NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 73 59 26 78/930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Mandag 10. desember 2012
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- Oppgave 1 omhandler analyse av filtre.
- Oppgave 2 omhandler rasjonale prosessmodeller.
- Oppgave 3 omhandler fast komma realisering.
- Oppgave 4 omhandler flerhastighetssystemer.
- En del formler er oppgitt i appendiks
- Vekting av hver deloppgave er angitt i parentes. Totalt antall poeng er 70.
- Alle svar skal begrunnes!
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og andre gang ca. 11.45.

Oppgave 1 (3+3+5+4 = 15 poeng)

1a) Transferfunksjon $H(z)$ til et stabilt, kausalt LTI-filter er beskrevet ved følgende :

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0(z)H_1(z)H_2(z) \qquad \text{hvor} \qquad (1) \\ H_0(z) &= 1 + \frac{5}{3}z^{-1} \\ H_1(z) &= \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\ H_2(z) &= \frac{1}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})} \end{aligned}$$

Vis at differenseligningen til filteret er gitt ved:

$$y(n) - \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) = x(n) + \frac{5}{3}x(n-1), \ n = -\infty, \infty \qquad (2)$$

Svar:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{5}{3}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})} = \frac{1+\frac{5}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}} \quad \Rightarrow$$

$$Y(z) - \frac{1}{6}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{3}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{5}{3}X(z)z^{-1}$$

Lign 2 fremkommer direkte ved invers Z-transform.

1b) Gi et *begrunnet* svar på følgende :

- Hva blir konvergensområdet til filteret i oppgave 1a?
- Har filteret lineær fase?
- Har filteret minimum fase?

Svar:

- $\max[|p_1|, |p_2|] = max[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$ ROC : $|z| > \frac{2}{3}$
- Filteret har ikke lineær fase da det har poler.
- Minimum fase krever at både poler og nullpunkter ligger innenfor enhetssirkelen. Vi har her et nullpunkt i $|z| = |-\frac{5}{3}| > 1$. Altså har filteret ikke minimum fase.

1c) Vis at enhetspulsresponsen til filteret er gitt ved :

$$
\begin{aligned}
h(n) &= -h_1(n) + 2h_2(n) \quad \text{hvor} \\
h_1(n) &= \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\
h_2(n) &= \begin{cases} (\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Svar :

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \quad \Rightarrow \\
H(z) &= \frac{A + B - (\frac{2A}{3} - \frac{B}{2})z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{2}{3}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
(\frac{2A}{3} - \frac{B}{2})z^{-1} &= -\frac{5}{3}z^{-1} \quad \Rightarrow \quad 4A - 3B = -10 \\
4(1 - B) - 3B &= 4 - 7B = -10 \Rightarrow B = 14/7 = 2 \quad \text{og} \quad A = 1 - B = -1
\end{aligned}
$$

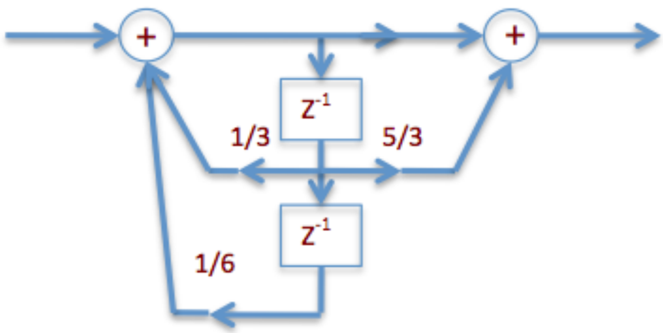
Dermed har en :

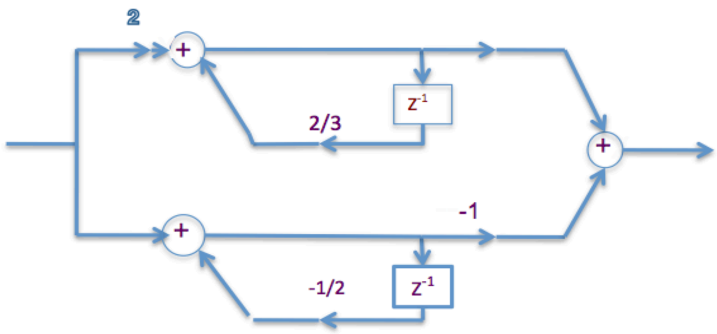
$$
\begin{aligned}
H(z) &= -H_1(z) + 2H_2(z) = -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \quad \Rightarrow \\
h(n) &= -h_1(n) + 2h_2(n) = \begin{cases} -(-\frac{1}{2})^n + 2(\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1d) Skisser følgende strukturer for filteret $H(z)$:

- Direkte form 2 (DF2)
- Parallellstruktur hvor grenforsterkningen $G_2 = 2$ er plassert *før* tilbakekoblingen.

Svar :





Parallel

Oppgave 2 **(4+8+3+4 = 16 poeng)**

2a) Krysskorrelasjonssekvensen til to sekvenser $y(n)$ og $x(n)$ med endelig energi er gitt ved

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+m)x(n) \quad m \geq 0 \\ r_{yx}(m) &= r_{xy}(-m) \qquad\qquad m < 0 \end{aligned}$$

Vis at krysskorrelasjonssekvensen til $h_1(n)$ og $h_2(n)$ i deloppgave 1c er gitt ved

$$r_{h_1h_2}(m) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^m & m \geq 0 \\ \\ \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m & m < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Svar :

$$\begin{aligned} r_{h_1h_2}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n+m)h_2(n) \qquad m \geq 0 \\ r_{h_1h_2}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{n+m}(\frac{2}{3})^n \qquad m \geq 0 \\ r_{h_1h_2}(m) &= (-\frac{1}{2})^m \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n \quad m \geq 0 \\ r_{h_1h_2}(m) &= (-\frac{1}{2})^m \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^m \end{aligned}$$

Tilsvarende utregning for $r_{h_2h_1}(m)$ gir :

$$\begin{aligned} r_{h_2h_1}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n+m}(-\frac{1}{2})^n \qquad m \geq 0 \\ x &= y \\ r_{h_2h_1}(m) &= (\frac{2}{3})^m \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^m \end{aligned}$$

Da $r_{h_1h_2}(m) = r_{h_2h_1}(-m)$ for $m < 0$ er ligning 3 bevist!

2b) Vis at enhetspulsene $h_1(n), h_2(n)$ og $h(n)$ gitt i oppgave 1 har følgende autokorrelasjonssekvenser for $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}
r_{h_1h_1}(m) &= \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m \\
r_{h_2h_2}(m) &= \frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m \\
r_{hh}(m) &= -\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^m + \frac{57}{10}(\frac{2}{3})^m
\end{aligned}$$

I tillegg gjelder at alle tre autokorrelasjonssekvenser er symmetriske om $m = 0$.

Svar :

De to autokorrelasjonssekvensene for hhv $h_1(n)$ og $h_2(n)$ blir

$$\begin{aligned}
r_{h_1h_1}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{n+m}(-\frac{1}{2})^n \qquad m \geq 0 \\
r_{h_1h_1}(m) &= (-\frac{1}{2})^m \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n \qquad m \geq 0 \\
r_{h_1h_1}(m) &= (-\frac{1}{2})^m \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m \qquad m \geq 0 \\
r_{h_2h_2}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n+m}(\frac{2}{3})^n \qquad m \geq 0 \\
r_{h_2h_2}(m) &= (\frac{2}{3})^m \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^n \qquad m \geq 0 \\
r_{h_2h_2}(m) &= (\frac{2}{3})^m \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m \qquad m \geq 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Setter en $h(n) = -h_1(n) + 2h_2(n)$ inn i

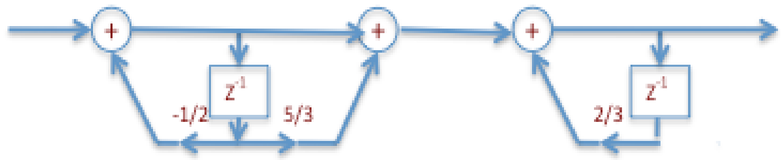
$$\begin{aligned}
r_{hh}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n+m)h(n) \qquad \text{får en} \\
r_{hh}(m) &= r_{h_1h_1}(m) - 2r_{h_1h_2}(m) - 2r_{h_2h_1}(m) + 4r_{h_2h_2}(m)
\end{aligned}$$

Fra deloppgave 2a henter vi uttrykkene for krysskorrelasjonene og samler to og to ledd med samme eksponent

$$
\begin{aligned}
(\frac{4}{3} - 2\frac{3}{4})(-\frac{1}{2})^m &= \frac{(8-9)}{6}(-\frac{1}{2})^m = -\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^m \\
(4\frac{9}{5} - 2\frac{3}{4})(\frac{2}{3})^m &= \frac{(144-30)}{20}(\frac{2}{3})^m = \frac{57}{10}(\frac{2}{3})^m
\end{aligned}
$$

Som tilsvarer de to leddene i oppgitt uttrykk for $r_{hh}(m)$..

Figur 1 viser en valgt kaskadestruktur for $H(z)$



Figur 1: *Valgt kaskadestruktur*

2c) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes kaskadestrukturen i figur 1.

Hvilke parametriske prosess-typer tilsvarer henholdsvis utgangssignalet og de interne signalene i strukturen? Begrunn svaret!

Svar :
Vi har to interne signaler i kaskadestrukturen, nemlig utgangene av de to første summasjonsjonsnodene. Forsinkelser endrer ikke de statistiske egenskapene til signaler. Den første summasjonsnoden har transferfunksjonen $H_1(z)$. Filteret er av første ordens allpoltype (en pol), noe som tilsier at en her har en AR[1]-prosess. Den andre summasjonsnoden har transferfunksjonen $H_0(z)H_1(z)$, noe som tilsier en ARMA[1,1]-prosess. Utgangen av filteret er selvsagt gitt av hele transferfunksjonen $H(z)$. Fra oppg 1a ser en at filteret har et nullpunkt og to poler, ergo er utgangssignalet en ARMA[1,2]-prosess.

2d) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes filteret $H(z)$. Finn, ved hjelp av lineær prediksjon (dvs. Yule-Walker eller Normal ligningene) filterkoeffisienten a_1 for den beste AR[1]-modellen til filterets utgangssignal $y(n)$.

Vis at prediksjonsfeileffekten σ_f^2 alltid oppfyller : $\sigma_f^2 \leq \sigma_y^2$
hvor $\sigma_y^2 = \gamma_{yy}(0)$ er signaleffekten til inngangssignalet.

Svar :

For hhv tidslag $m = 1$ og prediksjonsfeileffekten $(m = 0)$ får en :

$$\begin{aligned} a_1\gamma_{yy}(0) &= -\gamma_{yy}(1) && m = 1 \\ \sigma_f^2 &= \gamma_{yy}(0) + a_1\gamma_{yy}(1) && m = 0 \end{aligned}$$

Vi har at $\gamma_{yy}(m) = \sigma_w^2 r_{hh}(m)$, dvs med $\sigma_w^2 = 1$ får vi

$$\begin{aligned} \gamma_{yy}(0) &= -\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^0 + \frac{57}{10}(\frac{2}{3})^0 = -\frac{1}{6} + \frac{57}{10} = \frac{57*6-10}{60} = \frac{332}{60} \\ \gamma_{yy}(1) &= -\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^1 + \frac{57}{10}(\frac{2}{3})^1 = \frac{1}{12} + \frac{19}{5} = \frac{19*12+5}{60} = \frac{233}{60} \end{aligned}$$

Dvs $a_1 = -\gamma_{yy}(1)/\gamma_{yy}(0) = -233/332 \approx -0.7$

Videre kan vi omskrive prediksjonsfeileffekten : $\sigma_f^2 = \gamma_{yy}(0)(1 + a_1\gamma_{yy}(1)/\gamma_{yy}(0))$. Brøken i siste ledd tilsvarer filterkoeffisienten, ergo har vi $\sigma_f^2 = \gamma_{yy}(0)(1 - a_1^2)$. For alle stabile filtre (dvs. $|a_1| < 1$) vil $\sigma_f^2 \leq \gamma_{yy}(0)$. Forholdet $\gamma_{yy}(0)/\sigma_f^2 = 1/(1 - a_1^2) \approx 1/(1 - (0.7)^2) \approx 2$ kalles derfor prediksjonsgevinsten.

Oppgave 3 (4+4+7+4 = 19 poeng)

Det diskrete filteret i oppgave 1 skal realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1,1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen, $e(n)$, kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med totaleffekt σ_z^2.

3a) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av kaskadestrukturen i figur 1 uttrykt ved σ_e^2.

Svar :
I kaskadestrukturen har vi tre multiplikasjoner/avrundinger og dermed tre hvitstøykilder. Kildene ved hhv 5/3 og 2/3 kan begge flyttes til foran siste summasjonsnode. Den tilsvarende enhetspulsresponsen er derfor $h_2(n)$ for begge kildene. Kilden ved $-1/2$ kan flyttes til foran første summasjonsnode og ser derfor enhetspulsresponsen $h(n)$.
Vi får da : $\sigma_z^2 = (r_{hh}(0) + 2 * r_{h_2h_2}(0))\sigma_e^2 =$
$(332/60 + 2 * 9/5)\sigma_e^2 = ((332 + 216)/60)\sigma_e^2 = (548/60)\sigma_e^2 \approx 9\sigma_e^2$

3b) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av parallell-strukturen i oppgave 1d. Merk at minustegnet foran $h_1(n)$ i ligning 2 blir gjort aritmetisk (negasjon) og ikke ved multiplikasjon!
Svar :
Vi skal altså droppe en kilde ved forsterkningen på $G_1 = -1$. Kildene ved hhv 2 og 2/3 tilhører gren nr. 2. Begge kan flyttes til foran den tilhørende summasjonsnoden og ser derfor $h_2(n)$. Støykilden tilsvarende $-1/2$ kan tilsvarende flyttes foran sin summasjonsnode og ser dermed $h_1(n)$
Vi får da : $\sigma_z^2 = (2 * r_{h_2h_2}(0) + r_{h_1h_1}(0))\sigma_e^2 = (2 * 9/5 + 4/3)\sigma_e^2 = ((54 + 20)15)\sigma_e^2 =$
$(74/15)\sigma_e^2 \approx 5\sigma_e^2$
Altså lønner det seg å bruke parallellkoblingen hvis en kun ser på avrundingsstøyen.

Inngangssignalet $x(n)$ til filteret har full utstyring, dvs. $x_{max} = \max_n |x(n)| = 1$.

3c) Vis at en for å unngå overstyring i kaskadestrukturen brukt i deloppgave 3a må skalere på inngangen med 3/16 (nedskalering med 16/3)

Vis videre at man for den andre parallellstrukturen (deloppgave 3b) må skalere på inngangen med $S = 1/6$ (dvs. nedskalering med 6).

Svar :

Kaskadestrukturen har to interne summasjonsnoder og en ved utgangen. Strukturen i deloppgave 3a er lik figur 1. For den første summasjonsnoden er enhetspulsresponsen fra inngang $h_1(n)$. For den andre summasjonsnoden har en $h_3(n) = h_0(n) * h_1(n) = (-1/2)^n u(n) + 5/3(-1/2)^n u(n-1)$. Den tredje summasjonsnoden tilsvarer utgangen og ser derfor selvsagt $h(n)$. Merk forøvrig at $h(n) \geq 0$ alle n.
Dette gir :

$$
\begin{aligned}
\sum_n |h(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}(2(\frac{2}{3})^n - (-\frac{1}{2})^n) = 2\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2*3 - 2/3 = 16/3 \\
\sum_n |h_1(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \\
h_3(n) &= (-\frac{1}{2})^n u(n) + \frac{5}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1) \quad \Rightarrow \\
h_3(0) &= 1 \\
h_3(n) &= (-\frac{1}{2})^n + \frac{5}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} \quad n > 0 \quad \Rightarrow \\
h_3(n) &= (-\frac{1}{2})^n - \frac{10}{3}(-\frac{1}{2})^n = -\frac{7}{3}(-\frac{1}{2})^n \quad n > 0 \quad \Rightarrow \\
\sum_n |h_3(n)| &= 1 + \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{7}{3} + \frac{7}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \quad \Rightarrow \\
\sum_n |h_3(n)| &= -\frac{4}{3} + \frac{7}{3}(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = -\frac{4}{3} + 2\frac{7}{3} = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

En har at $16/3 > 10/3 > 2$ ergo må en velge skalering med 3/16.

I parallellstrukturen har en også to interne noder (en i hver gren) og en utgangsnode. Utgangsnoden og nedre gren $h_1(n)$ er regnet ut i forbindelse med kaskadestrukturen. Da gjenstår øvre gren med enhetspulsrespons fra inngang lik $2h_2(n)$.

$$
\sum_n |2h_2(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}(2(\frac{2}{3})^n = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 3*2 = 6. \tag{5}
$$

En har at $6 > 7/3 > 2$ ergo må en velge skalering med 1/6.

3d) Hvilken av de to *nedskalerte* strukturene har best signal-støy forhold på utgangen ($SNR = \sigma_y^2/\sigma_z^2$) ?

Svar :

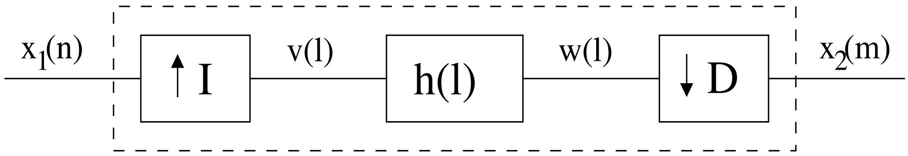
Vi kaller signaleffekten på utgangen uten nedskalering for σ_y^2. Etter nedskalering får en da signaleffekter $S^2\sigma_y^2$ på utgangen, mens støy effekten på utgang er uendret (da avrunding kommer etter skalering). Ergo er SNR for de nedskalerte strukturene gitt ved $S^2\sigma_y^2/\sigma_z^2$. Da σ_y^2 er lik for de to strukturene kan en bruke forholdet S^2/σ_z^2 som indikator. Ergo får en for de to strukturene :

$$
\begin{aligned}
SNR_{kask} &\approx (\frac{3}{16})^2/(9\sigma_e^2) = \frac{9}{256}\frac{1}{\sigma_e^2} \\
SNR_{par} &\approx (\frac{1}{6})^2/(5\sigma_e^2) \approx \frac{1}{180}\frac{1}{\sigma_e^2}
\end{aligned}
$$

En ser altså at nedskalering gjør at parallellstrukturen ikke lenger er den beste mhp støyeffekt.

Oppgave 4 (5+4+4+5 = 18 poeng)

Figur 2 viser et system for endring av punktprøvehastighet fra F_1 til F_2 hvor I og D er heltall.



Figur 2: *System for punktprøveendring*

4a) Forklar de tre blokkene samt angi båndbredde og samplingsrate til de interne signalene $v(l)$ og $w(l)$

Svar :

Den første blokken setter inn $I-1$ nullverdier mellom hver punktprøve. Dette vil øke samplingsraten til $F_v = IF_1$ samt repetere spekteret $I-1$ ganger fra $F_1/2$ til $F_v/2 = IF_1/2$. Det (ideelle) LP-filteret $h(l)$ opererer på hastigheten F_v og har knekk-frekvens $F_g = F_v/max[D, I]$. Dette tilsvarer halve samplingsfrekvensen for den laveste av F_1 og F_2. Den siste blokken bruker kun hver D'te punktprøve, noe som tilsvarer å redusere samplingsraten til $F_2 = F_v/D = F_1 * (I/D)$.

4b) Utled et uttrykk i tidsplanet for utgangssignalet $x_2(m)$ uttrykt ved inngangssignalet $x_1(n)$, filteret $h(l)$ samt I og D.

Svar :

Sammenheng mellom $w(l)$ og $v(l)$ er gitt ved ren foldning, dvs. $w(l) = \sum_k v(k)h(l-k)$. Nå er $x_2(m) = w(mD) = \sum_k v(k)h(mD-k)$. Men kun hver I'te verdi av $v(k)$ er ulik null dvs. $v(kI) = x_1(k)$ for $k = -\infty, \ldots, \infty$.
Da ender en opp med $x_2(m) = \sum_k x_1(k)h(mD - kI)$

4c) Diskuter funksjonsmåten til systemet når $I > D$ og motsatt.

Svar :

Når $I > D$ går en opp i samplingsfrekvens. Da mister en ingen informasjon men frekvensområdet over $F_1/2$, dvs. $[F_1/2, F_2/2]$ er uten innhold. Filterets knekkfrekvens er gitt ved $F_g = F_1/2$.
Når $I < D$ går en netto ned i samplingsfrekvens. Filteret må da fjerne innholdet i frekvensområdet over $F_2/2$, dvs. $[F_2/2, F_1/2]$ for å unngå aliasing. Filterets knekkfrekvens må da være $f_g = F_2/2$.

4d) Gitt et analogt signal $x(t) = s(t)+sin(2\pi F_0 t)$ hvor $s(t)$ har båndbredde $\pm B = 5000Hz$ og $F_0 = 4000Hz$. Signalet punktprøves med samplingsrate $F_1 = 10000Hz$, dvs. $x_1(n) = x_a(nT_1)$ hvor $T_1 = 1/F_1$.
En har videre gitt et notch-filter med nullpunkt i $f_n = 0.25$.

Hvordan kan en bruke systemet i figur 2 sammen med notch-filteret til å fjerne den harmoniske komponenten (F_0) i $x_1(n)$?

Svar :

I den opprinnelige samplingsraten er den harmoniske komponenten plassert på $f_{01} = F_0/F_1 = 4000/10000 = 0.4$. Dette er en annen normalisert frekvens enn nullpunktet $f_n = 0.25$ til notch-filteret. En må derefor endre samplingsraten slik at $f_{02} = F_0/F_2 = f_n$, dvs. $F_2 = F_0/f_n = 4000/0.25 = 16000$ Dette tilsvarer en punktprøve endring på $16000/10000 = 8/5$. Dette realiserer en med først å bruke systemet i figur 2 med $I = 8$ og $D = 5$ og deretter bruke notchfilteret.

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\ Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \text{ for } k = 0, \ldots, N-1 \text{ where we write } Y(k) = Y(f_k) \end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h(n) z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf} \\ \text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, ..., N-1 \\ \text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, ..., L-1 \end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{6}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\; x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\; x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\; x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_{m} \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $$\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

Normal equations: $$\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$