TFE4101
KRETS- OG DIGITALTEKNIKK

Introduksjon til Boolsk algebra

Gajski:
- Kap 3.1-3.3: Boolsk algebra
- Kap. 3.4: Boolske funksjoner

Boolsk algebra

- Et matematisk system defineres ved hjelp av
  - et sett av elementer
  - et sett av operatorer
  - et antall aksiomer (påstander uten bevis)
- Eks: *Ordinær* algebra
  - elementsette R (reelle tall)
  - fire operatorer (+, -, **•**, ***/***)
  - et sett av aksiomer
- (To-verdi) Boolsk algebra defineres ved hjelp av
  - elementsettet B = {0,1}
  - to (tre) operatorer **OR (+)**, **AND (•)** (og **NOT**)
  - et sett av aksiomer

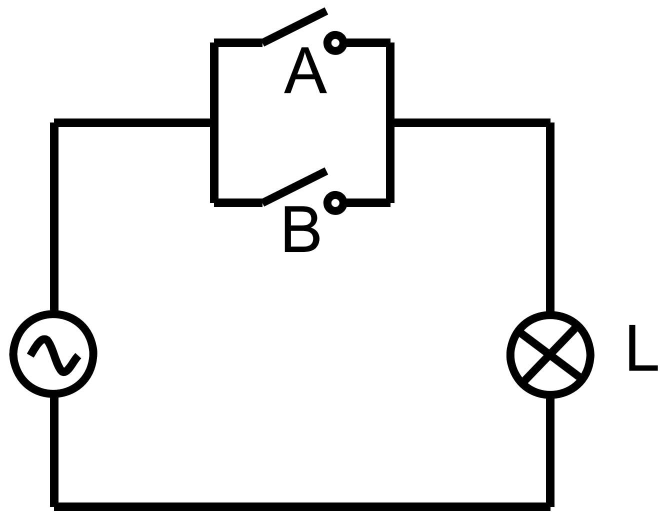
Operatorer

OR **(+)**

x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

”x eller y”

Strømkrets-analogi:



Lampen L lyser når
bryter A er sluttet
eller
bryter B er sluttet

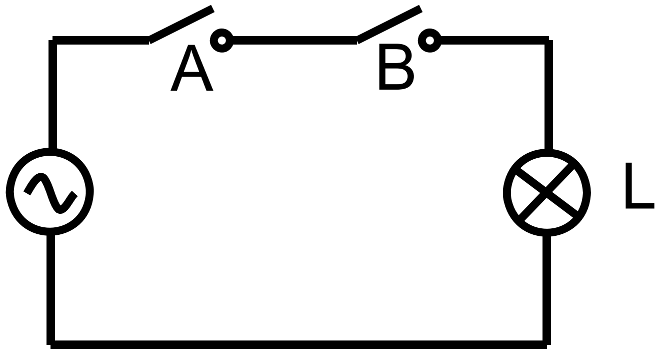
Operatorer

AND (•)

x	y	x • y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

”x og y”

Strømkrets-analogi:



Lampen L lyser når
bryter A er sluttet
og
bryter B er sluttet

Operatorer

NOT **(’)**

x	x’
0	1
1	0

”ikke x”
”x ikke”

Aksiomer (et utvalg)

Aksiom 2: Identitetselement *e*

$e \square x = x \square e = x$ (eksisterer $e \in B$ slik at for hver $x \in B$)
($\square$ er en binær operator)

a) 0 er identitetselementet for operatoren +

Fra OR-tabellen: 0 + 0 = 0 og 0 + 1 = 1 + 0 = 1

(viser at 0 + x = x + 0 = x)

x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b) Hva er identitetselementet for operatoren • **?**

x	y	x • y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dualitet i Boolsk algebra

Et postulat som gjelder for en av de to operatorene (+ og •) gjelder også for den andre operatoren dersom også identitetselementet byttes om.

Eks:

$$0 + y = y \quad \xleftrightarrow{\text{dualitet}} \quad 1 \bullet y = y$$

Aksiomer (et utvalg)

<u>Aksiom 4: Distributiv egenskap</u>

$$x \square (y \lozenge z) = (x \square y) \lozenge (x \square z) \qquad (x,y,z \in B)$$

a) • er distributiv over +

$$x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$$

Vist ved sannhetstabell

b) + er distributiv over •

$$x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$$

Direkte fra dualitetsegenskapen til Boolsk algebra

MERK: I vanlig algebra er ikke + distributiv over •

Aksiomer (et utvalg)

Inverst element

$x \square y = e$ (for alle $x \in S$ eksisterer en $y \in S$)

For + i ordinær algebra er -x inverst element til x

$x + (-x) = 0$ ($e = 0$ for +)

For • i ordinær algebra er 1/x inverst element til x

$x \bullet (1/x) = 1$ ($e = 1$ for •)

I Boolsk algebra eksisterer ikke inverse elementer og følgelig heller ikke operasjoner svarende til subtraksjon og divisjon

Aksiomer (et utvalg)

<u>Aksiom 5: Komplement</u>

a) For hver $x \in B$ eksisterer $x' \in B$ slik at
   a) $x + x' = 1$
   b) $x \bullet x' = 0$

- 0 og 1 er komplementer til hverandre
- x' kalles komplementet til x
- x' kalles også *logisk inverterte* til x
- $\overline{x}$ brukes ofte i stedet for x'

MERK: I ordinær algebra eksisterer ikke komplementer

NTNU

Gruppeoppgave

Hvilke verdier kan X og Y ta for at følgende skal være sant:

$$(X + Y) \bullet (\overline{X} + \overline{Y}) = 1$$

Teoremer

- 1a) $x + x = x$
  1b) $xx = x$
- 2a) $x + 1 = 1$
  2b) $x \cdot 0 = 0$
- 3a) $yx + x = x$ (absorpsjon)
  3b) $(y + x)x = x$
- 4 $(x')' = x$ (involusjon)
- 5a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiativ regel)
  5b) $x(yz) = (xy)z$
- 6a) $(x + y)' = x'y'$ (De Morgans lov)
  6b) $(xy)' = x' + y'$
  $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)' = x_1' \cdot x_2' \cdot \ldots \cdot x_n'$ (Generalisering av
  $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)' = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$ De Morgans lov)

Gruppeoppgave

- Vis at (A + B)’ = A’B’
- Benytt sannhetstabell

Begreper i Boolsk algebra

- Logiske operatorer:

  •, +, ’

- Logiske konstanter / verdier:

  1 (”Sann”, ”True”)

  0 (”Usann”, ”False”)

- Logiske variable:

  A, x, y, …

  A, x, y kan anta verdiene 0 eller 1

- Komplement:

  A’

  Komplementet til A eller logisk invertert til A

- Literaler:

  A, A’, x, x’ …

  en variabel eller dens komplement

Boolske funksjoner

- Binære variable
- Operatorer + , •, ’
- Paranteser
- Likhetstegn

3. 4. 2. 1.

$$F = x' \bullet y + x \bullet (y' + z)$$

$$F_1 = x \bullet y + x \bullet y' \bullet z + x' \bullet y \bullet z = x \bullet y + x \bullet \overline{y} \bullet z + \overline{x} \bullet y \bullet z$$

- Variablene x, y og z kan anta verdiene 0 og 1
- For gitte verdier av variablene har F_1 enten verdien 0 eller 1
- F_1 er 1 dersom

  x = 1 og y = 1

  eller

  x = 1 og y = 0 og z = 1

  eller

  x = 0 og y = 1 og z = 1

F_1 er 0 ellers

Boolske funksjoner

- Alternativ definisjon: sannhetstabell

$$F_1 = x \bullet y + x \bullet \overline{y} \bullet z + \overline{x} \bullet y \bullet z$$

Rad nr.	x	y	z	F_1	$\overline{F_1}$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

Komplementet til Boolske funksjoner

- $\overline{F}_1$ har verdien 0 der F_1 har verdien 1 og verdien 1 der F_1 har verdien 0

$$\overline{F}_1 = \overline{xy + x\bar{y}z + \bar{x}yz}$$

$$= (\overline{xy})(\overline{x\bar{y}z})(\overline{\bar{x}yz})$$

Bruker De Morgan

$$= (\bar{x} + \bar{y})(\bar{x} + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})$$

Bruker De Morgan

Boolske funksjoner

$$F_1 = x \bullet y + x \bullet \overline{y} \bullet z + \overline{x} \bullet y \bullet z$$

- F_1 har
  - 3 produktledd
  - 1 summeledd
- $x \bullet y$ har
  - 2 literaler
- $x \bullet \overline{y} \bullet z$ og $\overline{x} \bullet y \bullet z$ har
  - 3 literaler

Karakteriserer funksjonens kompleksitet og kostnad ved implementasjon

Algebraisk manipulasjon

- Vis ekvivalens mellom

$$F_1 = xy + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

og $$F_1 = xy + xz + yz$$

- Metode 1: Sannhetstabell
- Metode 2: Algebraisk mainpulasjon
  - Bruke aksiomer og teoremer fra Boolsk algebra
  - Omform det ene uttrykket til det er identisk med det andre

$$xy + x\bar{y}z + \bar{x}yz = xy + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

absorbsjon
a = a + ab

$$= xy + x(y+\bar{y})z + \bar{x}yz$$

distributivitet
ab + ac = a(b+c)

$$= xy + x1z + \bar{x}yz$$

komplement
$a + \bar{a} = 1$

Algebraisk manipulasjon

Fra forrige side	$= xy + x1z + \bar{x}yz$	
	$= xy + xz + \bar{x}yz$	identitet $a1 = a$
	$= xy + xyz + xz + \bar{x}yz$	absorbsjon $a = a + ab$
	$= xy + xz + xyz + \bar{x}yz$	assosiativitet $(a+b)+c = a+(b+c)$
	$= xy + xz + (x + \bar{x})yz$	distributivitet $ab + cb = (a+c)b$
	$= xy + xz + 1yz$	komplement $1 = a+\bar{a}$
	$= xy + xz + yz$	identitet $1a = a$

Kostnad ved implementering

- $F_1 = xy + x\bar{y}z + \bar{x}yz$
  - 3 produktledd
  - 1 summeledd
  - xy har 2 literaler
  - $x\bar{y}z$ og $\bar{x}yz$ har 3 literaler hver
  - krever 5 AND-operatorer, 2 OR-operatorer og 2 NOT-operatorer
- $F_1 = xy + xz + yz$
  - 3 produktledd
  - 1 summeledd
  - alle produktledd har 2 literaler
  - krever 3 AND-operatorer og 2 OR-operatorer
- Manipulert versjon av F_1 har lavere kostnad ved implementasjon

- Generelt:
  - antall literaler - 1 = antall AND og OR operatorer
  - antall forskjellige inverterte literaler = antall NOT operatorer

Gruppeoppgave

Gitt:

$F = (x + y) \cdot (x + \bar{y})$

Finn en forenklet ekvivalent versjon av F med lavere implementeringskostnad