TFE4101

KRETS- OG DIGITALTEKNIKK

Regneformer og negative tall
Binære tallkoder

Gajski:
- Kap. 2.4: Binær addisjon og subtraksjon
- Kap. 2.5: Negative tall
  - 2.5.1: Fortegn-verdi
  - 2.5.2: 2's komplement (deltall ikke dekket av boka)
- Kap. 2.6: 2's komplement addisjon og subtraksjon
- Kap. 2.10: Binære tallkoder
  (Graykode ikke dekket av boka)

(Kap 2.7 og 2.8 foreleses senere)
(Kap 2.9, 2.11, 2.12 og 2.13 er ikke pensum)

Addisjon av binære tall

987(x) + 123(y)

x_i	$+ y_i$	$+ c_i$	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

		512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
x		1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
y					1	1	1	1	0	1	1
C	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
x+y	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
	s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0

Subtraksjon av binære tall

987(x) -123(y)

x_i	y_i	b_i	b_{i+1}	d_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
x	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
y				1	1	1	1	0	1	1
b	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
x-y	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
	d_9	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0

Fig 2.6

Trykkfeil i boka

Alternative tallrepresentasjoner

- Ordinær koding for binære tall (m=3):

  $0_{10} = 000_2$
  $1_{10} = 001_2$
  $2_{10} = 010_2$
  $3_{10} = 011_2$
  $4_{10} = 100_2$
  $5_{10} = 101_2$
  $6_{10} = 110_2$
  $7_{10} = 111_2$

- Alternativ, like ”korrekt”, koding for binære tall (m=3):

  $0_{10} = 101_2$
  $1_{10} = 011_2$
  $2_{10} = 000_2$
  $3_{10} = 100_2$
  $4_{10} = 110_2$
  $5_{10} = 010_2$
  $6_{10} = 111_2$
  $7_{10} = 001_2$

- Den ordinære kodingen er ikke den eneste mulig (men det er selvsagt den som er standard og som direkte utnytter posisjonvektene)

Tallrepresentasjon: Fortegn - tallverdi

- MSB benyttes til fortegn
  - Positive tall: MSB = 0
  - $01111011_2 = +123_{10}$
  - Negative tall: MSB = 1
  - $11111011_2 = -123_{10}$
- To representasjoner av 0
  - +0 = -0
  - r=2, m=4 $\rightarrow$ $0000_2 = 1000_2$
- Addisjon og subtraksjon krever
  - sammenlikning av fortegn
  - sammenlikning av tallverdi
- Multiplikasjon og divisjon er "enkelt"
  - multipliser eller divider tallverdi
  - like fortegn $\rightarrow$ resultat positivt
  - ulike fortegn $\rightarrow$ resultat negativt

Fortegn – tallverdi: addisjon og subtraksjon

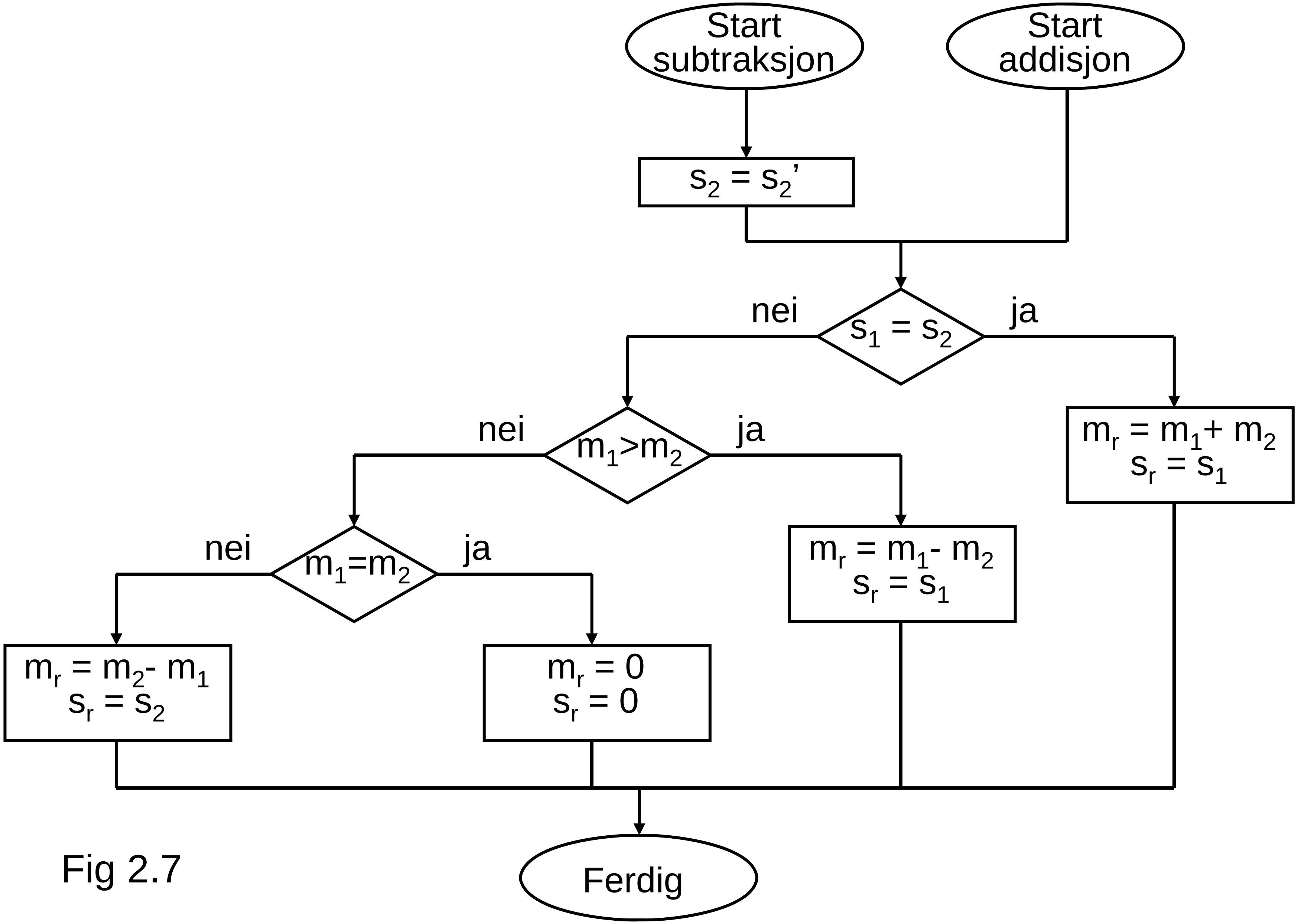


Fig 2.7

Tallrepresentasjon : Radix komplement

Hva og hvorfor:

- Alternativ måte å kode positive og negative tallverdier på
- Fortsatt er MSB fortegnsbit, men dette behandles ikke spesielt
- Positive tallverdier kodes ”tilfeldigvis” likedan som ordinær koding
- Koding for en negativ tallverdi finnes ved å ”ta radix komplement” av koden til den tilsvarende positive tallverdien
- Muliggjør enkel implementering av addisjon og subtraksjon
- Multiplikasjon og divisjon blir noe mer kompleks

Radix komplement

- Heltall med m siffer: $D = \sum_{i=-n}^{m-1} d_i \cdot r^i$
- Radix-komplement til D er definert som: $\overline{D} = r^m - D$
- 10's komplement til tallet 987 (m = 3) er $\overline{D} = 10^3 - 987 = 13$
- 10's komplement til tallet 123 (m = 3) er $\overline{D} = 10^3 - 123 = 877$
- Generelt
  - Et tall D mellom 1 og r^m-1 har $\overline{D}$ mellom 1 og r^m-1
  - Både D og $\overline{D}$ kan representeres med m siffer
  - Radix komplement til tallet 000_r (m=3) er

$$\overline{D} = 1000_r - 000_r = \cancel{1}000_r = 000_r$$

  - Unik representasjon av 0

Radix komplement

Radix-komplement uten subtraksjon:

- Se Gajski for detaljer

- Innfører begrepet siffer-komplement

  $d' = (r-1) - d$

- Videre har vi

  $D' = d'_{m-1}\ d'_{m-2}\ \ldots\ d'_0$

- Det kan da vises at:

$$\boxed{\overline{D} = D' + 1}$$

	bin	okt	dec	hex
0	1	7	9	F
1	0	6	8	E
2		5	7	D
3		4	6	C
4		3	5	B
5		2	4	A
6		1	3	9
7		0	2	8
8			1	7
9			0	6
A				5
B				4
C				3
D				2
E				1
F				0

Radix komplement, deltall

- 2's komplement av D = 001010.11_2 (m=6, n=2)

$$\overline{D} = r^m - D = 2^6 - 001010.11$$
$$= 1000000 - 001010.11 = 110101.01$$

- Alternativt

$$\overline{D} = D' + r^{-n} = 110101.00 + 000000.01$$
$$= 110101.01$$

(Ikke dekket i boka)

Radix komplement

- Begrepet radix komplement brukes altså om to ting:
  - En spesiell måte å representere (kode) tall på
  - En metode for å konvertere mellom positive og negative tall

- Vi sier at
  - tallet 1011_2 (-5_{10}) er på 2's komplement format
- men også at vi
  - tar 2's komplement av 0101_2 ($+5_{10}$) for å få tallet 1011_2 (-5_{10})

- Merk at dersom vi opererer med 2's komplement format så er 0101_2 ($+5_{10}$) også på 2's komplement format.

Radix komplement

- Tar man radix komplement av koden til et positivt tall så får man koden til det negative tall med samme tallverdi
  - Koding av $+6_{10} = 0110_2$

$$\overline{0110_2} = (0110)_2' + 1_2 = 1001_2 + 1_2 = 1010_2$$

$1010_2 = -6_{10}$

- Tar man radix komplement av et negativt tall får man det tilsvarende positive tallet.

- Fortegn behandles på samme måte som tallverdi

Desimal på f-t	Binært på 2's kmpl.
+7	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000
- 1	1111
- 2	1110
- 3	1101
- 4	1100
- 5	1011
- 6	1010
- 7	1001

Posisjonsvekting for radix komplement

- Også Radix komplementkoding bruker posisjonsbasert vekting
- MSB (fortegnsbit) har negativ vekt: $-\ r^{m-1}$

F-T:

$$110110_{(2)} = -\ (\ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0\ )$$

$$= -\ (\ 16 + 0 + 4 + 2 + 0\ ) = -\ 22_{(10)}$$

2-C:

$$101010_{(2)} = 1 \cdot (-\ (2^5)) + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$= -\ 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = -\ 22_{(10)}$$

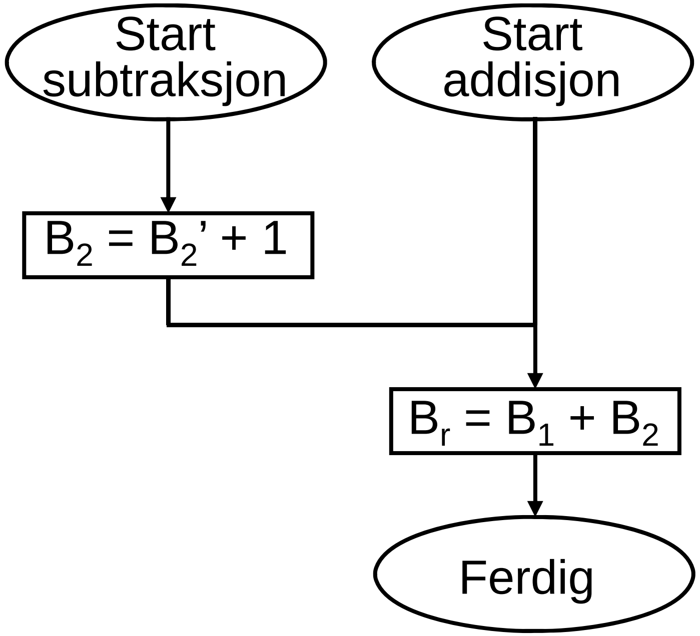
Gruppeoppgave

- Finn radix komplement til 6 B 7 3 , 2_{16}

- Hvilke verdier for MSD er positive og negative her?

Addisjon og subtraksjon med radix komplement

- Sammenlikning av fortegnene og tallverdiene ikke nødvendig



- Addere 123_{10} og -234_{10} (m=3)
- $+123_{10} + (-432_{10}) = -309_{10}$
- Finner 10's komplement kode
  - $+123_{10} = 123_{10}$
  - $-432_{10} = 432' + 1 = 567 + 1 = 568_{10}$

Behandler alle siffer likt (også fortegn)

- $123_{10} + 568_{10} = 691_{10}$
- Sjekk tallverdi: $691' + 1 = 308 + 1 = 309_{10}$

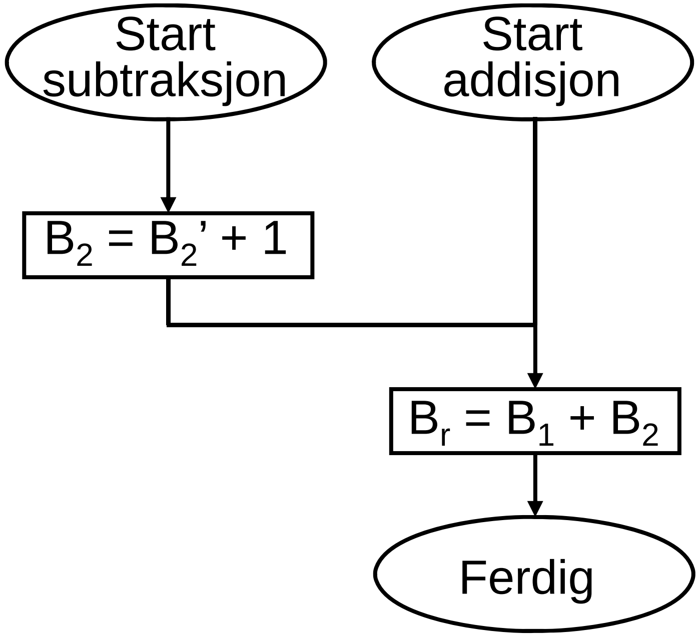
Addisjon med 2's komplement

- Benytter tabell for binær addisjon

- Addisjon

$$
\begin{array}{lll}
 & 0010_2 & (+2_{10}) \\
+ & \underline{0100_2} & \underline{(+4_{10})} \\
= & \underline{0110_2} & \underline{(+6_{10})}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & 1110_2 & (-2_{10}) \\
+ & \underline{1100_2} & \underline{(-4_{10})} \\
= & \underline{\cancel{1}1010_2} & \underline{(-6_{10})}
\end{array}
$$

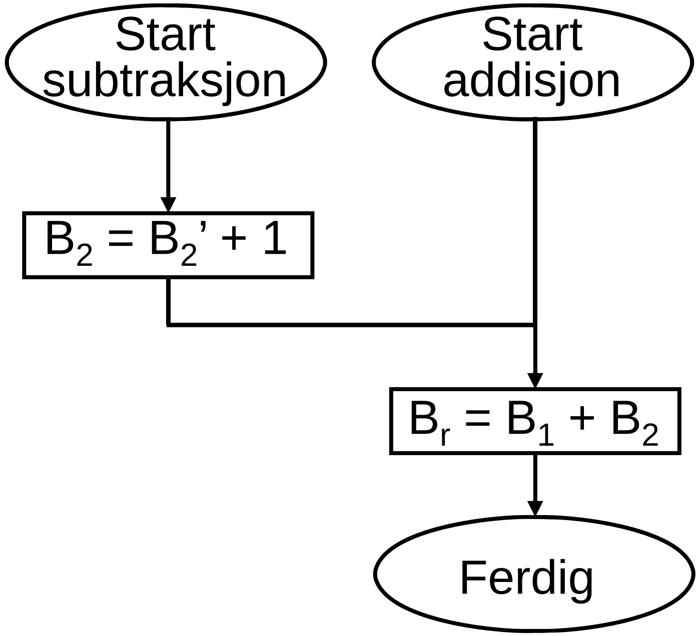


x_i +	y_i +	c_i	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Subtraksjon med 2's komplement

- Subtraksjon: addisjon med 2's komplement av subtrahend

$$R = A - B = A + \overline{B}$$



- $R = 2 - 4 = 2 + \overline{4}$

$$\begin{array}{lll} & 0010_2 & (+2_{10}) \\ + & \underline{1100_2} & \underline{(-4_{10})} \\ = & \underline{1110_2} & \underline{(-2_{10})} \end{array}$$

$x_i + y_i + c_i$			c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Gruppeoppgave

- Regn ut følgende på 2's komplement (m=4):

$$4 - (-5) =$$

Overflyt

$$
\begin{array}{lll}
 & 0100_2 & (+4_{10}) \\
+ & 0101_2 & (+5_{10}) \\
\hline
= & 1001_2 & (-7_{10}) \\
\hline
\end{array}
$$

- Sjekk av overflyt for addisjonen R = A + B
  - Hvis fortegn til A og B er forskjellig
    $\Downarrow$
    ingen overflyt mulig
  - Hvis fortegn til A og B er like men forskjellig fra fortegn til R
    $\Downarrow$
    overflyt (resultat ugyldig)

Overflyt (2's komplement)

- Alternativ test av overflyt (implementeringsvennlig)
  - Hvis $c_i \neq c_{i+1}$ for i=m-1 (mente inn og ut av fortegn)

    $\Downarrow$

    overflyt (resultat ugyldig)

	0100_2	$(+4_{10})$
+	0101_2	$(+5_{10})$
	0100	(mente)
=	1001_2	(-7_{10})

	1100_2	(-4_{10})
+	1011_2	(-5_{10})
	1000	(mente)
=	0111_2	$(+7_{10})$

NTNU

Fortegnsutvidelse (2's komplement)

- Utvidelse fra m til M bit (M>m)

$$\underbrace{d_{m-1}\, d_{m-2} \ldots d_0}_{m}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{d_{m-1}\, d_{m-1} \ldots \underbrace{d_{m-1}\, d_{m-2} \ldots d_0}_{m}}_{\mathrm{M}}$$

- Kopier fortegnsbitet (M-m) ganger til venstre for fortegnsbitet

- $4 \rightarrow 6$ bit

  $+7_{10}$: $0111_2 \rightarrow 000111_2$

  -7_{10} : $1001_2 \rightarrow 111001_2$

Binære koder for desimale siffer

- Trenger fire bit for å representere de 10 desimale siffer
- Med fire bit kan vi lage mer enn 29 mrd. ulike kodinger
- Binary Coded Desimal (BCD) er mest vanlig:

BCD	Desimalt siffer
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	Ubrukt
…	…
1111	Ubrukt

8421 kode

Binære koder for desimale siffer

- Andre vanlige koder:

Desimalt siffer	2421	EXCESS-3	BIQUINARY
0	0000	0011	0100001
1	0001	0100	0100010
2	0010	0101	0100100
3	0011	0110	0101000
4	0100	0111	0110000
5	1011	1000	1000001
6	1100	1001	1000010
7	1101	1010	1000100
8	1110	1011	1001000
9	1111	1100	1010000

Graykode

- Tallkode
- Fra ett tall til et nabotall endres bare ett bit

- Binært:

  $55_{10} = 00110111_2$

  $56_{10} = 00111000_2$

- Graykodet:

  $55_{10} = 00101100_2$

  $56_{10} = 00100100_2$

- Koden er ikke unik

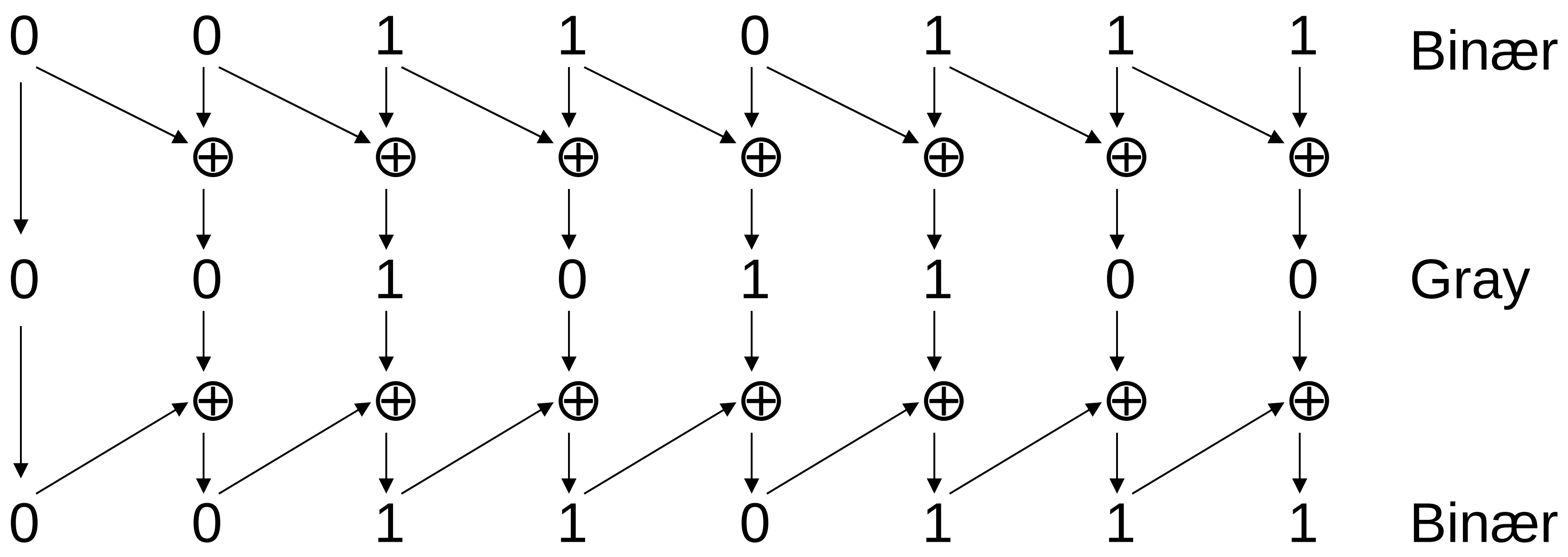
Desimalt siffer	Binært	Gray kode
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Ikke dekket i boka

Graykode

- Konvertering mellom en Gray kode og binære tall
  - Eksempel binært $00110111_2 = 55_{10}$

$\oplus$=XOR



- Benyttes mye i sensorer, posisjonsgivere, A/D-omformere
- En unngår store feil ved små skjevheter i avlesning