NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 73 59 26 78/930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Tirsdag 3. desember 2010
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- Eksamen består av 4 oppgaver.
  - Oppgave 1 omhandler analyse av filtre.
  - Oppgave 2 omhandler rasjonale prosessmodeller.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma realisering.
  - Oppgave 4 omhandler Wiener filtre.
  - En del formler er oppgitt i appendiks
  - Alle deloppgaver teller likt
- Alle svar skal begrunnes!
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og andre gang ca. 11.45.

Oppgave 1

1a) Gitt et kausalt, lineært og tidsinvariant (LTI) system med enhetspulsrespons $h(n)$.

Angi konvergensområdet (ROC) i z-planet for systemet.

Hvordan må nullpunkt og poler være plassert i z-planet ?

1b) Et kausalt LTI-filter er beskrevet ved følgende differanse-ligning:

$$y(n) + \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = 2x(n) + \frac{1}{6}x(n-1),\ \ n = -\infty, \infty \tag{1}$$

Vis at filterets transferfunksjon er gitt ved:

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{6}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

1c) Hva blir konvergensområdet til filteret i oppgave 1b?

Er filteret stabilt?

Har filteret minimum fase?

Begrunn alle tre svarene!

1d) Vis at enhetspulsresponsen til filteret er gitt ved :

$$h(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n + (-\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Oppgave 2

2a) Skisser direkte form 2 (DF2) og parallell realiseringene til filteret.

2b) Autokorrelasjonssekvensen til et generelt filter er definert ved

$$r_{hh}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, \infty \tag{4}$$

Vis at filteret gitt i oppgave 1 har autokorrelasjonssekvensen :

$$r_{hh}(m) = \begin{cases} A(-\frac{1}{2})^m + B(\frac{1}{3})^m & m \geq 0 \\ r_{hh}(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{5}$$

hvor $A = \frac{46}{21} \approx 2.2$ og $B = \frac{111}{56} \approx 2.0$

2c) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes filteret i deloppgave 2a.

Hvilke parametriske prosess-typer tilsvarer henholdsvis utgangssignalet og de interne signalene i DF2-strukturen?
Begrunn svaret!

2d) Finn, ved hjelp av lineær prediksjon (dvs. Yule-Walker ligningene) prosess-parametrene for den beste AR[1]-modellen til filterets utgangssignal $y(n)$.

Oppgave 3

Det diskrete filteret i oppgave 1 skal realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1,1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen resulterer alle støykildene på grunn av avrunding i et støysignal $z(n)$ på utgangen med effekt σ_z^2.

3a) Finn resulterende støyeffekt på utgangen av DF2-strukturen uttrykt ved σ_e^2.

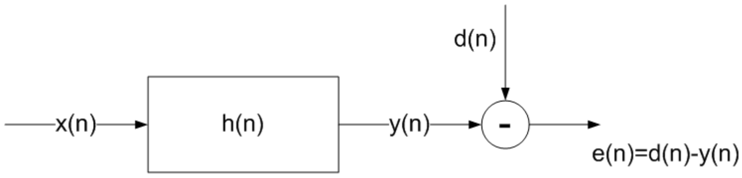
3b) Finn resulterende støyeffekt på utgangen av parallell-strukturen uttrykt ved σ_e^2.

3c) Inngangssignalet $x(n)$ til filteret har full utstyring, dvs. $x_{max} = \max_n |x(n)| = 1$.

Vis at en for å unngå overstyring i parallell-strukturen må skalere på inngangen med 2/7 (nedskalering med 7/2).

3d) Finn reduksjonen i signal-støy forholdet ($SNR = \sigma_y^2/\sigma_z^2$) grunnet nedskaleringen på utgangen av parallell-strukturen.

Oppgave 4



Figur 1: Et generelt Wiener filter

Et stasjonært signal $s(n)$ blir utsatt for additiv hvit støy $w(n)$, dvs en observerer $x(n) = s(n) + w(n)$. En ønsker å bruke et Wiener filter $h(n)$ til å minimalisere midlere kvadratisk avvik $\sigma_e^2 = E[e^2(n)] = E[(d(n) - y(n))^2]$. En antar at en kjenner de statistiske egenskapene til $s(n)$ og $d(n)$ samt støyeffekten σ_w^2.

4a) Vis at midlere kvadratisk avvik kan skrives som :

$$\sigma_e^2 = \gamma_{dd}(0) - 2\sum_k h(k)\gamma_{dx}(k) + \sum_k \sum_l h(k)h(l)\gamma_{xx}(l-k) \qquad (6)$$

4b) Utled formelen for et FIR Wiener filter av lengde M

4c) Anta filterlengde $M = 3$ Forklar forskjellen i ovennevnte formel når en skal bruke FIR filteret til henholdsvis

- støyreduksjon, dvs. $d(n) = s(n)$
- glatting, dvs. $d(n) = s(n-1)$
- prediksjon, dvs. $d(n) = s(n+1)$

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned}
y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\
Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\
Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \ \text{ for } \ k = 0, \ldots, N-1 \ \text{ where we write } \ Y(k) = Y(f_k)
\end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_n h(n)z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf} \\
\text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\
\text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1
\end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{7}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi m f}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $$\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

Normal equations: $$\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$