Øving 4 , TMA4100

Rendell Cale

Ønsker tilbakemelding :)

Matte 1 - Øving 4

oppg 1

a) $$\frac{dT}{dt} = K(T-20)$$

$$\frac{1}{T-20}\,dT = K\,dt$$

$$\int \frac{1}{T-20}\,dT = \int k\,dt$$

$$\ln|T-20| = Kt + C'$$

T vil ikke synke under 20°C

$$\Rightarrow \ln|T-20| = \ln(T-20)$$

$$\ln(T-20) = Kt + C'$$

$$T-20 = e^{Kt} \cdot e^{C'}$$

$$T = Ce^{Kt} + 20$$

$$T(0) = 25$$

$$C\cancel{e^{K0}} + 20 = 25 \Rightarrow C = 5$$

$$T(t) = 5 \cdot e^{Kt} + 20$$

b) $T(3) = 22 \Rightarrow 5 \cdot e^{3K} + 20 = 22$

$$5e^{3K} = 2$$

$$3K = \ln \frac{2}{5}.$$

$$K = \frac{\ln(2/5)}{3}$$

$$T(x) = 21 = 5 \cdot e^{\frac{\ln(2/5)}{3}x} + 20$$

$$e^{(\ln(2/5))^{\frac{1}{3}x}} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3}x \ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$x = \frac{3 \cdot (-\ln(5))}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \approx 5{,}26$$

Etter 5,26 timer ville temperaturen vert 21°C.

oppg 2

$a_1 = 1 \quad , \; a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$

Hvis $\{a_n\}$ er monoton og voksende betyr det at:

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall \; n$$

Dette kan bevises med induksjon

1. Grunnsteg

   Vet at $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \sqrt{1+2\cdot 1} = \sqrt{3}$

   $$a_2 > a_1 \quad \checkmark$$

2. Induksjonssteg

   Antar at pastanden gjelder for $n=K$

   $$\Rightarrow \quad a_{K+1} > a_K$$

   Tester $n=K+1$

   $$a_{K+1+1} = \sqrt{1+2a_{K+1}}$$

   $$a_{K+2} = \sqrt{1+2a_{K+1}}$$

   Antagelsen gir at $\sqrt{1+2a_{K+1}} > a_{K+1}$

   $$\Rightarrow a_{K+2} > a_{K+1} \quad ████$$

Følgen er altså monotont og voksende.

Hvis følgen konvergerer finnes det en øvre grense slik at

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

2. $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2a_n}$$

$$a = \sqrt{1+2\cdot\lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$(a)^2 = \left(\sqrt{1+2a}\right)^2$$

$$a^2 = 2a+1$$

$$a^2-2a-1=0$$

$$a = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$$

Siden $\{a_n\}$ vokser og $a_1=1$ ekskluderer vi $1-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$$

Har nå vist at hvis følgen konvergerer så er grensen $1+\sqrt{2}$.
For å vise at grensen vil jeg heller vise at følgen er begrenset og dermed konvergent, siden

Konvergens $\Leftrightarrow$ grenseverdien fins

Bruker induksjon for å vise at det finnes en øvre rekke. Tester med 3, selvom beviset hadde gått med alle tall større enn eller lik $1+\sqrt{2}$.
Vil altså vise at hvis $a_n < 3$, så er $a_{n+1} < 3$.

1. $a_1 = 1 < 3$ ✓

2. Antar at $a_k < 3$

3. Sjekker $a_{k+1} = \sqrt{1+2a_k}$

Siden $a_k < 3$ vil

$$a_{k+1} < \sqrt{1+2\cdot 3}$$

$$a_{k+1} < \sqrt{7} < 3 \quad ▥$$

Følgen er begrenset og vet da pga. den er monoton at grensen fra forrige side er riktig og at følgen konvergerer.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$$

oppg 3

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$

Når n vokser vil $\arctan(n)$ gå mot grense-verdien sin, som alle vet er $\pi/2$.

$$\Rightarrow \frac{\arctan(n)}{1+n^2} < \frac{\pi/2}{1+n^2} < \frac{\pi/2}{n^2}$$

Vet at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergerer, så derfor Konvergerer

også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2}{n^2}$, og derfor også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$

b) Bruker grensetesten med $a_n = \sin\frac{1}{n}$ og $b_n = \frac{1}{n}$

Når $x \to 0$ vil $\sin x \to x$

Følgelig vil også $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{1}{x}$ når $x \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n} = 1$$

Vet at $\sum \frac{1}{n}$ divergerer og grensetesten gir oss da at $\sum \sin\frac{1}{n}$ også divergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \text{ divergerer.}$$