Øving 1

Oppg 1

a) En ganske enkel måte å se dette på er ved å skrive $y = y(x)$ - ?

For (1) får vi:

$$\frac{x_1}{y_1} = \begin{cases} t/t & -1 \leq t \leq 0 \\ 2t/2t & 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = 1 \qquad -1 \leq t \leq 1/2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_1(x) = x$$

For (2) får vi

$$\frac{x_2}{y_2} = \begin{cases} t^5/t^5 & -1 \leq t \leq 0 \\ 16t^4/16t^4 & 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{x_2}{y_2} = 1 \qquad -1 \leq t \leq 1/2$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = y_2(x) = x$$

Siden $y_1(x) = y_2(x)$ angir de samme kurve.

b) $x(t) = t^5$, $y(t) = t^4|t|$

C er gitt ved

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^5, t^4|t|)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(5t^4, t^4 \cdot \frac{|t|}{t} + 4t^3|t|\right)$$

$$= (5t^4, 5t^3|t|)$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(5t^4)^2 + (5t^3|t|)^2}$$

$$= 5\sqrt{t^8 + t^8} \qquad (|t|^2 = t^2)$$

$$= 5\sqrt{2}\,t^4$$

Bruker $\vec{v}(t)$ og $|\vec{v}(t)|$ til å regne ut og sjekke om enhetstangentvektoren er kontinuerlig.

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$$

$$= \left(\frac{5t^4}{5\sqrt{2}t^4}, \frac{5t^3|t|}{5\sqrt{2}t^4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|t|}{t}\right)$$

$\hat{T}(t)$ er ikke kontinuerlig i $t=0$ pga $\frac{|t|}{t}$ komponenten, som hopper fra/til -1 til/fra 1 der.

oppg 2

a) Lengden av C er gitt ved

$$S = \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| dt$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-\sin t + t\cos t + \sin t,\ \sin t + t\sin t - \sin t)$$

$$= (t\cos t,\ t\sin t)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| = \sqrt{t^2\cos^2 t \quad t^2\sin^2 t}$$

$$= |t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= |t|$$

$$= t \quad \text{fordi } t \geq 0.$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} t\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi}$$

$$S = 2\pi^2$$

Buelengden er $2\pi^2$

b) Det viktigste å legge merke til her er måten C beveger seg i xy-retningene.

$x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$

Det sier oss at C går i sirkel hvis vi ignorerer z aksen. $z(t)$ øker og siden intervallet $0 \le t \le 2\pi$ er stort nok til $x(t)$ og $y(t)$ år gått en hel sirkelbane, vil økningen i z gjøre at sirkelbanen jobber seg oppover.

En sirkelbane med høyde må være en sylinder.

Tangent til C har samme retning som den deriverte av $\vec{r}(t)$ i t_0.

$$C: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$$

Vi kan da lage et uttrykk for tangent L slik:

$$L: \vec{r}(t_0) + t\vec{v}(t_0)$$

$$= (\cos t_0, \sin t_0, 2t_0) + t(-\sin t_0, \cos t_0, 2)$$

$$\underline{L: \vec{p}(t) = (\cos t_0 - t\sin t_0, \sin t_0 + t\cos t_0, 2t_0 + 2t)}$$

L vil skjære xy-planet når z-komponenten er 0.

$$2t_0 + 2t = 0$$

$$t = -t_0$$

Altså ved $t = -t_0$.

Det gi at L skjærer xy-planet i
$(\cos t_0 + t_0 \sin t_0, \sin t_0 - t_0 \cos t_0, 0)$

Oppg 3

La $F(x,y) = \dfrac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$

$f(r,\theta)$ er F skrevet med polarkoordinater

$$f(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$= \frac{\sin(2\cos\theta) - 2r\cos\theta + r\sin\theta}{r^3\cos^3\theta + r\sin\theta}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \iff \lim_{r\to 0} f(r,\theta)$$

Siden vi ser på grensen når $r \to 0$ vil jeg skrive om $f(r,\theta)$ til å bli litt mer håndterbar.

$\sin(x)$ Kan skrives som
$$\sin(x) = x + O(x^3)$$

$$\Rightarrow f(r,\theta) = \frac{\cancel{2r\cos\theta} + O(2^3 r^{3}\cos^3\theta) - \cancel{2r\cos\theta} + r\sin\theta}{r^{3}\cos^3\theta + r\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{r^2\cos^3\theta + \sin\theta} + \frac{O(2^3 r^2\cos^3\theta)}{r^2\cos^3\theta + \sin\theta}$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} + 0$$
$$= 1$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 1$$

Grenseverdien eksisterer.