Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet

Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 - Kybernetikk introduksjon
Eksamen 2013
Løsningsforslag

Oppgave 1

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 + \frac{K}{T}u \\
&= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{KK_p}{T}x_1 - \frac{KK_d}{T}x_2 \\
u &= -K_px_1 - K_dx_2
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \dot{x}_2 \\
\ddot{x}_1 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{KK_p}{T}x_1 - \frac{KK_d}{T}x_2 \\
\ddot{x}_1 &= -\frac{1}{T}\dot{x}_1 - \frac{KK_p}{T}x_1 - \frac{KK_d}{T}\dot{x}_1 \\
\ddot{x}_1 + \frac{1}{T}\left(1 + KK_d\right)\dot{x}_1 + \frac{KK_p}{T}x_1 &= 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Dette er en andreordens differensialligning. Udempet resonansfrekvens ω_0 og relativ dempningsfaktor ζ er dermed gitt ved

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{KK_p}{T}} \qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_0\zeta &= \frac{1}{T}\left(1 + KK_d\right) \\
\zeta &= \frac{(1 + KK_d)}{2T\sqrt{\frac{KK_p}{T}}} \\
\zeta &= \frac{(1 + KK_d)}{2\sqrt{TKK_p}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{KK_p}{T} &> 0 \\ &\Rightarrow \\ K_p &> 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\left(1 + KK_d\right) &> 0 \\ &\Rightarrow \\ 1 + KK_d &> 0 \\ K_d &> -\frac{1}{K} \end{aligned} \tag{5}$$

c)

$$K = 0.2, \quad T = 100$$

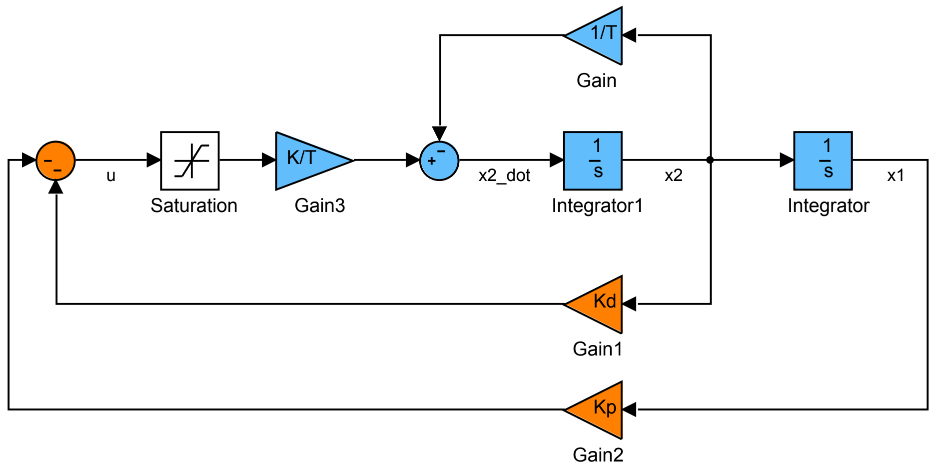
$$\begin{aligned} \omega_0 = \sqrt{\frac{0.2K_p}{100}} &= 1 \\ 0.2K_p &= 100 \\ K_p &= 500 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{1 + 0.2K_d}{2\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 500}} &= 1 \\ \frac{1 + 0.2K_d}{2 \cdot 100} &= 1 \\ 1 + 0.2K_d &= 200 \\ K_d &= 995 \end{aligned} \tag{7}$$

d)

Metning i rorvinkel (pådrag) og rorvinkelrate (pådragsrate) kan gi problemer med stabilitet og ytelse.

e)



Figur 1: Blokkdiagram laget i Simulink. Blått representerer kursdynamikken til skipet, mens oransje representerer autopiloten (regulatoren).

f)

Kursvinkelen ψ kan finnes ved å integrere målingen r. Dette vil dog føre til problemer med drift. Man kan redusere effekten av drift ved å bruke dødsone (gjort på lab), eller bruke andre metoder som å estimere bias og kompensere.

Oppgave 2

a)

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(1) = 3$$

b)

$$|1 + ah| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 1 + ah \leq 1$$

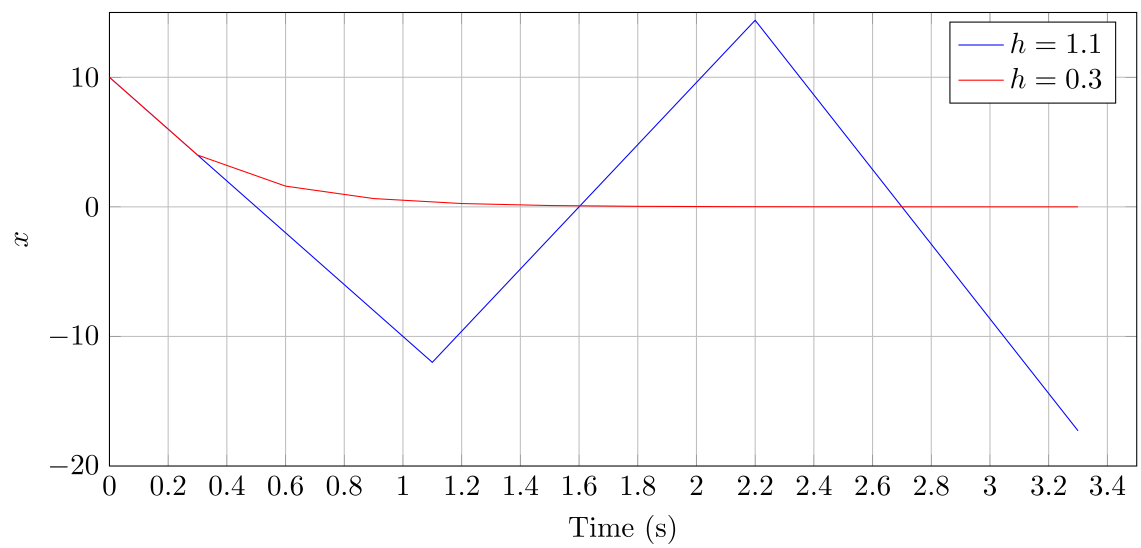
Øvre grense:

$$\begin{aligned} -2 &\leq ah \\ ah &\geq -2 \\ -2h &\geq -2 \\ h &\leq 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Kan også finne nedre grense:

$$\begin{aligned} 1 + ah &\leq 1 \\ ah &\leq 0 \\ -2h &\leq 0 \\ h &\geq 0 \end{aligned}$$

c)



Figur 2: Vi ser at for $h = 1.1$ er løsningen ustabil, mens for $h = 0.3$ som var innenfor øvre grense er løsningen stabil.

Oppgave 3

$$c\rho V\dot{T} = P + cw(T_i - T)$$

a)

$$\dot{T} = -\frac{cw}{c\rho V}T + \cdots$$

Tidskonstanten for et system på formen $\dot{x} = ax$ er gitt ved $\tau = -\frac{1}{a}$. Finner a fra uttrykket over som gir

$$a = -\frac{w}{\rho V} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{1}{a}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{w} \tag{9}$$

b)

$$[\tau] = \frac{{}^{\mathrm{kg}}\!/\!{}_{\mathrm{m}^3} \cdot \mathrm{m}^3}{{}^{\mathrm{kg}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{{}^{1}\!/\!{}_{\mathrm{s}}} = \mathrm{s} \tag{10}$$

c)

$$u = K_p(T_r - T)$$

$$c\rho V\dot{T} \quad = \quad K_p\left(T_r - T\right) + cw\left(T_i - T\right)$$

For stasjonært signal setter vi $\dot{T} = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= K_pT_r - K_pT_s + cwT_i - cwT_s \\ \left(K_p + cw\right)T_s &= K_pT_r + cwT_i \\ T_s &= \frac{K_pT_r + cwT_i}{K_p + cw} \end{aligned}$$

Det stasjonære avviket e_s er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} e_s &= T_r - T_s \\ &= \frac{T_r\left(K_p + cw\right)}{K_p + cw} - \frac{K_pT_r + cwT_i}{K_p + cw} \\ &= \frac{K_pT_r + cwT_r - K_pT_r - cwT_i}{K_p + cw} \\ &= \frac{cw\left(T_r - T_i\right)}{K_p + cw} \end{aligned} \tag{11}$$

Utifra denne ligningen kan vi se at

$$\lim_{K_p \to \infty} e_s = 0 \tag{12}$$

d)

$$\begin{aligned} c\rho V\dot{T} &= K_p\left(T_r - T\right) + K_i\int_0^t \left(T_r - T\right)d\tau + cw\left(T_i - T\right) \\ c\rho V\ddot{T} &= K_p\left(\dot{T}_r - \dot{T}\right) + K_i\left(T_r - T\right) + cw\left(\dot{T}_i - \dot{T}\right) \end{aligned}$$

For stasjonær tilstand setter vi alle tidsderiverte signaler lik null, som gir

$$\begin{aligned} K_i\left(T_r - T_s\right) &= 0 \\ T_s &= T_r \end{aligned} \tag{13}$$

e)

Vi kan sette

$$u_{ff} = -cwT_i \tag{14}$$

som vil effektivt sett fjerne leddet med forstyrrelsen i systemmodellen. Dette krever at vi kjenner til eller kan måle c, w, og T_i.

f)

Monovariabelt. Vi har nå to tilstander, men fortsatt bare ett pådrag.

g)

$$wT \Leftrightarrow ux : \quad \text{ulineært}$$

Når pådraget og tilstanden multipliseres får vi et ulineært system.

Oppgave 4

a)

$$t_s = 1\,\text{ms} \quad \Rightarrow \quad f_s = 1\,\text{kHz} \quad \Rightarrow \quad f_{max} = 500\,\text{Hz}$$

b)

Se kap 12.2 i kompendiet.

Oppgave 5

Analyse av sekvensiell krets (se kap 6.4 i logikkstyring).

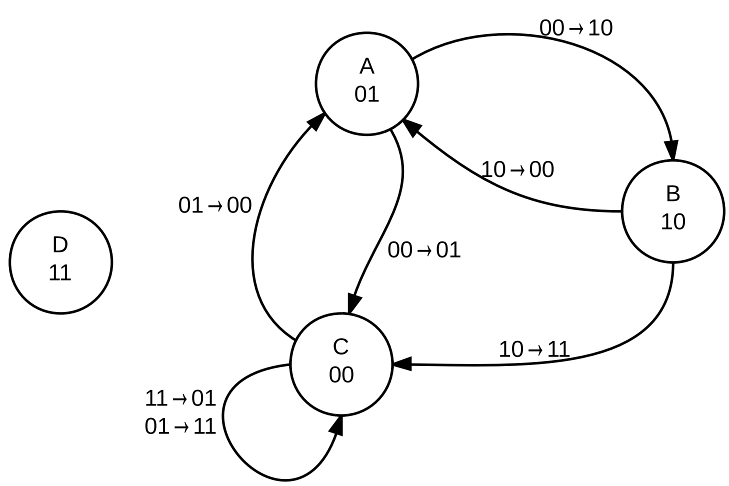
a)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1(k)\,\text{AND}\,y_2(k-1) \\ y_2 &= \overline{y_1\,\text{OR}\,x_2} \end{aligned}$$

Tabell 1: Tilstandstabell

x_1	x_2	y_1	y_2	Tilstand
0	0	0	1	A
1	0	1	0	B
0	0	0	1	A
1	0	1	0	B
1	1	0	0	C
0	1	0	0	C
1	1	0	0	C
0	1	0	0	C
0	0	0	1	A
0	1	0	0	C

b)



Figur 3: Tilstandsdiagram

c)

Se kap 6.4 i logikkstyrings-notatet.