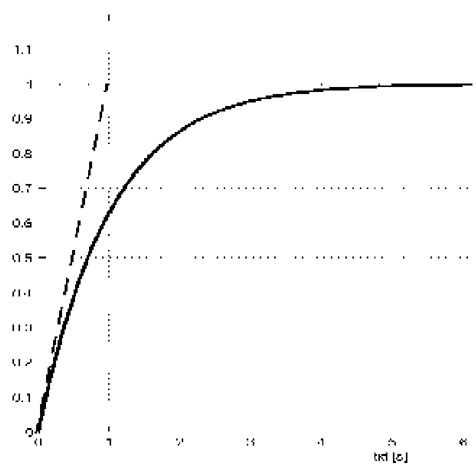
TTK4100 Løsningsforslag Eksamen - vår 2008

Oppgave 1 (18%)

a) Av figur finner vi, ved hjelp av tangenten til grafen i $t = 0$, og denne tangentens skjæringspunkt med den stasjonære verdien til $x(t)$, her kalt x_s (som $= 1$), at tidskonstanten $T = 1\,\mathrm{s}$.



Fra følgende sammenheng kan vi finne forsterkning K for systemet

$$x_s = Ku \implies K = \frac{x_s}{u} = \frac{1}{0.2} = 5$$

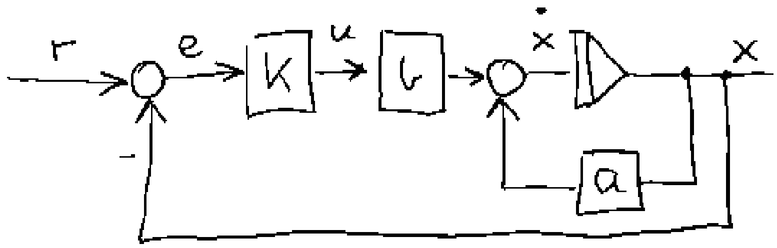
b) Verdiene til konstantene a og b, finner vi fra følgende sammenhenger:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ \dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{K}{T}u\end{aligned}$$

at

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1}{T} = -1 \\ b &= \frac{K}{T} = \frac{K}{-\frac{1}{a}} = -Ka = -5 \cdot (-1) = 5\end{aligned}$$

c) Se figur .



d) Regulatoren kalles for proporsjonalregulator. Den nye differensiallikninga med tilbakekobling:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ &= ax + bK(r - x) \\ &= (a - bK)x + bKr\end{aligned}$$

Vi definerer $\tilde{a} := a - bK$ og $\tilde{b} := bK$. Den nye tidskonstanten er gitt som

$$T = -\frac{1}{\tilde{a}} = \frac{1}{bK - a} = \frac{1}{5K + 1}$$

e) Avviket når $t \to \infty$, er gitt av

$$\begin{aligned}e &= r - x_s \\ &= r + \frac{\tilde{b}r}{\tilde{a}} \\ &= 1 + \frac{bK}{a - bK} \\ &= \frac{a - bK + bK}{a - bK} \\ &= -\frac{a}{bK - a}\end{aligned}$$

f) For å oppnå $e \to 0$ når $t \to \infty$, bruker vi en regulator med integralvirkning, altså en PI-regulator.

Oppgave 2 (4%)

a) Vi kaller blokka 'foroverkobling fra forstyrrelse'. Den krever at vi kan måle forstyrrelsen.

b) Forstyrrelsen v er i dette tilfelle utetemperaturen.

Oppgave 3 (9%)

a) Rekkefølgen på blokkene blir R-D/A-PO-P-MI-FI-SS-A/D. Det aksepteres også hvis det står -SS-FI-.

b) Tastefrekvensen (samplingsfrekvensen) f_s må velges til minst det dobbelte av den høyeste frekvenskomponenten som kan opptre i prosessen, for å unngå nedfolding (aliasing) i følge Shannon/Nyquist teoremet. I dette tilfellet det dobbelte av $20\,\mathrm{rad/\,s} = \frac{20}{2\pi}\,\mathrm{Hz}$, altså $f_s = 6.4\,\mathrm{Hz}$.Samplingstida blir da $T = 1/f_s = \frac{1}{6.4}$ s $= 0.156$ s. Men det er en god regel å gjøre T mindre enn denne øvre grenseverdien, la oss si fem ganger mindre (tommelfingerregel). Dette svarer til tasting 10 ganger den høyeste frekvens i prosessen, jfr. Johnson side 163. Da får vi $T = 0.03125$ s.

Oppgave 4 (5%)

a) Med 8 bits kan vi representere 2^8 diskrete verdier. Altså får vi $10/2^8 = 10/256 \approx 0.039$ volt mellom hvert trinn.

b) Alderen til en 61 år gammel person kan skrives heksadesimalt som $3D$:

$$3D = 3 \times 16^1 + 13(\text{dvs. } D) \times 16^0 = 61$$

Oppgave 5 (15%)

a) Netwons lov kan skrives som $u = ma = m\ddot{x}$. Definerer $x_1 := x$ og $x_2 := \dot{x}$. Systemets modell kan da skrives som

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u/m\end{aligned}$$

altså som to koblede differensiallikninger.

b) En slik regulator kalles proporsjonal-derivat regulator, eller PD regulator.

c) Setter inn $u = K_1(r - x) + K_2(\dot{r} - \dot{x})$, i uttrykket $m\ddot{x} = u$, og får da at

$$\ddot{x} + \frac{K_2}{m}\dot{x} + \frac{K_1}{m}x = \frac{K_1 r + K_2 \dot{r}}{m}$$

Systemet er nå på formen $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(r, \dot{r})$, hvor

$$\begin{aligned}p &= \frac{K_2}{m} \\ q &= \frac{K_1}{m} \\ f(r, \dot{r}) &= \frac{K_1 r + K_2 \dot{r}}{m}\end{aligned}$$

d) Dersom $K_2 = 0$, har vi ingen dempning i systemet, og vi får stående svingninger.

e) Dersom $K_2 = 0$, $r = 0$ har vi at systemet kan beskrives av likninga

$$\ddot{x} + \frac{K_1}{m} x = 0$$

som har den karakteristiske likninga

$$\lambda^2 + \frac{K_1}{m} = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{-\frac{K_1}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{K_1}{m}}$$

Vi får to røtter på den imaginære akse. Dette gir en stående sinusformet svingning. En hvilken som helst sinusformet kurve som starter i en $x > 0$ aksepteres som rett svar her. Se ellers side 25 i kompendiet, formel (3.23), med $a = 0$. Systemet er *marginalt stabilt*.

Siden vi ønsker å posisjonere massen m, er $K_2 = 0$ ikke et akseptabelt alternativ.

Oppgave 6 (7%)

a) For krets '1' har vi at:

$$X = A \cdot B + B$$

For krets '2' har vi at:

$$X = \overline{\overline{\overline{A \cdot B}} \cdot \overline{B} \cdot C} = \overline{A \cdot B \cdot \overline{B} \cdot C}$$

For krets '3' har vi at:

$$X = \overline{\overline{\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D}}}$$

b) For krets '1' har vi at X kan forenkles til

$$X = B$$

For krets '2' har vi at X kan forenkles til

$$X = 1$$

Dette fordi $B \cdot \overline{B} = 0$, slik at $A \cdot B \cdot \overline{B} \cdot C = 0$. Til slutt tar vi komplimentet av 0 som er 1. For krets '3' har vi at X kan forenkles til

$$\begin{aligned} X &= \overline{\overline{\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D}}} \\ &= \overline{\overline{A \cdot B}} \cdot \overline{\overline{C \cdot D}} \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot D \end{aligned}$$

ved hjelp av deMorgans lov.

Oppgave 7 (4%)

a) For å kunne fastslå om en programkodebit som bruker globale variable virker som forventet, må en vite at de gobale variablene er riktig satt eller konsistente. Siden de er globale kan de endres fra hvor som helst andre steder i koden, og en må dermed kjenne hele koden for å kunne fastslå at kodebiten virker. Dette blir urimelig i store systemer.

b) Lignende resonnement som i a). For å kunne si at en kodebit som har en label i seg virker riktig, så må en som regel vite konteksten. Dette innbefatter hvor en kommer fra - hva som er status når koden kjører, og goto'ene som kan hoppe til label'en kan være plasert i en større del av koden (som dermed også må kjennes).

Oppgave 8 (2%) Tidsforsinkelse vil ved samme regulatorforsterkning gi dårligere stabilitet. Forsterkninga kan reduseres for å bøte på dette, men da blir reguleringssystemets respons langsommere.

Oppgave 9 (6%)

a) Dette likningssystemet er ulineært på grunn av hvert ledd $d_1 x_1^2$, $c_1 x_1 x_2$ og $c_2 x_1 x_2$.

b) Leddet $-d_1 x_1^2$ uttrykker harenes begrensede beiteressurser. Dette leddet har ikke stor innvirkning på $\dot{x}_1$ ved liten bestand (liten x_1), men når bestanden blir stor vil leddets påvirkning på $\dot{x}_1$ bli stor og sørge for at populasjonen begrenses.

c) Gitt modellen for økosystemet (korrigert i forhold til eksamenoppgaven)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - d_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + c_2 x_1 x_2 \end{aligned}$$

Fra likninga for revebestanden, finner vi at vi har mulige stasjonærtilstander for x_1:

$$\overline{x}_1 = \frac{a_2}{c_2}$$

og for x_2:

$$\overline{x}_2 = 0$$

Vi setter disse uttrykkene inn i likningen for harebestanden. For $\overline{x}_2 = 0$ har vi at

$$\overline{x}_1 = 0$$

eller

$$\overline{x}_1 = \frac{a_1}{d_1}$$

For $\overline{x}_1 = a_2/c_2$ har vi at

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \overline{x}_1 - d_1 \overline{x}_1^2 - c_1 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \\ &= \overline{x}_1 \left(a_1 - d_1 \overline{x}_1 - c_1 \overline{x}_2 \right) \\ &= \frac{a_2}{c_2} \left(a_1 - \frac{a_2 d_1}{c_2} - c_1 \overline{x}_2 \right) \end{aligned}$$

som impliserer at

$$\overline{x}_2 = \frac{a_1}{c_1} - \frac{a_2 d_1}{c_1 c_2}$$

Vi har altså følgende likevektspunkt

$$
\begin{gathered}
(0,0) \\
\left(\frac{a_1}{d_1}, 0\right) \\
\left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{a_1}{c_1} - \frac{a_2 d_1}{c_1 c_2}\right)
\end{gathered}
$$

Dersom (trykkfeil) likningssettet i oppgaveteksten er benyttet, får vi følgende likevektspunkt:)

$$
\begin{gathered}
(0,0) \\
\left(\frac{a_1}{d_1}, 0\right) \\
\left(\frac{a_2}{c_2}, -\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2 d_1}{c_1 c_2}\right)
\end{gathered}
$$

d) Vi har da at

$$\dot{x}_2 = -a x_2$$

hvilket er ei separabel førsteordens differensiallikning. Ved integrasjon får vi at

$$\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t)} \frac{dx_2}{x_2} = -\int_{t_0}^{t} a dt$$

$$\left[\ln x_2\right]_{x_2(t_0)}^{x_2(t)} = -\left[at\right]_{t_0}^{t}$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= x_2(t_0) e^{-at} \\
&= x_{20} e^{-at}
\end{aligned}
$$

altså går revepopulasjonen eksponentielt mot 0.