Fysikk, Øving 6

gruppe 2, Rendell Cale

Godkjent SB

Ønsker tilbakemelding :)

Oppgave 1

a) Ingen ytre kraftmoment så vi har bevaring av spinn,

$$L_{før} = L_{etter}$$

$$\Rightarrow I_0 \cdot 0 + I_0 \omega_i = 2 I_0 \omega_f$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\omega_f = \frac{1}{2}\omega_i}}$$

R

b) $E_{K,før} = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2$

$$E_{K,etter} = \frac{1}{2}(2I_0)\left(\frac{\omega_i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} I_0 \omega_i^2 = \frac{1}{2} E_{K,før}$$

R

Halvparten av den kinetiske energien forsvinner

Oppgave 2

a) Fullstendig uelastisk støt med ingen ytre krefter/kraftmoment, så spinn er bevart.
Treghetsmomentet til skiven er gitt ved

$$I_0 = \int_{\text{Skive}} r^2\,dm \quad , \quad dm = \frac{M\,dA}{A} = \frac{M\,r\,dr\,d\theta}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2M}{\cancel{\pi} R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$\Leftrightarrow \underline{I_0 = \frac{1}{2} M R^2}$$

Det totale treghetsmomentet blir

$$I_{tot} = I_0 + n \cdot I_m \quad , \quad I_m = m r^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} M R^2 + n m r^2}} \quad R$$

b) Vi har ingen ytre kraftmoment så spinn er bevart

$$\vec{L}_{før} = I_0 \cdot \vec{0} + n\vec{L}_0 = n\vec{L}_0$$

$$\vec{L}_{etter} = I_{tot}\,\vec{\omega}_f$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\omega}_f = \frac{\vec{L}_{etter}}{I_{tot}}$$

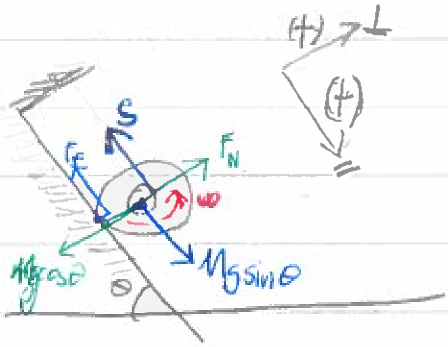
$$= \frac{n\vec{L}_0}{\frac{1}{2}MR^2 + nmr^2}$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{2n\vec{L}_0}{MR^2 + 2nmr^2}$$

R

Oppgave 3

a) $\theta = \theta_0$, $a = 0$, $\mu = \mu_s$



$$F_f = \mu \cdot F_N = \mu_s Mg\cos\theta$$

(N1-translasjon, //): $Mg\sin\theta_0 - \mu_s Mg\cos\theta_0 - S = 0$ (1)

(N1-rotasjon) $S \cdot r - \mu_s Mg\cos\theta_0 \cdot R = 0$ (2)

(2): $S = \frac{R}{r} \cdot \mu_s Mg\cos\theta_0$

~~Satt inn i (1):~~

$$\cancel{Mg\sin\theta_0 - \mu_s Mg\cos\theta_0 - \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{\mu_s Mg\cos\theta_0} = 0}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \mu_s M^2 g^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 - \mu_s^2 M^2 g^2 \cos^2\theta_0 = \frac{R}{r}}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \sin\theta_0\cos\theta_0 - \mu_s\cos^2\theta_0 = \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{\mu_s M^2 g^2}}$$

Satt inn i (1)

$$\cancel{M}g\sin\theta_0 - \mu_s \cancel{M}g\cos\theta_0 - \frac{R}{r}\mu_s \cancel{M}g\cos\theta_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\theta_0 = \mu_s + \frac{R}{r}\mu_s$$

$$\tan\theta_0 = \mu_s\left(1+\frac{R}{r}\right)$$

Siden $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ får vi:

Gitt at dette er riktig, så stemmer neste steg.

$$S = \frac{R}{r}\mu_s Mg \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_s^2\left(1+\frac{R}{r}\right)^2+1}} \quad R$$

$$= \frac{R}{r}\mu_s Mg \cdot \frac{1}{\mu_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 + 1/\mu_s^2}}$$

$$= Mg \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{\mu_s^2}\right]}}$$

Dette steget tror jeg blir feil

$$\Leftrightarrow \quad S = Mg \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}+1\right)^2 + \left(\frac{r}{\mu_s R}\right)^2}}$$

Da kan vel ikke bare helt uten videre gange inn med hvert ledd i en parantes som er opphøyd i andre.

og $\theta_0 = \arctan\left(\mu_s\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)$ R

vil være grensetilfellet for likevekt.

b) $\theta = \theta_0^+$ og $\mu = \mu_K$ slik at snella sklir nedover skråplanet.

(N2-trans, //): $Mg\sin\theta_0 - \mu_K Mg\cos\theta_0 - S = Ma$ (1)

(N2-rot): $Sr - \mu_K Mg\cos\theta_0 \cdot R = I\alpha = I\frac{a}{r}$ (2)

(1): $a = g\sin\theta_0 - \mu_K g\cos\theta_0 - \frac{S}{M}$

Fra (3a) hadde vi

$$\theta_0 = \arctan\left(\mu_S\left(1+\frac{R}{r}\right)\right)$$

$$S = Mg\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}+1\right)^2 + \left(\frac{r}{\mu_S R}\right)^2}}$$

Som gir $\sin\theta_0 = \dfrac{\mu_S\left(1+\frac{R}{r}\right)}{\sqrt{\mu_S^2\left(1+\frac{R}{r}\right)^2+1}}$

Innsatt i (1):

$$a = g\,\frac{\mu_S\left(1+\frac{R}{r}\right)}{\sqrt{\mu_S^2\left(1+\frac{R}{r}\right)^2+1}} - \mu_K g\,\frac{1}{\sqrt{\mu_S^2\left(1+\frac{R}{r}\right)^2+1}}$$

$$- g\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}+1\right)^2 + \left(\frac{r}{\mu_S R}\right)^2}}$$

b) Regner θ som kjent.

(N2-trans. //): $Mg\sin\theta - \mu_k Mg\cos\theta - S = Ma$ (1)

(N2-rot.): $Sr - \mu_k Mg\cos\theta R = I\alpha = \frac{Ia}{r}$ (2)

(1) gir $a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) - \frac{S}{M}$

(2) gir $Sr = \frac{Ia}{r} + \mu_k Mg\cos\theta R$

$\Leftrightarrow S = \frac{Ia}{r^2} + \frac{R}{r}\mu_k Mg\cos\theta$

Som satt inn i (1) gir

$$a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) - \frac{Ia}{Mr^2} - \frac{R}{r}\mu_k g\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow a\left(1 + I/Mr^2\right) = g\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{g\left[\sin\theta - \mu_k\cos\theta\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right]}{1 + I/Mr^2}$$

R

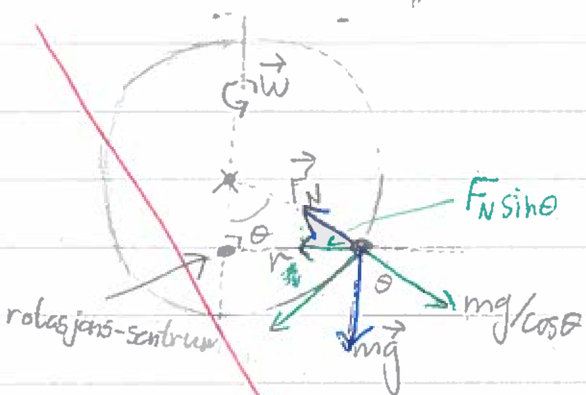
Oppgave 4

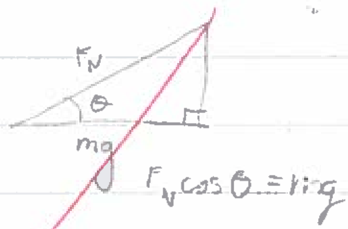
a) Gitt at kula ikke begynner nøyaktig på toppen eller bunn vil:

$$w = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \theta \to \frac{\pi}{2} \text{ eller } \frac{3\pi}{2}$$

b)





For en gitt $\vec{\omega}$ (og r) vil kula ha en akselrasjon inn mot rotasjonsaksen. $\vec{F}_N$ er den eneste kraften som virker inn på rotasjonen så

$$F_N \sin\theta = m\omega^2 r \qquad (*)$$

Siden $F_N = mg/\cos\theta$ får vi

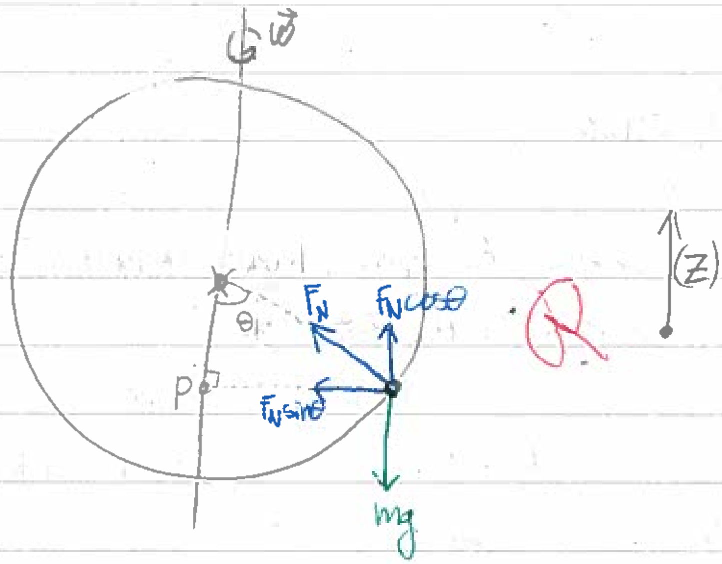
$(*)$: $$mg\tan\theta = m\omega^2 r$$

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 R\sin\theta}{g}, \quad r = R\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}, \quad (\sin\theta \neq 0)$$

b)



R

For en gitt ω vil θ stabilsere seg vi bruker (N1) i (z) retning og (N2) for rotasjon inn mot P.

$$(N1-z): \quad F_N = mg/\cos\theta$$

$$(N2\text{-rot.}): \quad F_N \sin\theta = m \cdot \frac{v^2}{r} = m\omega^2 R \sin\theta$$

$$\sin\theta \neq 0: \quad \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta} = \cancel{m}\,\omega^2 R$$

$$\iff \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

R

Må da kreve $\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \iff \omega^2 \geq \frac{g}{R}$

c) $\omega \to \infty$ gir $\theta = \frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$ som stemmer med forventningen men $\theta = 0$ kan svare til enhver fart ω, som ikke stemmer med forventningen.

R

Problemet ligger i at forkortingen som ~~ledet~~ ledet til svaret forutsatte $\sin\theta \neq 0$.

Vi antok også at θ (og r) hadde stabilisert seg, men det er ikke nødvendigvis en selvfølge.
Se systemet fra kulas koordinatsystem. Da får vi en sentrifugalkraft

$$F_S = m\omega^2 R \sin\theta$$

som trekker kula oppover med en kraft $F_S \cos\theta$.
Vi ønsker null bevegelse i z-retning så tyngdekraften må være lik $F_S \cos\theta$.

$$\Rightarrow \quad = F_S \cos\theta = m\omega^2 R \sin\theta \cos\theta$$

$$mg \sin\theta = m\omega^2 R \sin\theta \cos\theta$$

~~Så kulen er kun i ro når $\omega^2 r = g$. Dermed gjelder formlen fra c kun når $g = \omega^2 r$. Det betyr at $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ er de eneste likevektspunktene. (fordi $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r} = 1 \Rightarrow \theta = 0, \theta = \pi$)~~

$$\cancel{\Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{2g}{\omega^2 R}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) = \frac{2g}{\omega^2 R}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}, \quad \sin\theta \neq 0$$

Se også gjerne LF.

e) $R = 0{,}1\,m$, $g = 9{,}81\,m/s^2$

i) $f = 3\,Hz \Leftrightarrow \omega = 6\pi\ s^{-1}$

$$\cos\theta = \frac{9{,}81\,m/s^2}{0{,}1\,m \cdot (6\pi\ s^{-1})^2}$$

$$= 0{,}28$$

$$\Leftrightarrow \theta = 1{,}29 = 73{,}9°$$

R

ii) $f = 1\,Hz \Leftrightarrow \omega = 2\pi\ s^{-1}$

$$\cos\theta = \frac{9{,}81\,m/s^2}{(0{,}1\,m)\cdot(2\pi\ s^{-1})^2}$$

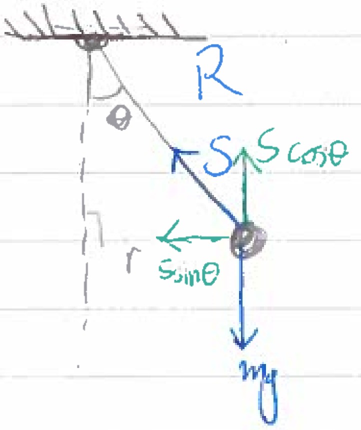
$$= 2{,}48$$

R

$\Rightarrow \theta$ eksisterer ikke

Skisse !

f)



Bruker (N2) for rotasjon med fart ω og får

$$S\sin\theta = m \cdot \omega^2 \cdot R\sin\theta \qquad (1)$$

Null vertikal forflytning, så (N1) gir

$$S\cos\theta = mg \iff S = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad (2)$$

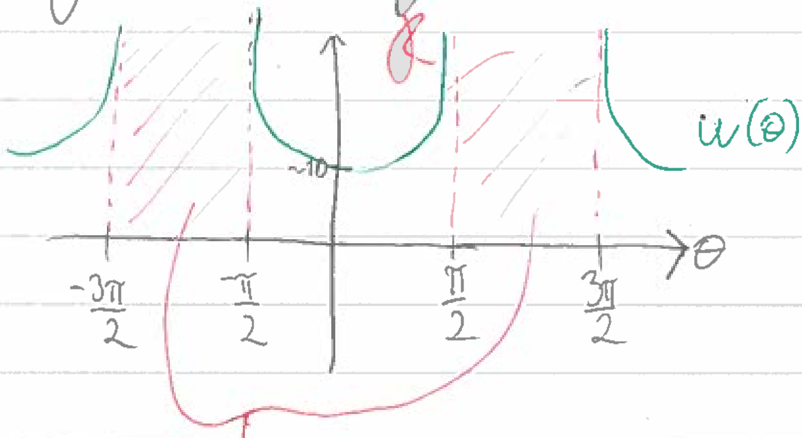
(1) ⟹ $\frac{mg}{\cos\theta} = m\omega^2 R$, antar $\sin\theta \neq 0$

$$\iff \omega^2 = \frac{g}{R\cos\theta}$$

$$\iff \omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\theta}}$$

R

Tegnet graf på data og fikk ca.



$\cos\theta \le 0$ så dette svarer til at kula er over opphengingspunktet (som ikke er en mulig likevekt).

Det som er interesant er at farten aldri er lavere enn $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ da vi prøvde å ta grensen $\omega \to 0$ brøt vi denne "regelen", så derfor ga ligningen feil svar.