NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: torsdag 18. august 2011
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- Eksamen består av 4 oppgaver, hver med 4 deloppgaver.
- Oppgave 1 omhandler grunnleggende egenskaper ved systemer/filtre.
- Oppgave 2 omhandler filter-strukturer.
- Oppgave 3 omhandler stasjonære prosesser og parametrisk estimering.
- Oppgave 4 omhandler filtrering i frekvensplanet
- Vekt for hver deloppgave er angitt ved oppgavestart
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og neste gang ca. kl. 12.00. Lykke til!

Oppgave 1 : (3+5+4+4)

1a) Hvilke to egenskaper må være oppfylt hvis et system skal kunne beskrives ved hjelp av en enhetspulsrespons $h(n)$?

Gitt at systemet har de to egenskapene, definer egenskapene <u>stabilitet</u> og <u>kausalitet</u> ved hjelp av $h(n)$.

1b) Definer z-transformen $H(z)$ ved hjelp av $h(n)$, $n = -\infty, \infty$.

Hva menes med konvergensområdet (ROC) til $H(z)$?

Skisser ROC i z-planet for henholdsvis et kausalt og et anti-kausalt system.

Hvilket område i z-planet må inngå i ROC hvis systemet skal være stabilt? Begrunn svaret.

1c) Gitt følgende stabile filter $H_1(z)$

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \tag{1}$$

Vis at filteret er et allpass-filter.

For hvilke verdier av filterkoeffisienten a er filteret kausalt?

1d) Definer autokorrelasjonssekvensen $r_{hh}(m)$, $m = -\infty, \infty$ til et generelt stabilt filter $h(n)$.

Forklar hvorfor autokorrelasjonssekvensen til allpassfilteret $H_1(z)$ i oppgave 1c har formen

$$r_{h_1h_1}(m) = \delta(m), \quad m = -\infty, \infty \tag{2}$$

Oppgave 2 : (4+3+6+3)

Gitt et stabilt, kausalt filter $H(z)$ på formen

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \, \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \tag{3}$$

dvs $H_1(z)$ er lik allpassfilteret i oppgave 1c (med $a = \frac{2}{3}$) og $H_2(z)$ er gitt ved

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{4}$$

2a) Vis at $H(z)$ kan omformes til følgende parallellform

$$H(z) = H_3(z) + H_4(z) = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{-4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{5}$$

2b) Utled enhetspulsresponsen til $H(z)$

2c) Skisser følgende strukturer for $H(z)$:

- Direkte form 2 (DF2)
- Parallell
- Kaskade

2d) Forklar hvorfor autokorrelasjonssekvensen til $H(z)$ er identisk lik autokorrelasjonssekvensen til $H_2(z)$.

Oppgave 3 : (6+4+4+4)

Gitt et kausalt, stabilt filter med enhetspulsrespons $g(n)$, $\quad n = 0, \infty$. Filteret påtrykkes hvit støy $w(n)$ med effekt σ_w^2.
Autokorrelasjonsfunksjonen $\gamma_{yy}(m)$, $\quad m = -\infty, \infty$, og effektspekteret $\Gamma_{yy}(z)$ til utgangssignalet $y(n)$ er da gitt ved henholdsvis

$$\gamma_{yy}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g(n)g(n+m) & m \geq 0 \\ \gamma_{yy}(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_w^2 \; G(z)G(z^{-1}) \tag{7}$$

3a) Definer henholdsvis en ARMA, AR og MA prosess.

Hva er den prinsippielle forskjellen mellom en fysisk prosess og en prosess-modell?

3b) Angi hvilken type type parametrisk prosess en vil få på utgangen $y(n)$ av filteret når hvit støy med effekt σ_w^2 påtrykkes henholdsvis :

- $H_1(z)$
- $H(z)$

hvor filtrene er definert i oppgave 2.

3c) Finn autokorrelasjonssekvensen til utgangen $y(n)$ når hvit støy med effekt σ_w^2 påtrykkes $H(z)$.

3d) Hva blir prosess-parametrene til den beste AR[1]-modellen til hvert av de to utgangssignalene $y(n)$ i deloppgave 3b?

Gi en kort begrunnelse for resultatene.

Oppgave 4 : (3+6+5+3)

4a) Sett opp uttrykkene for en N-punkts Diskret Fourier Transform (DFT) samt dens inverse (IDFT) av en sekvens $x(n)$ av endelig lengde M

Hvordan må N velges hvis en skal kunne gjenvinne $x(n)$ fra DFT-verdiene?

4b) En ønsker å filtrere en uendelig lang sekvens $x(n),\ n = -\infty, \infty$ med et FIR-filter $h(n)$ av lengde L.

Forklar hvordan denne filtreringen kan utføres i frekvensplanet ved hjelp av den såkalte "overlap-add" metoden.

Sammenlign "overlap-add" metoden og standard tidsplanbasert filtrering med hensyn på antall multiplikasjoner og addisjoner per utgangsverdi.

4c) En ønsker å bruke DFT til frekvensanalyse av en uendelig lang sekvens $x(n),\ n = -\infty, \infty$. I praksis må en velge et utsnitt av endelig lengde K av sekvensen.

Diskuter problemene med frekvensoppløsning og frekvens-lekkasje"(sidelober) som funksjon av utsnittslengden K.

Hva kan en bruke for å få til en avveining mellom de to forannevnte problemene?

4d) Radix-2 Fast Fourier Transform (FFT) er en rask algoritme for å beregne DFT til en sekvens med lengde N lik en 2-er potens, dvs. $N = 2^R$

Forklart kort *prinsippet* for radix-2 FFT algoritmen.