NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

Faglig kontakt / *contact person*:

Navn: Tor Arne Johansen
Tlf.: 917 22 765

Eksamen - TTK 4115 Lineær systemteori
Exam - TTK 4115 Linear systems theory

17. desember 2012, 09:00 – 13:00

Hjelpemidler: D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Supporting materials: D - No printed or handwritten material allowed. Specific, simple calculator allowed.

Merk at ingen deloppgave avhenger av at du har greid å løse noen av de andre deloppgavene. Oppgitt informasjon fra tidligere deloppgaver skal være tilstrekkelig for å komme videre.
Note that no parts of this problem assume that you have solved any of the of previous parts. The given information from previous parts should be sufficient to move on.

Oppgave 1 (20 %)

Gitt systemet:
Given the system

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

a) (9%)
Transformer systemet til Jordanform:

Transform the system to Jordan form:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}u \\ y &= \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

b) (5%)
Hvilke av disse egenskapene innehar systemet? Forklar dine valg.
Which of these properties does the system possess? Explain your choice.

A Marginalt stabilt, *Marginally stable*

B Ustabilt, *Unstable*

C Asymptotisk stabilt, *Asymptotically stable*

D BIBO stabilt, *BIBO stable*

c) (3%)
Er systemet styrbart?
Is the system controllable?

d) (3%)
Er systemet observerbart?
Is the system observable?

Oppgave 2 (5 %)

Finn en eksakt diskretisering av systemet nedenfor, med et tidssteg $T = 1$:
Find an exact discretization of the system below, using a timestep of $T = 1$:

$$\dot{x} = -2x + u, \quad y = x$$

Pådraget antas konstant over tidsintervallet.
The input is assumed piecewise constant.

Oppgave 3 (20 %)

Transferfunksjonen $h(s)$ er gitt som:
The transfer function $h(s)$ is given as:

$$h(s) = \frac{7s^3 + 11s^2 + 19s + 27}{s^3 + s^2 + 2s + 3}$$

a) (10%)
Finn den styrbare kanoniske realiseringen av $h(s)$:
Find the controllable canonical realization of $h(s)$*:*

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \\ y &= \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}} + du\end{aligned}$$

hvor $\bar{\mathbf{A}}$ er gitt som:
where $\bar{\mathbf{A}}$ *is given as:*

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) (3%)
Er realiseringen over minimal?
Is the realization above minimal?

c) (7%)
Bruk tilstandstilbakekoblingen $u = -\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$ til plassere polene slik at:
Use the state feedback $u = -\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$ *to place the poles such that:*

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

Oppgave 4 (13 %)

Gitt systemet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

a) (2%)
Tegn blokkdiagrammet for systemet.
Draw the block diagram for the system.

b) (5%)
En lineær tilstandsestimator blir brukt til å estimerere tilstandene i systemet. Utvid blokkdiagrammet i a) med blokkdiagrammet til en observer.
A linear state observer is used to estimate the states of the system. Augment the blockdiagram of a) with the blockdiagram of an observer.

c) (6%)
Gitt følgende matriser:
Given the following matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en observergain **L** som plasserer polene til estimatoren i:
Find an observer gain **L***, that places the poles of the estimator at:*

$$\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -6$$

Oppgave 5 (10 %)

Lyapunovs ligning er:
The Lyapunov equation is:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A} = -\mathbf{N}$$

a) (10%)
Bruk Lyapunovs ligning til vise at systemet nedenfor er asymptotisk stabilt.
Use the Lyapunov equation to show that the system below is asymptotically stable.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Hint: Set $\mathbf{N} = \mathbf{I}$.

Oppgave 6 (12 %)

Spektraltetthetsfunksjon til en stasjonær tilfeldig prosess $X(t)$ er gitt ved:
The spectral density function of a stationary random process $X(t)$ is given by:

$$S_X(j\omega) = \frac{6}{4+\omega^2}$$

a) (7%)
Finn autokorrelasjonsfunksjonen.
Find the autocorrelation function.

Hint: $S_X(s) = \frac{6}{4-s^2}$

b) (5%)

$X(t)$ kan representeres som filtert hvitstøy $W(t)$ der $S_W(j\omega) = 1$. Finn transferfunksjonen $G(s)$ til dette filteret.

$X(t)$ can be represented as filtered white noise $W(t)$ where $S_W(j\omega) = 1$. Find the transfer function $G(s)$ of this filter.

Oppgave 7 (20 %)

a) (10%)

Gitt følgende system:

Given the following system:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= 0.8x_k + w_k \\
z_k &= x_k + v_k
\end{aligned}
$$

der x_k er en skalar tilstand, w_k en diskret hvitstøy forstyrrelse med varians $Q_k = 4$, z_k er en måling, og v_k er diskret hvit målestøy med varians $R_k = 0.1$.

where x_k is a scalar state, w_k is discrete white noise disturbance with variance $Q_k = 4$, z_k is a measurement, and v_k is discrete white measurement noise with variance $R_k = 0.1$.

Anta initialbetingelser $\hat{x}_0^- = 1$ og $P_0^- = 1$, og målinger $z_0 = 2.0$, $z_1 = 2.4$, $z_2 = 1.5$. Beregn Kalman-filter estimatene $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2$.

Assume initial conditions $\hat{x}_0^- = 1$ and $P_0^- = 1$, and measurements $z_0 = 2.0$, $z_1 = 2.4$, $z_2 = 1.5$. Compute the Kalman filter estimates $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2$.

b) (10%)

Gitt følgende system:

Given the following system:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= 0.1x_k^3 + 0.7x_k + w_k \\
z_k &= x_k + v_k
\end{aligned}
$$

der x_k er en skalar tilstand, w_k en diskret hvitstøy forstyrrelse med varians $Q_k = 4$, z_k er en måling, og v_k er diskret hvit målestøy med varians $R_k = 0.1$.

where x_k is a scalar state, w_k is discrete white noise disturbance with variance

$Q_k = 4$, z_k is a measurement, and v_k is discrete white measurement noise with variance $R_k = 0.1$.

Anta initialbetingelser $\hat{x}_0^- = 1$ og $P_0^- = 1$, og målinger $z_0 = 2.0,\ z_1 = 2.4,\ z_2 = 1.5$. Bruk et utvidet Kalman-filter (EKF) og beregn estimatene $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2$.
Assume initial conditions $\hat{x}_0^- = 1$ and $P_0^- = 1$, and measurements $z_0 = 2.0,\ z_1 = 2.4,\ z_2 = 1.5$. Use an Extended Kalman filter (EKF) and compute estimates $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2$.