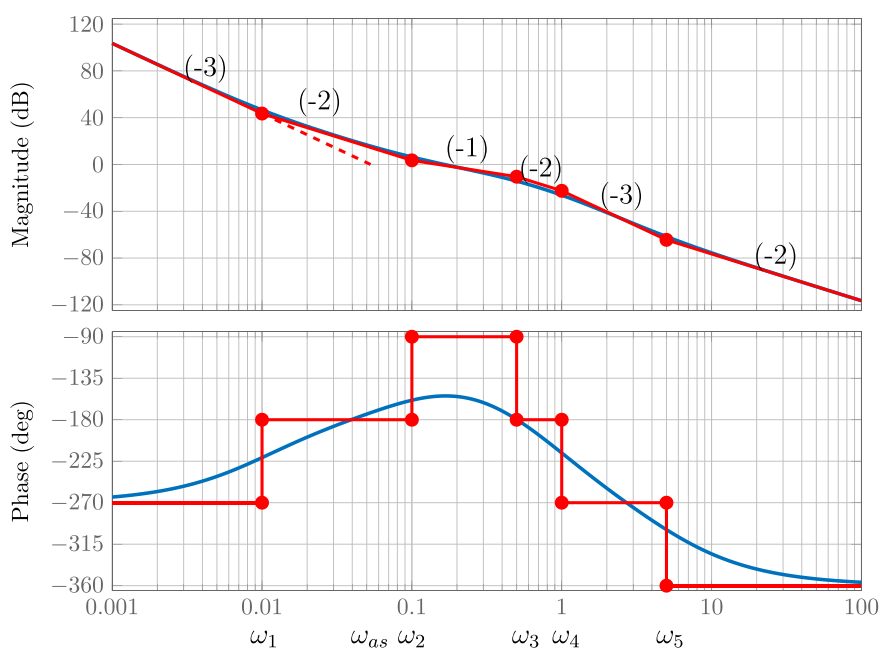


Oppgave 1

- a) Dette er en PID -regulator med begrenset derivat virkning. Den høyre delen ($\frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}$) er en begrenset derivat regulator, PD , denne skal stabilisere systemet. Den venstre delen ($\frac{1+T_i s}{T_i s}$) er en integral regulator, PI , denne skal fjerne stasjonært avvik.
- b) Vi har $h_0 = \frac{t_0}{n_0}$, vi får dermed $M(s) = \frac{t_0}{n_0 + t_0}$. $\text{Grad}(n_0) = 5$. $\text{Grad}(t_0) = 3$. $\text{Grad}(n_0 + t_0) = \max(5, 3) = 5$.
- c) Prosessen, h_u , har to poler i origo. Ved Z-N skal man øke K_p i lukket sløyfe med proporsjonal regulator til man når stabilitetsgrensa. Men dette lukkede systemet er på stabilitetsgrensa for alle $K_p \Rightarrow$ Z-N kan ikke brukes.
- SIMC-metoden forutsetter åpent stabil prosess, h_u , slik at vi kan få en sprang respons på den. Men prosessen h_u er ustabil (to poler i origo) \Rightarrow SIMC kan ikke brukes.
- d) Prosessen, h_u , har meget negativt faseforløp. Integral-virkningen gir et ekstra bidrag på -90° i gal retning. Ved å sette T_i svært stor, kan man begrense dette bidraget til bare lave frekvenser. Ulempen er at det tar lang tid før stasjonært avvik blir fjerna.



Figur 1: Oppgave 1e Bode-diagram

- e) Vi har merket de forskjellige knekkfrekvensene i figur 1, med målingene er oppgitt her

Merkelapp	Frekvens	Periode	Parameter
ω_1	0.01	100	T_i
ω_{as}	0.053	-	-
ω_2	0.1	10	T_d
ω_3	0.5	2	αT_d
ω_4	1	1	T_1
ω_5	5	0.2	T_2

Vi har kommet frem til parameterne som følger. Først så har vi oppgitt at $T_2 = 0.2$. Videre så vet vi at vi skal ha to perioder der den ene skal være lik den andre multiplisert med $\alpha = 0.2$. Vi ser at dette tilsvarer frekvensene ω_3 og ω_4 , hvilket gir $T_d = 10$. Da gjenstår det to perioder $\frac{1}{\omega_1} = 100$ og $\frac{1}{\omega_4} = 1$ som tilsvarer T_i og T_1 . Vi vet at T_i må være stor, og vi får dermed $T_i = 100$ og $T_1 = 1$.

Til slutt skal vi finne K_p . Vi vet at asymptoten ved lave frekvenser skjærer 0-db linjen i $\omega_{as} = K^{\frac{1}{q}}$, der q er antall integrasjoner og vi har $K = \frac{K_p}{T_i}$. Dermed får vi $K_p = T_i \omega_{as}^3 = 100 \times 0.053^3 = 0.15$. (Her godtar vi måleunøyaktigheter på $\omega_{as} \in [0.045, 0.06]$ hvilket tilsvarer $K_p \in [0.009, 0.021]$.)

- f) Se figur 1. Legg merke til siste knekk: $|h_0|$ opp, $\angle h_0$ ned. Dette skyldes leddet $(1 - T_2 s)$ i teller, hvilket gjør at vi har et ikke-minimum fase system, "negativt nullpunkt".
- g) Den er for oscillatorisk. ψ er under 30° , skulle gjerne vært over 45° . $|N|_{\max}$ er godt over 6 dB, burde vært max 6 dB. Det vil si vi er for nært stabilitetsgrensa, noe den oscillatoriske responsen også indikerer.
- h) Av bode og nichols-diagrammet ser vi at systemet kan bli ustabilt ikke bare for en stor K_p , men også en liten K_p .
- i) Det er 3 integratorer i $h_0 \Rightarrow y$ får null stasjonært avvik for sprang, rampe og parabel.
- j) Det er bare en integrator foran angrepspunktet til v , dermed får vi kun null stasjonært-avvik ved sprang. Ikke for rampe og parabel. (Oppgave i) og j) kan også løses ved bruk av sluttverditeoremet)
- k) Leser av $\omega_c \approx 0.15$. Vi har da kravet $\omega_c \frac{T}{2} < 1^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$. Dermed får vi tastetid

$$T < \frac{2}{\omega_c} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{0.15} \times \frac{\pi}{180} = 0.23. \quad (1)$$

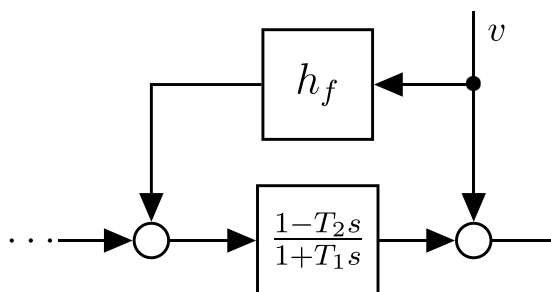
l) Se figur 2 for plassering av foroverkoblingen. En ideell foroverkobling krever

$$h_{f,i} \frac{1 - T_2 s}{1 + T_1 s} + 1 = 0 \quad (2)$$

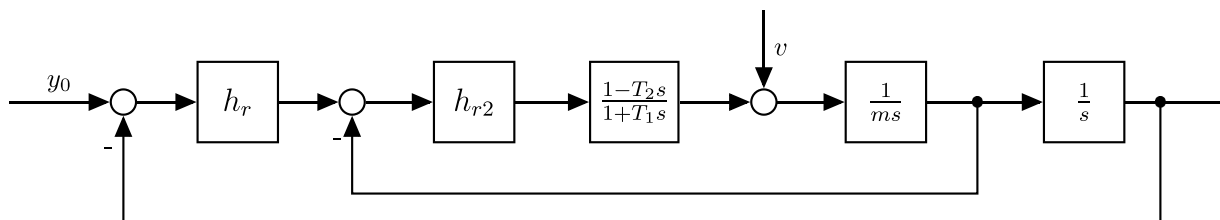
siden vi kun er ute etter en statisk foroverkobling kan vi sett $s = 0$ i uttrykket over, og vi får dermed en konstant foroverkobling

$$h_{f,i} = K_{f,i} = -1. \quad (3)$$

Denne foroverkoblingen kan kun motvirke konstante forstyrrelser.



Figur 2: Oppgave 1 l, foroverkobling

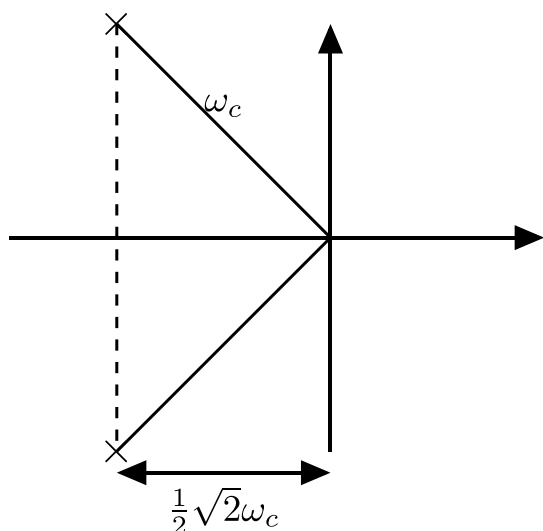


Figur 3: Oppgave 1 m, tilbakekobling

m) Se figur 3 for plassering av tilbakekoblingen. Fordeler med en slik løsning

- Raskere motvirkning av forstyrrelsen
- Raskere regulering \Rightarrow høyere båndbredde
- Økt stabilitetsmargin.

n) Ja. Foroverkobling kan velges uavhengig av tilbakekoblings-valg.

Oppgave 2

Polene i filteret ligger med avstand ω_c fra origo, plassert som en regulær mangekant med 4 sider symmetrisk om den imaginære akse. Vi har $\omega_c = 100$ og $\xi = \sin \varphi = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

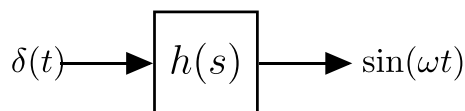
$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_c} + 1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{s}{100}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{s}{100} + 1} \\ &= \frac{100^2}{s^2 + 100\sqrt{2}s + 100^2} \end{aligned} \quad (4)$$

En anvendelse av lavpassfilteret er støyfjelling i reguleringssystem.

Figur 4: Plassering av polene i Butterworth lavpassfilter med orden 2

Oppgave 3 Otto Smith-regulator er gunstig når vi har en tidsforsinkelse, $e^{-\tau s}$, inne i lukket sløyfe. Den store fordelen er at Otto Smith-regulatoren gjør om dette til et reguleringsproblem hvor tidsforsinkelsen, $e^{-\tau s}$, flyttes ut av lukket sløyfe (v.27).

Vi ser at prosessmodellen inngår i Otto Smith-regulatoren, hvilket er det vi mener med modellbasert regulator.

Oppgave 4

Figur 5: Oppgave 4a

- a) Fra formelsamlingen har vi at impulsresponsen til $\frac{K\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}$ er $h(t) = K\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. Dersom vi sammenlikner uttrykket $h(t)$ med $\sin \omega t$ får vi at $\omega_0 = \omega$ og $K = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega}$. Det gir transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{\frac{1}{\omega}\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

- b) Her finnes det flere løsninger. Dersom vi bruker (V2.23) får:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [\omega \quad 0] \quad (6)$$

Løsning 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \text{ og } c = [1 \quad 0] \quad (7)$$

Løsning 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [0 \quad \omega] \quad (8)$$

Løsning 4:

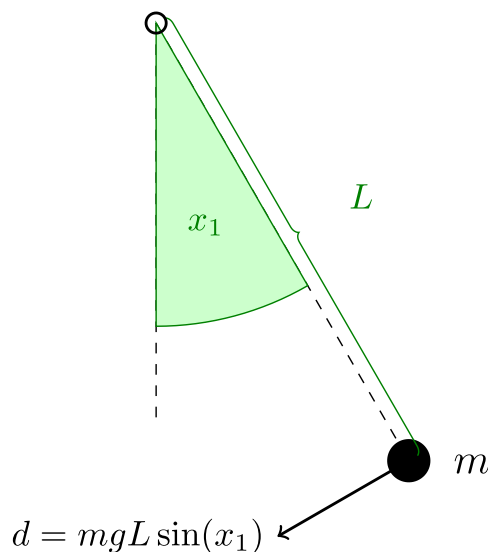
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ og } c = [0 \quad 1] \quad (9)$$

- c) Først, må vi finne en modell for pendelen. Vi starter med Newtons lov for rotasjon $d = J\dot{\omega}$, der d er dreiemoment (kraft til å forandre et legemes rotasjon om sin egen akse), J er tregheten til massen og $\dot{\omega}$ er den deriverte av vinkelhastigheten. Videre har vi oppgitt i formelsamlingen at tregheten til en masse på en vektløs stang er $J = mL^2$ (V.6). Til slutt vet vi at dreiemomentet om pendelen er gitt som kraft multiplisert med arm, hvilket gir $d = mg \sin(x_1) \times L$, se figur 6. Setter vi sammen disse likningene får vi

$$\begin{aligned} d &= J\ddot{x}_1 \\ -mgL \sin(x_1) &= mL^2\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Utvider vi denne modellen med en ekstra tilstand $x_2 = \dot{x}_1$ får vi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = f(x) \quad (11)$$



Figur 6: Oppgave 4c, pendel

Likevektspunktet til dette systemet kan vi finne ved å sette $\dot{x} = 0$. Vi ser da at vi får $x_2 = 0$ og $\sin(x_1) = 0$ hvilket gir $x_1 = 0$ eller $x_1 = \pi$. Likevektspunktet $(\pi, 0)$ er ustabilt og vi velger derfor likevektspunktet $(0, 0)$ som arbeidspunkt.

Vi kan nå linearisere modellen rundt arbeidspunktet $(0, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Det lineariserte autonome modellen blir dermed:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x \quad (13)$$

med A gitt i likning (12), og Δx er x linearisert om arbeidspunktet x^* .

d) Vi finner først $x(s)$ og bruker invers laplace for å finne $x_1(t)$.

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{L}} \begin{bmatrix} x_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Vi har dermed at $x_1(s) = \frac{x_{20}}{s^2 + \frac{g}{L}}$, sammenlikner vi dette med impulsresponsen til $K\omega \sin(\omega t)$ (fra formelsamlingen) ser vi at $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og $K = x_{20} \frac{L}{g}$. Vi får dermed

$$x_1(t) = x_{20} \sqrt{\frac{L}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right). \quad (15)$$

Alternativ løsning (uten bruk av svaret fra forrige oppgave):

Vi vet at $x_2(t)$ har sitt maksimum ved $x_1(t) = 0$. Videre har vi at $x_1(t)$ er sinusformet. Da må $x_2(t)$ være en cosinus funksjon, siden $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Vi antar at pendelen svinger med frekvens ω . Dermed kan vi sette opp likningen:

$$x_2(t) = x_{20} \cos(\omega t) \quad (16)$$

Vi kan finne funksjonen for $x_1(t)$ ved å integrere dette uttrykket:

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt = \frac{x_{20}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (17)$$

Dette stemmer svaret fra likning (15) når vi vet at frekvensen pendelen svinger med er $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Oppgave 5

- a) I 2. ordens leddet har alle koeffisienter samme fortegn (fra Rouths kriterium i formelsamlingen) hvilket vil si at alle røtter er i v.h.p. Dermed gjenstår kun 1. ordens leddet som har en pol i høyre halvplan. Systemet har dermed totalt en pol i høyre halvplan, $N_p = 1$.
- b) Nei, systemet er ustabilt. Vektoren $1 + h_0(j\omega)$ har en netto vinkeldreining lik null, $\Delta\angle(1 + h_0) = 0$. Fra Nyquist stabilitetskriterium får vi da at antall poler i det lukkede systemet blir

$$N_n = N_p - \frac{\Delta\angle(1 + h_0)}{2\pi} = 1. \quad (18)$$

Siden det lukkede systemet har en pol i høyre halvplan så er systemet ustabilt.

- c) For at det lukkede systemet skal bli stabilt trenger vektoren $1 + h_0(j\omega)$ en positiv omdreining. Det får vi hvis den venstre løkken i figur 5.1 omslutter punktet $(-1,0)$. Minimum forsterkning vi trenger for å omslutte $(-1,0)$ med venstre løkke er $K_{p,\min} = K_{p\frac{1}{0.5}} = 2$. Maksimum blir $K_{p,\max} = K_{p\frac{1}{0.227}} = 4.4$. Stabilitetsgrensene for K_p blir dermed

$$2 < K_p < 4.4 \quad (19)$$