Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt / *contact person*:

Navn: Tor Arne Johansen
Tlf.: 917 22 765

Eksamen - TTK 4115 Lineær systemteori
Exam - TTK 4115 Linear system theory

10. desember 2008, 09:00 – 13:00

Hjelpemidler: D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Supporting materials: D - No printed or handwritten material allowed. Specific, simple calculator allowed.

Oppgave 1 (15 %)

Anta gitt følgende system:
Consider the following system:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

NB! Det er ikke nødvendig med eksakte svar i denne oppgaven, så bruk gjerne kalkulator.
NB! Exact numbers are not required in this part, so feel free to use a calculator.

a)
Transformer systemet til diagonal form ved hjelp av en similaritetstransformasjon.
Transform this system into diagonal form using a similarity transform.

b)
Beregn transisjonsmatrisen $\Phi(t)$ til det opprinnelige systemet.
Compute the transition matrix $\Phi(t)$ of the original system.

Oppgave 2 (20 %)

Anta gitt følgende transferfunksjonsmatrise:
Consider the following transfer function matrix:

$$G(s) = \left(\frac{-5}{s+1}, \frac{s^2-5s+6}{s^2+s} \right)$$

a)
Forklar hvorfor $G(s)$ er realiserbar.
Explain why $G(s)$ is realizable.

b)
Finn en tilstandsromrealisasjon av $G(s)$ i styrbar kanonisk form.
Find a state space realization of $G(s)$ in controllable canonical form.

En annen realisasjon av $G(s)$ er gitt av følgende matriser:
Another realization of $G(s)$ is given by the following matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = (-5, -3, 3), \ D = (0, 1)$$

c)
Undersøk om realisasjonen (A, B, C, D) er både styrbar og observerbar.
Investigate if the realization (A, B, C, D) is both controllable and observable.

d)
Is (A, B, C, D) en minimal realisasjon? Begrunn.
Is (A, B, C, D) a minimal realization? Explain.

Oppgave 3 (20 %)

a)
Definer BIBO-stabilitet, Lyapunov-stabilitet (intern stabilitet), og asymptotisk stabilitet for lineære systemer.
Define BIBO stability, Lyapunov stability (internal stability), and asymptotic stability for linear systems.

b)
Angi betingelser på A-matrisen som kan brukes for å undersøke Lyapunov-stabilitet og/eller asymptotisk stabilitet.
Give conditions on the A matrix that can be used to check Lyapunov-stabilitet and/or asymptotic stability.

c)
Undersøk om følgende system er Lyapunov-stabilt og/eller asymptotisk stabilt:
Investigate if the following system is Lyapunov stable and/or asymptotically stable:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
Bruk Lyapunov-ligningen $A^T M + MA = -I$ for systemet definert av matrisen A nedenfor, og konkluder hvorvidt dette systemet er asymptotisk stabilt eller ikke.
Use the Lyapunov equation $A^T M + MA = -I$ for the system defined by the matrix A below, and conclude if this system is asymptotically stable or not.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 (10 %)

a)
Gitt et kontinuerlig tid MIMO system beskrevet av matrisene (A, B) der vi ønsker å regulere tilstanden x til en gitt referanse likevektstilstand x^*. Forklar kort prinsippet for LQR (Linear Quadratic Regulator) metoden og de viktigste

stegene som er nødvendig for å designe en slik regulator, inkludert betydningen og virkningen av de tilgjengelige tuning-parametrene (vektmatrisene i LQR kriteriet).
Consider a continuous-time MIMO system described by the matrices (A, B) *where we want to control the state* x *to a given reference equilibrium state* x^*. *Explain briefly the principles of the LQR (Linear Quadratic Regulator) method and the main steps required to design such a controller, including the meaning and effect of the available tuning parameters (weight matrices in the LQR criterion).*

Oppgave 5 (35 %)

a)
Beskriv de karakteristiske egenskapene til den normalfordelte/Gaussiske hvitstøy-proesessen, inkludert dens varians, autokorrelasjonsfuksjon, effektspektrum, stasjonæritet, og andre relevante egenskaper.
Describe the characteristics and properties of the normal/Guassian distributed white noise process, including its variance, auto-correlation function, power spectral density, stationarity, and other relevant properties.

b)
Beskriv de karakteristiske egenskapene til Wienerprosessen, og hvordan den er relatert til hvitstøyprosessen.
Explain the characteristics and properties of the Wiener process, and how it relates to the white noise process.

Et dynamisk system har følgende transferfunksjon fra inngang til utgang:
A dynamic system has the following transfer function from input to output:

$$G(s) = \frac{10}{2+s}$$

I tillegg til regulatorkommandoen, er det en ukjent saktevarierende forstyrrelse som virker på inngangen til systemet som vi velger å modellere som en Wiener-prosess med null middelverdi. På målingen av utgangen er det elektrisk støy som vi velger å modellere som hvit støy. Målingen er antatt å være uten bias eller drift.

In addition to the control command input, there is an unknown slowly time-varying input disturbance which we choose to model as a Wiener process with *zero mean. The measurement of the output is corrupted by eletric noise, which we choose to model as white noise. The measurement is assumed to be without any bias or drift.*

c)

Forklar med blokk diagram og tekst hvordan man kan komme frem til følgende tilstandsromsmodell av systemet beskrevet ovenfor:

Explain with a block diagram and text how you can derive the following state space model of the system described above:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 10(u + x_2) \\ \dot{x}_2 &= \beta w_1 \\ y &= x_1 + \gamma w_2 \end{aligned}$$

der w_1 og w_2 er enhets hvit-støy ($S_{w_1}(\omega) = S_{w_2}(\omega) = 1$ for alle ω), og symbolene er gitt ved:

where w_1 and w_2 are unity white noise ($S_{w_1}(\omega) = S_{w_2}(\omega) = 1$ for all ω) and the symbols are:

x_1	Tilstand i realiseringen av $G(s)$	*State in the realization of $G(d)$*
x_2	Tilstand i Wiener prosessen	*State of the Wiener process*
u	Regulatorkommando/inngang	*Control command/input*
w_1	Inngang til Wiener prosessen	*Input to Wiener process*
w_2	Målestøy	*Measurement noise*
y	Måling av utgangen	*Output measurement*

d)

Forklar hvordan parametrene β og γ i denne modellen er relatert til målestøyen sin varians og den forventede variasjonsraten til forstyrrelsen på inngangen.

Explain how the parameters β and γ in this model are related to the measurement noise variance and expected rate of variation of the input disturbance.

e)

Forklar med tekst, blokkdiagram, flyt-skjema, og/eller ligninger hvordan du vil bruke et diskret-tid Kalman-filter for å estimere forstyrrelsen på inngangen (x_2). Du trenger ikke utlede de spesifikke uttrykkene eller ligningene for Kalman-filteret, men det forventes at du beskriver de viktigste stegene som er nødvendig for å designe og implementere Kalman-filteret i diskret tid.

Explain with text, a block diagram, flow-chart and/or equations how you would use a discrete-time Kalman-filter to estimate the input disturbance (x_2). You do not need to derive the specific expressions or equations for the Kalman filter, but you are expected to describe the major steps required for the design and implementation of the discrete-time Kalman-filter.

f)

Forklar kort mulige uønskede effekter av numerisk avrundingsfeil i implementasjonen av Kalman-filteret i diskret tid, og hvordan de kan reduseres eller unngås.

Discuss briefly the possible undesired effects of numerical round-off errors in the implementation of the discrete-time Kalman-filter, and how they can be reduced or avoided.

Vedlegg til eksamen (noen nyttige formler og uttrykk):
Appendix to the exam (some useful formulas and expressions):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
x(k) &= A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}Bu(m) \\
A^{-1} &= \frac{adj(A)}{det(A)} \\
det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\
adj(A) &= \{c_{ij}\}^T \\
c_{ij} &= (-1)^{i+j}det(A_{ij}) \quad \text{(kofaktor)},\ A_{ij} = \text{submatrix to } A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= (B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B) \\
\mathcal{O} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \\
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\
G(z) &= C(zI-A)^{-1}B + D \\
\mathbf{G(s)} &= \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{G_{sp}(s)} \\
d(s) &= s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r \\
\mathbf{G_{sp}}(s) &= \frac{1}{d(s)}[\mathbf{N_1}s^{r-1} + \mathbf{N_2}s^{r-2} + \cdots + \mathbf{N_{r-1}}s + \mathbf{N_r}] \\
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1\mathbf{I_p} & -\alpha_2\mathbf{I_p} & \cdots & -\alpha_{r-1}\mathbf{I_p} & -\alpha_r\mathbf{I_p} \\ \mathbf{I_p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_p} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I_p} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{I_p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= [\ \mathbf{N_1}\quad \mathbf{N_2}\quad \cdots\quad \mathbf{N_{r-1}}\quad \mathbf{N_r}\ ]\mathbf{x} + \mathbf{G}(\infty)\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Discrete-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
\mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] &= 0, \forall i, k \\
\mathbf{P}_k^- &= E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \\
\mathbf{P}_k &= E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{Q}_k
\end{aligned}
$$

Continuous-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\
\mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] &= \mathbf{Q}\delta(t-\tau) \\
E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= \mathbf{R}\delta(t-\tau) \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= 0 \\
\mathbf{K} &= \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} \\
\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0
\end{aligned}
$$

Auto-correlation:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \text{ (Stationary process)} \\
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \text{ (Non-stationary process)} \\
Y(s) &= G(s)U(s) \Rightarrow \\
R_y(t_1, t_2) &= E[y(t_1)y(t_2)] \\
&= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} g(\xi)g(\eta)E\left[u(t_1-\xi)u(t_2-\eta)\right] d\xi d\eta \text{ (Transient analysis)}
\end{aligned}
$$

Laplace transform pairs:

$f(t)$	$\Longleftrightarrow$	$F(s)$
1	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{s}$
e^{-at}	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{s+a}$
t	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{2}{s^3}$
te^{-at}	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$