

Lösningsförslag TTK 4105 regelningsteknik 22/5 - 14

1a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C^T = [1 \ 0 \ 0]$

1b) $e^{At} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 =$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1c) Formel (V.3) ger $h(t) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{s^2}{s-3} e^{st} \right\} \right]_{s=0} =$
 $\frac{1}{2} \left[t^2 e^{st} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} t^2$

1d) Hvis $u(t) = \delta(t)$ er $x_3 = \mu_1(t) = \frac{1}{t}$, $x_2 = \int_0^t x_1(\alpha) d\alpha = \mu_2(t) = \frac{1}{2}t^2$, $x_1 = \int_0^t x_2(\alpha) d\alpha = \mu_3(t) = \frac{1}{2}t^3$.
Kan også finnes som $C^T e^{At} b$.

1e) Tre egenverdier/poler oppå hverandre \Rightarrow ustabil
eller ganske enkelt $|h(t)| \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$

2) Polene: $\begin{array}{|c|c|} \hline & \times -j\sqrt{2} \\ \hline \times & \hline \end{array} \quad \lambda_1 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ } $\begin{array}{|c|c|} \hline & \times +j\sqrt{2} \\ \hline \times & \hline \end{array} \quad \lambda_2 = 100 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ } \Rightarrow (V.1b) ger

$$h(s) = \frac{K}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{K}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{10^4}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 10^4}$$

K blir 10^4 fordi vi krever $|h(j\omega)|_{\omega=0} = 1$

③ Z-N formellet viser at man øker forsterkningsgraden i regulatoren til systemet oscillerer på stabilitetsgrensa. Det kan være risikabelt eller skadelig. SIMC krever ikke dette, bare et sprengningsresponsforsøk med åpen sløyfe.

④a) Utan indre sløyfe blir det 3 integratorer i serie. Sjøl med derivativirkning i h_{r1} blir det ikke mulig å løfte fasen over $-180^\circ \Rightarrow$ Systemet kan ikke gjøres stabilt.

$$④b) M_2 = \frac{K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}}{1 + K_{p2} \frac{1}{s(1+s)}} = \frac{K_{p2}}{s^2 + s + K_{p2}} = \frac{1}{\frac{s^2}{K_{p2}} + \frac{1}{K_{p2}}s + 1}$$

(4.1) gir da $\omega_0^2 = K_{p2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K_{p2}}$

④c) Stor K_{p2} gir stor båndbredde for M_2 , noe som øker stabiliteten for den ytre sløyfen, p.g.a bedre fareforløp opp til høyere frekvens.

$$K_{p2} = 4 \text{ gir } \omega_0 = 2. (4.1) \text{ gir } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{4} \Rightarrow \xi = \frac{1}{4}$$

$$\varphi = \arcsin(0.25) = 0.253 \text{ rad} = 14.5^\circ$$

- side 3 -

4d overdempet, kritisk damped, underdamped
(oscillatory)

4e $h_o = h_{r1} M_2 \frac{1}{s^2} = k_p \frac{(1+T_i s)(1+T_d s)}{T_i s (1+0.1 T_d s)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s^2}{4} + \frac{1}{4}s + 1\right)} \cdot \frac{1}{s^2}$

Pdene ligger enten i Vhp eller på den imaginære akse $\Rightarrow N_p = 0$.

4f God fasemargin på tross av allers vanskelig fareforløp. Betinget stabilt fordi det også blir ustabil ved lav k_p , ikke lav ved stor k_p . Se ellers bodediagrammet neste side med ΔK og Ψ , som blir 5.7 dB og 36.8°

4g knekkpunkt ① svaret til $\frac{1}{T_i} = 0.04 \Rightarrow T_i = 25$

Knekkpunkt ② svaret til $\frac{1}{T_d} = 0.3 \Rightarrow T_d = 3.3$

Knekkpunkt ③ svaret til $\omega_o = 2$.

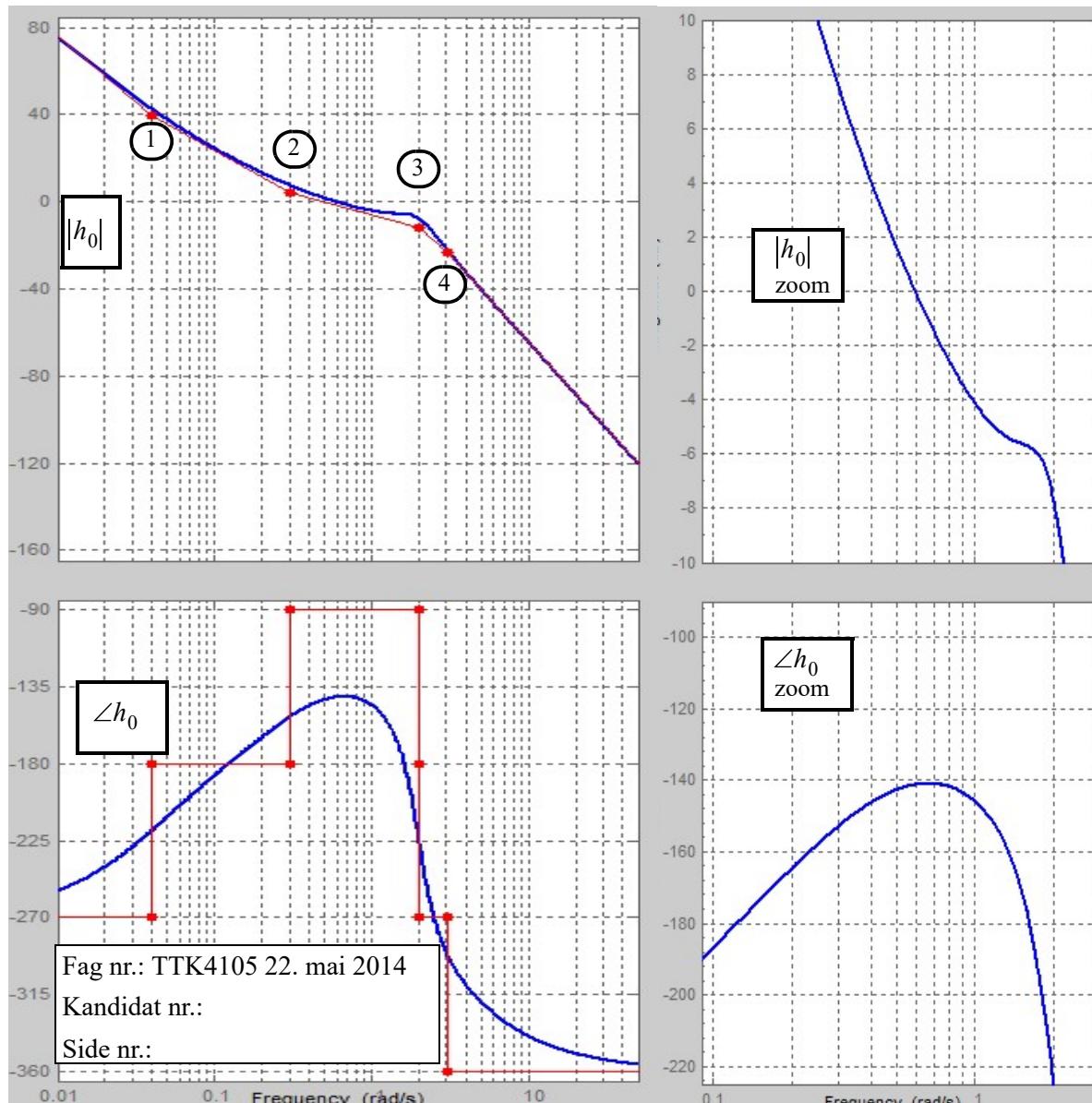
Det siste, ④, svaret til $\frac{1}{\alpha T_d} = 3 \Rightarrow \alpha = 0.1$

Se ellers bodediagrammet neste side for hvordan finne k_p .

4h Målt med linjel, og basert på (V-12)(a):

$$\frac{1}{\Delta K} \approx \frac{3.1}{5.87} \approx 1.9, \text{ stemmer bra med } 10^{\frac{5.7}{20}} = 1.92$$

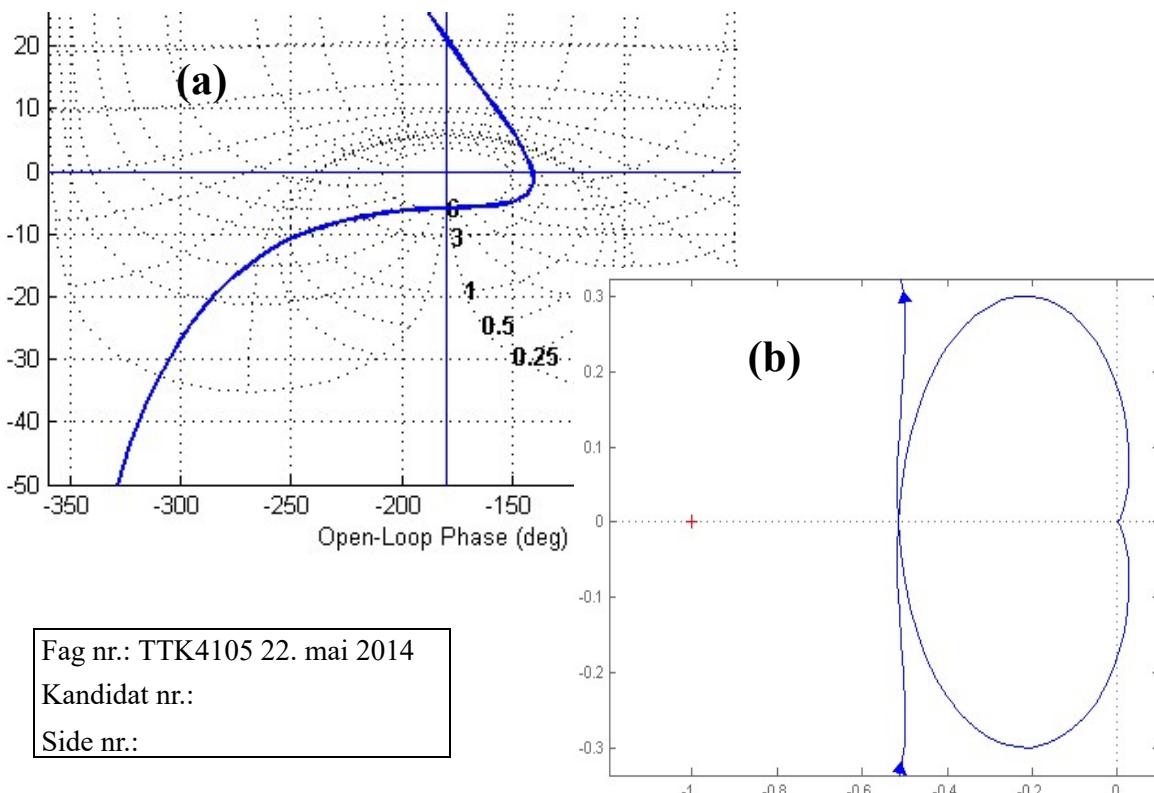
4i Se påtegnet Nichols-diagram lengre bak.
 $|N|_{max} \approx 7$ dB, vanskelig å avlese $\angle h_o$ der, men $\angle h_o \approx -170^\circ$, og i bodediagrammet svaret dat til ca. $\omega = 1.5$



figur 4.2

- h) (3 %) Figur 4.3(b) viser et utsnitt av Nyquistkurven for h_0 med de valgte regulatorparametre. Finn forsterkningsmarginen v.h.a. denne grafen. Sammenlign med svaret fra deloppgave f).
- i) (4 %) Finn ved hjelp av Nichols-diagrammet i figur 4.3(a) resonanstoppen i avviksforholdet. Omtrent ved hvilken frekvens inntreffer den? Tegn i diagrammet.
- j) (3 %) Nå til forstyrrelsen v i figur 4.1. Hva blir transferfunksjonen h_v for den ytre sløyfa?
- k) (6 %) Forstyrrelsen v er konstant. Finn det stasjonære avviket $e(\infty)$ med regulatoren (4.2). Finn også $e(\infty)$ med PD-regulering (arbeidsbesparende tids-; det svarer til å sette $T = \infty$) Komentár

- m) (5 %) PID-regulatoren (4.2) skal realiseres diskret. Det betyr at holdelementets virkning må tas med i betrakting. Finn en tastetid (samplingstid) T som er akkurat så liten at den ikke forverrer fasemarginen med mer enn 2 grader (Tips: husk skalering mellom radianer og grader her!) Hva er det *første* trinn i det du må gjøre med regulatortransferfunksjonen (4.2) for gjennom noen flere trinn å regne deg fram til den diskrete regulatoralgoritmen?



figur 4.3

Oppgave 5 (7 %)

Vi skal betrakte en befolkning på N personer, hvor en smittsom sjukdom brer seg, etter hvert til alle. Dette er en sjukdom hvor man ikke blir frisk, men hvor ingen dør. Kall antall sjuke x . En mye brukt modell for slikt er:

$$\dot{x} = cx\left(1 - \frac{x}{N}\right), \text{ der } c \text{ er en positiv konstant.} \quad (5.1)$$

- a) (1 %) Hvorfor er denne modellen ulineær?
- b) (1 %) Dette er et *autonomt* system. Hva menes med det?
- c) (3 %) Finn en lineær modell som gjelder når få personer er smittet. Kall antall personer ved starttidspunktet $t_0 = 0$ for x_0 . Hva blir den tilnærmede formelen for $x(t)$ når det fortsatt er få smittede personer? 174

4j) $h_v = \frac{1}{s^2}$

4k) $e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (-h_v N) \cdot s \cdot \cancel{\frac{1}{s}} =$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} (-h_v \left(\frac{1}{1+h_0} \right)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{s^2} \left(\frac{h_0}{h_0 + t_0} \right) \right) =$
 $- \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{s^2} \left(T_i s (1+\dots)(1+\dots) s^2 \right)}{T_i s (1+\dots)(1+\dots) s^2 + k_p (1+T_i s)(1+\dots)} \right) = 0$

(her betyr "1+..." ledd $\rightarrow 1$ når $s \rightarrow 0$)

PD: $e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{T_i s}{k_p T_i s} \right) = \frac{1}{k_p} \Rightarrow$ stasjonært
 og $T_i \rightarrow \infty$ nivå

4l) Nei. For det er mer enn null integratorer i h_o.

4m) Bruker (V.24).

Den ekstra negative fasekomponenten ved krysfrekvensen $\omega_c \frac{1}{2} = \frac{\pi}{180} \cdot 2 \Rightarrow T = \frac{2}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2$

$$\approx 0 \frac{\pi}{0.5945} = 0.12$$

Første trinn er å erstatte alle s i (4.2) med $\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$, jfr. (V.23)

5a

$$\ddot{x} = c \times (\dots - \frac{x}{N}) = -\frac{cx^2}{N} + \dots$$

x^2 på høyre side gjør den ikke lineær

5b

Det er ingen ytre påvirkninger (ingen u eller v)

5c

Da får vi $\ddot{x} = cx \Rightarrow x(t) = e^{ct}x_0$

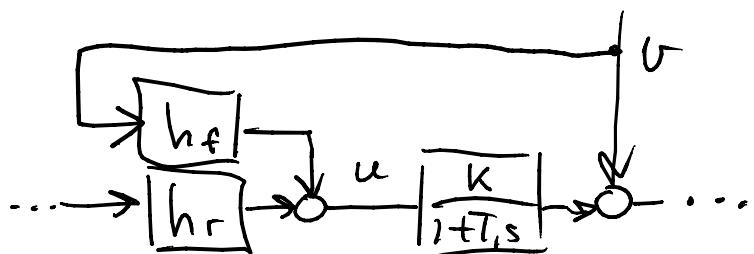
5d

Når $x(t) \rightarrow N$ vil $\dot{x}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow$
 $x(t) < N$

6a

Når v kan måles.

6b



6c

$$h_{fi} \cdot \frac{k}{1+T_s} - 1 = 0 \Rightarrow h_{fi} = -\frac{1+T_s}{K}$$

Mer realistisk: $h_f = -\frac{1+T_s}{1+aT_s} \cdot \frac{1}{K}$, med $0 < a \ll 1$

6d

Fordi da vil tilbakekopplinga virke mye seinere enn foroverkopplinga.

6e

$h_{fs} = -\frac{1}{K}$. Eliminerer virkinga av konstant v.

6f

Fordi det er en tidsforsinkelse τ i prosessen

6g

Tullprat. Valg av h_f og h_r kan gjøres helt uavhengig av hverandre.

6h

Bruk av (V.25):

$$h_r' = \frac{k_p \frac{1+T_{1s}}{T_{1s}}}{1 + k_p \frac{1+T_{1s}}{T_{1s}} \frac{k}{(1+T_{1s})(1+T_{2s})} (1 - e^{-\zeta s})}$$

$$= k_p \frac{(1+T_{1s})(1+T_{1s})(1+T_{2s})}{T_{1s}(1+T_{1s})(1+T_{2s}) + k_p k (1+T_{1s})(1 - e^{-\zeta s})}$$