Øving 2

Rendell Cale   rendellc@stud.ntnu.no
MTTK

Oppgave 1

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u \quad , \quad x(0) = 0 \qquad (*)$$

$$u = \begin{cases} 1/\Delta t \quad , & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) $$\dot{x} + \frac{1}{T}x = \frac{1}{T}u$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}e^{\frac{1}{T}t} + \frac{1}{T}xe^{\frac{1}{T}t} = \frac{1}{T}ue^{\frac{1}{T}t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(xe^{\frac{t}{T}}\right) = \frac{1}{T}ue^{t/T}$$

$$\Leftrightarrow d\left(xe^{t/T}\right) = \frac{e^{t/T}}{T}u\,dt$$

$$\Leftrightarrow xe^{t/T} - x(0)e^{0/T} = \int_0^t \frac{e^{\tau/T}}{T}u\,d\tau$$

1) Anta $0 \le t \le \Delta t$. Da vil $u(t) = \frac{1}{\Delta t}$.

$$\Rightarrow \quad x e^{t/T} = \int_0^t \frac{e^{\tau/T}}{T} \frac{1}{\Delta t} \, d\tau$$

$$= \frac{e^{t/T} - 1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1 - e^{-t/T}}{\Delta t} \quad , \quad 0 \le t \le \Delta t$$

2) Anta så $t > \Delta t$

$$x e^{t/T} = \int_0^{\Delta t} \frac{e^{\tau/T}}{T} \cdot \frac{1}{\Delta t} \, d\tau$$

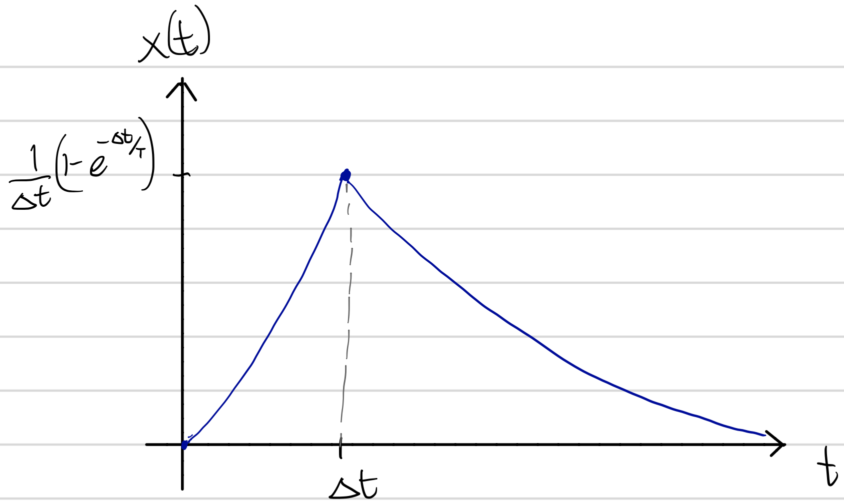
$$= \frac{e^{\tau/T}}{\Delta t} \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=\Delta t}$$

$$= \frac{e^{\Delta t/T} - 1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{e^{\Delta t/T} - 1}{\Delta t} e^{-t/T}$$

Så

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(1 - e^{-t/T}\right) & , \; 0 \le t \le \Delta t \\ \frac{1}{\Delta t}\left(e^{\Delta t/T} - 1\right) e^{-t/T} & , \; t > \Delta t \end{cases}$$



b) Det er klart at $\lim_{\Delta t \to 0} u(t) = \delta(t)$

= impulspådrag

Så derfor blir $\lim_{\Delta t \to 0} x(t)$ = impulsresponsen.

Vi kan regne ut grensen til $x(t)$ $\Delta t \to 0$.

$$x(0^+) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(1 - e^{-\Delta t/T}\right) \quad \text{(se figur)}$$

$$\overset{\text{L'Hopitâl}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{T} e^{-\Delta t/T}$$

$$= \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(e^{\Delta t/T} - 1\right) e^{-t/T}$$

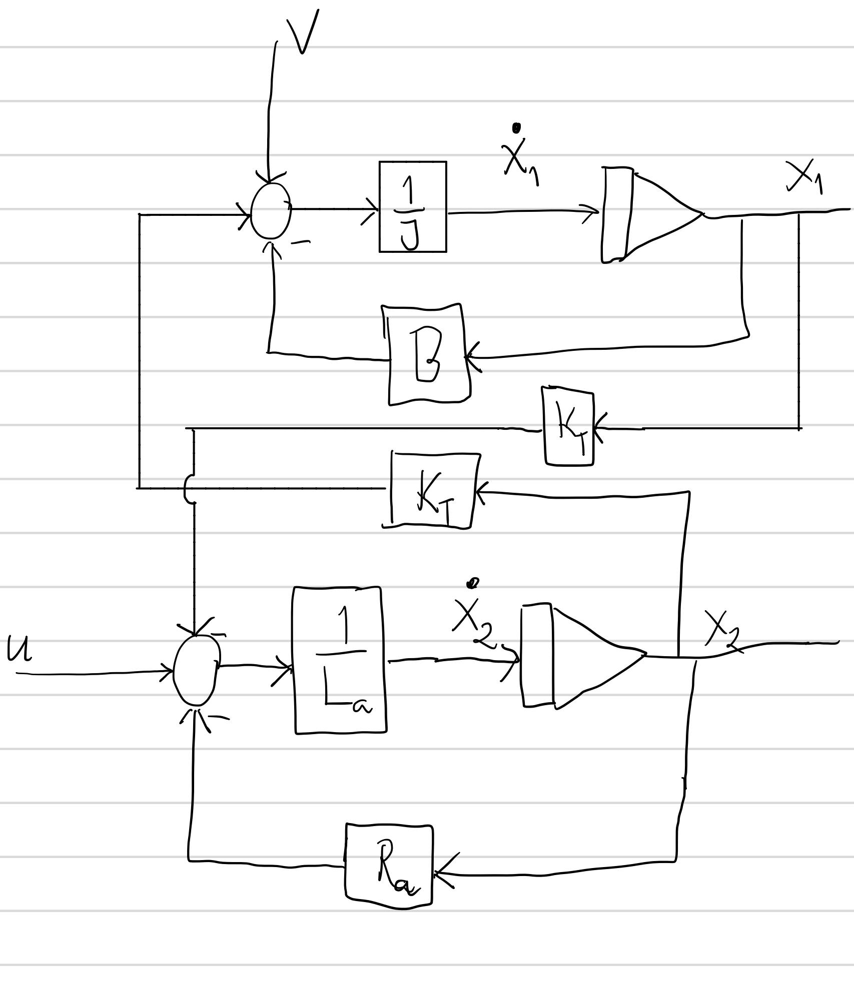
$$\overset{\text{L'Hopitâl}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{T} e^{\Delta t/T} e^{-t/T}$$

$$= \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

Så $h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-t/T} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$

Denne responsen er rimelig siden spenningspulsen u blir veldig kort og veldig stor.

Oppgave 2



Oppgave 3

Fra eksempel 2.1 i boka har vi

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m_1 c_1}\left(u_1 - g_1(x_1 - x_2)\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_2 c_2}\left(g_1(x_1 - x_2) + q\rho c_2 v_1 - q\rho c_2 x_2 - g_2(x_2 - v_2)\right)$$

Siden vann ikke tappes eller strømmer inn må $q = 0$.
Vi har og $v_2 = 0°C$. Dette gir

$$\dot{x}_1 = -\frac{g_1}{m_1 c_1} x_1 + \frac{g_1}{m_1 c_1} x_2 + \frac{u_1}{m_1 c_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g_1}{m_2 c_2} x_1 - \frac{g_1 + g_2}{m_2 c_2} x_2$$

Definer $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -g_1/m_1 c_1 & g_1/m_1 c_1 \\ g_1/m_2 c_2 & -\frac{(g_1 + g_2)}{m_2 c_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1/m_1 c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da har vi at systemet beskrives av

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u_1$$

Leddet $\underline{b}u_1$ beskriver pådraget så hvis vi ser bort ifra det er varmtvannsberederen beskrevet av

$$\dot{\underline{x}} \approx A\underline{x}$$

Setter inn numeriske verdier i A for å finne egenverdiene etc.

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,06 & -0,12 \end{pmatrix}$$

Bruker Matlab og får:

$$\lambda_1 = -0,57 \quad , \underline{m}_1 = \begin{pmatrix} -0,99 \\ 0,13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0,05 \quad , \underline{m}_2 = \begin{pmatrix} -0,75 \\ -0,67 \end{pmatrix}$$

Så $M = \begin{pmatrix} -0,99 & -0,75 \\ 0,13 & -0,67 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -0,88 & 0,98 \\ -0,18 & -1,30 \end{pmatrix}$$

$$\text{og } \Lambda = \begin{pmatrix} -0{,}57 & 0 \\ 0 & -0{,}05 \end{pmatrix}$$

Dette gir

b) $\phi(t) = M e^{\Lambda t} M^{-1}$

$$= M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}88 & 0{,}98 \\ -0{,}18 & -1{,}30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}99 & -0{,}75 \\ 0{,}13 & -0{,}67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}88 e^{\lambda_1 t} & 0{,}98 e^{\lambda_1 t} \\ -0{,}18 e^{\lambda_2 t} & -1{,}30 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}87 e^{\lambda_1 t} + 0{,}14 e^{\lambda_2 t} & -0{,}97 e^{\lambda_1 t} + 0{,}98 e^{\lambda_2 t} \\ -0{,}12 e^{\lambda_1 t} + 0{,}12 e^{\lambda_2 t} & 0{,}13 e^{\lambda_1 t} + 0{,}87 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

c) Vi har at når $u = 0$ blir løsningen

$$\underline{x}(t) = \phi(t) \underline{x_0}$$

Vi har $\underline{x_0} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dette gir

$$\underline{x}(t) = \phi(t)\,\underline{x_0}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 400\cdot\left(0{,}87e^{\lambda_1 t} + 0{,}14e^{\lambda_2 t}\right) \\ 400\left(-0{,}12e^{\lambda_1 t} + 0{,}12e^{\lambda_2 t}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 348e^{\lambda_1 t} + 56e^{\lambda_2 t} \\ -48e^{\lambda_1 t} + 48e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Merk at både x_1 og x_2 går mot null som kommer av energitap til omgivelser, så det er rimelig.
Plottet dette i matlab.