TTK 4240 – Øving 2

Utlervert dato: 01.09.2016
Veiledningstime: 08.09.2016
Innleveringsfrist: 15.09.2016
Ansvarleg: Atle Rygg (atle.rygg@itk.ntnu.no)

INTRODUKSJON – INDUKTANS OG KAPASITANS

Induktans (spole) og kapasitans (kondensator) er to svært viktige byggeklossar i alle elektriske system. I denne oppgåva skal vi prøve å oppnå grunnleggande forståing for desse komponentane.

Induktans
Ein induktans er ein komponent som vi beskriver med følgande viktige (!) likning:

$v_L = L\frac{di_L}{dt}$, der v_L er spenninga over induktansen og i_L er straumen gjennom den.
Ein nyttig måte å forstå induktans på er at den er svært motvillig til å endre straumen gjennom seg. Viss nokon prøvar å endre straumen gjennom den svarer den med å sette opp (indusere) ei spenning som er proporsjonal med endring i straum. Denne spenninga vil ofte motvirke (bremse) endringa i straum.

Kapasitans

Ein kapasitans, ofte kalt kondensator, er beskriven med følgande viktige likning:

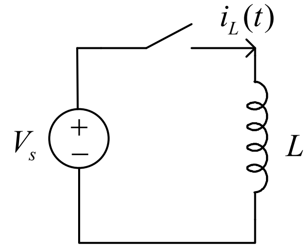
$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$, der v_C er spenninga over kondensatoren og i_C er straumen gjennom den.
Medan induktansen hatar å endre straumen sin, så er kondensatoren svært motvillig til å endre spenninga over seg. Viss nokon prøver å endre spenninga over ein kondensator, så svarer den med å trekke ein straum som er proporsjonal med endring i spenning.

Kretsrekning med induktans og kapasitans

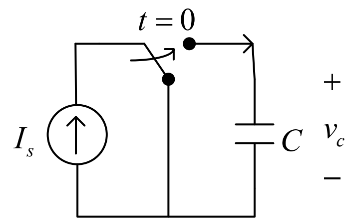
Kretsrekning med L og C blir meir komplisert enn tidlegare pga. differensiallikningane ovanfor. Heldigvis skal vi i TTK4240 få ei stor verktøykasse med hjelpemiddel for dette. Det er hovudsakleg tre rekneteknikkar vi skal bruke:

1. Løyse differensiallikningane på tilsvarande måte som lært i Matte 3. Dette er krunglete og vi skal kun gjere det på svært enkle kretsar.
2. Løyse differensiallikningane ved hjelp av Laplaceanalyse som forhåpentlegvis er fersk kunnskap frå Matte4.
3. Bruke såkalla visarrekning (Phasor analysis) til å rekne på kretsar som opererer i stasjonære forhold med sinusspenningar (typisk 50 Hz). Dette kjem seinare i semesteret

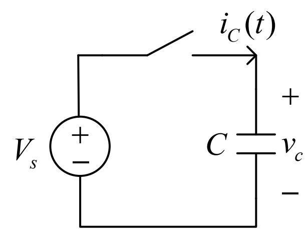
1 INTRODUKSJONSOPPGÅVER PÅ INDUKTANS OG KAPASITANS



a) Kretsen til venstre har konstant spenning $V_s = 1\,V$, verdien til spolen er $L = 1\,H$ (Henry er SI-eininga til induktans). Før *t=0* er straumen i spolen lik null. Ved $t = 0$ lukkar vi brytaren. Still opp differensiallikninga til kretsen for $t \geq 0$, deretter beregn $i_L(t)$. Skisser grafen for $0 < t < 5\,s$.



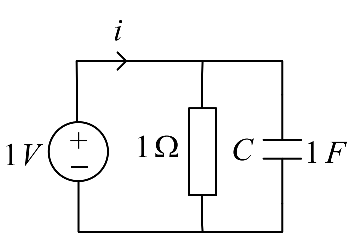
b) Kretsen til venstre har konstant straumkjelde I_s. Før t=0 har kondensatoren ingen spenning over seg . Ved t=0 flippar brytaren over slik at straumen blir tvinga gjennom kondensatoren C. Finn $v_c(t)$ når $I_s = 1\,A$ og $C = 1\,F$ (Farad er SI-eininga til kapasitans). Skisser forløpet for $0 < t < 5\,s$



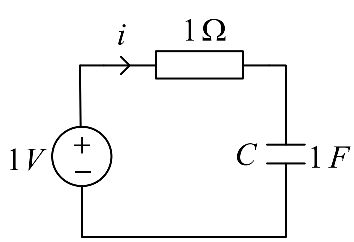
c) No skal vi sjå på ein litt urealistisk krets for å illustrere kor mykje ein kondensator hatar at nokon prøver å forandre spenninga over den. $V_s = 1\,V$, $C = 1\,F$, og vi lukkar brytaren ved $t = 0$. $v_c(t < 0) = 0$. Rekn ut $i_C(t)$. Dette er eit mystisk reknestykke. Vurder kva som ville skjedd i praksis.

Dei følgande oppgåvene gir eksempel på korleis vi enkelt kan finne ut den såkalla stasjonære oppførselen til ein krets med induktans og kapasitans. Viss ein krets har blitt påført konstant spenning/straum over lenger tid, så blir alle ledd som innehelt $\frac{d}{dt}$ lik null. For kretsane e,f,g: Finn den stasjonære verdien til straumen *i* når det er oppgitt at kretsen har stått i denne tilstanden over lang tid.

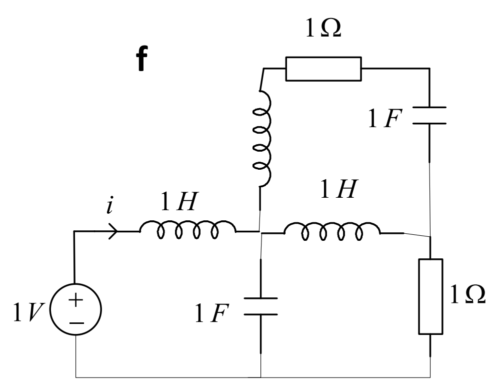
d



e



f

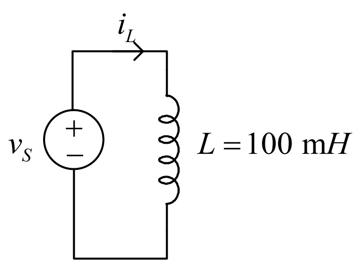


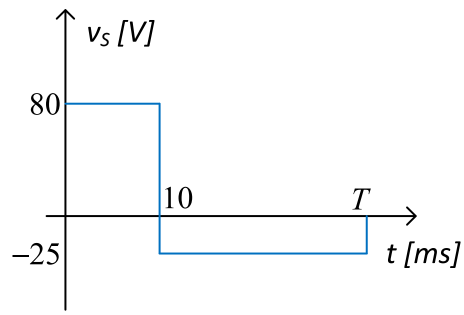
2 STRAUMBEREKNING PÅ INDUKTANS (FRIVILLEG)

(Sidan øvinga er forholdsvis stor, er det ikkje nødvendig å gjere denne oppgåva for å få godkjent)

Ein induktans koblast til ei spenningskjelde som vist i figuren nedanfor. Ved *t=0* er induktansen energilaus, dvs. $i_L(0)=0$. Tid-spenningsforløpet er vist til høgre i figuren. Etter 10 ms. endrar spenninga seg til – 25 V. Tidspunktet *T* i figuren er ukjent.

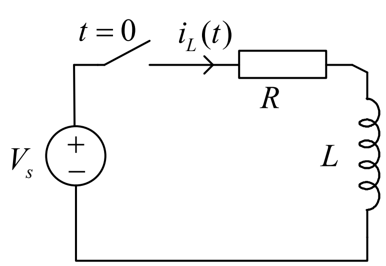
a) Finn $i_L(t)$ for $0 \le t \le 10$ ms. **NB:** Det er ikkje nødvendig med omfattande rekning her.
b) Finn også uttrykket for $i_L(t)$ for $10 \le t \le T$ ms. Finn deretter tidspunktet *T* som er definert slik at induktansen er energilaus ($i_L=0$) når *t=T*
c) Skisser heile forløpet for $i_L(t)$ for $0 \le t \le T$





3 SPRANGRESPONS TIL RL-KRETS

I denne oppgåva skal vi rekne ut sprangresponsen til ein RL-seriekrets, dvs. korleis den oppfører seg når vi endrar spenningspåtrykket med eit sprang. Brytaren lukkast ved *t=0*, og spolestraumen er null før *t=0*, dvs. $i_L(t<0)=0$.



a) Rekn ut stasjonærverdien til straumen i_L , dvs. $i_L(t=\infty)$ uttrykt ved symbol.
b) Vis at differensiallikninga for kretsen for $t \ge 0$ kan skrivast som

$$V_s = R \cdot i_L + L\frac{di_L}{dt}$$

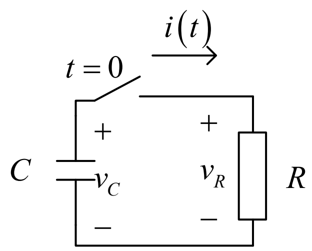
c) Basert på det vi har lært om ein spole, forklar kvifor $i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$, der «+» og «-« betyr rett før og rett etter *t=0*.
d) Løys differensiallikninga, dvs. finn uttrykket for $i_L(t)$. Skisser forløpet for $0<t<1$ sekund med $R=1\,\Omega\,, V_s=1\,V$. Lag skisse både for $L=0.02\,H$ og $L=0.2\,H$ i same koordinatsystem. Kommenter resultatet basert på påstanden om at ein spole hatar endring i straum. Har du fått riktig stasjonærverdi, jfr. svaret i a)?

4 SPRANGRESPONS MED LAPLACETRANSFORMASJON

No skal vi introdusere Laplacetransformasjon i kretsanalysen. Dette kjem også på neste øving.

a) Ta utgangspunkt i likninga for ein spole: $v_L = L\frac{di_L}{dt}$. Vis at den Laplacetransformerte til spolespenninga blir $V_L = sL \cdot I_L - Li_L(0)$. Oppgitt: $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

b) Ta utgangspunkt i differensiallikninga $V_s = R \cdot i_L + L\frac{di_L}{dt}$ frå oppgåve 3, samt at kretsen gjennomgår ein sprangrespons. Bruk Laplacetransformasjon til å finne uttrykket for $i_L(t)$.



c) Vis at den Laplacetransformerte av kondensatorlikninga blir $I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0)$

d) Før t=0 er kondensatoren i figuren til venstre lada opp ein verdi vi kallar v_0, og brytaren er open. Så lukkar vi brytaren ved $t=0$. Finn differensiallikninga til kretsen etter at brytaren er lukka.

e) Rekn ut $i(t)$ ved hjelp av Laplacetransformasjon, og skisser forløpet for $0 < t < 5\ s$ med følgande talverdiar: $R = 1\ k\Omega$, $C = 1\ mF$, $v_0 = 10\ V$

Oppgitte Laplacetransformasjons-par (blir alltid oppgitt på eksamen): $L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, $L\{e^{as}\} = \frac{1}{s-a}$

5 TIDSKONSTANT FOR RL OG RC-KRETSAR

Eit nyttig begrep når vi arbeider med kretsar og filter er *tidskonstanten*. Tidskonstanten til ein krets er definert som: *Ein krets påførast ei sprangendring i straum eller spenning. Tidskonstanten* τ *(tau) er definert som tidsrommet før spenning eller straum har nådd 63.2 % av sluttverdien*

Det mystiske talet 63.2 % er meir nøyaktig definert som $1-\frac{1}{e}$, der *e* er Eulers tal 2.718. Vi kan også formulere dette uttrykt ved startverdien y_{start} og sluttverdien y_{slutt} som: $\frac{y(\tau) - y_{start}}{y_{slutt} - y_{start}} = \left(1-\frac{1}{e}\right)$

der τ er tidskonstanten.

<u>Eksempel</u>: I ein RC-krets er kondensatoren lada opp til 2 volt før kretsen blir påført eit sprang. Sluttverdien er 10 volt. Tidskonstanten er dermed definert der spenninga er $2 + (10-2)\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right) = 7.06$.

a) Basert på svaret i 4b): Vis at tidskonstanten til ein RL-krets er lik $\tau = \frac{L}{R}$

b) Basert på svaret i 4e): Vis at tidskonstanten til ein RC-krets er lik $\tau = RC$

c) Ein ukjent krets har spenning 5 V ved $t=0$, og blir deretter påført eit sprang. Sluttverdien er 20 V og tidskonstanten er 3 sekund. Skisser korleis dette forløpet kan sjå ut.

HINT OG TALSVAR

1) Introduksjonsoppgåver på induktans/kapasitans

a. Still opp likninga for ein spole og multipliser med dt på begge sider. Deretter går det an å integrere frå 0 til *t.*

b. $v_C(t) = \frac{I_S}{C} t$. Løysast på liknande måte som a).

c. Skal løysast på same måte som b), men det er vanskeleg å handtere sprang i kondensatorspenning. Bruk kondensatorlikninga frå side 1. Tips er å sjå på impuls-funksjonen (Dirac-delta) frå Matte 4. Det er ikkje nødvendig å finne uttrykket viss du står fast, prøv heller å beskrive responsen med ord.

d. Hint til d)e)f): Sjå på spole- og kondensatorlikning korleis dei vil oppføre seg når deriverte blir lik null. Dei skal ha «motsatt» type oppførsel. Ingen av desse oppgåvene krev noko særleg rekning. Svar på f) er 1 Ampere.

2) Straumberekning på induktans

a) $i(t) = 800t$. Løysast på liknande måte som 1a).

b) $i(t) = -250(t - 0.01) + 8 \text{ A}$, *T=42 ms.* Samme fremgangsmåte som i a), men hugs initialbetingelsane. *T* kan også finnes gjennom ei arealbetraktning.

c) Bruk linjal og teikn ein fin graf ☺

3) Sprangrespons til RL-krets

a. Den stasjonære verdien skal bli lik $\frac{V_s}{R}$. Sjå tips til korleis vi finn stasjonære verdiar i oppgåve 1.

b. Still opp Kirchoffs spenningslov, ver som alltid obs. på forteikn når du bruker denne.

c. Dette kan argumenterast for basert på spolelikninga frå første side i øvingsteksten.

d. $i_L(t) = \frac{V_s}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Diff.likninga kan løysast på fleire måtar. Unngå bruk av Laplace sidan dette kjem i oppgåve 4. Ein måte er å finne homogen og partikulær løysing og å legge desse saman. Lag ein fin graf. Undersøk i kva slags tilfelle spolen bremsar straumendringa mest.

4) Sprangrespons med Laplacetransformasjon

a. Kombiner spolelikninga med formelen for Laplacetransformasjon av ein derivert

b. Svaret skal bli likt som i 3d). Start med å finne den Laplacetransformerte til kjeldespenninga V_s, dette kan representerast ved hjelp av sprangfunksjonen $u(t)$ sidan vi lukkar ein brytar. Deretter kan heile diff.likninga Laplacetransformerast. Løys denne for Laplacetransformert straum $I_L(s)$, og transformer tilbake til tidsplanet. Muligens må du foreta ei delbrøksoppspalting på vegen.

c. Løysast på same måte som 4a)

d. Still opp Kirchoffs spenningslov, eventuelt strømlov.

e. $v_c(t) = v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Transformer uttrykket frå d), løys for spenninga, og invers-transformer.

5) Tidskonstant for RL og RC-kretsar

a. Her er det tidspunktet $t = \tau$ som blir den ukjente i likninga(ne).

b. Same som a)

c. Du kan anta at responsen vil ha formen til ein eksponentialfunksjon. Tidskonstanten bestemmer kor «bratt» den skal vere.