NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 73 59 26 78/930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Mandag 10. desember 2012
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- Eksamen består av 4 oppgaver.
  - Oppgave 1 omhandler analyse av filtre.
  - Oppgave 2 omhandler rasjonale prosessmodeller.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma realisering.
  - Oppgave 4 omhandler flerhastighetssystemer.
  - En del formler er oppgitt i appendiks
  - Vekting av hver deloppgave er angitt i parentes. Totalt antall poeng er 70.
- Alle svar skal begrunnes!
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og andre gang ca. 11.45.

Oppgave 1 **(3+3+5+4 = 15 poeng)**

1a) Transferfunksjonen $H(z)$ til et stabilt, kausalt LTI-filter er beskrevet ved følgende :

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0(z)H_1(z)H_2(z) \qquad \text{hvor} \\ H_0(z) &= 1 + \frac{5}{3}z^{-1} \\ H_1(z) &= \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\ H_2(z) &= \frac{1}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})} \end{aligned}$$

Vis at differenseligningen til filteret er gitt ved:

$$y(n) - \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) = x(n) + \frac{5}{3}x(n-1), \;\; n = -\infty, \infty \tag{1}$$

1b) Gi et *begrunnet* svar på følgende :

- Hva blir konvergensområdet til filteret i oppgave 1a?
- Har filteret lineær fase?
- Har filteret minimum fase?

1c) Vis at enhetspulsresponsen til filteret er gitt ved :

$$h(n) = -h_1(n) + 2h_2(n) \tag{2}$$

hvor

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ h_2(n) &= \begin{cases} (\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1d) Skisser følgende strukturer for filteret $H(z)$:

- Direkte form 2 (DF2)
- Parallellstruktur hvor grenforsterkningen $G_2 = 2$ i lign 2 er plassert *før* tilbakekoblingen.

Oppgave 2 **(4+7+3+4 = 18 poeng)**

2a) Krysskorrelasjonssekvensen til to sekvenser $y(n)$ og $x(n)$ med endelig energi er gitt ved

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+m)x(n) \quad && m \geq 0 \\ r_{yx}(m) &= r_{xy}(-m) && m < 0 \end{aligned}$$

Vis at krysskorrelasjonssekvensen til $h_1(n)$ og $h_2(n)$ i deloppgave 1c er gitt ved

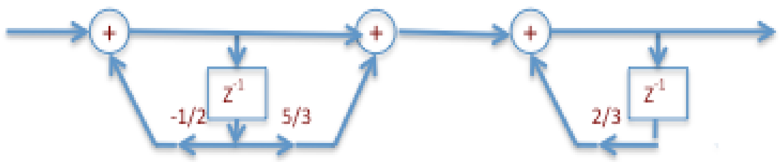
$$r_{h_1h_2}(m) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^{|m|} = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^m & m \geq 0 \\ \\ \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^{|m|} = \frac{3}{4}(\frac{3}{2})^m & m < 0 \end{cases} \tag{3}$$

2b) Vis at enhetspulssekvensene $h_1(n), h_2(n)$ og $h(n)$ gitt i oppgave 1 har følgende autokorrelasjonssekvenser for $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} r_{h_1h_1}(m) &= \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m \\ r_{h_2h_2}(m) &= \frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m \\ r_{hh}(m) &= -\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^m + \frac{57}{10}(\frac{2}{3})^m \end{aligned}$$

I tillegg gjelder at alle tre autokorrelasjonssekvenser er symmetriske om $m = 0$.

Figur 1 viser en valgt kaskadestruktur for $H(z)$



Figur 1: *Valgt kaskadestruktur*

2c) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes kaskadestrukturen i figur 1.

Hvilke parametriske prosess-typer tilsvarer henholdsvis utgangssignalet og de interne signalene i strukturen? Begrunn svaret!

2d) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes filteret $H(z)$.

Finn, ved hjelp av lineær prediksjon (dvs. Yule-Walker eller Normal ligningene) filterkoeffisienten a_1 for den beste AR[1]-modellen til filterets utgangssignal $y(n)$.

Vis at prediksjonsfeileffekten alltid oppfyller $\sigma_f^2 \leq \gamma_{yy}(0)$.

Oppgave 3 (4+4+7+4 = 19 poeng)

Det diskrete filteret i oppgave 1 skal realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1, 1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med effekt σ_z^2.

3a) Finn resulterende støyeffekt σ_z^2 på utgangen av kaskadestrukturen i figur 1 uttrykt ved σ_e^2.

3b) Finn resulterende støyeffekt σ_z^2 på utgangen av parallell-strukturen i oppgave 1d. Merk at minustegnet foran $h_1(n)$ i likning 2 blir gjort aritmetisk (negasjon) og ikke ved multiplikasjon!

Inngangssignalet $x(n)$ til filteret har full utstyring, dvs. $x_{max} = \max_n |x(n)| = 1$.

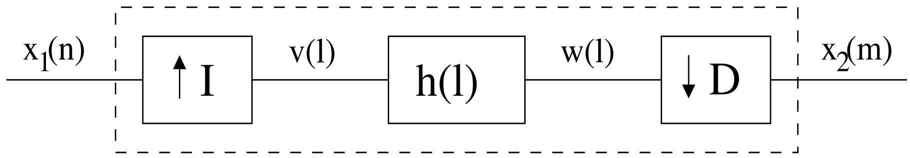
3c) Vis at en for å unngå overstyring i kaskadestrukturen brukt i deloppgave 3a må skalere på inngangen med 3/16 (nedskalering med 16/3)

Vis videre at man for parallell-strukturen trenger skalering på inngangen med 1/6 (dvs. nedskalering med 6).

3d) Hvilken av de to *nedskalerte* strukturene har best signal-støy forhold på utgangen ($SNR = \sigma_y^2/\sigma_z^2$) ?

Oppgave 4 **(5+4+4+5 = 18 poeng)**

Figur 2 viser et system for endring av punktprøvehastighet fra F_1 til F_2 hvor I og D er heltall.



Figur 2: *System for punktprøveendring*

4a) Forklar de tre blokkene samt angi båndbredde og samplingsrate til de interne signalene $v(l)$ og $w(l)$

4b) Utled et uttrykk i tidsplanet for utgangssignalet $x_2(m)$ uttrykt ved inngangssignalet $x_1(n)$, filteret $h(l)$ samt I og D.

4c) Diskuter funksjonsmåten til systemet når $I > D$ og motsatt.

4d) Gitt et analogt signal $x(t) = s(t) + sin(2\pi F_0 t)$ hvor $s(t)$ har båndbredde $\pm B = 5000Hz$ og $F_0 = 4000Hz$. Signalet punktprøves med samplingsrate $F_1 = 10000Hz$, dvs. $x_1(n) = x_a(nT_1)$ hvor $T_1 = 1/F_1$.
En har videre gitt et notch-filter med nullpunkt i $f_n = 0.25$.

Hvordan kan en bruke systemet i figur 2 sammen med notch-filteret til å fjerne den harmoniske komponenten (F_0) i $x_1(n)$?

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\ Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \text{ for } k = 0, \ldots, N-1 \text{ where we write } Y(k) = Y(f_k) \end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h(n)z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf} \\ \text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\ \text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1 \end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{4}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation :} \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum :} \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem:} \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \ m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m)\ e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $$\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2\ \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

Normal equations: $$\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$