NTNU
Institutt for teknisk kybernetikk

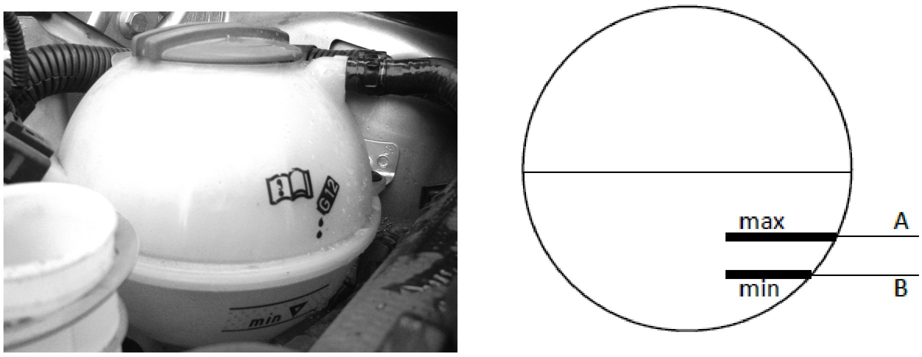
LØSNINGSFORSLAG Avsluttende Eksamen TTK4100 Kybernetikk Introduksjon

Tirsdag 1.juni 2010

Tid: 09:00 - 13:00

Kontaktperson:	Professor Tommy Gravdahl Tlf.: (735)94393 eller 90144212
Hjelpemidler:	D-ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt. NTNU typegodkjent kalkulator med tomt minne er tillatt.
Språk:	Norsk (Bokmål)
Antall sider:	8

Da tidligere vurdering i faget teller 30% av den endelige karakteren i faget, teller denne eksamen 70%.



(a) Bilde av tanken (b) Skisse med signaler

Figur 1: Den kuleformede tanken i Oppgave 1

Oppgave 1. (11%)

En ekspansjonstank som også viser nivået for kjølevæske i en bilmotor er vist i Figur 1. Det vil være skadelig for motoren både om nivået er for lavt og om det er for høyt. I tanken er det montert to binære sensorer som gir signalet 1 hvis sensoren er våt, dvs hvis den berører væske, og signalet 0 hvis sensoren er tørr, dvs ikke berører væske. Disse sensorene er montert på max og min-merket i tanken, de to horisontale linjene på nedre halvdel av tanken. En varsellampe skal gi signal til føreren av bilen hvis væskenivået er utenfor det tillatte området. Lampen vil lyse hvis den får signalet 1

a) (2%) Signalet fra max-sensoren kalles A og signalet fra min-sensoren kalles B. Sett opp et boolsk uttrykk for signalet C som skal sendes til lampen.

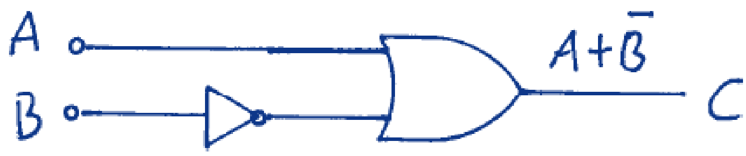
Svar: $C = A + \bar{B}$

b) (2%) Vis med en enkel skisse av logiske kretser hvordan signalene fra sensorene må kobles for at alarmlampen skal fungere riktig.

Svar: Skissen er vist i figur 2.

c) (2%) Sensorene er basert på kapasitive følere. Forklar kort hvordan den elektriske egenskapen kapasitans kan brukes til å måle nivå.

Svar: Se figur 5.10 b) i Johnson 8th ed.



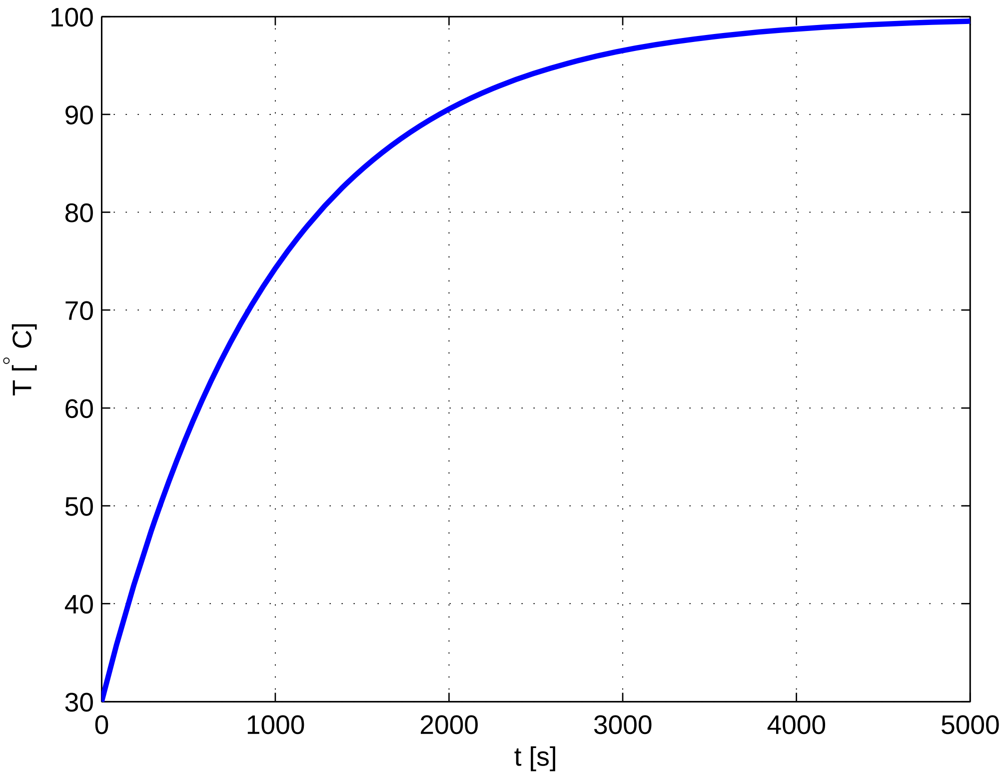
Figur 2: $C = A + \bar{B}$

d) (3%) Beskriv kort tre andre teknikker for å måle væskenivå i en tank

Svar: Dette er omtalt i kap. 5.2.4 i Johnson 8th ed. Andre alternativ er f.eks radar.

e) (2%) Hvis vi skulle ha funnet en matematisk modell for nivået i denne tanken, hvilken egenskap ved tanken forhindrer oss i å finne en modell på formen $\dot{x} = ax + bu$?

Svar: Siden tanken er kuleformet, er ikke tverrsnittet i tanken konstant, og vi må derfor ta hensyn til $A(h)$ når vi regner ut massebalansen for tanken. Se s14-15 i kompendiet.



Figur 3: Temperatur som funksjon av tid. Til bruk i oppgave 2c)

Oppgave 2. (31%)

En forenklet modell for vanntemperaturen i en varmtvannstank er gitt av

$$\dot{T} = -k_1 T + k_2 P, \tag{1}$$

der T er vanntemperaturen, P er effekten fra varmeelementet som tilføres vannet og k_1 og k_2 er konstanter

a) (2%) Hvilken bevaringslov er blitt brukt for å komme frem til (1)?

Svar: energibalanse

b) (2%) En mer realistisk modell ville ha bestått av en differensialligning til som ville ha beskrevet inn- og ut-strømmingen i tanken. Hvilken bevaringslov ville ha blitt brukt for å komme frem til denne ligningen?

Svar: Massebalanse

c) (6%) For å finne verdier for k_1 og k_2 ble det foretatt et eksperiment der det konstante pådraget $u = P = 1000\,\mathrm{W}$ ble satt på og temperaturen i vannet ble målt. Resultatet fra eksperimentet er vist i Figur 3. Bruk figuren til å finne numeriske verdier for konstantene k_1 og k_2.

Tips: tallene k_1 og k_2 blir små og positive. Vi skal ikke bruke de numeriske verdiene til k_1 og k_2 videre i oppgaven.

Svar: Alternativ 1, basert på løsning av diffligningen:
Vi vet at tidskonstanten til systemet er gitt av $\tau = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-k_1}$. Vi kan lese av figuren at $\tau = 1000$ slik at

$$\begin{aligned} 1000 &= -\frac{1}{-k_1} \\ k_1 &= \frac{1}{1000} = 0.001 \end{aligned} \tag{2}$$

Med $u = P = 1000$ har vi

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -k_1 T + 1000k_2 \\ \frac{dT}{dt} &= -k_1 T + 1000k_2 \\ \int \frac{1}{-k_1 T + 1000k_2} dT &= \int dt \\ \frac{1}{-k_1} \ln(-k_1 T + 1000k_2) &= t + C \\ -k_1 T + 1000k_2 &= e^{-k_1(t+C)} \\ T &= -\frac{1}{k_1} e^{-k_1(t+C)} + 1000\frac{k_2}{k_1} \\ T &= -\frac{1}{k_1} e^{C} e^{-k_1 t} + 1000\frac{k_2}{k_1} \\ T &= C_2 e^{-k_1 t} + 1000\frac{k_2}{k_1} \end{aligned}$$

Ser av figur 3 at $T(0) = 30$ slik at

$$\begin{aligned} T(0) &= C_2 + 1000\frac{k_2}{k_1} \\ C_2 &= 30 - 1000\frac{k_2}{k_1} \end{aligned}$$

som gir oss

$$
\begin{aligned}
T &= \left(30 - 1000\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-k_1 t} + 1000\frac{k_2}{k_1} \\
T &= 30e^{-k_1 t} + 1000\frac{k_2}{k_1}\left(1 - e^{-k_1 t}\right)
\end{aligned}
$$

Ser fra figur 3 at $T \to 100$ når $t \to \infty$ slik at

$$
\begin{aligned}
100 &= 0 + 1000\frac{k_2}{k_1} \\
\frac{k_2}{k_1} &= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Ved å sette inn fra (2) får vi $k_2 = \frac{1}{10000} = 0.0001$

Svar: Alternativ 2, basert i større grad på avlesning av figuren: Stasjonært er utgangen av systemet gitt av $T_s = 100$. Inngangen er $P = 1000$, slik at forsterkningen $K = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$. K er også gitt av $K = -\frac{b}{a} = k_2 k_1 = \frac{1}{10}$. Tidskonstanten finnes som i alternativ 1.

d) (2%) For å unngå oppblomstring av bakterier i tanken er det viktig at temperaturen kan holdes på et høyt, konstant nivå. Det foreslås å bruke P-regulatoren

$$
u = P = -k_p(T - T_r), \tag{3}
$$

der k_p er regulatorens forsterkning og T_r er den *konstante* referansetemperaturen. Regn ut stasjonærverdien T_s til systemet (1) med regulator (3).

Svar:

$$
\begin{aligned}
\dot{T} &= -k_1 T + k_2(-k_p(T - T_r)) \\
\dot{T} &= -(k_1 + k_2 k_p)T + k_2 k_p T_r.
\end{aligned}
$$

Finner stasjonærverdien ved å sette $\dot{T}_s = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= -(k_1 + k_2 k_p)T_s + k_2 k_p T_r \\
T_s &= \frac{k_2 k_p}{k_1 + k_2 k_p} T_r
\end{aligned}
$$

e) (2%) Hvorfor kan vi i praksis *ikke* eliminere det stasjonære avviket ved å øke forsterkningen i P-regulatoren?

svar: I teorien vil $T_s \to T_r$ hvis vi lar $k_p \to \infty$, men pådraget ville da gått i metning.

f) (8%) For å regulere temperaturen uten stasjonært avvik, foreslås å bruke PI-regulatoren

$$u = P = -k_p(T - T_r) - k_i \int_0^t (T - T_r) d\tau. \tag{4}$$

i) Sett $x = T$ og vis at systemet bestående av modellen (1) og regulatoren (4) kan skrives som den andreordens differensialligningen

$$\ddot{x} + (k_1 + k_2 k_p)\dot{x} + k_2 k_i x = C. \tag{5}$$

Finn også et uttrykk for konstanten C.

ii) Sett så $x_1 = T$ og $x_2 = \int_0^t (T - T_r) d\tau$ og skriv det samme systemet som to førsteordens differensialligninger (Tips: begge de to differensialligningene er ikke-homogene, de har et konstantledd hver.)

Svar: i) En andreordens:

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= -k_1 T + k_2 P \\
\dot{T} &= -k_1 T + k_2 \left(-k_p(T - T_r) - k_i \int_0^t (T - T_r) d\tau \right) \\
\dot{x} &= -k_1 x - k_2 k_p x + k_2 k_p T_r - k_2 k_i \int_0^t (T - T_r) d\tau \\
\ddot{x} &= -(k_1 + k_2 k_p)\dot{x} - k_2 k_i x + k_2 k_i T_r
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + (k_1 + k_2 k_p)\dot{x} + k_2 k_i x = C, \quad C = k_2 k_i T_r$$

ii) To førsteordens: For det første,

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= -k_1 T + k_2 P \\
\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2 k_p (T - T_r) - k_2 k_i \int_0^t (T - T_r) d\tau \\
\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2 k_p (x_1 - T_r) - k_2 k_i x_2 \\
\dot{x}_1 &= -(k_1 + k_2 k_p) x_1 - k_2 k_i x_2 + k_2 k_p T_r
\end{aligned}$$

og for det andre

$$\begin{aligned} x_2 &= \int_0^t (T - T_r) d\tau \\ \dot{x}_2 &= x_1 - T_r \end{aligned}$$

g) (6%) Vi ønsker å velge regulatorparameterene slik at systemet får kritisk demping. Finn uttrykk for k_p og k_i som funksjon av de andre konstantene i systemet og den udempede resonansfrekvensen ω_0. (Mrk: konstantledd i en andregradsligning påvirker ikke demping eller resonansfrekvenser)

Svar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (k_1 + k_2 k_p)\dot{x} + k_2 k_i x &= C \\ \ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x &= C \end{aligned}$$

$$\omega_0^2 = k_2 k_i \quad \Rightarrow \quad k_i = \frac{\omega_0^2}{k_2}$$

$$2\zeta\omega_0 = 2\omega_0 = k_1 + k_2 k_p \quad \Rightarrow \quad k_p = \frac{2\omega_0 - k_1}{k_2}$$

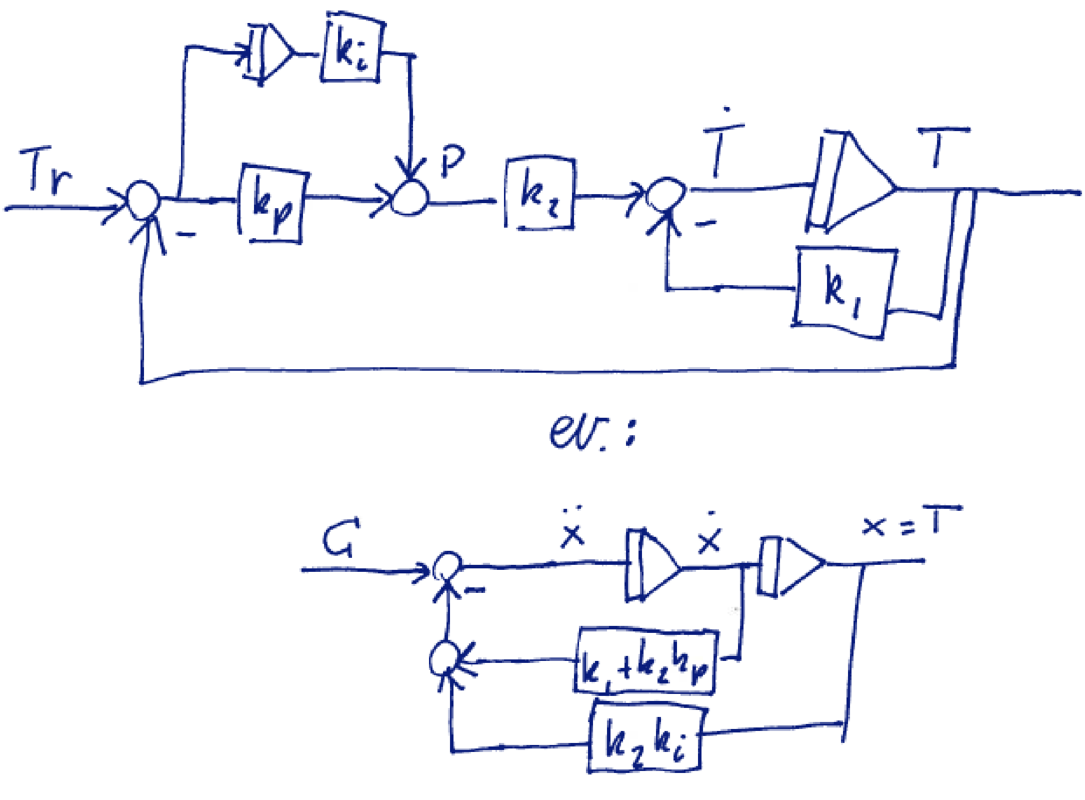
h) (3%) Tegn blokkdiagram for systemet.
svar: Blokkdiagrammet er tegnet i figur 4

Oppgave 3. (20%)

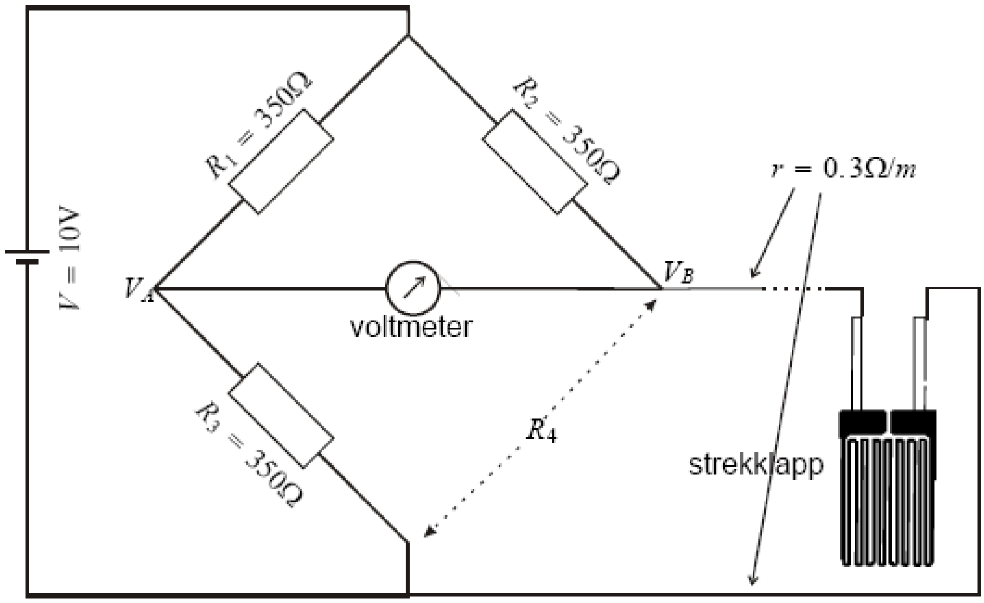
Målebroen i Figur 5 skal brukes til å måle krefter ved hjelp av en strekklapp. Strekklappen er koblet til målebroen med tilsammen $l = 60$m kobberledning. Målebroen drives av en spenning på $V = 10$V. Kobberlederene som strekklappen er koblet til broen med har en spesifikk motstand ved romtemperatur (20°C) på $r = 0.3\Omega/\text{m}$. Spesifikk motstand er definert som $r = \frac{R}{l}$, der l er lengden av lederen, og R er den totale motstanden i lederen. Nominell motstand i strekklappen er 350Ω. Ved full belastning, det vil si fullt strekk, øker resistansen i strekklappen med 1%.

a) (5%) Vis at

$$\Delta V = V_A - V_B = V \frac{R_3 R_2 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)},$$



Figur 4: To alternative blokkdiagrammer



Figur 5: Strekklapp i målebro

der R_4 er samlet motstand i gren nr. 4.

Svar:

$$\Delta V = V_A - V_B, \tag{6}$$

hvor V_A (V_B) er spenning mellom punkt A (B) og bunnen av broen. Videre har vi at V_A er forsyningsspenningen V delt mellom R_1 og R_3:

$$V_A = \frac{VR_3}{R_1 + R_3}. \tag{7}$$

Tilsvarende har vi at

$$V_b = \frac{VR_4}{R_2 + R_4}. \tag{8}$$

Ved å kombinere (6), (7) og (8) får vi at

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{VR_3}{R_1 + R_3} - \frac{VR_4}{R_2 + R_4} \\ &= V\frac{R_3R_2 - R_1R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}. \end{aligned}$$

b) (3%) Spenningen mellom punkt A og punkt B måles med et voltmeter (som vi antar har uendelig impedans). Hva viser voltmeteret ved fullt strekk i strekklappen?

Svar: Ved fullt strekk har strekklappen en resistans på

$$R_{strekklapp,fulltstrekk} = 1.01 \cdot 350\Omega = 353.5\Omega$$

ledningene har resistansen

$$R_{ledning} = lr = 60\text{m}\cdot 0.3\Omega/\text{m} = 18\Omega$$

$$R_4 = R_{strekklapp,fulltstrekk} + R_{ledning} = 353.5\Omega + 18\Omega = 371.5\Omega$$

Riktig utregnet R_4gir (1%)

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= V\frac{R_3R_2 - R_1R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \\ &= 10\text{V}\frac{(350\Omega)^2 - 350\Omega\cdot 371.5\Omega}{(350\Omega+350\Omega)(350\Omega+371.5\Omega)} \\ &= -0.149\text{V} = -149\text{mV} \end{aligned}$$

Riktig $V_A - V_B$ gir (2%)

c) (4%) Feilen som skyldes resistansen i ledningene kan kompenseres for ved å koble en ny motstand R_{komp} i serie med R_3. Hvor stor må R_{komp} være for at broen skal være i balanse når strekklappen ikke er belastet?

Svar:

$$R_{3,total} = R_3 + R_{komp}$$

$$R_4 = R_{strekklapp,utentrekk} + R_{ledning} = 350\Omega + 18\Omega = 368\Omega$$

Bro i balanse:

$$\begin{aligned} R_{3,total}R_2 - R_1R_4 &= 0 \\ R_{3,total}R_2 &= R_1R_4 \\ R_{3,total} &= \frac{R_1}{R_2}R_4 \\ R_3 + R_{komp} &= \frac{R_1}{R_2}R_4 \\ R_{komp} &= \frac{R_1}{R_2}R_4 - R_3 \end{aligned}$$

Strekklapp uten strekk: $R_4 = 350\Omega$. $\frac{R_1}{R_2} = 1$:

$$\begin{aligned} R_{komp} &= \frac{R_1}{R_2} R_4 - R_3 \\ &= 1 \cdot 368\Omega - 350\Omega \\ &= 18\Omega \end{aligned}$$

Sett $R_{komp} = 0$ i resten av oppgaven.

d) (5%) Temperatursvingninger kan være et kilde til feil når måleelementet, strekklappen i denne oppgaven, er plassert langt borte fra målebroen. Vi skal nå beregne hvor stor innflytelse dette kan ha. Vi skal kun se på effekten av temperaturendringen på resistansen i ledningene, og ikke i strekklappen. Endringen i motstand som følge av en temperaturendring kan beregnes som

$$\Delta R = \alpha R_{20} \Delta T,$$

der α er temperaturkoeffisienten til motstanden, R_{20} er resistansen ved romtemperatur og $\Delta T = |T - 20|$ er forskjellen i temperatur fra romtemperatur. For kobberledningene som er brukt er $\alpha = 3.85 \cdot 10^{-3}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1}$. Temperaturen stiger til 30°C. Hva viser nå voltmeteret ved fullt strekk i strekklappen?

Svar:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \alpha R_{20} \Delta T \\ &= 3.85 \cdot 10^{-3}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1} \cdot 18\Omega \cdot |30 - 20|^\circ\,\mathrm{C} \\ &= 0.693\Omega \end{aligned}$$

$$R_{ledning} = 18\Omega + 0.693\Omega = 18.693\Omega$$

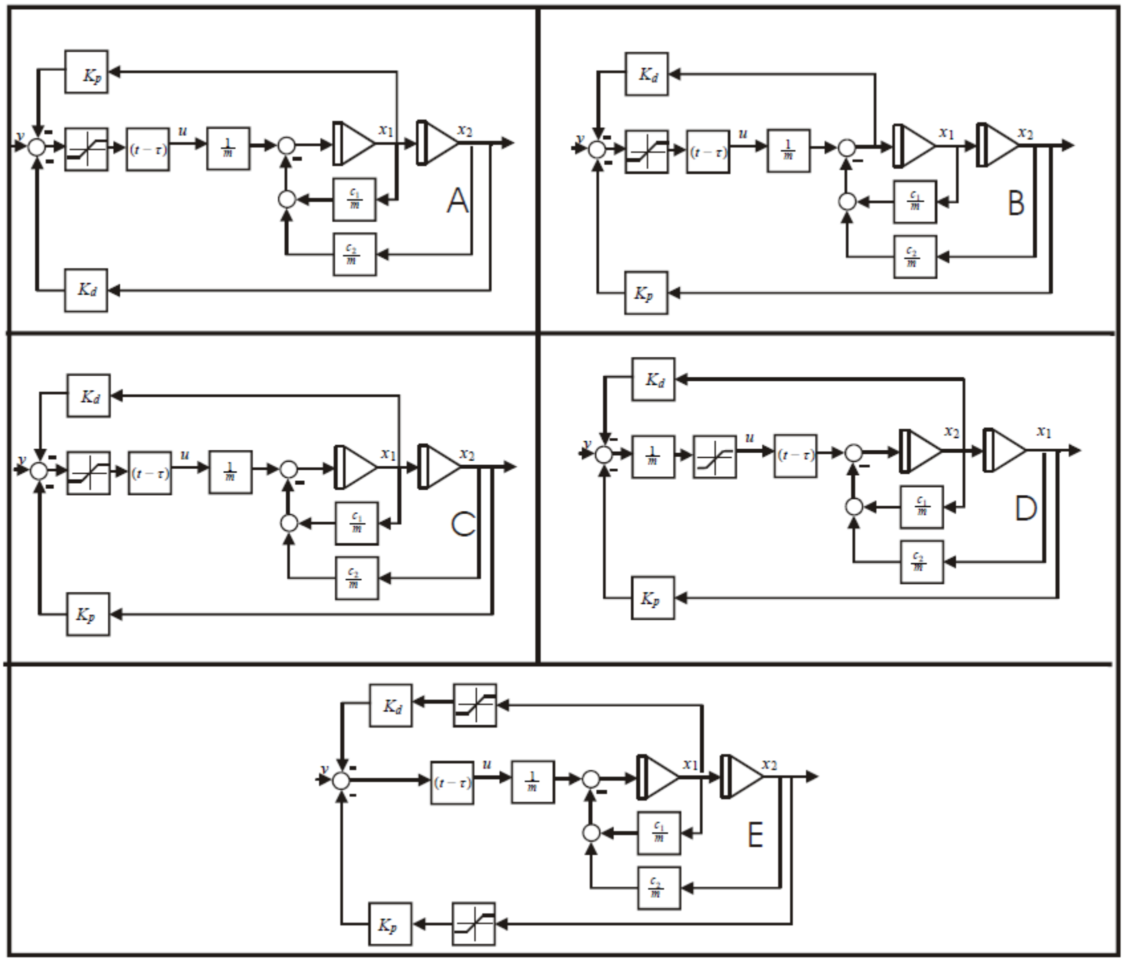
$$R_4 = R_{strekklapp,fulltstrekk} + R_{ledning} = 353.5\Omega + 18.693\Omega = 372.193\Omega$$

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= V \frac{R_3 R_2 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \\ &= 10\mathrm{V} \frac{(350\Omega)^2 - 350\Omega \cdot 372.193\Omega}{(350\Omega + 350\Omega)(350\Omega + 372.193\Omega)} \\ &= -0.154\mathrm{V} = -154\mathrm{mV} \end{aligned}$$

e) (3%) Feilen som følger av temperaturendringen i oppgave d) kan minimeres ved hjelp av en modifisering av målebroen. Hva kalles denne teknikken?

Svar: lead compensation eller trelederkobling. Siemensmetoden ble nevnt på forelesning.

Oppgave 4. (3%)



Figur 6: Blokkdiagrammer til oppg 4 a)

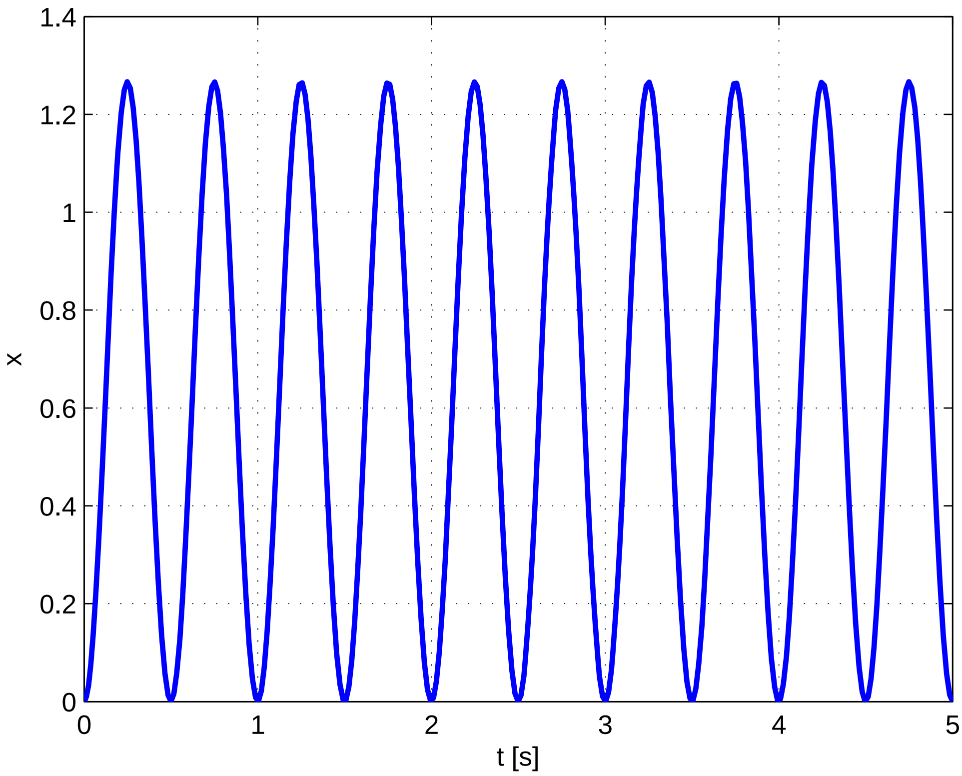
Gitt systemet

$$m\ddot{x}(t) = -c_1\dot{x}(t) - c_2x(t) + u(t-\tau) \quad (9)$$

der pådraget $u(t)$ er av en slik natur at -$u_{\min} < u(t) < u_{\max}$ der $u_{\min}$ og $u_{\max}$ er positivte tall og $\tau > 0$. Regulatoren er gitt av

$$u = -K_p x - K_d\dot{x} + v \quad (10)$$

der v er målestøy. Vi setter $x_1 = \dot{x}$ og $x_2 = x$. Hvilket av blokkdiagrammene A,B,C,D og E i Figur 6 representerer systemet? RIKTIG SVAR ER C



Figur 7: Responsen til andreordenssystemet i oppgave 5

Oppgave 5. (5%)

a) (2%) Responsen til et andreordens system er vist i figur 7. Hva er den relative dempingsfaktoren til systemet?

Svar: figuren viser stående svingninger. Dette betyr ingen demping, dvs $\zeta = 0$.

b) (3%) Hvis signalet i figur 7 skal tastes (samples), hvilken verdi må samplinsfrekvensen ha for at signalet ikke skal oppvise fenomenet nedfolding (aliasing)?

Svar: Signalet svinger med 2 svingninger pr sekund, dvs $f = 2Hz$. Ifølge samplingsteoremet må da $f_s > 2f = 4Hz$. Full score gis også for

$f_s = 10f = 20Hz$ som er den tommelfingerregelen som står i Johnson.