Norwegian university of science and technology
Department of engineering cybernetics

Kontaktperson under eksamen:
Navn: Professor Bjarne Foss
Tlf: 92422004

Norsk/nynorsk utgave/utgåve

Eksamen i TTK4135

Optimalisering og regulering

Optimization and Control

Fredag 29. mai 2008

Kl: 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler / Tilletne hjelpemiddel:

D - Ingen trykte eller skrevne hjelpemidler / Inga trykte eller skrevne hjelpemiddel.

Godkjent kalkulator med tomt minne / Godkjend kalkulator med tomt minne

---

Nyttig informasjon finnes i vedlegg / Nyttig informasjon finns i vedlegg (Denne informasjonen er gitt på engelsk for å samsvare med pensumlitteraturen som den er hentet ifra).

Sensur faller 22.6 / Sensur fell 22.6.

1 Konveksitet og KKT (40%)

a Anta minimeringsproblemet gitt av (1) uten likhetsbetingelser ($\mathcal{E} = \emptyset$). Anta videre at x' er et lokalt minimum hvor ingen ulikhetsbetingelser er aktive. Vis at $\nabla f(x') = 0$ ved å bruke KKT-betingelsene. (KKT-betingelsene er gitt i appendiks).

b 2. ordens betingelser som er gitt i (3), kan forenkles for det lokale minimum x' i **a**. Formuler 2. ordens betingelser for dette tilfellet, og forklar kort sammenhengen med (3).

c Anta maksimeringsproblemet:

$$\max \; x_1^3 - 3x_1^2$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 1$$

- Finn løsningen for x_1 og tilsvarende objektfunksjonsverdi.
- Finn Lagrangemultiplikatorene for løsningen.
- Er maksimeringsproblemet konvekst? Begrunn svaret.

d Anta et 2-dimensionalt optimeringsproblem, dvs. at $x \in \Re^2$.

- Skisser et eksempel på en konveks gyldig mengde (convex feasible set) i dette tilfellet, og tilhørende likhets- og/eller ulikhetsbetingelser.
- Skisser et eksempel på en ikke-konveks gyldig mengde (non-convex feasible set) i dette tilfellet.
- Anta en konveks mengde $X \subset \Re^2$. Spesifiser en viktig egenskap ved konvekse mengder.
- Ulineære optimeringsproblemer (nonlinear programming) kan enten være ikke-konvekse eller konvekse. Hvorfor er det viktig å ha informasjon om dette?

e Vi fokuserer nå på de fire siste KKT-betingelsene i (2).

- Anta at en ulikhetsbetingelse ($c_i(x) \geq 0$) ikke er aktiv i en lokal løsning. Hva er da verdien av tilhørende Lagrange-multiplikator λ_i?
- Er likhetsbetingelsene ($c_i(x) = 0$) alltid aktive i en lokal løsning? Begrunn svaret.
- Den siste KKT-betingelsen ($\lambda_i^* c_i(x^*) = 0$) kalles gjerne komplementaritetsbetingelsen (complentarity condition). Hva betyr *streng komplementaritet (strict complementarity)*? Hvordan påvirker streng komplementaritet løsningstiden (kjøretid på en datamaskin) for et optimeringsproblem?

2 Optimalregulering og MPC (45%)

Gitt et optimeringsproblem som i (4)-(8) for regulering av et dynamisk system. Senket skrift i refererer til tid, og optimeringshorisonten strekker seg fra 0 til n. Q_i, P_i og S er symmetrisk postiv definite matriser. $x_i \in \Re^l$, $y_i \in \Re^j$, $u_i \in \Re^m$ og x_0 er gitt.

a Anta at $n = 6$, $l = 3, j = 1$ og $m = 2$. Hvor mange frie variable er det i optimeringsproblemet (4)-(8)? Det er flere mulige, korrekte svar her, så du bør forklare hvordan du kommer fram til ditt svar.

b Anta at alle ulikhetsbetingelser fjernes. Det betyr at (7), (8) fjernes.

- Spesifiser Lagrangefunksjonen for (4)-(6).
- Definer KKT-betingelsene for (4)-(6).
- Vi ønsker å implementere en optimalregulator (LQ regulator). Løsningen er gitt i teoremet i slutten av appendikset. Hvilken type regulator får vi (lineær/ulineær, tidsvarierende/tids-invariant, tilstandstilbakekopling/utgangstilbakekopling)?

c Vi endrer problemet i **b** til følgende problem.

$$\min \quad f_\infty = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\{x_i{}^TQx_i + u_i{}^TPu_i\}$$
$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i,\ 0 \le i \le \infty$$

- Regulatoren er nå gitt av $u_i = Kx_i$. Hvordan beregnes K? Vis likningen(e).
- Det lukkede sløyfe (closed-loop) systemet må være stabilt (dvs at $x_i \to 0$, $u_i \to 0$ når $i \to \infty$). Spesifiser betingelser for å oppnå stabilitet. (To betingelser).

d MPC er mye brukt i mange industrier.

- Gi en begrunnelse (gjerne punktvis) for suksessen for MPC.
- Spesifiser noen utfordringer ved bruk av MPC.
- Anta at du skal velge en regulator for trykkregulering i en lukket tank. (Trykkreferansen antas å endre seg relativt sjelden). Det er en god trykkmåling og en reguleringsventil tilgjengelig for bruk. Ville du i dette tilfelle velge en enkel PID regulator eller en MPC regulator? Begrunn svaret.

e Vi stiller nå noen spørsmål i tilknytning til figur 1 (se etterfølgende side). Dette viser en MPC regulator som diskutert i deler av MPC forelesningene. MV refererer til pådrag (vanlig symbol u), DV til forstyrrelser, CV til regulerte variable (vanlig symbol y), og X refererer til tilstander (x).

- Hva slags optimeringsproblem løses vanligvis i "controller box".
- Forklart hensikten med "estimator box" og "model box" samt pilene mellom disse boksene. Foreslå en algoritme for denne delen (detaljer er ikke nødvendig).

f Nå følger noen spørsmål relatert til figur 1 og helikopterlab.

- Spesifiser MVer og CVer for helikopterlab som du har jobbet med i dette semesteret.
- Kunne optimalregulatoren som du implementerte i helikopterlab, garantere at ulikhetsbetingelsene ble overholdt? Begrunn kort svaret.
- Optimalregulatoren kommuniserte med en pitch-regulator og en regulator for høydestyring. Hva kan skje dersom disse regulatorene er feil tunet, for eksempel at de har unødig lang responstid (lav båndbredde)?

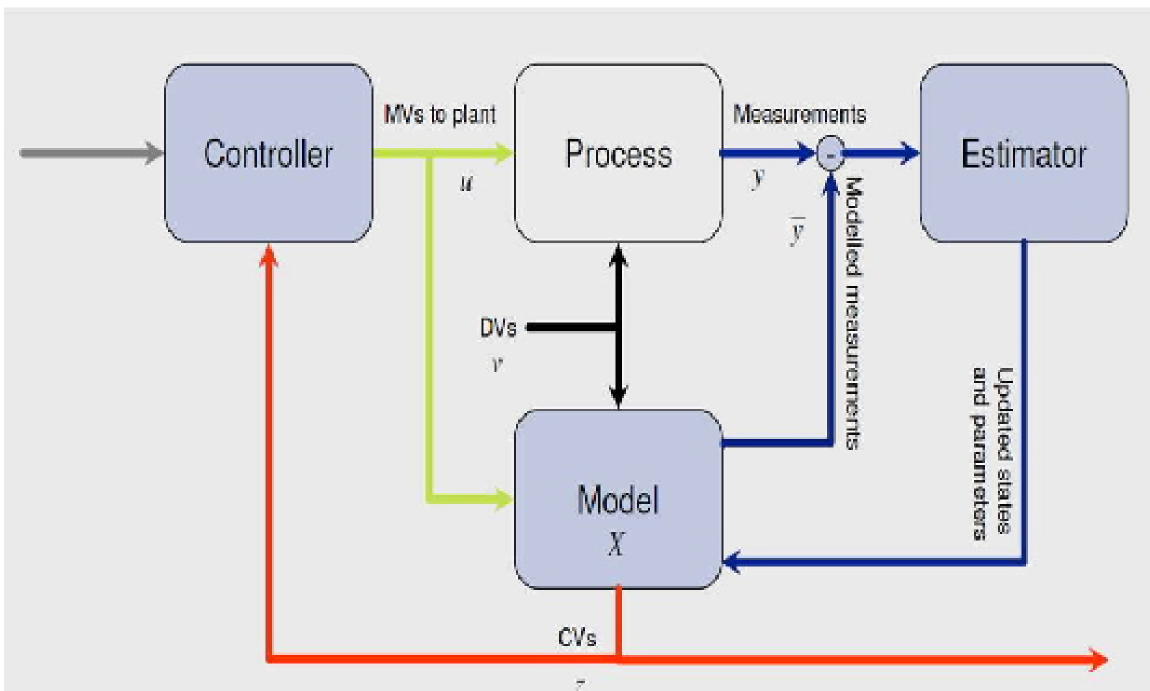

Figure 1: Struktur for en MPC-regulator

3 LP (15%)

Anta et LP-problem på standard form:

$$
\begin{aligned}
& \min_{x \in R^n} \; f(x) = c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

hvor $A \in \Re^{m \times n}$ og $rank(A) = m$.

a Definer et basispunkt (basic feasible point).

b Simplex-metoden baserer seg på løsningen av lineære likninger på formen $Bz = c$ hvor $B \in \Re^{m \times m}$ kan være en stor kvadratisk matrise. Dette gjøres ofte ved LU-dekomponering av B. Spesifiser strukturen på matrisene som B dekomponeres i.

c Anta at en LU-dekomponering av $B \in \Re^{m \times m}$ eksisterer. Forklar hvorfor en slik dekomponering gir en effektiv metode for å løse $Bz = c$.

Appendix

Part 1

$\mathcal{E}$ and $\mathcal{I}$ given below are two finite sets of indices.
General optimization problem. f and c_i are differentiable functions:

$$\begin{aligned} \min_{x \in R^n} \; & f(x) \\ c_i(x) = 0, \qquad & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \geq 0, \qquad & i \in \mathcal{I} \end{aligned} \tag{1}$$

The Lagrangian function is given by

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i^T c_i(x)$$

The KKT-conditions for (1) are given by:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= 0 \\ c_i(x^*) &= 0, \qquad i \in \mathcal{E} \\ c_i(x^*) &\geq 0, \qquad i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i^* &\geq 0, \qquad i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i^* c_i(x^*) &= 0, \qquad i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I} \end{aligned} \tag{2}$$

2nd order (sufficient) conditions for (1) are given by:

$$w \in F_2(\lambda^*) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i \in \mathcal{E} \\ \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* > 0 \\ \nabla c_i(x^*)^T w \geq 0 & \text{for all } i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* = 0 \end{cases}$$

Theorem (Second-Order Sufficient Conditions)
Suppose that for some feasible point $x^* \in R^n$ there is a Lagrange multiplier vector λ^* such that the KKT conditions (2) are satisfied. Suppose also that

$$w^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w > 0, \qquad \text{for all } w \in F_2(\lambda^*),\ w \neq 0. \tag{3}$$

Then x^* is a strict local solution for (1).

LP-problem on standard form:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in R^n} \; f(x) = c^T x \\
s.t. \quad &Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

where $A \in R^{m \times n}$ and $rank(A) = m$.

QP-problem on standard form:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in R^n} \; f(x) = \tfrac{1}{2} x^T G x + x^T d \\
s.t. \quad &a_i^T x = b_i, \qquad i \in \mathcal{E} \\
&a_i^T x \geq b_i, \qquad i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

where $G = G^T$. Alternatively, the equalities can be written $Ax = b$, $A \in R^{m \times n}$.

Iterative method:

$$
\begin{gathered}
x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \\
x_0 \; given \\
x_k, p_k \in R^n, \;\; \alpha_k \in R
\end{gathered}
$$

p_k is the search direction and α_k is the line search parameter.

Part 2 Linear quadratic control of discrete dynamic systems

A typical optimal control problem on the time horizon 0 to n might take the form

$$
\begin{aligned}
\min \quad f_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} &\{(y_i - y_{ref,i})^T Q_i (y_i - y_{ref,i}) \\
&+ (u_i - u_{i-1})^T P_i (u_i - u_{i-1})\} \\
&+ \frac{1}{2}(y_n - y_{ref,n})^T S (y_n - y_{ref,n})
\end{aligned} \tag{4}
$$

subject to equality and inequality constraints

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= A_i x_i + B_i u_i, \;\; 0 \leq i \leq n-1 && (5) \\
y_i &= H x_i \\
x_0 &= \text{given (fixed)} && (6) \\
U_L &\leq u_i \leq U_U, \;\; 0 \leq i \leq n-1 && (7) \\
Y_L &\leq y_i \leq Y_U, \;\; 1 \leq i \leq n && (8)
\end{aligned}
$$

where system dimensions are given by

$$u_i \in \Re^m$$
$$x_i \in \Re^l$$
$$y_i \in \Re^j$$

The subscript i refers to the sampling instants. That is, subscript $i+1$ refers to the sample instant one sample interval after sample i. Note that the sampling time between each successive sampling instant is constant. Further, we assume that the control input u_i is constant between each sample.

Theorem: Assume that $x_{ref,i} = 0$, $u_{ref,i} = 0$, $0 \leq i \leq n$ and that $H = I$, i.e. $y_i = x_i$. The solution of (4), (5) and (6) is given by $u_i = K_i x_i$, $0 \leq i \leq n-1$ where the feedback gain matrix is derived by

$$\begin{aligned}
K_i &= -P_i^{-1} B_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i, \ 0 \leq i \leq n-1 \\
R_i &= Q_i + A_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i, \ 0 \leq i \leq n-1 \\
R_n &= S
\end{aligned}$$