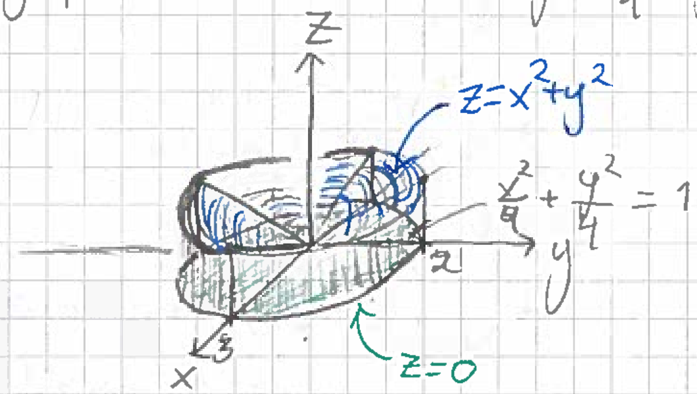
Øving 12

1) La T være legemet begrenset av xy-planet $(z=0)$, $z=x^2+y^2$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$



a) Volumet til T, betegnet V_T, er gitt ved

$$V_T = \iiint_T dV$$

Bruker ellipsesylinder koordinater

$x = 3r\cos\theta$

$y = 2r\sin\theta$

$z = z$

Da må $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$0 \le z \le x^2+y^2 = (3r\cos\theta)^2+(2r\sin\theta)^2$$
$$= 9r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta$$
$$= 5r^2\cos^2\theta + 4r^2$$

og $dV = 3\cdot 2r\,dz\,dr\,d\theta$
$= 6r\,dz\,dr\,d\theta$

Setter dette sammen og får

$$V_T = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{5r^2\cos^2\theta+4r^2} 6r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(5r^2\cos^2\theta + 4r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 5r^3\cos^2\theta + 4r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\left[\frac{5}{4}r^4\cos^2\theta + r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{4}\cos^2\theta + 1\right) d\theta$$

Vet at $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)$ og det gir

$$V_T = 6\int_0^{2\pi}\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1) + 1\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\frac{5}{8}\cos(2\theta) + \frac{13}{8}\,d\theta$$

$$= \frac{6}{8}\left[\frac{5}{2}\sin(2\theta) + 13\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{6}{8}\cdot 13\cdot 2\pi = \frac{6}{4}\cdot 13\pi = \frac{3}{2}\cdot 13\pi$$

$$= \frac{39}{2}\pi$$

Volumet til T er $\underline{\underline{\frac{39}{2}\pi}}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (3x, 2y, z)$

Vil regne ut $\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS$

hvor $S = \partial T$.

Siden S omslutter T kan vi bruke divergensteoremet som gir

$$\Phi = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$= \iiint_T 3 + 2 + 1 \, dV$$

$$= 6 \underbrace{\iiint_T dV}_{\text{Volum til } T,\ V_T}$$

$$= 6 \cdot V_T$$

$$= 6 \cdot \frac{39}{2} \pi$$

$$= 117\pi$$

Så $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = 117\pi$

c) Ønsker å beregne $\Phi_* = \iint_{S_*} \vec{F} \cdot \hat{N} dS$,

hvor S_* er den elliptiske delen av overflaten til T, og $\hat{N}$ peker ut av T.

Parametriserer flaten med $\vec{p}(\theta, t)$:

$$x = 3\cos\theta$$
$$y = 2\sin\theta$$
$$z = t(5\cos^2\theta + 4)$$

(Svarer til $r=1$ i paremetriseringen fra (a))

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{og} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Har nå at $\hat{N} dS = \vec{n}\, dt d\theta$

hvor $\pm\vec{n} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$

$$\pm\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3\sin\theta & 2\cos\theta & 10t\cos\theta\sin\theta \\ 0 & 0 & 5\cos^2\theta + 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(10\cos^3\theta + 8\cos\theta,\ 15\cos^2\theta\sin\theta + 12\sin\theta,\ 0\right)$$

Når $\theta = 0$ må $\vec{n}$ peke i samme retning som $\hat{\imath}$.

$$\vec{n}\Big|_{\theta=0} = (10+8,\ 0,\ 0) = (18, 0, 0)$$

Så må velge den positive "versjonen" for å få riktig orientering.

Har nå at $\hat{N}dS = \left(10\cos^3\theta + 8\cos\theta,\ 15\cos^2\theta\sin\theta + 12\sin\theta,\ 0\right)$

og $\vec{F}(\vec{p}(\theta,t)) = \left(3\cdot 3\cos\theta,\ 2\cdot 2\sin\theta,\ t(5\cos^2\theta + 4)\right)$

Det gir at $\vec{F}(\vec{p}(\theta,t)) \cdot \hat{N}dS = (*)$

$$(*) = (90\cos^4\theta + 72\cos^2\theta + 60\cos^2\theta\sin^2\theta + 48\sin^2\theta)\,d\theta dt$$
$$= (90\cos^4\theta + \overbrace{48\cos^2\theta + 24\cos^2\theta} + 60\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$+ 48\sin^2\theta\ )\ d\theta dt$$
$$= 48 + 90\cos^4\theta - 60\cos^4\theta + 60\cos^2\theta + 24\cos^2\theta$$
$$= (30\cos^4\theta + 84\cos^2\theta + 48)\ dt d\theta$$

Vet at $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

som gir at $\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)^2$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right]$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(2x)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{9}{16}\cos(2x)$$

Setter dette inn i $(*)$ og får
$$(*) = 30\left(\frac{3}{8} + \frac{9}{16}\cos(2\theta)\right) + 84\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) + 48$$

Når vi integrerer dette over $0 < \theta < 2\pi$ vil cosinus-komponentene kanselleres så det vi sitter igjen med er
$$\Phi_* = \int_0^{2\pi}\int_0^1 30\cdot\frac{3}{8} + \frac{84}{2} + 48\ dt d\theta = \frac{405}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 dt d\theta$$

$$\Phi_* = \frac{405}{4} \cdot 2\pi \cdot 1$$

$$= \frac{405}{2}\pi$$

Så fluksen ut av T gjennom S_* er $\frac{405}{2}\pi$

d) Vi vet at fluksen ut av hele S er summen av fluksen ut av alle del komponentene.

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{N}dS = \iint_{S_*} \vec{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{S_{Bunn}} \vec{F}\cdot\hat{N}dS + \iint_{S_{para}} \vec{F}\cdot\hat{N}dS$$

hvor $S_* \cup S_{Bunn} \cup S_{para} = S$

S_{Bunn} er ellipseflaten i xy-planet, og S_{para} er parabeloiden, $z = x^2 + y^2$.

S_{Bunn} er parametrisert ved

$\vec{p}_b(r,\theta) = (3r\cos\theta, 2r\sin\theta, 0)$

og normalvektoren $\hat{N}$ blir da $-\hat{k} = (0,0,-1)$

Da blir $\vec{F}(\vec{p}(r,\theta))\cdot\hat{N} = (9r\cos\theta, 4r\sin\theta, 0)\cdot(0,0,-1)$

$= 0$

Så fluksen ut av S_{Bunn} er null.

Det betyr at

$$\iint_{S_{para}} \vec{F}\cdot\hat{N}dS = \oiint_S \vec{F}\cdot\hat{N}dS - \iint_{S_*} \vec{F}\cdot\hat{N}dS$$

$$= 117\pi - \frac{405}{2}\pi$$

$$= -\frac{171}{2}\pi$$

Så fluksen ut av T gjennom parabeloiden er

$$\iint_{S'_{para}} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \underline{\underline{-\frac{171}{2}\pi}}$$

2) Ønsker å maksimere/minimere $f(x,y) = \ln(1-xy)$ på $x^2+y^2=1$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Gradienten til f er $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{1-xy}, \frac{-x}{1-xy}\right)$

Hvis vi krever $\nabla f = \vec{0}$ får vi

$$\frac{-y}{1-xy} = \frac{-x}{1-xy} = 0 \Rightarrow x = y$$

Det eneste punktet på kvartsirkelen hvor $x=y$ vil være gitt ved

$$x^2+x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = y$$

Så $\nabla f(x,y) = (0,0)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Må også undersøke endepunktene som er $(1,0)$ og $(0,1)$.

$$f(1,0) = \ln(1 \; 1 \cdot 0) = (1) = 0$$
$$f(0,1) = \ln(1-0 \cdot 1) = \ln(1) = 0$$

Kan også merke oss at hvis $xy=1$ blir ∇f udefinert men dette skjer ikke på domenet ettersom $x<1$ og $y<1$ overalt utenom endepunktene $(0,1)$ og $(1,0)$.

Sjekker $f(x,y)$ der $\nabla f(x,y)=(0,0)$:

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\ln\left(1-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=-\ln(2)$$

Vi ser da at f har lokalt og globalt minimum i $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hvor $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\ln(2)$ og f har globale maksima i $(0,1)$ og $(1,0)$ hvor $f(0,1)=f(1,0)=0$.

Så: $\underline{\underline{\max f(x,y) = 0}}$

og $\underline{\underline{\min f(x,y) = -\ln(2)}}$