *kombinatoriske* og *sekvensielle* funksjoner, og forskjellen mellom disse to begrepene.



Figur 4

Løsning:
En logisk *kombinatorisk* funksjonsverdi (utgang) er entydig bestemt av øyeblikksverdien av inngangsvariablene.
Sekvensielle funksjoner bygger på de kombinatoriske, men i tillegg inngår funksjon av hva som har foregått *før*, uttrykt i systemets (kretsenes) *tilstand*.

(b) (1%) Skriv alle tallkombinasjonene av logikkfunksjonen $c = a + b$, hvor a, b, og c er boolske variable.

Løsning:
Følgende tabell gir alle tallkombinasjoner av logikkfunksjonen:

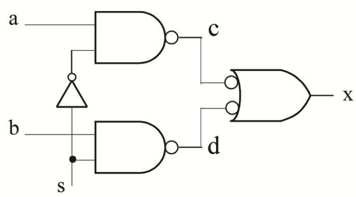
c	a	b
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

(c) (1%) Skriv alle tallkombinasjonene av logikkfunksjonen $c = a \cdot b$, hvor a, b, og c er boolske variable.

Løsning:
Følgende tabell gir alle tallkombinasjoner av logikkfunksjonen:

c	a	b
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

(d) (3%) Skriv det logiske uttrykket for x for hver av figurene a), b), c) ... h) i Figur 4.



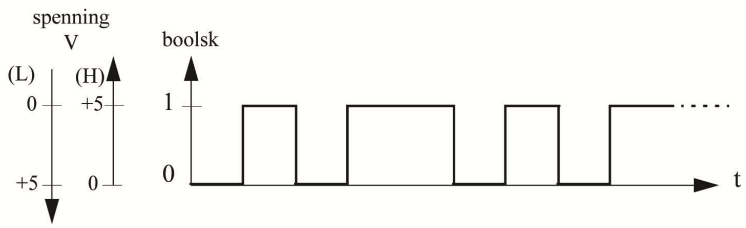
Figur 5

> **Løsning:**
> a) $x = a \cdot b$, b) $x = a + b$, c) $x = \overline{a}$, d) $x = \overline{a} \cdot \overline{b}$
> e) $x = \overline{a \cdot b \cdot c}$, f) $x = \overline{a + b}$, g) $x = \overline{a} + \overline{b}$, h) $x = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$

(e) (2%) Kan du finne et forenklet uttrykk for funksjonen i h) i Figur 4, og hvilket viktig teorem ligger til grunn for denne forenklingen?

> **Løsning:**
> Et forenklet uttrykk for funksjonen i h): $x = a \cdot b$, ut fra De Morgan's teorem.

(f) (2%) Forklar hva som menes med *høy* og *lav* representasjon når to distinkte spenningsnivåer brukes til å representere 0 og 1 i et elektronisk logikksystem.

> **Løsning:**
> Anta til eksempel at de nominelle spenningsnivåene er 0 V og +5 V. Ved *høy* representasjon vil da boolsk 0 være representert ved 0 V og boolsk 1 være representert ved +5 V. Det motsatte gjelder for *lav* representasjon.
>
> 
>

(g) (2%) Skriv et uttrykk for logikkfunksjonen $x = f(a, b, s)$ i Figur 5, uttrykt ved inngangsvariablene a, b og s. Hva er virkningen av denne kretsen?

> **Løsning:**
> Logikkfunksjonen $x = f(a, b, s)$, uttrykt ved inngangsvariablene a, b og s:
>
> $$x = \overline{c} + \overline{d} = a \cdot \overline{s} + b \cdot s\,.$$
>
> Kretsen virker som en multiplekser (eller svitsj) hvor s styrer valget mellom a og b.