TMA4100, Innlevering 2

Rendell Cale

Oppg 1

"Vil løse initialverdiproblemet:"

$$y''(x) = \frac{3x}{(16-x^2)^{3/2}}$$

$$y'(0) = \frac{23}{4}$$

$$y(0) = \pi$$

Begynner med å regne ut $y'(x)$

$$y'(x) = \int y''(x)\,dx$$

$$y'(x) = \int \frac{3x}{(16-x^2)^{3/2}}\,dx \quad , \quad \text{definerer } u = 16-x^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

Dette gir:

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$y'(x) = \int \frac{3x}{u^{3/2}} \cdot \frac{du}{-2x}$$

$$= -\frac{3}{2}\int u^{-3/2}\,du = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} u^{-\frac{3}{2}+1} + C$$

$$y'(x) = 3u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{3}{\sqrt{16-x^2}} + C$$

$$y'(0) = \frac{3}{\sqrt{16-0^2}} + C = \frac{23}{4} \Leftrightarrow C = \frac{20}{4} = 5$$

$$y'(x) = \frac{3}{\sqrt{16-x^2}} + 5$$

Regner nå ut $y(x)$

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{16-x^2}} + 5\right) dx$$

$$\sqrt{16-x^2} = 4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

$$y(x) = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx + \int 5\,dx$$

Observasjon: $\frac{d}{dx} \arcsin(f) = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot \frac{d}{dx} f$

Dette gir at $\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} 4\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx = 4\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + C'$$

$$y(x) = 3 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + 5x + C$$

$$y(0) = 0 + 0 + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi$$

$$\underline{\underline{y(x) = 3\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + 5x + \pi}}$$

Oppg 2

$$f(x) = \begin{cases} A & , x = 2 \\ (x-2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-2}\right) & , x \neq 2 \end{cases}$$

Observasjon: $(x-2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-2}\right)$ er en periodisk funksjon hvor amplituden blir styrt av $(x-2)^2$-komponenten. Siden cosinus-komponenten svinger mellom 1 og -1 vil hele uttrykket svinge mellom $(x-2)^2$ og $-(x-2)^2$

$$\Rightarrow -(x-2)^2 \leq (x-2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-2}\right) \leq (x-2)^2$$

Antagelse: Det finnes en A slik at ulikheten over gjelder for hele $f(x)$.

Da kan vi skrive:

$$-(x-2)^2 \leq f(x) \leq (x-2)^2$$

Hvis vi setter $x=2$ får vi:

$$-(2-2)^2 \leq f(2) \leq (2-2)^2$$

$$0 \leq A \leq 0$$

Skviseteorem gir da at $A = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 2 \\ (x-2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{x-2}\right) & , x \neq 2 \end{cases}$$

Oppg 3

$f(x) = x^4 - 4x - 2$

1) "Vil vise at f er strengt voksende/synkende på visse intervaller"

$f'(x) = 4x^3 - 4$

Observasjon 1: $f'(1) = 0$

— " — 2: $f'(x) > 0$ for $x > 1$

— " — 3: $f'(x) < 0$ for $x < 1$

Konklusjon 1: f er strengt voksende på intervallet $x > 1$

f er strengt synkende på intervallet $x < 1$

Dette medfører at: f krysser x-aksen maks 1 gang på intervallet $x > 1$

og: f krysser x-aksen maks 1 gang på intervallet $x < 1$

2) "Vil vise at f krysser x-aksen på de gitte intervallene"

Observasjon 1: $f(-1) = (-1)^4 - 4(-1) - 2 = 3 > 0$

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$

Observasjon 2: $f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 - 2 = -5 < 0$

$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 2 = 6 > 0$

Observasjon 3: f er kontinuerlig for alle x.

Konklusjon 1: Siden f er kont. og $f(-1) > 0$ og $f(0) < 0$ må f ha minst ett nullpunkt på intervallet $[-1, 0]$

Konklusjon 2: Siden f er kont. og $f(1) < 0$ og $f(2) > 0$ må f ha minst ett nullpunkt på intervallet $[1, 2]$.

Punkt 1 beviste at f har maks et nullpunkt for $x > 1$ og punkt 2 beviste at det hadde minste ett nullpunkt på $[1,2]$

$\Longrightarrow$ f har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[1,2]$

Samme tankegang gir at f har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[-1, 0]$.

b) Velger $x_0 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $f(x) = x^4 - 4x - 2$
$f'(x) = 4x^3 - 4$

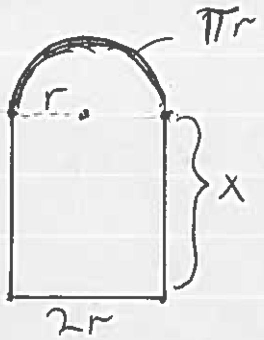
Kommentar: bruker kalkulator for å regne ut iterasjonene til x_n

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{f(3/2)}{f'(3/2)} \approx 1{,}8092\ldots$$

$$x_2 = 1{,}73417\ldots$$
$$x_3 = 1{,}72779\ldots$$
$$x_4 = 1{,}72775\ldots$$

$$f(\bar{x}) \approx 0 \Leftarrow \bar{x} = x_4 = 1{,}7278$$

oppg 4



Omkrets = 10m

"Vil velge x og r slik at arealet blir størst mulig"

Omkrets: $10 = 2r + 2x + \pi r$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 - 2r - \pi r}{2}$$

Areal: $2r \cdot x + \frac{1}{2}\pi r^2$

$$\Leftrightarrow 2r \cdot \frac{(10-2r-\pi r)}{2} + \frac{1}{2}\pi r^2 = A(r)$$

$$\Leftrightarrow 10r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow 10r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = A(r)$$

Ønsker å velge r slik at A(r) blir størst mulig.

$$\frac{d}{dr}A(r) = \frac{d}{dr}\left(10r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2\right)$$

$$A'(r) = 10 - 4r - \pi r = 10 - r(4+\pi)$$

Setter $A'(r) = 0$

$$0 = 10 - r(4+\pi)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{10}{4+\pi}$$

$A_{maks} = A\left(\frac{10}{4+\pi}\right)$

Bredde: $2r = 2 \cdot \frac{10}{4+\pi} \approx 2{,}8\,m$

Høyde: $x = \frac{10 - 2 \cdot \frac{10}{4+\pi} - \pi \cdot \frac{10}{4+\pi}}{2} \approx 1{,}4\,m$

Rektangelet må ha bredde 2,8m og høyde 1,4m.