Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 - Kybernetikk introduksjon
Eksamen Våren 2014
Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

Gitt systemet

$$\dot{x} = ax + bu$$

så er tidskonstanten $T = -\frac{1}{a}$ og forsterkningen $K = -\frac{b}{a}$. Satt inn for systemet som er oppgitt får vi dermed

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{s}, \quad K = 1 \tag{1}$$

b)

$$\dot{x} = -2x + 2u, \quad u = K_p\,(r - x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + 2K_p\,(r - x) \\ &= -(2 + 2K_p)x + 2K_p r\end{aligned}$$

Så tidskonstanten blir

$$T = \frac{1}{2 + 2K_p}$$

Setter inn ønsket tidskonstant på venstre side og løser for K_p,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{s} &= \frac{1}{2 + 2K_p} \\ K_p &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -dx_1 - bx_2 - cx_3 + du
\end{aligned}
$$

d)

Monovariabelt fordi vi kun har én inngang u, og én utgang y.

Oppgave 2

a)

Massebalanse

b)

Finner massen m som en funksjon av nivået h, og tar den tidsderiverte av dette, løser til slutt for $\dot{h}$:

$$
\begin{aligned}
m &= h\rho A \\
\dot{m} &= \dot{h}\rho A \\
w_i - w_u &= \dot{h}\rho A \\
w_s(t-\tau) - w_u &= \dot{h}\rho A \\
K_u u(t-\tau) - w_u &= \dot{h}\rho A \\
\dot{h} &= \frac{1}{\rho A}\left(K_u u(t-\tau) - w_u\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\dot{h} &= \frac{1}{\rho A}\left(K_u u - w_u\right) \\
&= \frac{1}{\rho A}\left(K_u K_p \left(h_r - h\right) - w_u\right)
\end{aligned}
$$

Finner stasjonæravviket $e_s = h_r - h$ ved å sette $\dot{h} = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\rho A}\left(K_u K_p e_s - w_u\right) \\
K_u K_p e_s &= w_u \\
e_s &= \frac{w_u}{K_u K_p} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

d)

Store K_p-verdier vil gi veldig store utslag på u. I praksis vil dette føre til at pådragsorganet går i metning. Dette kan gi opphav til ustabilitet.

e)

PI-regulator er gitt ved

$$u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Innsatt i systemet vårt:

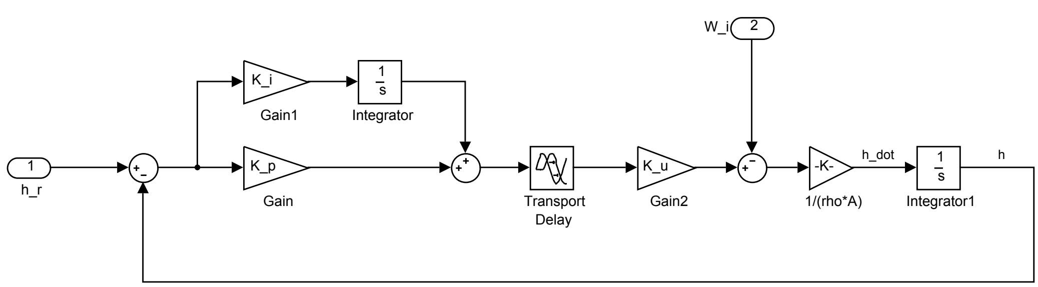
$$\dot{h} = \frac{1}{\rho A}\left[K_u\left(K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau\right) - w_u\right]$$

Den tidsderiverte gir

$$\begin{aligned}
\ddot{h} &= \frac{1}{\rho A}\left[K_u\left(K_p \dot{e} + K_i e\right) - 0\right] \\
0 &= K_u\left(K_p \dot{e}_s + K_i e_s\right) \\
0 &= K_u\left(K_p 0 + K_i e_s\right) \\
e_s &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

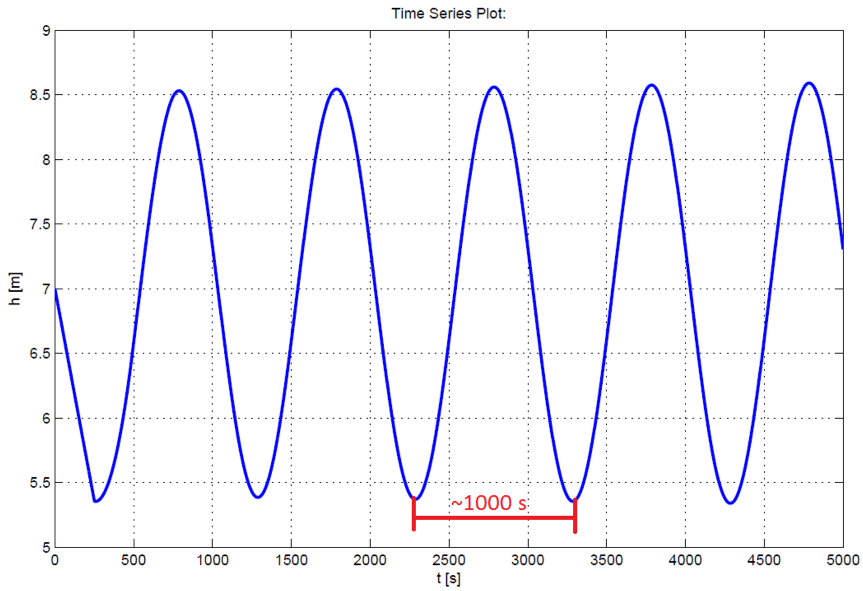
Hvor vi har brukt $\dot{e}_s = \dot{h}_r - \dot{h}_s = 0 - 0 = 0$.

f)



Figur 1: Blokkdiagram laget i Simulink.

g)



Figur 2: Kritisk periode $T_k = 1000\,\mathrm{s}$

Fra Figur 2 har vi $T_k = 1000\,\mathrm{s}$. Fra oppgaveteksten har vi $K_{pk} = 24.5$. Settes inn i tabell.

$$K_p = 9.8 \tag{6}$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{9.8}{800} = 0.01225 \tag{7}$$

h)

Dette vil øke tidsforsinkelsen i systemet, som igjen vil føre til dårligere ytelse og mulighet for ustabilitet.

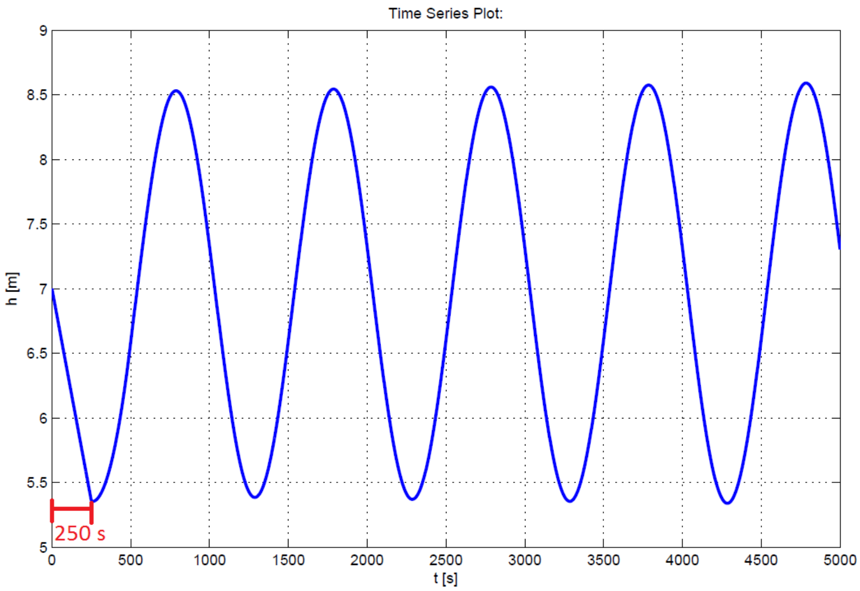
i)

F.eks. båndvekt (her er det flere riktige svar).

j)

Vektmåling i bunn, eller ultralyd/radar ovenifra.

k)



Figur 3: Tidsforsinkelse $\tau = 250\,\mathrm{s}$

Oppgave 3

a)

PD-regulator $u = -K_p\theta - K_d\dot{\theta}$ satt inn i modellen gir

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = \ddot{\theta} &= \frac{1}{J}\left(u - d\dot{\theta}\right) \\ J\ddot{\theta} &= -K_p\theta - K_d\dot{\theta} - d\dot{\theta} \\ J\ddot{\theta} + K_p\theta + K_d\dot{\theta} + d\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

b)

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{9}$$

Vi ønsker $\omega_0 = 5$ og $\zeta = 1$ (kritisk demping). Sammenligner (8) med (9), og finner

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_0 &= \frac{1}{J}(K_d + d) \\ K_d &= 2 \cdot 1 \cdot 5J - d \\ K_d &= 10J - d \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{K_p}{J}\\ K_p &= 5^2 J\\ K_p &= 25J \end{aligned} \tag{11}$$

c)

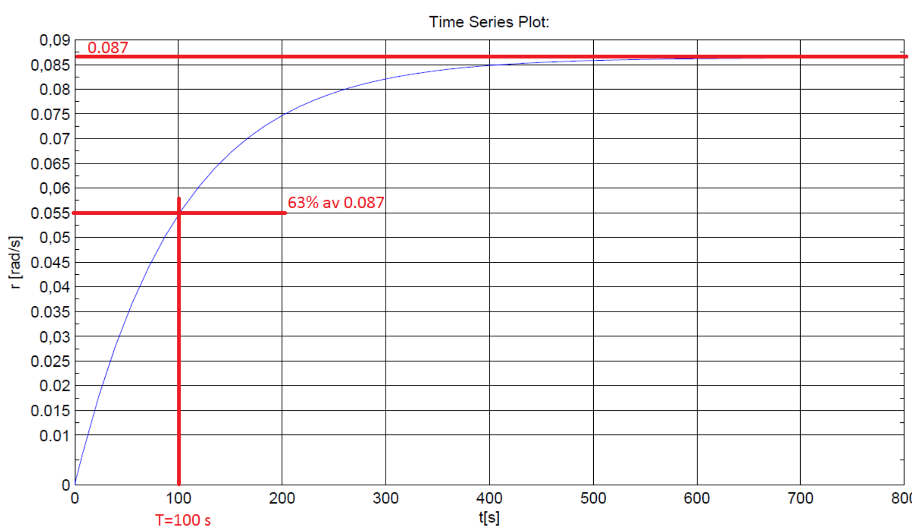
Se teoridelen tilhørende legolaben.

d)

Man får drift i vinkelen. Effekten av dette kan reduseres ved kalibrering av sensor / estimere bias og kompensere, eller å bruke en dødsone (dette vil dog kun hjelpe ved små utslag på gyroen).

Oppgave 4

a)



Figur 4: Sprangrespons lasteskip

Fra figuren ser vi at $T = 100\,\mathrm{s}$ og $K = \frac{0.087}{\pi/8} \simeq 0.22$.

b)

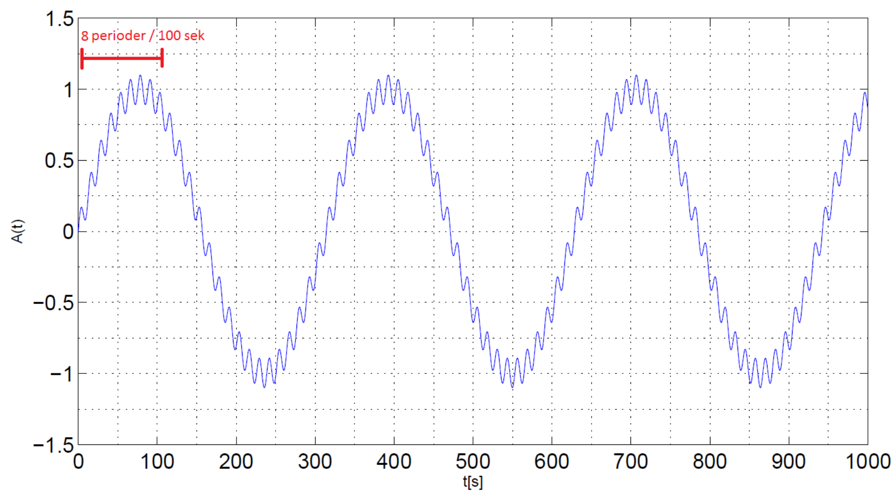
Vi har

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{a} \\ a &= -0.01 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{b}{a} \\ b &= -aK \\ &= 0.01 \cdot 0.22 \\ &= 0.0022 \end{aligned} \tag{13}$$

Oppgave 5

a)



Figur 5: Identifisering av høyeste frekvens

Fra figuren ser vi at den hurtigste frekvensen i signalet er $f_{max} = \frac{8}{100\,\mathrm{s}} = 0.08\,\mathrm{hz}$. Tastefrekvensen f_s må dermed være minst

$$f_s = 2 f_{max} = 0.16\,\mathrm{hz}$$

b)

Nedfolding (se kompendiet for detaljer).