NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

Faglig kontakt / *contact person*:
Navn: Esten Grøtli
Tlf.: 920 99 036

Eksamen - TTK 4115 Lineær systemteori
Exam - TTK 4115 Linear systems theory

21. desember 2011, 15:00 – 19:00

Hjelpemidler: D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Supporting materials: D - No printed or handwritten material allowed. Specific, simple calculator allowed.

Merk at ingen deloppgave avhenger av at du har greid å løse noen av de andre deloppgavene. Oppgitt informasjon fra tidligere deloppgaver skal være tilstrekkelig for å komme videre.
Note that no parts of this problem assume that you have solved any of the of previous parts. The given information from previous parts should be sufficient to move on.

Oppgave 1 (16 %)

Forklar følgende begreper:
Explain the following concepts:

a) (5%)
Similaritetstransformasjon.
Similarity transformation.

b) (6%)
Kalmans kanoniske dekomposisjon.
Kalman's canonical decomposition.

c) (5%)
Minimal realisering.
Minimal realization.

Oppgave 2 (20 %)

Anta gitt følgende system:
Consider the following system:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

a) (3%)
Tegn et blokkdiagram av systemet.
Draw a block diagram of the system.

b) (5%)
Undersøk om systemet er internt stabilt (dvs. Lyapunov stabilt eller marginalt stabilt).
Investigate if the system is internally stable (i.e. Lyapunov stable or marginally stable).

c) (5%)
Undersøk om systemet er styrbart.
Investigate if the system is controllable.

d) (7%)
Forklar hvorfor systemet er stabiliserbart, og velg en tilstandstilbakekopling som plasserer egenverdiene til systemet i $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.
Explain why the system is stabilizable, and choose a state feedback that places the eigenvalues of the system at $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.

Oppgave 3 (36 %)

Gitt følgende system:
Consider the following system:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} w \tag{1}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + v \tag{2}$$

der w er en ukjent forstyrrelse og v er ukjent målestøy.
where w is an unknown disturbance and v is unknown measurement noise.

a) (4%)
Vis at systemet er observerbart.
Show that the system is observable.

b) (6%)
Vis at forsterkningsmatrisa i en tilstandsestimator (observer) som har poler i $\lambda_1 = -10$ og $\lambda_2 = -12$ er gitt ved:
Show that the gain matrix of a state estimator (observer) with poles at $\lambda_1 = -10$ and $\lambda_2 = -12$ is given by:

$$L = \begin{pmatrix} 19 \\ 99 \end{pmatrix}$$

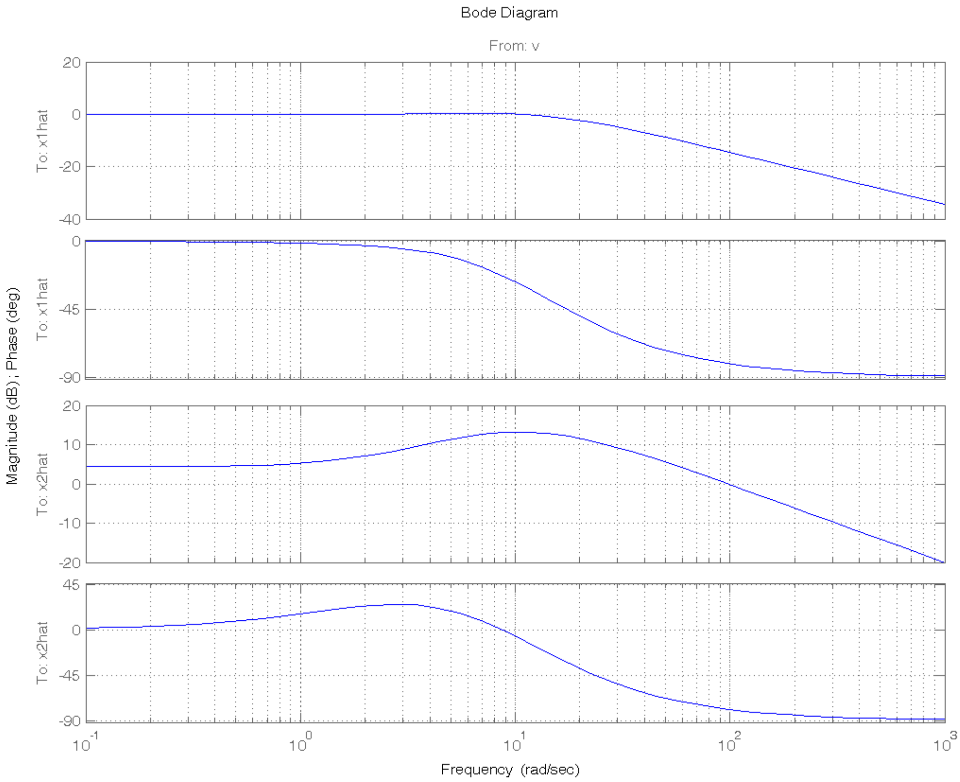
der A, B, C er implisitt gitt av (1)-(2) ovenfor, og tilstandsestimatoren er gitt ved:
where A, B, C are implicitly given by (1)-(2) above, and the state estimator is given by:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x})$$

c) (9%)
Vis at effekten av målestøy v på tilstandsestimatene $\hat{x}_1$ og $\hat{x}_2$ kan beskrives av følgende overføringsfunksjoner som også er gjengitt i kurver på neste side:
Show that the effect of the measurement noise v on the state estimates $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$ can be described by the following transfer functions that are also given by the curves at the next page:

$$\frac{\hat{x}_1}{v}(s) = 19\frac{s+6.21}{(s+10)(s+12)} = 0.98\frac{1+0.16s}{(1+0.1s)(1+0.08s)}$$

$$\frac{\hat{x}_2}{v}(s) = 99\frac{s+2}{(s+10)(s+12)} = 1.65\frac{1+0.5s}{(1+0.1s)(1+0.08s)}$$



d) (4%)

Anta at målestøyen $v(t)$ i noen tilfeller inneholder en dominerende komponent $v(t) = 0.2\sin(200t)$. Anslå eller beregn (basert på formlene eller figurene i del c)) med hvilken faktor denne støykomponenten reduseres i estimatene av x_1 og x_2.

Assume that the measurement noise $v(t)$ in some cases contains a dominant component $v(t) = 0.2\sin(200t)$. Estimate or calculate (based on the formulas or figures in part c)) the factor this noise component is reduced by in the estimate of x_1 and x_2.

e) (5%)

Anta systemet har en konstant ukjent forstyrrelse w. Diskuter (gjerne uten beregninger) hvilken effekt denne har på nøyaktigheten av estimatene $\hat{x}_1$ og $\hat{x}_2$.

Assume the system has a constant unknown disturbance w. Discuss (calculations not needed) the effect of the disturbance on the accuracy of the estimates $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$.

f) (3%)

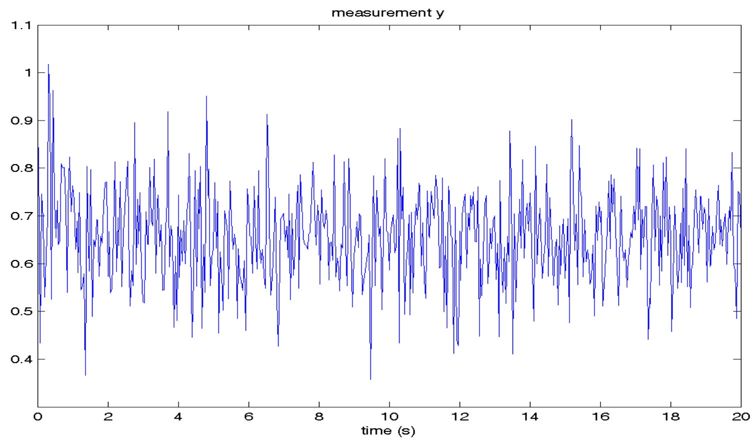
Foreslå (med begrunnelse) hvordan estimatoren ovenfor kan initialiseres.

Suggest (and justify) how the above estimator can be initialized.

g) (5%)
Diskuter (uten beregninger) effekten av å velge poler lenger til venstre i venstre halvplan. Diskusjonen bør omfatte endringer i ytelse og implementasjon på grunn av diskretisering, målestøy (anta $v(t)$ kan ha vilkårlig effektspektrum) og konstant forstyrrelse w.
Discuss (without calculations) the effect if the poles are chosen further to the left in the left half-plane. The discussion should include changes in performance and implementation due to discretization, measurement noise (assume $v(t)$ *may have any power spectral density function) and constant disturbance* w*.*

Oppgave 4 (28 %)

a) (5%)
Anta gitt følgende måleserie med diskret-tid måling $y[k]$ som er tatt opp under forhold der tilstanden er konstant, med sampling intervall $T_s = 0.04$. Forklar hvorfor det er rimelig å se på $v[k]$ som (diskret) hvit støy sekvens, og gi et begrunnet anslag for autokorrelasjonsfunksjonen og variansen.
Assume the following measurement series of the discrete-time measurement $y[k]$ *is recorded under conditions when the state is constant, with sampling interval* $T_s = 0.04$*. Explain why it is reasonable to assume* $v[k]$ *is a (discrete) white noise sequence, and suggest an estimate for its autocorrelation function and variance.*



b) (3%)
Kan du si hvorvidt måleserien ovenfor kommer fra en stasjonær tilfeldig prosess?
Could you conclude whether the above measurement series is the output of a stationary random process?

c) (10%)
Gitt følgende system:
Consider the following system:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} w[k] \\
y[k] &= \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} + v[k]
\end{aligned}
$$

der $w[k]$ er en kjent forstyrrelse og $v[k]$ er ukjent målestøy med samme statistiske egenskaper som i del a). Beskriv hvordan en diskret-tid Kalman-filter algoritme kan benyttes for å estimere tilstandene i systemet dersom $w[k]$ er en sakte tidsvarierende ukjent forstyrrelse (Hint: Hvordan modelleres en slik forstyrrelse?). Ta med den augmenterte modellen og de viktiste formlene.
where $w[k]$ is an unknown disturbance and $v[k]$ is unknown measurement noise with the same statistical properties as part a). Describe how a diskrete-time Kalman-filter algorithm can be used to estimate the system states if $w[k]$ is a slowly time-varying unknown disturbance (Hint: How to model such a disturbance?). Include the augmented model and main formulas.

d) (10%)
Forklar hovedideen bak et utvidet Kalman filter for å estimere tilstanden til et ulineært system, med utgangspunk i diskret tid ordinært Kalman-filter. Beskriv hvilke tiltak du vil foreslå for å få god numerisk robust implementasjon og initialisering av utvidet Kalman-filter (extended Kalman-filter) for sikre konvergens og stabilitet.
Describe the main idea behind an extended Kalman filter for estimating the state of a nonlinear system, based on the discrete time ordinary Kalman filter. Suggest means for numerically robust implementation and initialization of an extended Kalman filter to ensure convergence and stability.

Vedlegg til eksamen (noen nyttige formler og uttrykk):
Appendix to the exam (some useful formulas and expressions):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
x(k) &= A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}Bu(m) \\
A^{-1} &= \frac{adj(A)}{det(A)} \\
det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\
adj(A) &= \{c_{ij}\}^T \\
c_{ij} &= (-1)^{i+j}det(A_{ij}) \quad \text{(kofaktor)},\ A_{ij} = \text{submatrix to } A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C} &= (B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B) \\
\mathscr{O} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \\
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\
G(z) &= C(zI-A)^{-1}B + D \\
\mathbf{G}(\mathbf{s}) &= \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{G_{sp}}(\mathbf{s}) \\
d(s) &= s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r \\
\mathbf{G_{sp}}(s) &= \frac{1}{d(s)}[\mathbf{N_1}s^{r-1} + \mathbf{N_2}s^{r-2} + \cdots + \mathbf{N_{r-1}}s + \mathbf{N_r}] \\
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1\mathbf{I_p} & -\alpha_2\mathbf{I_p} & \cdots & -\alpha_{r-1}\mathbf{I_p} & -\alpha_r\mathbf{I_p} \\ \mathbf{I_p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_p} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I_p} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{I_p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= [\ \mathbf{N_1} \quad \mathbf{N_2} \quad \cdots \quad \mathbf{N_{r-1}} \quad \mathbf{N_r}\ ]\mathbf{x} + \mathbf{G}(\infty)\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Discrete-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
\mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] &= 0, \forall i, k \\
\mathbf{P}_k^- &= E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \\
\mathbf{P}_k &= E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k
\end{aligned}
$$

Continuous-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\
\mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] &= \mathbf{Q}\delta(t - \tau) \\
E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= \mathbf{R}\delta(t - \tau) \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= 0 \\
\mathbf{K} &= \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \\
\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0
\end{aligned}
$$

Auto-correlation:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \text{ (Stationary process)} \\
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \text{ (Non-stationary process)} \\
Y(s) &= G(s)U(s) \Rightarrow \\
R_y(t_1, t_2) &= E[y(t_1)y(t_2)] \\
&= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} g(\xi) g(\eta) E\left[u(t_1 - \xi) u(t_2 - \eta)\right] d\xi \, d\eta \text{ (Transient analysis)}
\end{aligned}
$$

Laplace transform pairs:

$f(t)$	$\iff$	$F(s)$
1	$\iff$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\iff$	$\frac{1}{s+a}$
t	$\iff$	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\iff$	$\frac{2}{s^3}$
te^{-at}	$\iff$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\iff$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\iff$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$