NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 73 59 26 78/930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Tirsdag 13. desember 2011
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- **Dette er en korrigert eksamen. Korreksjoner er i fet skrift.**
  - Oppgave 1 omhandler analyse av filtre.
  - Oppgave 2 omhandler rasjonale prosessmodeller.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma realisering.
  - Oppgave 4 omhandler frekvenstransformasjoner.
  - En del formler er oppgitt i appendiks
  - Vekting av hver deloppgave er angitt i parentes. Totalt antall poeng er 63.
- Alle svar skal begrunnes!
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og andre gang ca. 11.45.

Oppgave 1 (3+3+6+3 = 15 poeng)

1a) Et stabilt, kausalt LTI-filter er beskrevet ved følgende differanse-ligning:

$$y(n) - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n) - \frac{7}{6}x(n-1), \; n = -\infty, \infty \tag{1}$$

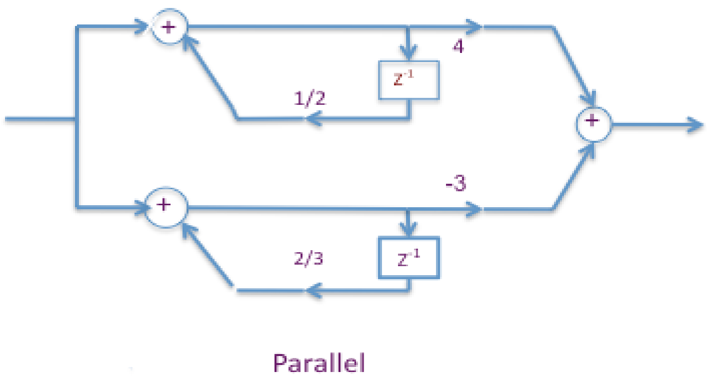
Vis at filterets transferfunksjon er gitt ved:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{(1 - \frac{7}{6}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \frac{1}{(1 - \frac{2}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

1b) Gi et *begrunnet* svar på følgende :

- Hva blir konvergensområdet til filteret i oppgave 1a?
- Har filteret lineær fase?
- Har filteret minimum fase?

1c) Gitt parallellstrukturen i Figur 1.



Figur 1: *Parallellstruktur*

Vis at enhetspulsresponsen til filteret er gitt ved :

$$
\begin{aligned}
h_P(n) &= h_3(n) + h_4(n) \qquad \text{hvor} \\
h_3(n) &= \begin{cases} 4(\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\
h_4(n) &= \begin{cases} -3(\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vis også at parallellstrukturen implementerer filteret gitt ved lign 2, dvs :

$$H(z) = H_P(z) = H_3(z) + H_4(z) \tag{3}$$

1d) Skisser en kaskadestruktur basert på lign. 2 som oppfyller følgende to kriterier :

- $H_1(z)$ er på direkte form 2 (DF2)
- $H_2(z)$ er plassert nærmest utgangen

Oppgave 2 **(4+5+3+4 = 16 poeng)**

2a) Krysskorrelasjonssekvensen til to sekvenser $y(n)$ og $x(n)$ med endelig energi er gitt ved

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+m)x(n) \quad m \geq 0 \\ r_{yx}(m) &= r_{xy}(-m) \qquad\qquad\qquad m < 0 \end{aligned}$$

Vis at krysskorrelasjonssekvensen til $h_3(n)$ og $h_4(n)$ i deloppgave 1c er gitt ved

$$r_{h_3h_4}(m) = \begin{cases} -18(\frac{1}{2})^m & m \geq 0 \\ \\ -18(\frac{3}{2})^m & m < 0 \end{cases} \tag{4}$$

2b) Vis at filteret $H(z)$ gitt i oppgave 1 har autokorrelasjonssekvensen :

$$r_{hh}(m) = \begin{cases} \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^m - \mathbf{\frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m} & m \geq 0 \\ r_{hh}(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{5}$$

2c) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes parallellstrukturen i figur 1.

Hvilke parametriske prosess-typer tilsvarer henholdsvis utgangssignalet og de interne signalene i strukturen? Begrunn svaret!

2d) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes filteret $H(z)$.

Finn, ved hjelp av lineær prediksjon (dvs. Yule-Walker eller Normal ligningene) filterkoeffisienten a_1 for den beste AR[1]-modellen til filterets utgangssignal $y(n)$.

Vis at prediksjonsfeileffekten, σ_f^2, alltid oppfyller : $\sigma_f^2 \leq \sigma_y^2$
hvor $\sigma_y^2 = \gamma_{yy}(0)$ er signaleffekten til $y(n)$.

Oppgave 3 **(4+4+5+4 = 17 poeng)**

Det diskrete filteret i oppgave 1 skal implementeres ved hjelp av **parallellstrukturen** i figur 1.
Filteret skal videre realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B + 1$ bit og dynamikk $[-1, 1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen, $e(n)$, kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med totaleffekt σ_z^2.

3a) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av parallellstrukturen uttrykt ved σ_e^2.

3b) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av parallellstrukturen når en flytter de to grenforsterkningene *foran* sine respektive tilbakekoblinger.

3c) Inngangssignalet $x(n)$ til filteret har full utstyring, dvs. $x_{max} = \max_n |x(n)| = 1$.

Vis at en for å unngå overstyring i parallellstrukturen brukt i deloppgave 3a må skalere på inngangen **med** $1/3$ **(nedskalering med** 3).

Vis videre at man for den andre parallellstrukturen (deloppgave 3b) må skalere på inngangen **med** $1/9$ **(dvs. nedskalering med** 9**).**

3d) Signal_støy forholdet på utgangen er definert ved $SNR = \sigma_y^2/\sigma_z^2$, hvor σ_y^2 og σ_z^2 er henholdsvis signaleffekt og total støyeffekt på utgangen av det nedskalerte filteret.

Beregn SNR på utgangen for de to nedskalerte parallellstrukturene.

Oppgave 4 **(3+4+4+4 = 15 poeng)**

4a) Et analogt signal, $x_a(t)$, punktprøves med en avstand $T = 1/F_s$, dvs. $x(n) = x_a(nT)$

Hvilken betingelse må signalet $x_a(t)$ oppfylle hvis det skal kunne gjenvinnes fra $x(n)$?

Gitt at sekvensen $x(n)$ har lengde L. En utfører en N-punkts DFT (Diskret Fourier Transform) på sekvensen.

Hvilke frekvensverdier blir beregnet?
Diskuter betydningen av størrelsen på N versus L.

4b) Hvordan kan man ved bruk av DFT beregne lineær foldning til to signaler $x_1(n)$ og $x_2(n)$ av lengde henholdsvis L_1 og L_2?

4c) Hva menes med "overlap-add"metoden for FIR-filtrering av lange sekvenser?

Hvorfor bør en bruke DFT-teknikken i deloppgave 4b som en del av denne metoden?

4d) Forklar kort prinsippet for en radix-2 N-punkts FFT (Fast Fourier Transform).

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\ Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \ \text{ for } \ k = 0, \ldots, N-1 \ \text{ where we write } \ Y(k) = Y(f_k) \end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h(n) z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf} \\ \text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\ \text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1 \end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \quad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{6}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U} T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $\displaystyle\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$

Normal equations: $\displaystyle\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$