Øving 2

Ønsker tilbakemelding :)

Oppg 1

$$f(x,y) = \cos^2 x + \sin x \cos y$$

$$z = f(x,y)$$

a) Planet har form

$$z = z_0 + a(x-x_0) + b(y-y_0)$$

hvor $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

og $y_0 = \frac{\pi}{4}$

Regner ut uttrykkene:

$$z_0 = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$z_0 = 1$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2\cos x_0 \sin x_0 + \cos x_0 \cos y_0$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \sin x_0 \cdot (-\sin y_0)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Planet blir da:

$$z = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

b) $$f(1,2) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 0{,}2854$$

$$f(1,2) = \cos^2(1) + \sin 1 \cdot \cos 2$$

$$\approx -0{,}0582$$

Feilen blir da $|0{,}2854 - (-0{,}0582)|$

$$= 0{,}3436$$

(med 4 signifikante siffer)

oppg 2

$f(x,y) = \sin x \sin y \quad , \quad 0 \leq x,y \leq \pi$

$z = f(x,y)$

Stigningen er gitt av $|\nabla f|$ så de punktene f stiger mest vil være toppunktet til $|\nabla f|$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= (\cos \sin y, \sin x \cos y)$$

$\text{La } g(x,y) := |\nabla f(x,y)| = \sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x \cos 2y)} \quad \text{(fra hintet)}$$

Fra hintet har vi at $\frac{1}{2}(1-\cos 2x \cos 2y)$ er maksimert (på definisjonsområdet) når

$$\cos 2x \cos 2y = -1$$

De punktene $(x\,y)$ som tilfredstiller denne ligningen er de samme punktene hvor f stiger mest. Løse for y slik at $y = y(x)$

$$\cos 2y = -\frac{1}{\cos 2x}$$

$$2y = \arccos\left(\frac{-1}{\cos(2x)}\right)$$

$$= \pi - \arccos\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)$$

$$y = y(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)$$

arccos(x) er kun definert for $-1 \leq x \leq 1$.
Så $\arccos\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)$ vil kun være definert

når $-1 \leq \frac{1}{\cos(2x)} \leq 1$.

På intervallet $[0, \pi]$ skjerdette kun ved $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \pi$.

Det gir y-koordinatene

- $y(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(1) = \frac{\pi}{2}$
- $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
- $y(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(1) = \frac{\pi}{2}$

Vi har da at g er maksimert i punktene
$(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$, $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ og $(x,y) = (\pi, \frac{\pi}{2})$

Som vil si at $|\nabla f(x,y)|$ også maksimert.
Det er faktisk ett punkt som mangler her,
siden $f(x,y) = f(y,x)$ (bytter variablene)
vil alle løsninger (x_0, y_0) komme i par, slik at hvis (x_0, y_0) er én løsning, så vil (y_0, x_0) også være en løsning. Siden $(\pi, \frac{\pi}{2})$ er én løsning må da $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ også være en løsning.

Vi har da at fjellet (f) er brattest i disse fire punktene:

$(0, \pi/2)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi)$ og $(\pi, \pi/2)$

Oppg 3

$$\vec{F}(x,y,z) = (ze^{xz+y})\hat{i} + (e^{xz+y}+2z)\hat{j} + (xe^{xz+y}+2y)\hat{k}$$

a) Tester den nødvendige betingelsen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= ze^{xz+y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= ze^{xz+y} \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial z} &= xe^{xz+y}+2 \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= xe^{xz+y}+2 \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial z} &= z\cdot xe^{xz+y} + xe^{xz+y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= x\cdot ze^{xz+y} + ze^{xz+y} \end{aligned}\right\} \checkmark$$

Den kan da være konservativ så vil prøve å løse $\nabla\varphi(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$.

Må da løse

(1) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1(x,y,z) = ze^{xz+y}$

(2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2(x,y,z) = e^{xz+y}+2z$

(3) $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3(x,y,z) = xe^{xz+y}+2y$

for φ.

Begynner med (2).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{xz+y} + 2z$$

$$\Rightarrow \varphi = e^{xz+y} + 2zy + C_1(x,z)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ze^{xz+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xz+y} + 2zy + C_1(x,z)\right) = ze^{xz+y}$$

$$\Leftrightarrow ze^{xz+y} + \frac{\partial}{\partial x}C_1(x,z) = ze^{xz+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}C_1(x,z) = 0$$

$$\Rightarrow C_1(x,z) = C_2(z)$$

$$\Rightarrow \varphi = e^{xz+y} + 2zy + C_2(z)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{z} = xe^{xz+y} + 2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} e^{xz+y} + 2zy + C_2(z)) = xe^{xz+y} + 2y$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xe^{xz+y}} + \cancel{2y} + \frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = \cancel{xe^{xz+y}} + \cancel{2y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}C_2(z) = 0$$

$$\Rightarrow C_2(z) = C$$

$$\underline{\varphi(x,y,z) = e^{xz+y} + 2zy + C}$$

$\vec{F}$ er per definisjon konservativt siden det finnes en $\varphi(x,y,z)$ slik at $\nabla\varphi = \vec{F}$

b) Siden $\vec{F}$ er konservativt er linje-integralet uavhengig av veivalg.

$$\int_C \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \varphi(\vec{r}(\pi/2)) - \varphi(\vec{r}(0))$$

$$\vec{r}(\pi/2) = \left(\cos\tfrac{\pi}{2},\ \sin\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(0,\ 1,\ \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{r}(0) = (\cos 0,\ \sin 0,\ 0)$$
$$= (1,\ 0,\ 0)$$

$$\varphi(x,y,z) = e^{xz+y} + 2yz \qquad (C=0)$$

$$\varphi(\vec{r}(\tfrac{\pi}{2})) = \varphi(0, 1, \pi/2)$$
$$= e^{0\cdot\frac{\pi}{2}+1} + 2\cdot 1\cdot\tfrac{\pi}{2}$$
$$= e + \pi$$

$$\varphi(\vec{r}(0)) = \varphi(1, 0, 0)$$
$$= e^{1\cdot 0+0} + 2\cdot 0\cdot 0$$
$$= 1$$

$$\int_C \vec{F}\cdot\hat{T}\,ds = \underline{\underline{e+\pi-1}}$$