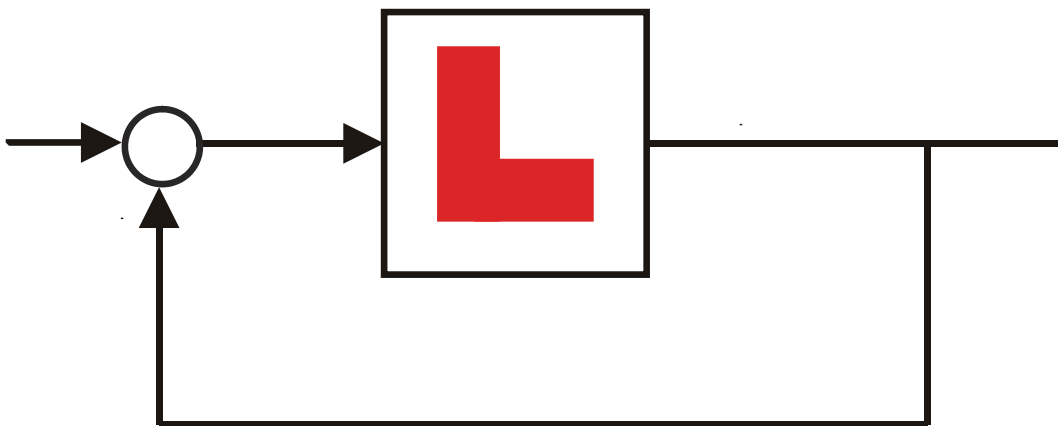


# KYBERNETIKK INTRODUKSJON:

## Innføring i dynamikk og reguleringsteknikk



Jan Tommy Gravdahl  
Institutt for teknisk kybernetikk, NTNU

Januar 2014

# Innhold

<b>1</b>	<b>Forord</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>7</b>
2.1	Hva er kybernetikk? . . . . .	7
2.2	Hva er reguleringsteknikk? . . . . .	7
2.3	Vesentlige begreper og definisjoner . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Diff.ligninger og mat. modellering</b>	<b>11</b>
3.1	Introduksjon . . . . .	11
3.2	Differensialligninger . . . . .	11
3.2.1	Introduksjon . . . . .	11
3.2.2	Tilstandsromsform . . . . .	12
3.2.3	Likevektspunkt . . . . .	13
3.2.4	Modellering . . . . .	13
3.2.5	Førsteordens differensialligninger . . . . .	21
3.2.6	Andreordens differensialligninger . . . . .	27
3.2.7	Differensialligninger av høyere orden . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Dynamiske systemer</b>	<b>35</b>
4.1	Introduksjon . . . . .	35
4.2	Stasjonær respons . . . . .	36
4.3	Transient respons . . . . .	38
4.3.1	Førsteordens systemer . . . . .	38
4.3.2	Andreordens systemer . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Blokkdiagrammer</b>	<b>43</b>
5.1	Introduksjon . . . . .	43
5.2	Blokker . . . . .	43

5.2.1	Funksjonsgenerering . . . . .	44
5.2.2	Multiplikasjon . . . . .	44
5.2.3	Addisjon og subtraksjon . . . . .	44
5.2.4	Integrasjon . . . . .	44
5.3	Sammensatte blokkdiagrammer . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Simulering, Matlab og Simulink</b>	<b>49</b>
6.1	Simulering . . . . .	49
6.2	Simulink . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Innføring i reguleringsteknikk</b>	<b>59</b>
7.1	Innledning . . . . .	59
7.2	Tilbakekobling . . . . .	60
7.2.1	P-regulator . . . . .	60
7.2.2	Integralvirkning, PI-regulator . . . . .	62
7.2.3	Demping, PD-regulator . . . . .	66
7.3	Foroverkobling . . . . .	68
7.4	Tidsforsinkelse . . . . .	72
7.5	Valg av regulatorparametere . . . . .	74
7.5.1	Polplassering . . . . .	74
7.5.2	Ziegler-Nichols' metoder . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Stabilitet</b>	<b>83</b>
8.1	Definisjon . . . . .	83
8.2	Stabilitet for lineære systemer . . . . .	86
8.2.1	Systemer av første orden . . . . .	86
8.2.2	Systemer av andre orden . . . . .	87
8.3	Andre systemer . . . . .	92
8.4	Stabilisering . . . . .	92
<b>9</b>	<b>Ulineære systemer</b>	<b>95</b>
9.1	Ulineære fenomener . . . . .	95
9.1.1	Metning . . . . .	96
9.1.2	Dødsone . . . . .	96
9.2	Ulineær regulering . . . . .	97

<b>10 Måling av resistans og kapasitans</b>	<b>101</b>
10.1 Resistans . . . . .	101
10.1.1 Direkte måling av resistans . . . . .	101
10.1.2 Indirekte måling av resistans . . . . .	102
10.2 Kapasitans . . . . .	107
10.3 Lys og optiske sensorer . . . . .	108
10.3.1 Emisjonsceller . . . . .	109
10.3.2 Magnetfelt . . . . .	111
<b>11 Mekaniske sensorer</b>	<b>113</b>
11.1 Måling av posisjon . . . . .	113
11.1.1 Potensiometer . . . . .	113
11.1.2 Kapasitive sensorer . . . . .	113
11.1.3 Strekkklapper . . . . .	115
11.1.4 Måling av nivå . . . . .	119
11.2 Måling av strømning . . . . .	119
11.2.1 Måling av faststoff . . . . .	121
11.2.2 Måling av gass og væske . . . . .	121
<b>12 Signaler og sampling</b>	<b>125</b>
12.1 Digitale og analoge signaler . . . . .	125
12.2 Sampling . . . . .	125
<b>A Komplekse tall</b>	<b>133</b>
A.1 Introduksjon . . . . .	133
A.2 Regneregler . . . . .	135
A.2.1 Komplekskonjugering . . . . .	135
A.2.2 Addisjon og subtraksjon . . . . .	135
A.2.3 Multiplikasjon . . . . .	135
A.2.4 Divisjon . . . . .	136
A.3 Anvendelser . . . . .	136



# Kapittel 1

## Forord

Dette kompendiet er skrevet for bruk i faget TTK4100 Kybernetikk introduksjon som undervises i første semester i første årskurs på masterstudiet i Kybernetikk og robotikk. Jeg vil sette stor pris på tilbakemeldinger om forbedringer, trykkeleif og så videre. En beskrivelse av faget og utviklingen av det er publisert i [5]. En takk rettes til vit.ass. Tore Bjølseth, PhD-student Svein Hovland og Irja Gravdahl for korrekturlesning, forslag til forbedringer og tegning av figurer.

Institutt for teknisk kybernetikk, september 2014  
Jan Tommy Gravdahl



# Kapittel 2

## Introduksjon

### 2.1 Hva er kybernetikk?

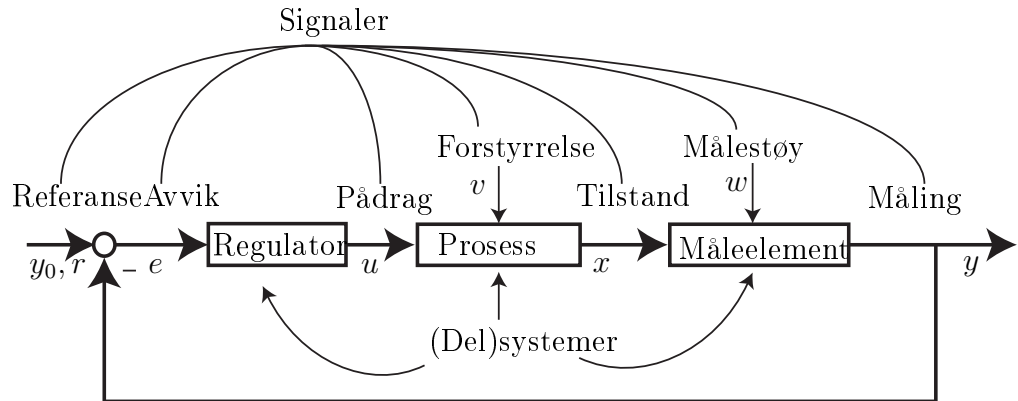
Kybernetikk er vitenskapen og teknologien som omhandler å observere og beskrive dynamikken og samvirket i tekniske prosesser og levende vesener, og ved hjelp av metodebasert styring, aktivt påvirke slike. Begrepet ble lansert i [12] av den amerikanske matematikeren professor Norbert Wiener i 1940-årene. Han hentet navnet til denne nye vitenskapen fra det greske ordet ”kybernetes” som betyr rormann, det vil si den som styrer.

Teknisk kybernetikk er altså et samlebegrep for en rekke tekniske disipliner som har et felles teoretisk metodegrunnlag. Det benyttes avanserte datatekniske virkemidler til utforming av komplekse tekniske systemer for overvåkning og styring av mange slags prosesser i blant annet industri, energi-produksjon, transport og romfart. De samme grunnprinsippene som beskriver naturens reguleringssystemer, gjenfinnes i økonomiske og sosiale systemer og danner basis for forståelse også av tekniske reguleringssystemer. Informasjonsteknologi, med de aller fleste aspekter av ordet, står derfor sentralt i alle fagdisipliner innunder begrepet teknisk kybernetikk.

### 2.2 Hva er reguleringsteknikk?

Reguleringsteknikk er den delen av kybernetikken som har som formål å generere en automatisk påvirkning av et teknisk system eller en prosess slik at man oppnår et ønsket resultat. Reguleringsteknikken omfatter det teoretiske fundament og ingeniørmessige prinsipper for styring av prosesser av vidt





Figur 2.1: Begreper i et reguleringsystem

forskjellig karakter.

## 2.3 Vesentlige begreper og definisjoner

Dette kapitlet er hentet fra boken [1] som er læreboken i faget Regulerings-teknikk, og vi vil her forklare en del begreper som er sentrale i regulerings-teknikken.

Med et **system** skal vi i dette kompendiet forstå en samling av enkeltenheter som påvirker hverandre gjensidig og som til sammen har en funksjon. Med andre ord er det vårt formål som bestemmer hva vi anser å utgjøre systemet, det vil si hvordan vi avgrenser systemet mot omverdenen (i virkeligheten påvirker jo alle “enheter” rundt oss hverandre, selv om påvirkningene kan være svake).

**Dynamiske systemer** er den undergruppen av systembegrepet som er viktigst for regulerings teknikere. At et system er dynamisk betyr at dets indre tilstander endrer seg med tiden på grunn av vekselvirkningene mellom systemets enkeltenheter.

Figur 2.1 gir en oversikt over noen sentrale begreper.

Det som utsettes for et *pådrag* og *forstyrrelser*, karakteriseres ved *tilstander* og observeres gjennom *målinger*, vil betegnes som en **prosess**. Vi bruker “prosess” om det fysiske system som vi betrakter eller skal styre, mens helheten som består av prosess + regulerings elementer da vil utgjøre et (regulerings)system. Eksempel: Et skip kan defineres som en prosess,

mens skipet med autopilot er et system. Nå er ikke dette helt helt konsekvent i litteraturen. Man bruker også “system” om “prosess”, men det går da fram av sammenhengen hva som menes. Dette forekommer også i dette kompendiet. En prosess kan være en del av en framstillingskjede for et produkt, f.eks. en kjemisk reaktor, metallurgisk reaktor eller en maskin som bearbeider egenskaper hos materialer eller enkeltkomponenter. En prosess kan i overført betydning være et fartøy eller en kraftmaskin. Et reguleringsobjekt vil ofte være et ekvivalent begrep til en prosess.

**Tilstander** (eller tilstandsvariable) er sentrale i beskrivelsen av prosesser. En tilstand endrer sin verdi som resultat av en forutgående påvirkning. Et eksempel på en tilstand er temperaturen i en reaktor. Dersom vi endrer oppvarmingen/avkjølingen eller graden av kjemiske reaksjoner i reaktoren, vil temperaturen endre seg. Et annet eksempel: hvis en motor virker på en robotarm, vil robotarmens tilstander være dens posisjon og hastighet, fordi disse størrelsene karakteriserer nå-situasjonen til robotarmen og kan endres. Vi vil heretter bruke  $x(t)$  for å betegne en tilstand. En enkel fartøy-modell f.eks., vil ha to tilstander, hastighet og posisjon.

Et dynamisk system vil oftest være utsatt for påvirkning fra omgivelsene, i vår terminologi kalt **forstyrrelse**. Slike påvirkninger kan være av forskjellig karakter, med har det til felles at de er *utenfor vår kontroll*. Eksempler på forstyrrelser er endring i sammensetningen av råvarer og endring i omgivelsestemperaturen til en reaktor, endring i omgivelsestemperatur rundt en bygning hvor temperaturen skal styres, endring i bølgepåvirkningen eller vindpåvirkningen på et fartøy. Vi bruker  $v(t)$  for å betegne en forstyrrelse.

I motsetning til forstyrrelser har vi *tilsiktete* påvirkninger som skal utføre en styrende funksjon, blant annet å kompensere virkningen av de samme forstyrrelser. En slik påvirkning kalles gjerne et **pådrag**, se Figur 2.1. Eksempler på pådrag er effekttilførsel eller kraftpåvirkning. Vi bruker symbolet  $u(t)$ . Noen ganger bruker vi betegnelsen inngang(svariabel) for pådrag. Pådraget genereres av regulatoren, og vi kan derfor si at en **regulator** er en algoritme som genererer et pådrag.

Man tar ofte **målinger** av de fysiske eller matematiske tilstandene i et system (se Figur 2.1). Men et system kan ha flere tilstander enn det som kan måles med det tekniske utstyret som er tilgjengelig. Målevariablene er som oftest funksjoner av systemets tilstander. Målingene kan være utsatt for målestøy (eller måleusikkerhet, målefeil) som forringer målingen. En “god” måling er gjerne et mål for en tilstand (eller noen få tilstander) i systemet og er lite påvirket av støy. Eksempler på målevariable er spenningen fra et ter-

Begrep	Symbol
Tilstand	$x(t)$
Pådrag	$u(t)$
Måling	$y(t)$
Forstyrrelse	$v(t)$
Målestøy	$w(t)$
Referanse	$r(t)$
Avvik	$e(t)$

Tabell 2.1: Symboler for variable i regulerings-teknikk

moelement (temperaturmåling), bevegelsen av en membran (trykkmåling), induisert spenning i en tacho-generator (hastighetsmåling) eller tidsavstanden mellom utsendt puls og ekko i radar og sonar (avstandsmåling). Vi vil heretter bruke  $y(t)$  for å betegne en måling. Noen ganger bruker vi betegnelsen utgang(svariabel) for måling.

**Referanse** er betegnelsen på den ønskede verdien av en måling og gis symbolet  $y_0$  eller  $r$ . Ofte brukes ordet settpunkt for det samme begrepet, hvis referansen er konstant.

Forskjellen mellom  $y_0$  og  $y$  kalles **avvik** og har symbolet  $e$ .

Tabell 2.1 gir en oversikt over de symbolene som er nevnt ovenfor. Øvrige begreper vil bli definert etterhvert som vi får bruk dem.

# Kapittel 3

## Innføring i differensialligninger og matematisk modellering

### 3.1 Introduksjon

For å kunne designe et reguleringsystem for en fysisk prosess, det være seg en autopilot for et skip, en nivåregulator for en væskebeholder i en kjemisk prosess eller en turtallsregulator for en motor, så har vi behov for å beskrive fenomenet vi skal styre matematisk. Verktøyet vi bruker til dette er differensialligninger.

### 3.2 Differensialligninger

#### 3.2.1 Introduksjon

I kybernetikken bruker vi differensialligninger for å beskrive hvordan tilstander eller variabler varierer med tiden. Den deriverte av en variabel eller tilstand  $x$  kan uttrykkes med forskjellig notasjon. I matematikken har dere møtt formen  $x'$ . En annen måte å skrive dette på, kalt differensialform, er  $\frac{dx}{dy}$  som betyr den deriverte av  $x$  med hensyn på  $y$ . Dette kalles også en første ordens derivert, eller enklere 'den deriverte' (av  $x$ ). Med en andreordens derivert forstår vi

$$x'' = (x')',$$

eller på differensialform

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dette kan generaliseres til å inkludere  $n$ -te ordens deriverte.

En differensialligning er en ligning der deriverte av forskjellig orden inngår. En løsning av en differensialligning vil være en funksjon av den størrelsen det deriveres med hensyn på. En første ordens differensialligning der  $x$  er tilstanden og vi deriverer med hensyn på tiden  $t$  kan skrives som

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3.1)$$

der  $f(x)$  er en generell funksjon av  $x$ . Legg merke til at ligningen beskriver hvordan tilstanden  $x$  varierer med tiden  $t$ . Dette kalles en dynamisk ligning, og vi sier at ligningen beskriver *dynamikken* til systemet.

Innen kybernetikk og reguleringsteknikk benyttes notasjonen med prikker over variabelen som deriveres:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x', \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad osv$$

Når vi bruker prikk-notasjonen er det underforstått at vi deriverer med hensyn på tiden  $t$ . Hvis det skal deriveres med hensyn på en annen størrelse, skrives dette eksplitt, f.eks  $\frac{df}{dz}$ .

### 3.2.2 Tilstandsromsform

Ligning (3.1) kan nå skrives

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.2)$$

Ligning (3.2) er skrevet på det vi kaller for *tilstandsromsform*, eller vi sier at vår matematiske modell er en *tilstandsrommodell*. Slik som (3.2) er skrevet kan som sagt  $f(x)$  være vilkårlig, f.eks  $f(x) = \sin(x) - x^3$ . Vi sier da i så fall at  $f(x)$  er ulineær, og (3.2) er et eksempel på et *ulineært system*. Et eget fag TTK4150 Ulineære systemer er viet dette temaet; det gis i 7. semester. I dette faget skal vi stort sett konsentrere oss om *lineære systemer*, dvs  $f(x)$  er av formen

$$f(x) = ax + b,$$

der  $a$  er en konstant. Som vi ser vil vi, hvis vi plotter  $f(x)$  som en funksjon av  $x$ , få en rett linje med stigningstall  $a$ . Ligning (3.2) kan nå skrives

$$\dot{x} = ax + b, \quad (3.3)$$

der  $x$  er en tilstand og varierer, mens  $a$  og  $b$  er konstante.

### 3.2.3 Likevektspunkt

Et viktig konsept for tilstandsrommodeller er *likevektspunkt*. Et punkt  $x = \bar{x}$  er et likevektspunkt for (3.2), hvis det har den egenskapen at hvis systemet starter i  $\bar{x}$ , vil det forbli i  $\bar{x}$  for all fremtid. For (3.2) er likevektspunktene gitt av de reelle røttene av ligningen  $f(\bar{x}) = 0$ . Merk at ulineære systemer kan ha flere likevektspunkter, mens lineære systemer kun har ett.

### 3.2.4 Modellering

Det å sette opp differensialligninger som beskriver en prosess eller et system kalles matematisk modellering eller bare modellering, og faget TTK4130 Modellering og Simulering er viet dette temaet. Matematisk modellering er en prosess der vi ved å studere et fysisk system ender opp med et sett av differensialligninger som beskriver systemet. Dette lar seg best illustrere med eksempler.

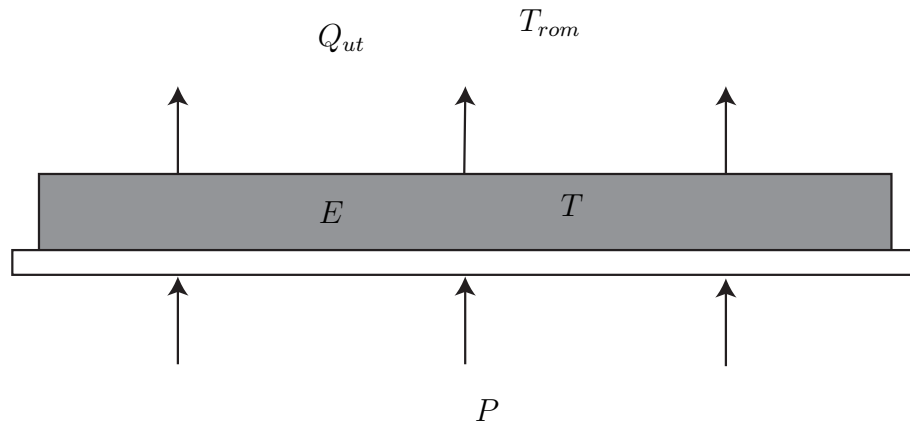
**Example 1** Vi skal se på hva som skjer når vi skrur på en kokeplate. Platen er vist i Figur 3.1.

Det er effekten  $P$  (for eksempel 1400 W på en vanlig ovn) vi tilfører platen som bestemmer hva slags temperatur vi får på platen. Grunnlaget for å sette opp en differensialligning for dette fenomenet kaller vi en **energibalanse**. Energibalanser og andre typer balanselover kommer vi tilbake til i modelleringsfaget. Sagt med ord vil dette si at **endringen** i energien  $E$  i kokeplata vil være lik tilført effekt minus avgitt effekt. Under visse forutsetninger er platas temperatur  $T$  proporsjonal med energien  $E$ . Proporsjonalitetskonstanten kalles varmekapasiteten  $C$ , slik at

$$E = CT. \quad (3.4)$$

Endringen i energi, eller temperatur, tilsvarer den tidsderiverte av  $E$ , eller  $T$ . Skrevet som en differensialligning:

$$\dot{E} = P - Q_{ut}. \quad (3.5)$$

Figur 3.1: Kokeplate som styres av en effekt  $P$ .

Energistrømmen, eller den avgitte effekten,  $Q_{ut}$  følger Newtons avkjølingslov<sup>1</sup>:

$$Q_{ut} = k(T - T_{rom}), \quad (3.6)$$

der  $k$  er varmeovergangstallet mellom kokeplata med temperatur  $T$  og lufta i rommet med temperatur  $T_{rom}$ . Ved å kombinere (11.5), (3.5) og (3.6) finner vi

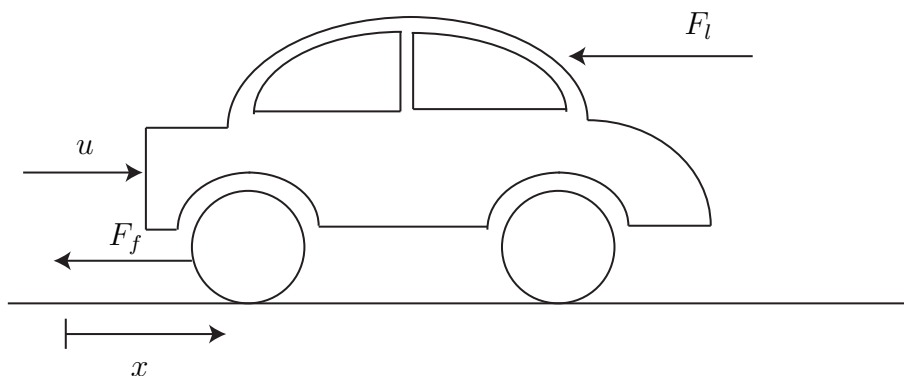
$$\begin{aligned} C\dot{T} &= P - k(T - T_{rom}) \\ \dot{T} &= \frac{P}{C} - \frac{k}{C}(T - T_{rom}) \\ \dot{T} &= -\frac{k}{C}T + \frac{1}{C}(P + kT_{rom}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

der  $\dot{T}$  er den tidsderivate av kokeplatas temperatur. Vi har nå en lineær ligning som har samme form som (3.3) med

$$\begin{aligned} x &= T \\ a &= -k/C \\ b &= (P + kT_{rom})/C. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Dette er et eksempel på at vi benytter allerede etablerte sannheter fra fysikken, eller andre fagfelt, i modelleringen.



Figur 3.2: Forenklet modell av kreftene som virker på en bil i fart.

Det må understrekes at selv om kokeplata er et enkelt eksempel, er selv den enkle differensialligningen (3.7) vi har kommet frem til her en forenkling! Vi har ikke tatt hensyn til varmestråling, varmeovergang til resten av materialene i varmeovnen, varierende romtemperatur, osv. Dette illustrerer at modellering i de aller fleste tilfeller vil gi oss en modell som er en forenkling av det fysiske fenomenet. For vår formål, regulering og styring, er ikke dette nødvendigvis en ulempe. Vi er faktisk avhengige av å ha relativt enkle modeller for å kunne gjøre en analyse av dem. *Det er da viktig at den modellen vi har satt opp er nøyaktig i den forstand at den beskriver det fenomenet vi ønsker å styre.* Dette er en metodikk vi kaller **modellering for regulering**. Det er også slik at godt designede regulatorer vil kunne kompensere for feilene vi har gjort i modelleringen.

**Example 2** Vi skal nå modellere hastigheten til en bil.

Senere skal vi bruke denne modellen for å designe en hastighetsregulator, også kjent som "cruise control", eller hastighetsholder. En slik modell kan baseres på Newtons lov

$$\Sigma F = m\alpha, \quad (3.8)$$

som er en **kraftbalanse**. Vi må også her gjøre forenklinger: De kreftene vi tar med i betraktning er drivkraften fra motoren  $u$  og en friksjonskraft som virker i motsatt retning. Kreftene er vist i Figur 3.2. For enkelhets skyld antar vi at friksjonskraften er proporsjonal med bilens hastighet  $v$ , det vil si

$$F_f = kv,$$



der  $F_f$  er friksjonskraften og  $k$  er proporsjonalitetskonstanten. Vi antar også at bilen kjører i ett gir med konstant skyvkraft  $u$ . Siden akselerasjon er den tidsderivate av hastighet, det vil si

$$\dot{v} = \alpha,$$

kan vi fra (3.8) sette opp ligningen

$$m\dot{v} = u - kv,$$

og videre

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (3.9)$$

Vi har her en førsteordens differensialligning på samme form som (3.3), med

$$\begin{aligned} x &= v \\ a &= -\frac{k}{m} \\ b &= \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Igjen er dette en meget enkel modell, og mange fysiske fenomener er utelatt. For eksempel ville luftmotstand, som er proporsjonal med  $v^2$ , bidratt med et ulineært ledd

$$F_l = -k_l v^2.$$

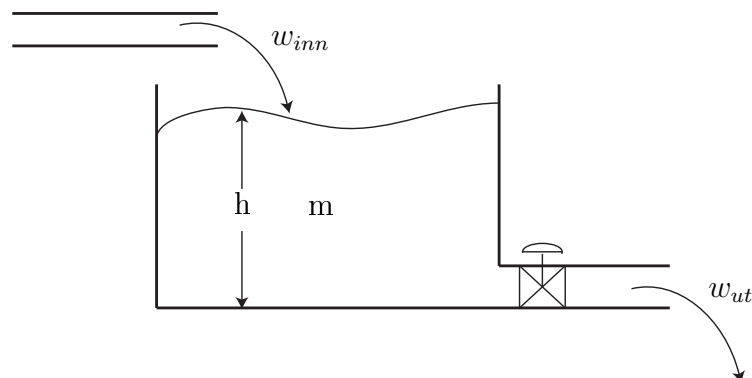
Allikevel vil modellen være nyttig når et reguleringsystem for bilens hastighet skal designes.

**Example 3** Vi skal nå se på et eksempel der en tank eller et kar fylles av en massestrøm, og tømmes av en massestrøm ut av en ventil, se Figur 3.3.

Målet vårt er å finne en differensialligning som beskriver hvordan nivået  $h$  i tanken varierer med tiden. Denne modellen skal vi senere bruke til å designe en regulator som styrer nivået. Nivåregulering er en meget vanlig anvendelse og forekommer i mange prosessanlegg i industrien. Nivået betegnes  $h$ , og tanken har tverrsnittsareal  $A$ . Den samlede massen i tanken vil da til en hver tid være gitt av

$$m = \rho Ah,$$

der  $\rho$  er tettheten i  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . For å modellere dette setter vi opp en **massebalanse**, som sagt med ord betyr at endring (det vil si derivert med hensyn på tid) av



Figur 3.3: Tank med strømning inn og ut.

massen er lik netto (massestrøm inn minus massestrøm ut) massestrøm inn i tanken. Massestrøm har enhet  $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ .

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= w_{inn} - w_{ut} \\ \frac{d(\rho Ah)}{dt} &= w_{inn} - w_{ut} \\ &\Downarrow \text{ (Se kommentar 4) } \\ \dot{h} &= \frac{1}{\rho A} (w_{inn} - w_{ut}).\end{aligned}$$

Under visse forutsetninger (se kommentar 5) kan massestrømmen  $w_{ut}$  ut av ventilen beregnes som

$$w_{ut} = kh,$$

der  $k$  er en konstant, slik at vi nå har en differensialligning for høyden  $h$

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A},$$

og vi ser at den har samme form som (3.3) med

$$\begin{aligned}x &= h \\ a &= -k/\rho A \\ b &= \frac{w_{inn}}{\rho A}.\end{aligned}$$

**Remark 4** Denne overgangen krever at vi antar at både tettheten  $\rho$  og tverrsnittarealet  $A$  er konstante. Hvis dette ikke hadde vært tilfelle, måtte vi ha derivert etter produktregelen og dermed fått med uttrykk for  $\dot{\rho}$  og  $\dot{A}$  i likningen. Væsker kan ofte betraktes som inkompressible, og da er konstant tetthet en fornuftlig antagelse. Hadde det vært en gass vi beregnet massebalansen for, måtte høyst sannsynlig variabel tetthet ha blitt tatt hensyn til. Konstant tverrsnittsareal setter krav til den tanken, eller volumet, vi beregner massebalansen til. Hvordan?

**Remark 5** For å illustrere hva som ligger bak ligningen for massestrømmen gjennom ventilen,  $w_{ut} = kh$ , skal vi gå nærmere inn på dette. Dette eksempelet, som er hentet fra [3] som er læreboken i modellering og simulering, illustrerer at selv om modellen blir en enkel første ordens lineær differensialligning, kan det ligge til dels avansert modellering bak.

Vi antar først at det ikke blir lagret masse i ventilen, slik at massestrøm inn i ventilen  $w_1$  er lik massestrøm ut av ventilen  $w_2$ . Siden væsken antas inkompressibel, vil også volumstrømmen ut være lik volumstrømmen inn, slik at

$$q = v_1 A_1 = v_2 A_2, \quad (3.10)$$

der  $v_1$  og  $v_2$  er strømningshastigheten før og etter ventilen og  $A_1$  og  $A_2$  er tverrsnittsarealet før og etter ventilen. Bernoullis ligning, som dere vil lære om i fluidodynamikk, gir

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}, \quad (3.11)$$

der  $p_1$  og  $p_2$  er trykket før og etter ventilen. Ved å sette (3.10) inn i (3.11) får vi

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right) \right) v_2^2 = \left( 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right) \right) \frac{\rho q_2^2}{2A_2}$$

som kan skrives som

$$q = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(p_1 - p_2)}{1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2}},$$

og vi har fått en ligning for volumstrømmen gjennom ventilen. Hvis strømmingen er ut av et volum, slik som her, kan vi la  $A_1 \rightarrow \infty$  slik at

$$q = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}.$$

Massestrømmen kan nå regnes ut som

$$w = q\rho = \rho A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}.$$

Det antas så at  $p_2$ , trykket på utgangen av ventilen er gitt av atmosfæretrykket,  $p_2 = p_0$ . Videre er det hydrostatiske trykket i bunnen av tanken, som også bestemmer trykket på inngangen av ventilen gitt av  $p_1 = p_0 + \rho gh$ , slik at

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2\rho} A_2 \sqrt{(p_0 + \rho gh - p_0)} \\ &= \sqrt{2g\rho} q A_2 \sqrt{h} \end{aligned}$$

eller

$$w = k' \sqrt{h},$$

der  $k' = \sqrt{2g\rho} q A_2$  er en konstant. Vi ser at massestrømmen varierer som en funksjon av kvadratroten av høyden  $h$ . Siden modellen vår skal være lineær, bruker vi tangenten til kvadratrotkurven, altså en rett linje. Dette er en metode kjent som linearisering og som blir behandlet i mer detalj i faget regulerings-teknikk. Vi ender da opp med et uttrykk

$$w = kh$$

som i eksempelet.

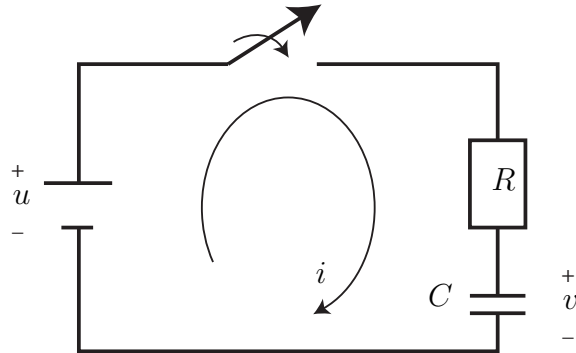
**Example 6** Vi skal i dette eksempelet (som er basert på Eksempel 5.8 i [11]) sette opp en differensialligning som beskriver kretsen som lader blitzen i et kamera. Kretsen består av en spenningskilde  $u$ , en motstand  $R$  og en kondensator med kapasitans  $C$ , og er vist Figur 3.4.

Fra kretsteknikken vet vi at spenningen over kondensatoren, når vi antar at initialspenningen er gitt av  $v_C(0) = 0$ , er gitt av

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt',$$

der  $i_C$  er strømmen gjennom kondensatoren. Ved å derivere med hensyn på tiden finner vi at for en kondensator, så er

$$\frac{dv_C}{dt} = \dot{v}_C = \frac{1}{C} i_C.$$

Figur 3.4: Generell  $RC$ -krets.

Siden strømmen gjennom motstanden er lik strømmen gjennom kondensatoren, det vil si  $i = i_R = i_C$ , har vi at

$$\begin{aligned} i_R &= i_C \\ \frac{u - v_C}{R} &= C\dot{v}_C, \end{aligned}$$

eller

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{RC}u,$$

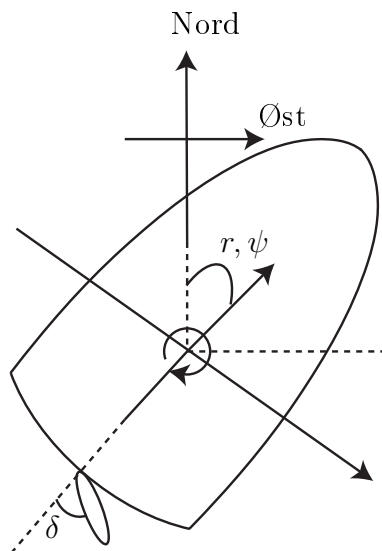
og vi har en ligning som beskriver spenningen over kondensatoren. Vi har nå en lineær ligning som har samme form som (3.3) med

$$\begin{aligned} x &= v_C \\ a &= -\frac{1}{RC} \\ b &= \frac{1}{RC}u. \end{aligned}$$

**Example 7** En av de mest populære modellene for design av autopiloter for båter er Nomotomodellen, se [4] som er læreboken i Fartøystyring. Denne modellen beskriver sammenhengen mellom et fartøys rorvinkel  $\delta$  og girhastighet  $r$ , se Figur 3.5.

Girhastigheten er den hastigheten kursvinkelen  $\psi$  endrer seg med. Dermed er

$$r = \dot{\psi}.$$



Figur 3.5: Definisjon av kursvinkel  $\psi$  og rorvinkel  $\delta$  for et fartøy.

Enheten til  $r$  er  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Nomotomodellen er gitt av

$$\dot{r} = -\frac{1}{T}r + \frac{K}{T}\delta.$$

For et lasteskip kan for eksempel konstantene i modellen ha verdiene  $K = 0.185$  og  $T = 107.3$ . Modeller som dette og design av regulatorer for dem, det vil si autopiloter, er tema i faget TTK4190 Fartøystyring. Grunnen til at denne modellen brukes så mye, er dens enkelhet og det at den beskriver virkeligheten veldig godt.

### 3.2.5 Førsteordens differensialligninger

Det vi bør legge merke til på dette tidspunkt er det faktum at i de fem foregående eksemplene, som er hentet fra forskjellige fagområder som termodynamikk, mekanikk, fluiddynamikk, kretsteknikk og hydrodynamikk, så ender vi opp med modeller som har akkurat samme form: De er første ordens differensialligninger. Dette illustrerer hvor viktig denne ligningsformen er, og rettferdiggjør at vi ser litt nærmere på den. I første omgang skal vi lære hvordan vi finner løsningen til disse ligningene.

**Løsning av førsteordens differensialligninger**

Innen reguleringsteknikken er det egentlig sjelden at vi har behov for å løse differensialligninger eksplisitt. Dessuten vil ulineære differensialligninger med mange tilstander generelt sett være uløselige. Mye av analysen gjøres på differensialligningene uten å løse dem. Det vil allikevel være nyttig å finne løsningen på første ordens lineære ligninger, siden løsningen naturlig nok kan fortelle oss mye om egenskapene til systemet. Ligningen (3.3) er separabel, og for å løse den gjør vi som følger:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= ax + b \\
 \frac{dx}{dt} &= ax + b \\
 \int \frac{1}{ax+b} dx &= \int dt \\
 \frac{1}{a} \ln |ax+b| &= t + C_1 \\
 |ax+b| &= e^{a(t+C_1)} \\
 ax+b &= e^{at} e^{aC_1} \\
 x &= Ce^{at} - \frac{b}{a}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Konstanten  $C = \frac{e^{aC_1}}{a}$  er i utgangspunktet en vilkårlig konstant, men hvis ligningen vår har en initialverdi, dvs  $x(0) = x_0$  er gitt, så vil  $C$  være påvirket av denne verdien:

$$x(0) = Ce^{a \cdot 0} - \frac{b}{a} = x_0 \implies C = x_0 + \frac{b}{a}.$$

Løsningen til differensialligningen (3.3) er dermed gitt av

$$\begin{aligned}
 x &= \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a} \\
 x &= x_0 e^{at} + \frac{b}{a} e^{at} - \frac{b}{a} \\
 x &= x_0 e^{at} + \frac{b}{a} (e^{at} - 1)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Hvis vi nå for enkelhets skyld setter  $b = 0$ , ser vi at differensialligningen

$$\dot{x} = ax$$

vil ha løsningen

$$x = x_0 e^{at}. \quad (3.14)$$

I dette forenklede tilfellet ville vi hatt  $C = x_0$ .

Denne særdeles enkle ligningen kan beskrive veldig mange fysiske prosesser. Et velkjent eksempel er strømmen gjennom en spole der tilstanden  $x$  nå er strømmen  $i$  gjennom spolen og  $L$  er induktansen til spolen. Denne prosessen dukker opp i en mengde andre mer kompliserte prosesser, som for eksempel likestrømsmotoren. I følgende eksempel skal vi se hvordan temperaturen i kokeplaten oppfyller samme ligning.

**Example 8** Ligningen for temperaturen i en kokeplate er gitt i (3.7) som

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom}) \quad (3.15)$$

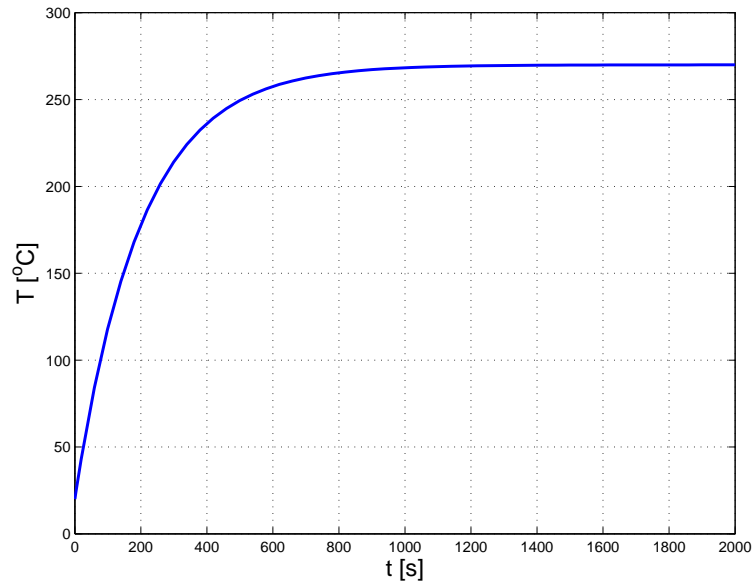
Ved å bruke samme metode som over, eller sette inn for  $a$  og  $b$  i (3.13), vil løsningen finnes som

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{k}{c}t} - \frac{(P + kT_{rom})}{k} \left( e^{-\frac{k}{c}t} - 1 \right) \quad (3.16)$$

Denne løsningen er plottet i Figur 3.6, og som vi ser starter temperaturen  $T$  på  $20^\circ\text{C}$  ved  $t = 0$ . Dette stemmer med at vi satte  $T_0 = 20$ . Videre ser vi at temperaturen svinger seg inn til sin endelige verdi på  $270$  grader over tid. Det er eksponensialfunksjonen som gir dette innsvingningsforløpet, og det stemmer jo godt overens med praktiske erfaringer med en elektrisk kokeplate: Det tar litt tid før plata blir varm. For å plote (3.16) har vi brukt konstantene  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $P = 500 \text{ W}$ ,  $k = 2 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$ ,  $T_{rom} = 20^\circ\text{C}$  og  $c = 400 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$ .

**Remark 9** Hvis vi hadde satt  $P = 2000 \text{ W}$ , ville vi sett at kokeplata hadde nådd  $1020^\circ\text{C}$ , noe som er helt urealistisk. Hva kommer dette av? Årsaken er de antagelsene som ble nevnt i eksempelet (stråling osv). Dette er et eksempel på at en enkel lineær modell som vi kom frem til her bare vil ha et begrenset gyldighetsområde. Hvis vi hadde tatt med andre fenomener, ville vi fått en mer komplisert, gjerne ulineær, modell, men denne ville hatt et større gyldighetsområde og ville gitt et fornuftig svar selv for denne store effekten. Man kan omforme en ulineær komplisert modell til en lineær modell som er gyldig omkring de tilstandene man ønsker å studere. Dette kalles **linearisering**, og vil bli behandlet i detalj i faget Reguleringsteknikk.





Figur 3.6: Temperaturen som funksjon av tiden slik som i ligning (3.16).

**Example 10** Vi vil også studere hva som skjer hvis vi skruer av plata. Da vil  $P = 0$  W og (3.16) forenkles til

$$T = T_0 e^{-\frac{k}{c}t} - T_{rom} \left( e^{-\frac{k}{c}t} - 1 \right).$$

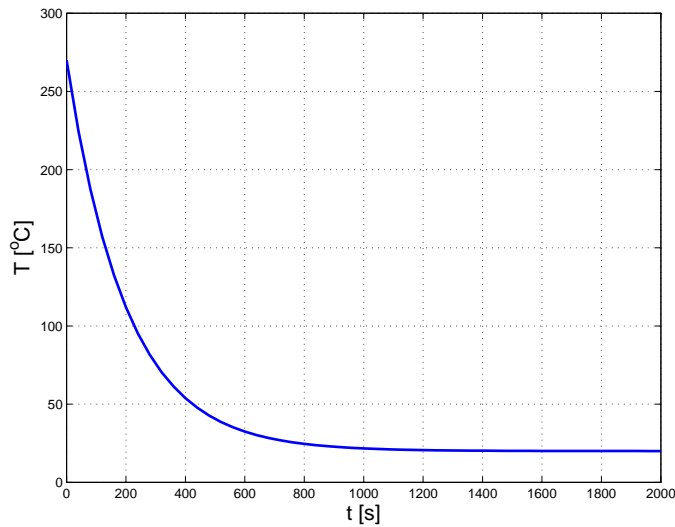
Vi anta at den har stått på så lenge at den har nådd tilnærmet konstant temperatur. Som vi ser av Figur 3.6 er da  $T = 270^\circ\text{C}$ . Vi setter inn dette som  $T_0$ , og dessuten  $P = 0$  W, og temperaturen synker som i Figur 3.7. Dette stemmer også meget godt overens med praktisk erfaring; temperaturen enderes ikke momentant når vi skruer av plata, men synker gradvis ned mot romtemperaturen, som også i dette eksempelet er satt til  $T_{rom} = 20^\circ\text{C}$ .

**Example 11** I Eksempel 6 modellerte vi en krets som lader opp en kamerablitz. Spenningen over kondensatoren oppfyller differensialligningen

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{RC}u,$$

som vi nå skal løse. Ved igjen å følge metoden over, finner vi at

$$v_C = u \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$



Figur 3.7: Temperaturen i kokeplata som funksjon av tiden. Effekten (pådraget) er satt til null, slik at plata avkjøles over tid.

som er plottet i Figur 3.8. Følgende numeriske verdier er brukt:  $u = 5$  V,  $R = 1$  k $\Omega$ ,  $C = 1$  mF. Konstanten  $RC$  har da verdien 1 s, noe som er i samsvar med praktisk erfaring; det tar gjerne noen sekunder å lade opp en blitz.

**Example 12** Differensialligningen for hastighet til en bil ble i Eksempel 2 vist å være

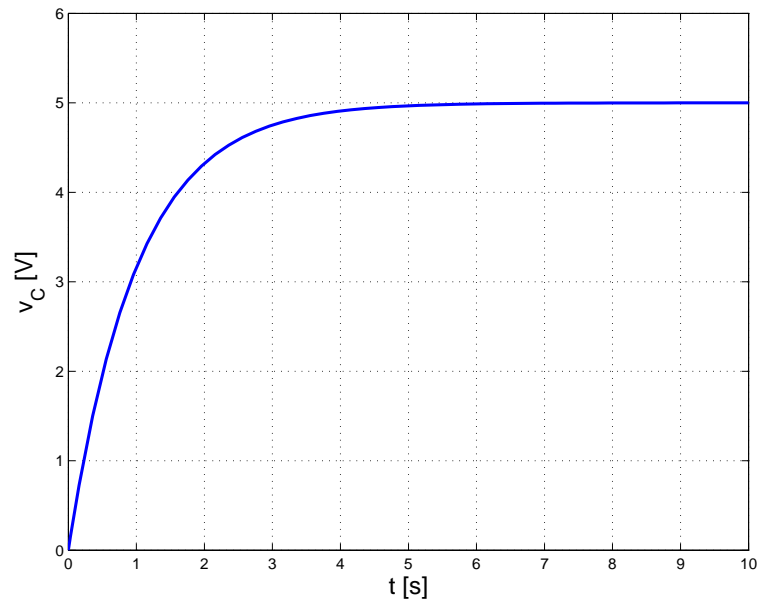
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (3.17)$$

Hvis vi antar at bilen initielt står stille, det vil si  $v_0 = 0$ , vil løsningen av (3.17) være gitt av

$$v = \frac{u}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right),$$

som er plottet som den heltrukne kurven i Figur 3.9. Vi skal nå se hvilken betydning den ulineære luftmotstanden vil ha for hastigheten. Med luftmotstand vil differensialligningen være gitt av

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - \frac{k_l}{m}v^2 + \frac{1}{m}u. \quad (3.18)$$



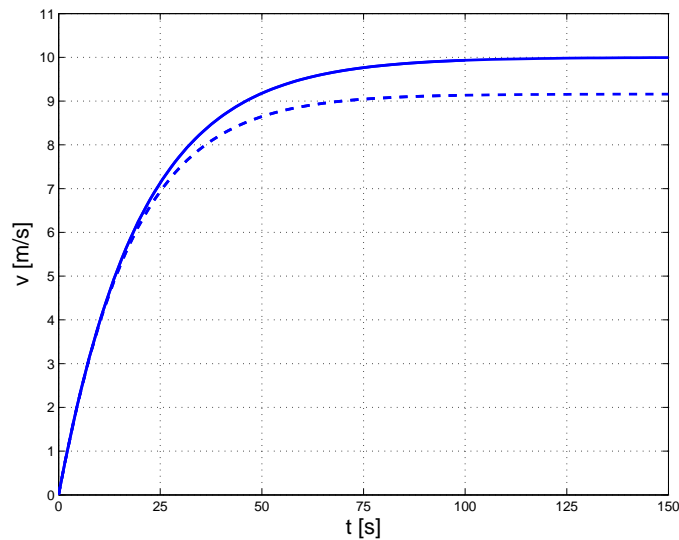
Figur 3.8: Spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden.

*Denne ligningen er ikke løsbar med teknikker som vi har lært til nå, men vi skal senere vise hvordan vi kan finne en tilnærmet løsning numerisk. I Figur 3.9 er denne numeriske løsningen plottet som en stiplet kurve. Som vi ser er det ikke store **kvalitative** forskjeller på de to kurvene, det er viktig å legge merke til at vi kan ha et innsvingningsforløp selv om differensialligningen ikke er lineær. Det er brukt samme skyvekraft i de to tilfellene, og grunnet den økte friksjonen ender bilen opp på en litt lavere hastighet når luftmotsanden tas med i betraktning, og hastighetsøkningen (akselerasjonen) går dessuten litt saktere. Ikke så veldig uventet hvis vi betrakter Newtons andre lov.*

### Pådrag

Hittill har vi sett på et system som bare består av én tilstand. I kybernetikk studerer vi styring av systemer, og det er derfor viktig å få med dette i beskrivelsen av systemene. Generelt skriver vi dette som

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.19)$$



Figur 3.9: Hastigheten til bilen som funksjon av tiden. Den heltrukte kurven er uten luftmotstand, mens den stiplede linjen er med luftmotstand.

der  $u$  er **pådraget**. I det lineære tilfellet blir dette

$$\dot{x} = ax + bu$$

der  $b$  er en konstant. I de foregående eksemplene har vi forsåvidt hatt dette, men da med konstante pådrag. I kokeplateeksempelet hadde vi  $u = P = 500$  W, og i RC-krets-eksempelet var  $u = 5$  V. Generell løsning av differensialligninger med generelle tidsvarierende pådrag er et tema i faget TTK4105 Regulerings-teknikk. Det vil bli også behandlet litt nærmere i Kapittel 7 i dette kompendiet.

### 3.2.6 Andreordens differensialligninger

#### Løsning av andre-ordens differensialligninger

Andre ordens differensialligninger er ligninger der den andrederiverte opptrer, og har den generelle formen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad (3.20)$$

der  $p$  og  $q$  er konstanter. Som kjent fra Matematikk 1 og [8], har ligning (3.20) en karakteristisk ligning gitt ved

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (3.21)$$

Videre har den karakteristiske ligningen to løsninger eller røtter  $r_1$  og  $r_2$  gitt av

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (3.22)$$

Løsningene til (3.20) nå være gitt av ett av tre tilfeller:

**To reelle røtter.** Hvis  $r_1 \neq r_2$ , så har (3.20) løsningen

$$x(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}, \quad (3.23)$$

der  $C$  og  $D$  er vilkårlige konstanter. Dette kalles et overdempet andreordens system.

**Én reell rot** Hvis  $r_1 = r_2 = r$ , så har (3.20) løsningen

$$x(t) = Ce^{rt} + Dte^{rt}, \quad (3.24)$$

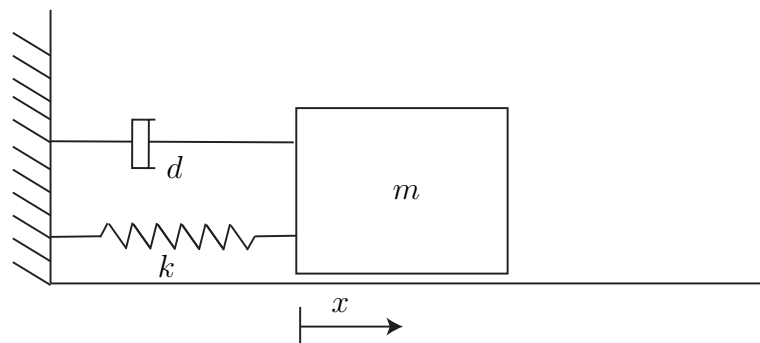
der  $C$  og  $D$  er vilkårlige konstanter. Dette kalles et kritisk dempet andreordens system.

**To komplekse røtter** Hvis  $r_1 = a + ib$  og  $r_2 = a - ib$ , så har (3.20) løsningen

$$x(t) = e^{at} (C \cos bt + D \sin bt), \quad (3.25)$$

der  $C$  og  $D$  er vilkårlige konstanter. Dette kalles et underdempet andreordens system.

**Remark 13** Som vi ser av løsningen (3.25) for komplekse røtter, så har denne brakt noe nytt inn i vårt studium av løsninger av differensialligninger. Både førsteordens ligninger og de to første tilfellene av andreordens ligninger har løsninger som er kombinasjoner av eksponensialfunksjoner. Dette siste tilfellet gir oss løsninger som inneholder svingninger eller oscillasjoner.



Figur 3.10: En kloss med masse  $m$  festet til en vegg med en fjær og en demper. Dette kalles et masse-fjær-demper system.

Ligning (3.20) er det vi kaller for en *homogen* ligning, det vil si at høyre-siden i ligningen er lik null. Ligningen

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(x) \quad (3.26)$$

der  $f(x)$  er en generell funksjon av  $x$  er *ikke-homogen*. Denne varianten er også løsbart.

Vi vil nå se på en del systemer som resulterer i andre ordens differensial-ligninger når vi modellerer dem.

**Example 14** Gitt et masse-fjær-demper system som vist i Figur 3.10. Dette systemet består av en kloss med masse  $m$  som er festet i en vegg via en fjær og en demper. Fjæringssystemet på en bil vil være et system som har ganske lik form.

Vi skal bruke Newtons andre lov, en **kraftbalanse**, til å sette opp en differensialligning som beskriver bevegelsen til massen  $m$ . Fjæren følger Hookes lov og trekker i klossen med en fjærkraft gitt av

$$F_f = kx,$$

der konstanten  $k$  er fjærkonstanten. En demper gir en kraft som er proporsjonal med hastighet  $\dot{x}$  slik at  $F_d = d\dot{x}$ . Vi setter så opp Newtons andre lov og finner

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ -kx - d\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0, \end{aligned}$$

som er på samme form som (3.20) med

$$\begin{aligned} p &= \frac{d}{m} \\ q &= \frac{k}{m}, \end{aligned}$$

og vi har en andreordens homogen differensialligning. Røttene til den karakteristiske ligningen vil være gitt av (3.22)

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{d}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}.$$

Vi skal nå sette inn tall for de forskjellige størrelsene i eksempelet og se hva slags løsninger vi får. Vi setter  $m = 1$ ,  $d = 2$  og  $k = 10$ . Dette gir

$$r_{1,2} = -1 \pm 3i,$$

og vi har to komplekse røtter med  $a = -1$  og  $b = 3$ , og løsningen finnes av (3.25) til å være

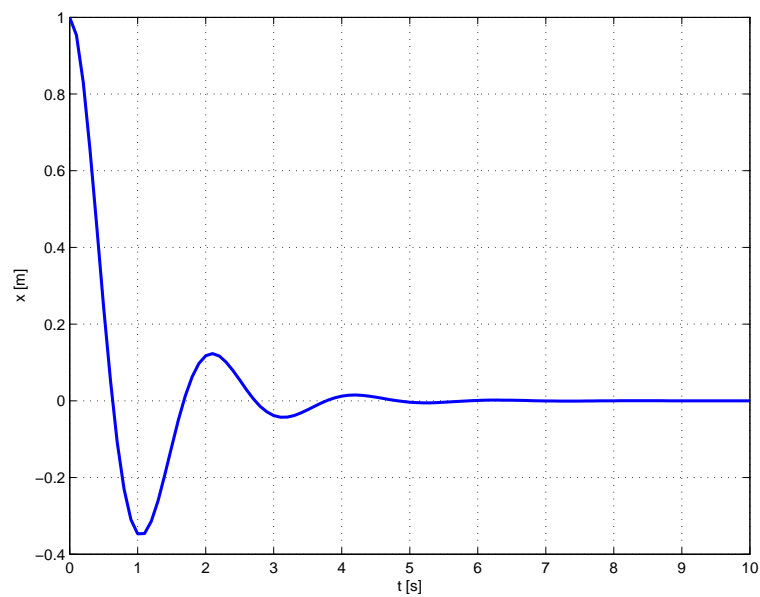
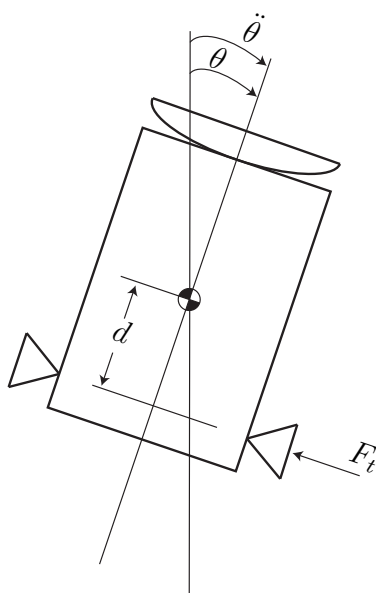
$$x(t) = e^{-t} (C \cos 3t + D \sin 3t).$$

Vi setter initialverdiene  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , det vil si vi holder klossen i ro 1 m ut og så slipper vi den. Legg merke til at siden dette er en andreordens ligning trenger vi **to** initialverdier. Vi regner ut konstantene  $C$  og  $D$  ved å sette inn for initialbetingelsene (dette er en fin øvingsoppgave) og finner

$$x(t) = e^{-t} \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

som er plottet i Figur 3.11. Som ventet ut fra fysikken i systemet, starter klossen på  $x = 1$ , og svinger seg gradvis inn til  $x = 0$  der den forblir i ro. Dette er et eksempel på et mekanisk svingesystem eller en oscillator, og ekvivalente eksempler finnes både i elektriske kretser og i termodynamiske systemer.

**Example 15** For at romskip eller satelitter i bane rundt jorden, eller andre himmellegemer, skal kunne peke i riktig retning, det vil si vende solpaneler mot solen og rette instrumenter og antenner i riktig retning, er de som oftes utstyrt med styresystemer for styring av orientering. Et forenklet eksempel for endring av satelittens vinkel omkring en akse er gitt i Figur 3.12. Det er

Figur 3.11: Posisjonen  $x$  til klossen som funksjon av tiden  $t$ .

Figur 3.12: Styring av en satellitts orientering ved hjelp av thrustere.



her brukt thrustere som vil gi et moment om satellittens massemiddelpunkt som vil få satellitten til å endre orientering. Dette kan modelleres ved å bruke en rotasjonsvariant (en **momentbalanse**) av Newtons andre lov. Denne sier at treghetsmoment  $J$  multiplisert med vinkelakselerasjon  $\ddot{\theta}$ , der  $\theta$  er vinkelen, er lik summen av momenter  $M$ . Dette er analogt med kraft er lik masse ganger akselerasjon for rettlinjet bevegelse. Kraft tilsvarer moment, masse tilsvarer treghetsmoment og akselerasjon tilsvarer vinkelakselerasjon. I dette eksempelet tar vi kun med momentet fra thrusterne, som vil være gitt av skyvkraften til thrusteren  $F_t$  multiplisert med avstanden  $d$  fra thrusteren til satellittens massemiddelpunkt, det vil si

$$M_t = F_t d.$$

I virkeligheten vil det være flere kilder til momenter, som for eksempel solvindens trykk på solpanelene, gravitasjonsgradientens moment og luftmotstand hvis satellitten går i en lav bane. Basert på disse antagelsene kan vi sette opp følgende differensialligning:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= \Sigma M = M_t \\ J\ddot{\theta} &= F_t d. \end{aligned}$$

Ligningen tilsvarer (3.20) med  $p = q = 0$ , og den er dessuten ikke-homogen på grunn av leddet  $F_t d$ . Det betyr at den ikke passer rett inn i formelverket. På den annen side er denne ligningen såpass enkel at den kan løses direkte. Ved å integrere med hensyn på tiden  $t$  to ganger finner vi

$$\ddot{\theta} = \frac{F_t d}{J} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{F_t d}{J} t + C_1 \Rightarrow \theta(t) = \frac{F_t d}{2J} t^2 + C_1 t + C_2,$$

der  $C_1$  og  $C_2$  er tilfeldige konstanter. Dette viser at vinkelen  $\theta$  øker som en andregradsfunksjon av tiden  $t$ . Dette virker ikke som en ønsket oppførsel da satellitten vil spinne med stadig økende hastighet. Vi skal komme tilbake til dette eksempelet når vi skal lage en enkel regulator for orientering av satellitter.

### Omskrivning til førsteordens ligninger

En andreordens differensialligning kan alltid skrives om til to førsteordens ligninger. Dette gjøres ved å innføre to nye tilstander  $x_1$  og  $x_2$ . Ved å definere

$$x_1 = \theta,$$

og

$$x_2 = \dot{x}$$

kan vi skrive om (3.20) til

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -px_2 - qx_1\end{aligned}$$

Dette gjelder generelt, slik at en  $n$ -te ordens differensialligning alltid kan skrives om til  $n$  koblede førsteordens ligninger. Dette er vanlig metode i reguleringsteknikk, men for å benytte den fullt ut trenger man matematiske begreper som *vektorer* og *matriser*. Dette er et eget tema i Matematikk 3, og videre arbeid med dette kommer i TTK4105 Reguleringsteknikk og TTK4115 Lineær systemteori.

### 3.2.7 Differensialligninger av høyere orden

Som et eksempel på bruk av høyere ordens differensialligninger vil vi her presentere modellen for en mekanisk kommutert likestrømsmotor. Dette avsnittet bygger på [2]. En elektrisk motor har en stator som er en del av motorhuset, og en rotor som er den roterende delen av motoren. ved å sette opp et magnetsik felt i stator, kan et motormoment genereres ved å føre en strøm gjennom en leder i rotor. I en mekanisk kommutert likestrømsmotor er magnetfeltet i stator satt opp av en permanentmagnet eller av feltstrømmen  $i_f$ . Motormomentet er da gitt av

$$M = K_M i_a, \quad (3.27)$$

der  $K_M$  er motorens momentkonstant og  $i_a$  er ankerstrømmen. Ankerkretsen, se figur 3.13, roterer i feltet fra stator og en indusert spenning

$$e_a = K_E \omega_m, \quad (3.28)$$

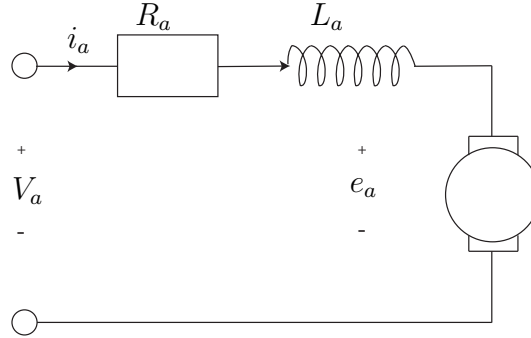
der  $K_E$  er motorens spenningskonstant, og  $\omega_m$  er moterens vinkelhastighet.

Kirchhoffs spenningslov for ankerkretsen gir

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a + e_a, \quad (3.29)$$

der  $u_a$  er ankerspenningen som er moterens pådrag,  $R_a$  er ankermotstanden og  $L_a$  er ankerinduktansen. Momentbalansen for rotor gir

$$J_m \dot{\omega}_m = M - M_L, \quad (3.30)$$



Figur 3.13: Ankerkrets.

der  $J_m$  er motorens treghetsmoment,  $M_L$  er momentet som virker på motoren fra lasten. Ved å sette inn (3.27) og (3.28) får vi modellen

$$\begin{aligned} L_a \frac{d}{dt} i_a &= -R_a i_a - K_E \omega_m + u_a \\ J_m \dot{\omega}_m &= K_M i_a - M_L \\ \dot{\theta}_m &= \omega_m, \end{aligned} \tag{3.31}$$

der  $\theta_m$  er motorvinkelen. Som vi ser er dette et system av tre førsteordens differensialligninger. Disse kunne vært skrevet som en tredjeordens differensialligning, men det er mer gunstig å skrive ligningene slik som i (3.31). Det er flere grunner til dette. En grunn er at mange av de metodene vi har for regulatordesign er designet for bruk på førsteordens systemer, en annen er at systemet er mer oversiktlig når det er skrevet som i (3.31) og det er lettere for oss å se sammenhengene i systemet.

# Kapittel 4

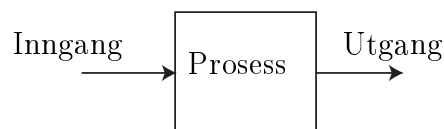
## Dynamiske systemer

### 4.1 Introduksjon

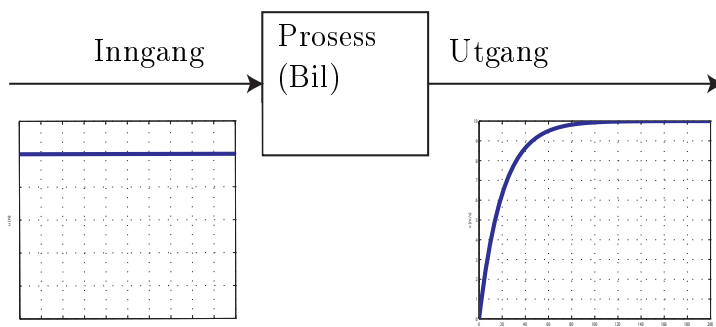
Vi vil i dette kapittelet presentere en del begreper knyttet til det vi har kalt *dynamiske prosesser*. En prosess kan beskrives ved en blokk, se Figur 4.1.

Inngang-utgang sammenhengen representerer årsak-virkning sammenhengen til prosessen. Vi vil ta utgangspunkt i eksemplene som ble presentert i Kapittel 3. I Figur 4.2 er Figur 4.1 gjentatt med responsen til bilmodellen i ligning (3.9) på utgangen. På inngangen er det plottet en kurve som viser pådraget i systemet, i dette tilfellet en kraft på 500  $N$ , som står på hele tiden. Vi betrakter nå prosessen som en slags “svart boks” som vi ikke kjenner innholdet i, men vi kan allikevel lære en del om prosessens egenskaper ved å studere sammenhenger mellom inngangssignalet og utgangssignalet. Systemer med én inngang og én utgang kalles for *monovariabel* systemer.

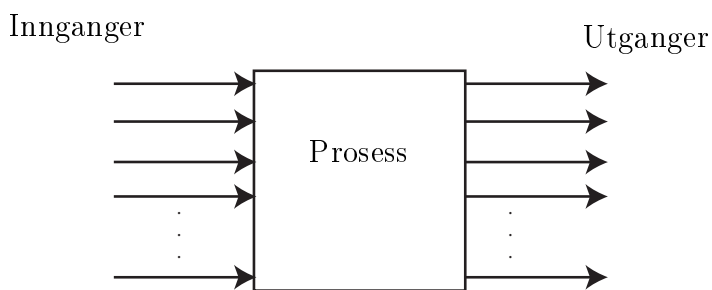
I det mer generelle tilfellet kan en prosess ha mange innganger og mange utganger slik som i Figur 4.3. Et slikt system vil kalles *multivariabelt*, og beskriver systemer med mange pådrag og mange målinger. Eksempler på dette er styring av skip (pådrag: propeller, ror, thrustere, målinger: kurs-



Figur 4.1: Generell prosess med inngang og utgang.



Figur 4.2: Dynamisk prosess illustrert ved ett signal på inngangen og ett på utgangen.



Figur 4.3: En generell multivariabel prosess

vinkel, hastigheter), kjemiske prosesser (pådrag: varmeelementer, ventiler, målinger: temperaturer, konsentrasjoner, trykk). Multivariable systemer blir studert nærmere i fagene TTK4105 Reguleringssteknikk og TTK4185 Robust regulering og er viktige i flere andre fag i tredje og fjerde årskurs.

## 4.2 Stasjonær respons

En prosess trenger strengt tatt ikke være dynamisk. For eksempel så vil funksjonen

$$y = f(x)$$

kunne beskrive en prosess der  $y$  er gitt som en funksjon av  $x$ . En slik prosess kalles statisk (eller momentan). I reguleringssteknikk bruker vi ofte slike

prosesser til å beskrive måleinstrumenter. Som oftest vil en statistisk prosess være kun en tilnærming av virkeligheten, og en statistisk modell kan gjøres gjeldene etter at signalene i modellen har “falt til ro”, noe følgende eksempel illustrerer.

**Example 16** *Hvis vi i Figur 4.2 gjør den tilnærmingen at vi sier at hastigheten  $v$  er konstant og lik 10 etter at 100 sekunder har gått (den går ikke så fort denne bilen...), vil vi kunne lage oss en sammenheng som sier at verdien av utgangssignalet er proporsjonal med verdien av inngangssignalet:*

$$v = Ku,$$

der  $K$  er proporsjonalitetskonstanten. Vi kan regne ut  $K$  ved å sette inn tall fra figuren:

$$K = \frac{v}{u} = \frac{10}{500} = 0.02,$$

og vi finner den tilnærmende statiske modellen

$$v = 0.02u,$$

for bilhastigheten. Denne modellen gir ingen informasjon om innsvingningsforløpet, det vil si hva som skjer før bilen oppnår denne hastigheten og heller ikke hvor lang tid dette tar.

Vi kan også gå litt mer matematisk til verks og finne denne modellen ved å studere differensialligningen til systemet

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u.$$

Når hastigheten  $v$  er konstant, vil den deriverte  $\dot{v}$  være lik null, og vi kan sette

$$0 = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u$$

og dermed finne

$$v = \frac{1}{k}u,$$

som med  $k = 50$  (som er den verdien som ble brukt i simuleringen i Eksempel 12) er det samme vi fant ved å se på figuren.

### 4.3 Transient respons

Med *transienter* mener vi signaler som varierer med tiden, slik som for eksempel hastigheten på utgangen i Figur 4.2, før tidspunktet  $t \approx 100$ . Vi kaller denne delen av signalet for transienten, og den delen av signalet som kommer etter  $t \approx 100$  for stasjonærverdien. Hvis signalet går mot en stasjonærverdi kan vi også kalle det for innsvingningsforløp.

#### 4.3.1 Førsteordens systemer

##### Stasjonærverdi

I Eksempel 16 fant vi hastigheten til bilen etter at denne hadde blitt konstant. Dette er stasjonærverdien. For et generelt førsteordens system, der  $u$  er konstant, kan vi finne denne ved

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ 0 &= ax + bu,\end{aligned}$$

som gir oss

$$x_{\text{stasjonær}} = -\frac{bu}{a}.$$

Legg merke til at stasjonærverdien også representerer systemets likevektspunkt.

**Remark 17** Dette gjelder kun for systemer der  $a < 0$ , noe som vil bli klart i kapittel 8.

##### Tidskonstant og forsterkning

For førsteordens systemer finnes det en størrelse som beskriver transienten godt, nemlig *tidskonstanten*. Vi så i Kapittel 3 at en generell førsteordens differensialligning skrives som

$$\dot{x} = ax + bu. \tag{4.1}$$

Størrelsen

$$T = -\frac{1}{a} \tag{4.2}$$

defineres til å være ligningens tidskonstant, mens

$$K = -\frac{b}{a} \quad (4.3)$$

er *forsterkningen*. Størrelsene fremkommer hvis vi skriver om (4.1) på denne formen

$$\underbrace{-\frac{1}{a}}_T \dot{x} + x = \underbrace{-\frac{b}{a}}_K u.$$

Vi ser at hvis  $\dot{x}$  settes lik null, så vil

$$x = -\frac{b}{a}u = Ku.$$

**Example 18** Vi så i Eksempel 2 at bilens hastighet er gitt av

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u, \quad (4.4)$$

slik at  $a = -\frac{k}{m}$  og  $b = \frac{1}{m}$ . Forsterkningen er da

$$K = -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{m}}{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}.$$

Ved å sette inn tall finner vi

$$K = \frac{1}{50 \frac{kg}{s}} = 0.02 \frac{s}{kg}.$$

I følge (4.2) er da tidskonstanten gitt av

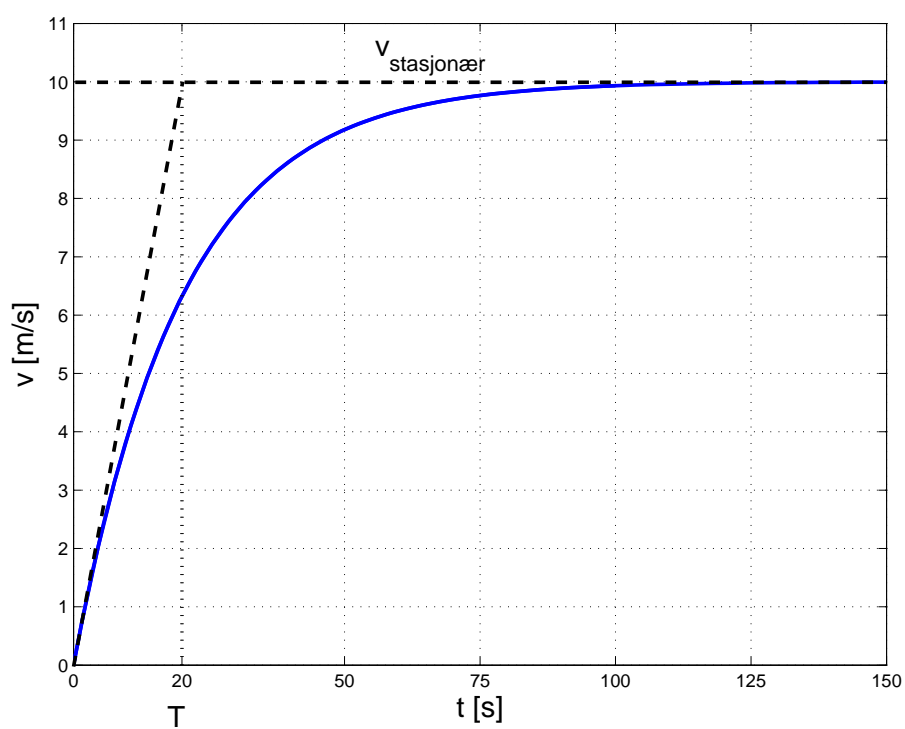
$$T = -\frac{1}{a} = \frac{m}{k},$$

det vil si

$$T = \frac{1000 \text{ kg}}{50 \frac{Ns}{m}} = 20 \text{ s}.$$

Vi ser at tidskonstanten har sekunder som benevning; dette gjelder generelt. I Figur 4.4 er det illustrert hvor vi kan finne igjen tidskonstanten i transienten. Først beregner, eller skisserer, man tangenten til  $v(t)$  for  $t = 0$ . Deretter finner man tidspunktet hvor denne tangenten skjærer stasjonærverdien  $v_{\text{stasjonær}}$ . Tidskonstanten er gitt av tallverdien for dette tidspunktet.





Figur 4.4: Tidskonstanten fremkommer ved å tegne inn tangenten til respon-  
sen i initialtidspunktet.

Vi skal se litt nærmere på hvorfor vi har denne sammenhengen mellom tidskonstanten  $T$  og tangenten for  $t = 0$ . Løsningen til (4.4) er gitt av (her har vi brukt  $s$  for stasjonær)

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{u}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ v(t) &= v_s \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ v(t) &= v_s (1 - e^{at}) \\ v(t) &= v_s \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Vi kan nå regne ut den deriverte av  $v(t)$  slik at

$$\dot{v}(t) = \frac{v_s}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{4.6}$$

og videre for  $t = 0$  har vi

$$\dot{v}(0) = \frac{v_s}{T}. \tag{4.7}$$

Siden tangenten går gjennom origo, se figur 4.4, så er tangenten gitt av

$$g(t) = \frac{v_s}{T} t, \tag{4.8}$$

og vi ser at  $g(T) = \frac{v_s}{T} T = v_s$ , det vil si at tangenten skjærer stasjonærverdien for  $t = T$ .

Det er interessant, i det generelle tilfellet, å regne ut verdien til  $x(t)$  når  $t = T$ . Med  $x_0 = 0$  vil løsningen av et førsteordens system være gitt av

$$x(t) = x_s (1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

slik at

$$x(T) = x_s (1 - e^{-\frac{T}{T}}) = x_s (1 - e^{-1}) \approx 0.63 x_s$$

Dette betyr at ved tidspunktet  $t = T$  har transienten nådd 63% av stasjonærverdien. På tilsvarende måte kan vi regne ut verdier for  $t = 2T$ ,  $t = 3T$  og så videre:

$$\begin{aligned} x(T) &= (1 - e^{-1})x_s \approx 0.63x_s \\ x(2T) &= (1 - e^{-2})x_s \approx 0.87x_s \\ x(3T) &= (1 - e^{-3})x_s \approx 0.95x_s \\ &\vdots \\ x(nT) &= (1 - e^{-n})x_s \end{aligned}$$

### 4.3.2 Andreordens systemer

For andreordens systemer

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

har vi to andre begreper som beskriver transienten, nemlig udempet resonansfrekvens  $\omega_0$  og relativ dempingsfaktor  $\zeta$ . Vi skal innføre disse ved hjelp av masse-fjær-demper systemet

**Example 19** Modellen for masse-fjær-demper systemet er gitt av

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.9)$$

Ved å innføre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{d}{2\sqrt{km}},$$

kan (4.9) skrives

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Det kan vises at et underdempet system har  $0 < \zeta < 1$ , et kritisk dempet system har  $\zeta = 1$  og for et overdempet system så er  $\zeta > 1$ . I Eksempel 14, så ser vi av responsen at løsningen svinger med en gitt frekvens og er tydelig dempet siden svingningene avtar. Merk at frekvensen til svingningen, det vil si antall svingninger pr sekund ikke er gitt av  $\omega_0$ , men av den **dempede** resonansfrekvensen

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Ved å sette inn tallverdier, får vi for masse-fjær-demper systemet at  $\omega_0 = \sqrt{10} \approx 3.16$ ,  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{10}}$  og  $\omega_d = 3$ .

Hvis vi ser på figur 3.11, så kan vi beregne frekvensen til den svingningen vi ser. Vi ser at vi har to hele svingninger mellom  $t_1 = 0.6\text{s}$  og  $t_2 = 4.8\text{s}$ . Det vil si at frekvensen er gitt av  $f = \frac{2}{4.2\text{s}} = \frac{1}{2.1\text{s}} = 0.48\text{Hz}$ . Den tilsvarende vinkelfrekvensen er da gitt av  $\omega_{\text{figur}} = 2\pi f = 2.99$ . Det er med andre ord den dempede resonansfrekvensen vi ser på figuren.

I de fleste reguleringsystemer vil vi ønske å unngå svingninger, eller i det minste å dempe dem mest mulig. Overdempede andreordens systemer har ikke svingninger, men vil ha store tidskonstanter, det vil si de vil reagere forholdsvis tregt. Et kompromiss, og i mange tilfeller et designkriterium, vil være kritisk dempede systemer som er de raskeste andreordens systemer uten svingninger.

# Kapittel 5

## Blokkdiagrammer

### 5.1 Introduksjon

Et blokkdiagram er en skjematisk representasjon av en matematisk modell. I blokkdiagrammene vil tilstander og andre tidsvarierende signaler som for eksempel pådrag, være representert med linjer. Den enkleste form for blokkdiagram har vi allerede sett, se for eksempel Figur 4.1, der hele prosessen ble representert med én blokk. Vi skal nå se at vi kan dele opp selv førsteordens prosesser i flere blokker, der hver blokk representerer en matematisk operasjon. Det vil da være en årsak-virkning sammenheng for komponentene i systemet. Matematiske operasjoner som summering, multiplikasjon og integrering vil være representert med firkanter, dvs blokker, eller andre symboler. Hensikten med dette er at vi kan visualisere kompliserte prosesser, og studere hvordan ulike deler av prosessen påvirker hverandre. Dette kan blant annet brukes til å forenkle prosessene. Det er viktig å merke seg at et blokkdiagram inneholder akkurat den samme informasjonen som et sett med differensialligninger.

### 5.2 Blokker

Vi vil her presentere hvordan forskjellige matematiske operasjoner representeres i blokkdiagram.

### 5.2.1 Funksjonsgenerering

I Figur 5.1 (1) er det vist hvordan vi representerer funksjonen  $f(x)$ . Inngangen på blokken representerer signalet  $x$  og utgangen får verdien  $f(x)$ .

### 5.2.2 Multiplikasjon

Når et signal, f.eks en tilstand  $x$  multipliseres med en konstant  $K$  tegnes dette på blokkdiagramform som i Figur 5.1 (2). Inngangen er  $x$  og utgangen er  $Kx$ . Denne blokken er mye brukt og kalles også en *forsterkning*. Blokken er et spesialtilfelle av funksjonsblokken med  $f(x) = Kx$ .

### 5.2.3 Addisjon og subtraksjon

Summering av to signaler, for eksempel  $x_1$  og  $x_2$ , tegnes som i Figur 5.1 (3). Utgangen fra summasjonstegnet har verdien  $x_1 + x_2$ . Subtraksjon tegnes på samme måte, men med et lite 'minus'-tegn ved siden av sirkelen som vist i Figur 5.1 (4).

### 5.2.4 Integrasjon

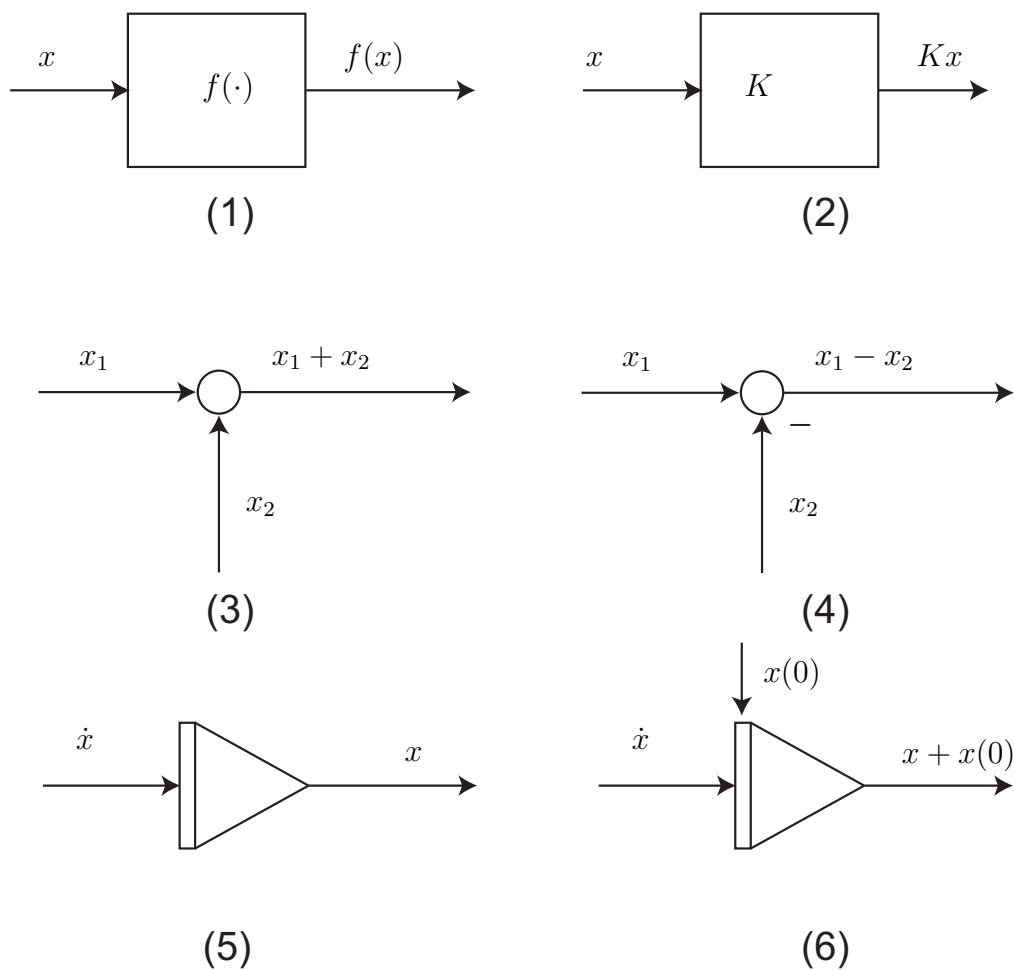
En meget sentral blokk i blokkdiagrammet er den som uttrykker integrasjon. Dette er illustrert i Figur 5.1 (5). Inngangen til denne blokken er  $\dot{x}$  og utgangen er  $x$ . Denne blokken kalles en integrator. Hvis vi også skal ta hensyn til tilstandens initialverdi, gjøres dette som vist i figur 5.1 (6).

## 5.3 Sammensatte blokkdiagrammer

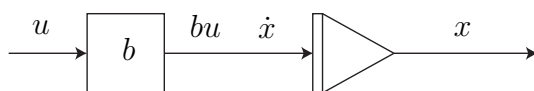
Vi har nå nok komponenter til å lage mer kompliserte blokkdiagrammer, og vi skal vise hvordan en del av de eksemplene vi har gjennomgått kan tegnes opp.

**Example 20** *Differensialligningen  $\dot{x} = bu$  tegnet i Figur 5.2.*

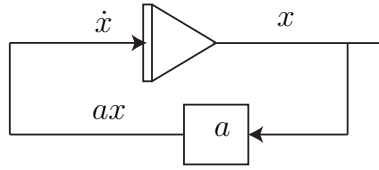
*Metoden vi bruker her er at vi først tegner opp integratoren, så skriver vi på symbolene på inngangen og utgangen, i dette tilfellet  $\dot{x}$  og  $x$ . Videre ser vi at inngangen på integratoren er lik  $bu$ , noe som tegnes som konstanten  $b$  i en forsterkningsblokk med signalet  $u$  som inngang.*



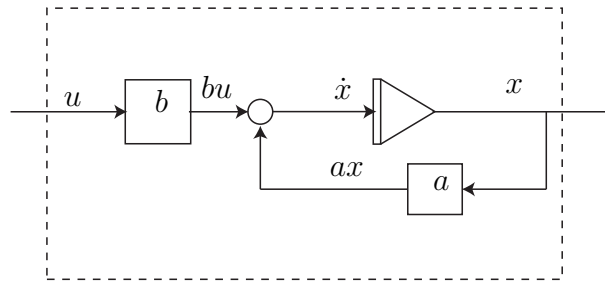
Figur 5.1: (1) Funksjonsgenerering, (2) Multiplikasjon med konstant, (3) Summering, (4) Subtraksjon, (5) Integrasjon



Figur 5.2: Forsterkning og integrator.



Figur 5.3: Tilbakekoblet integrator.

Figur 5.4: Blokkdiagram for førsteordensligningen  $\dot{x} = ax + bu$ .

**Example 21** For å lage blokkdiagrammet til  $\dot{x} = ax$ , må vi koble sammen inngangen og utgangen på integratoren som vist i Figur 5.3. Dette er et eksempel på det sentrale begrepet **tilbakekobling**.

**Example 22** Den mer generelle første ordens differensialligningen

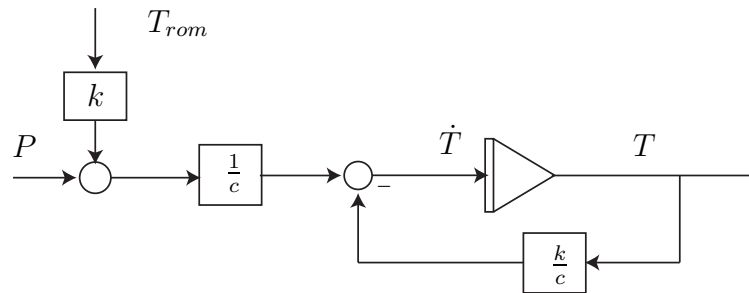
$$\dot{x} = ax + bu$$

kan nå illustreres i et blokkdiagram ved å kombinere de to forrige eksemplene, og bruke et summasjonstegn i tillegg. Som vi ser i Figur 5.4 har vi nå et diagram med en inngang  $u$  og en utgang  $x$ . Ved å betrakte alt som er innenfor det stiplede området som en blokk, ser vi at systemet ligner på det innledende eksempelet i Figur 4.1.

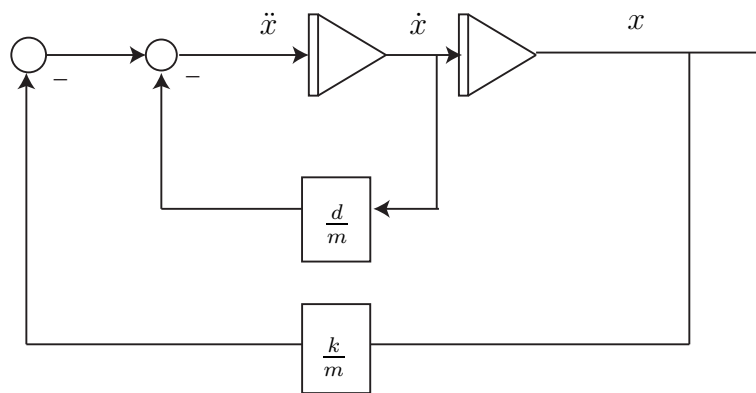
**Example 23** Modellen

$$\dot{T} = -\frac{k}{c}T + \frac{1}{c}(P + kT_{rom})$$

for temperaturen i kokeplata kan representeres på blokkdiagramform som vist i Figur 5.5.



Figur 5.5: Blokkdiagram for kokeplatemodellen.



Figur 5.6: Blokkdiagram for masse-fjær-demper modellen.

**Example 24** *Modellen*

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

for masse-fjær-demper systemet i Eksempel 14 kan også skrives som

$$\ddot{x} = -\frac{d}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x,$$

og det er klart at blokkdiagrammet må inneholde to integratorer. Dette gjelder generelt: Et  $n$ -te ordens system har  $n$  integratorer. Blokkdiagrammet er tegnet i Figur 5.6





# Kapittel 6

## Simulering, Matlab og Simulink

### 6.1 Simulering

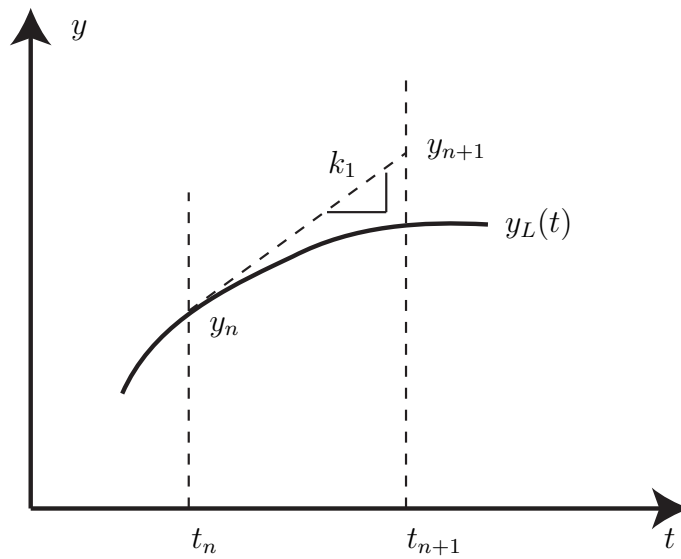
Vi har nå sett hvordan vi kan løse differensialligninger av første og andre orden eksplisitt, det vil si finne løsningen  $x(t)$  av ligningen. Det er flere årsaker til at dette vanligvis ikke er til noen stor hjelp i design av reguleringssystemer. For det første er ofte modellene vi jobber med ulineære eller av høyere orden eller begge deler, og da kan vi ikke finne en eksplisitt løsning. Videre så vil vi, selv om modellen er lineær i utgangspunktet, bruke regulatorer som vanskeliggjør løsningen. Ulineære elementer som metning, friksjon, hysteresis og andre fenomener vil også vanskeliggjøre en løsning. Dessuten er det slik at vi som regel ikke har behov for å vite den eksakte løsningen til en differensialligning.

Innen kybernetikk og reguleringsteknikk er *simulering* et mye brukt verktøy. Simulering betyr i denne sammenheng at vi finner en tilnærmet, numerisk, løsning på differensialligninger. Faget Modellering og Simulering og [3] behandler dette i detalj.

Ligningen

$$\dot{x} = f(x) \tag{6.1}$$

har en eksakt løsning  $x(t)$ , og vi ønsker nå å beregne en numerisk løsning som er en tilnærming av den eksakte løsningen. Dette gjøres med et tidsskritt  $h$  slik at løsningen blir beregnet for  $(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N)$  der  $t_{n+1} - t_n = h$  kalles et tidsskritt. Den numeriske løsningen ved tid  $t_n$  betegnes  $x_n$ . Vi går nå over fra kontinuerlig tid  $t$  til såkalte diskrete tidspunkter  $t_k$ . Konstanten  $h$  kalles skrittlengden og er avstanden i tid mellom to nabo-



Figur 6.1: Eulers metode. Figuren er hentet fra [3].

tidspunkter  $t_{n+1}$  og  $t_n$ .

**Example 25** En metode for å løse differensialligningen

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.2)$$

numerisk, er å beregne  $x_{n+1}$  som

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n). \quad (6.3)$$

Valget av skrittlengden  $h$  vil være med på å bestemme hvor nøyaktig tilnærmingen vår blir. Dette betyr at verdien av  $x_n$  ved tidspunkt  $t_n$  beregnes på grunnlag av verdien ved tidspunkt  $t_{n-1}$ . Den metoden vi har brukt her kalles **Eulers metode**. Metoden er illustrert i Figur 6.1. I figuren er  $y = x$ , og  $y_L(t)$  er en eksakt løsning av 6.2 med  $y_n$  som initialverdi. Vi ser at det blir et avvik mellom beregnet numerisk løsning og eksakt løsning ved tidspunktet  $t_{n+1}$ .

En simuleringsmetode, eller algoritme, som vist i eksempelet har en viss nøyaktighet, avhengig av  $h$ , som kan beregnes. Det finnes mange andre metoder med spesielle fordeler som høy nøyaktighet eller rask simuleringstid.

En numerisk metode som den i (6.3) kan brukes manuelt, det vil si vi kan beregne  $x_{n+1}$  med “papir og blyant”, uten å løse differensialligningen. Den virkelige styrken til en slik metode ligger imidlertid i at den er egnet for implementering i en datamaskin. Vi kan gjøre dette selv i et hvilket som helst programmeringsspråk, i eksempelet under er det vist hvordan algoritmen for å løse differensialligningen

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 10 \quad (6.4)$$

ved hjelp av Eulers metode kan implementeres som et Matlab-script.

**Example 26** *En numerisk løsning på ligning (6.4) kan finnes ved hjelp av Matlab-scriptet*

```
h=0.1;
a=1;
x(1)=10;
for i=2:101,
    x(i)=x(i-1)+h*(-a*x(i-1));
end
```

*Deretter kan løsningen plottes slik:*

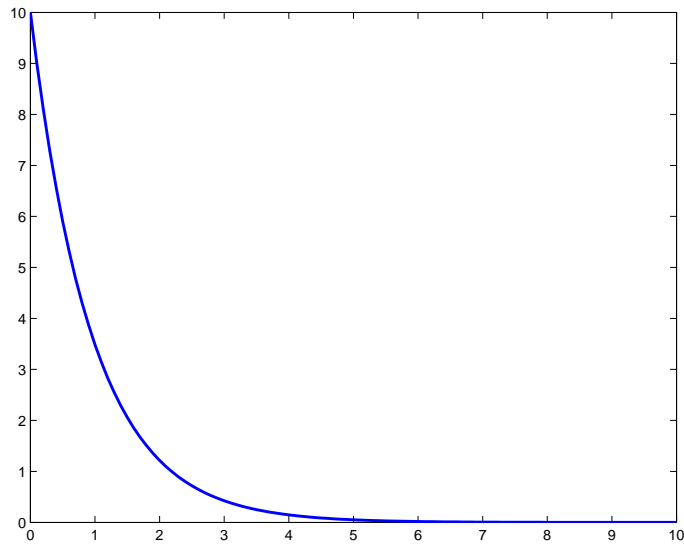
```
t=0:0.1:10;
plot(t,x);
```

*Vi har valgt et tidsskritt på  $h = 0.1$ , og ved å beregne 100 verdier betyr det at vi simulerer responsen til systemet for 10 sekunder. Grunnen til at vi bruker indekser fra 1 og oppover i beregningene er at Matlab ikke aksepterer 0 som en indeks. Resultatet av simuleringen er vist i Figur 26.*

Det finnes også flere kommersielt tilgjengelige programpakker som kan utføre simuleringer for oss. Vi skal nå se spesielt på programmet Simulink.

## 6.2 Simulink

Simulink® er et dataprogram produsert av The MathWorks Inc. for simulering av dynamiske systemer. Det er en del av programvarepakken Matlab®.



Figur 6.2: Resultatet av å beregne en numerisk løsning for  $\dot{x} = -x$  med Eulers metode.

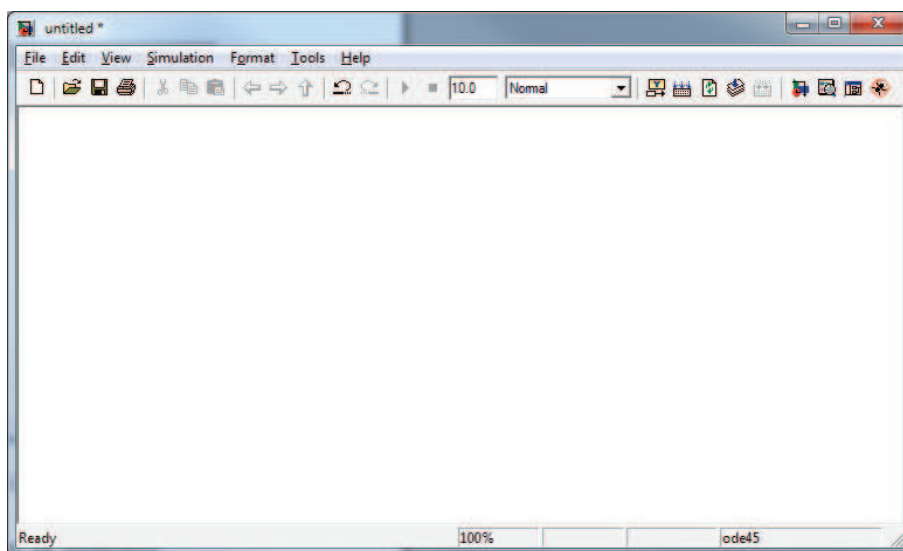
Simulink og Matlab brukes i stor utstrekning innen reguleringsteknikk og kybernetikk. For å simulere et dynamisk system i Simulink, må man først spesifisere systemet. Dette gjøres ved å tegne et blokkdiagram av systemet i Simulinks grafiske editor. Deretter simuleres systemet ved å trykke på 'play'. Vi skal vise i et eksempel hvordan vi kan spesifisere en modell i Simulink og deretter simulere den.

**Example 27** Vi skal i dette eksempelet se hvordan vi kan simulere, det vil si finne en numerisk løsning til, differensialligningen i Eksempel 22,

$$\dot{x} = ax + bu,$$

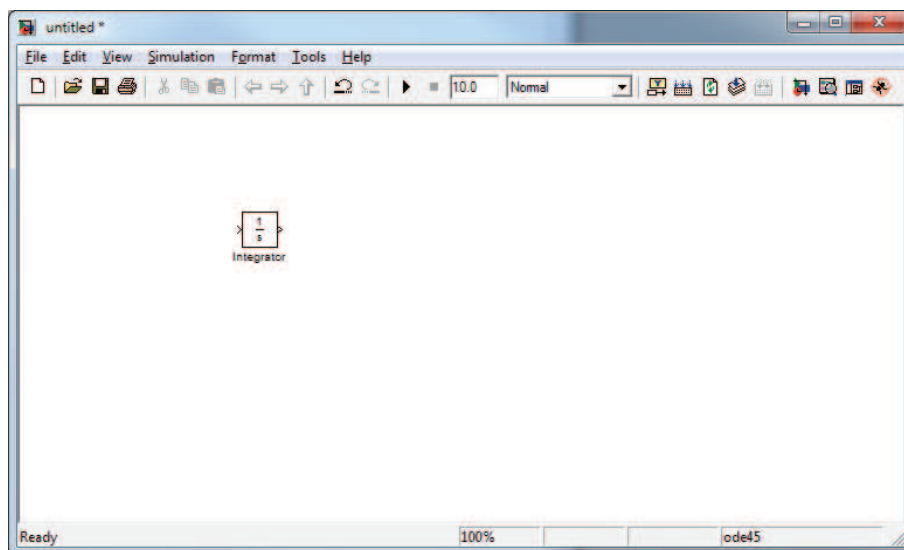
når vi velger  $a = -1, b = 1$

1. Start programmet MATLAB, og åpne Simulink ved å klikke på Simulink-ikonet i Matlabs kommando-vindu. Vi får da opp Simulink Library Browser. Her finner vi de komponentene vi trenger for å bygge opp et komplett blokkdiagram. Ved å velge **File**→**New**→**Model** i menyen eller klikke på New-ikonet får vi opp et tomt Simulink-vindu som vist i Figur 1.

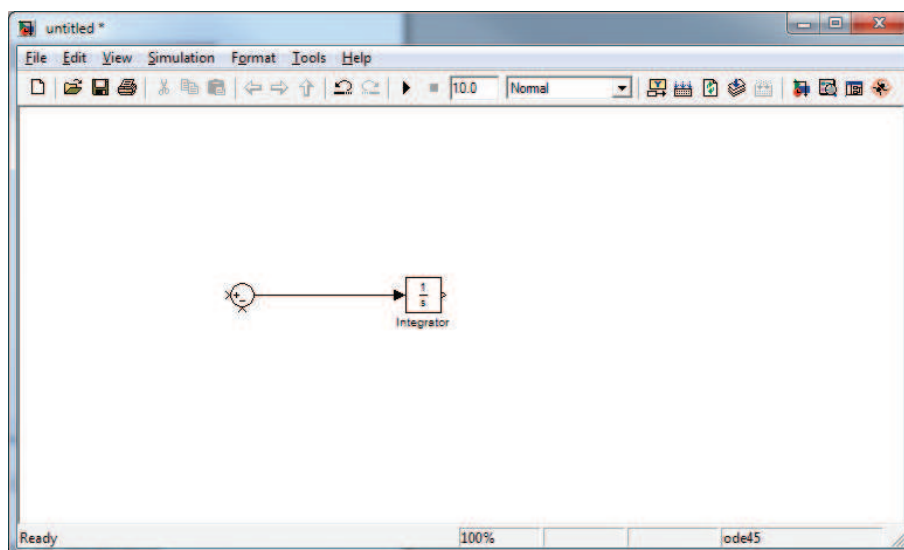


Figur 6.3: Tomt Simulink diagram.

2. *Hvordan man går frem for å bygge opp blokkdiagrammet er ikke så viktig, men det kan være fornuftig å starte med integratoren. Denne finnes under delmenyen **Simulink**→**Continuous**, og har symbolet  $\frac{1}{s}$  i motsetning til det vi definerte i Kapittel 5.2.4. Årsaken til dette lærer vi om i faget Reguleringssteknikk. Klikk på integrator symbolet, og dra det over i det foreløbig tomme Simulink-vinduet. Ved å dobbeltklikke på integratoren kan vi sette initialverdi for tilstanden. Simulinkblokkene vi skal bruke i dette eksempelet er vist i Figur 2.*
3. *Summasjonstegnet finner vi under **Simulink**→**Math Operations**. Dra det over i modellvinduet. Vi trenger et summasjonspunkt med en pluss og en minus. Dobbeltklikk på summasjonspunktet og endre den ene plussen til en minus.*
4. *Nå kan summasjonspunktet og integratoren knyttes sammen med en signallinje. Klikk på utgangen til summasjonspunktet, og dra en linje til inngangen på integratoren. Legg merke til at signallinjen blir heltrukket når blokkene knyttes sammen som vist i Figur 4.*
5. *Forsterkninger (Gain) finnes under **Math Operations**. Sett inn 2 stykker i blokkdiagrammet. Dobbeltklikk på Gain-blokkene for å sette for-*



Figur 6.4: Realisering av integrator i Simulink.



Figur 6.5: Sammenkoblet summasjonstegn og integrator.

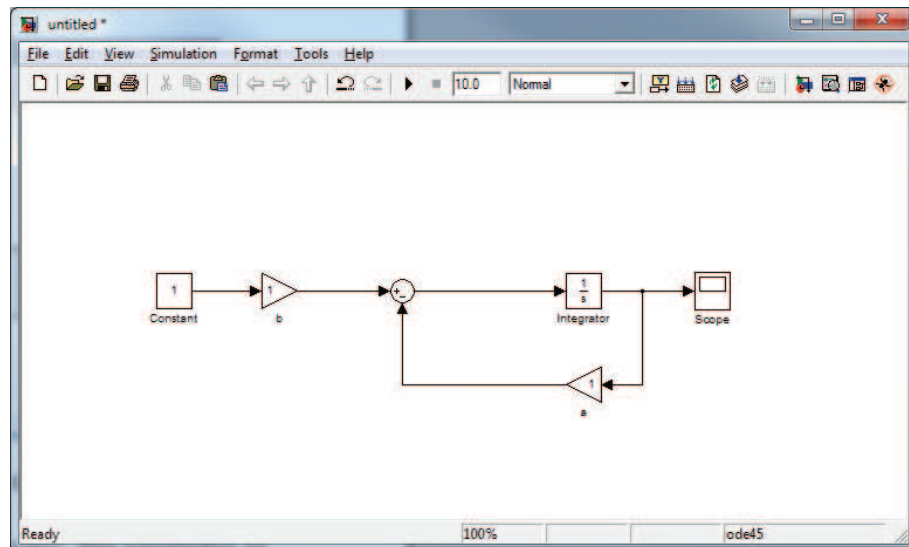
sterkningen, og velg verdien 1 på begge. Legg merke til at vi realiserer  $a = -1$  med en positiv konstant  $a$  i blokkdiagrammet, og en minus på tilbakekoblingen. Dette kunne også vært gjort med en negativ konstant i blokkdiagrammet og en positiv tilbakekobling. Ved å klikke på navnet under blokkene, kan man velge egne navn på blokkene. Forsterkningen 'b' må snus for å få riktig retning på inngang og utgang. Dette gjøres ved å markere blokken og velge **Format**→**Flip Block** i modellvinduet.

6. Pådraget setter vi til en konstant verdi som vi finner under **Simulink**→**Sources**.
7. For å visualisere simuleringen sender vi utgangen (det vil si tilstanden  $x$ ) til et Oscilloscop. Dette finner vi under **Simulink**→**Sinks**.
8. Vi er da klar til å simulere systemet. Blokkdiagrammet skal se ut som det i Figur 8. Klikk på start simulering ikonet (▶). Simuleringen går svært fort, og ved å dobbeltklikke på Scope, får vi opp en figur som viser responsen til systemet. Hvis vi har gjort alt riktig, vil denne se ut som i Figur 8. Trykk på zoom-ikonet for å få best mulig presentasjon av resultatet. Under menyen **Simulation**→**Simulation Parameters** kan vi sette en del parametere, som for eksempel hvor lang tid vi ønsker å simulere systemet og hvilken nøyaktighet vi ønsker. Høy nøyaktighet vil gi en liten skritt lengde.

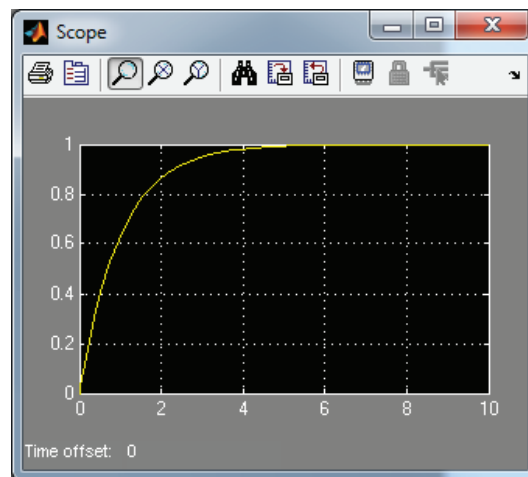
**Remark 28** Alle systemresponsene som ble presentert i Kapittel 3 ble produsert ved hjelp av Simulink.

Hvis vi i et Simulinkvindu går inn på menyen **Simulation**→**Configuration Parameters** vil vi få opp et vindu som det i Figur 6.2. Under Solver options kan vi velge mellom **Variable-step** og **Fixed-step**. Under **Fixed-step** finner vi igjen Eulers metode som den enkleste metoden Simulink kan bruke. På et førsteordens system som det brukt i eksempelet vil vi ikke se noen praktisk forskjell på bruk av de forskjellige metodene, men for mer avanserte systemer er det svært viktig å velge riktig metode. Valg av simuleringsmetode for et gitt system med visse egenskaper er et viktig tema i faget Modellering og Simulering.

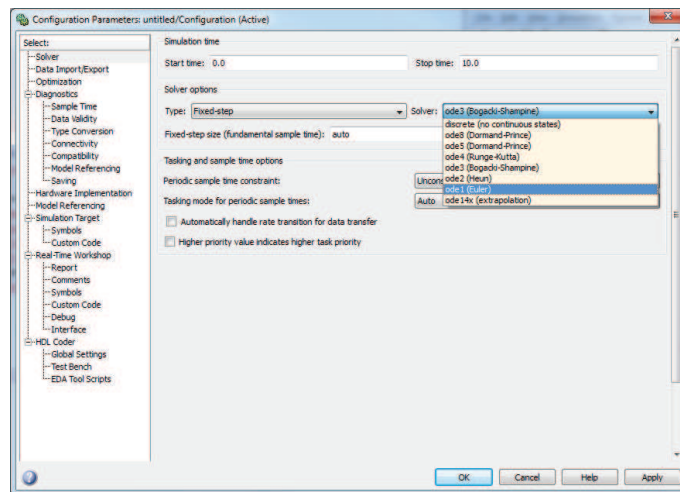




Figur 6.6: Realisasjon av systemet i Eksempel 22 i Simulink.



Figur 6.7: Simulering av systemet i 10 sekunder gir opphav til følgende respons.



Figur 6.8: I Configuration Parameters vinduet kan vi blant annet velge simuleringsmetode og sette skrittlengthe.



# Kapittel 7

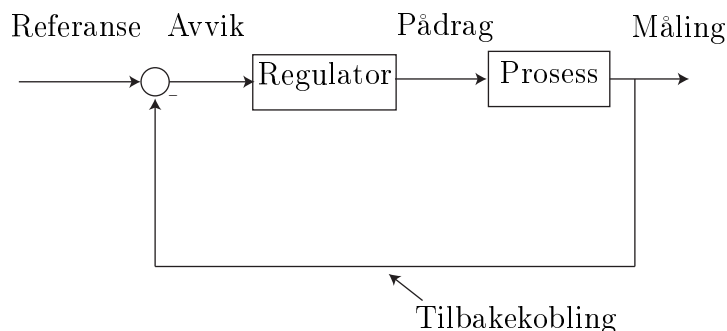
## Innføring i reguleringssteknikk

### 7.1 Innledning

Systemene vi har studert til nå har vært gitt i utgangspunktet. Det vil si fysikken har vært gitt, og vi har regnet ut hvordan systemet vil oppføre seg. Reguleringssteknikk omfatter et sett med verktøy som tillater oss å endre på dynamikken til systemene slik at de oppfører seg slik vi vil. Dette gjelder både for transienter og for stasjonære tilstander. Et reguleringsystem er dermed en sammenkobling av komponenter som vil gi oss en ønsket (system) respons. På denne måten kan vi designe styringssystemer som regulerer for eksempel nivået i en tank eller hastigheten til et fartøy. En basis for analyse av reguleringsystemer og dynamiske systemer generelt vil gis i fagene Reguleringssteknikk og Lineære systemer.

Vi har til nå sett mange eksempler på helt forskjellige fysiske prosesser, mens vi har brukt samme type verktøy for å analysere modellene. Det samme gjelder for design av regulatorer, vi skal videre i kybernetikkstudiet lære om en mengde forskjellige metoder for dette, og de vil til dels være uavhengige av hva slags fysisk system vi skal regulere.

I enkelte tilfeller er det imidlertid slik at noen designmetoder har visse fordeler fremfor andre. Dette gjelder spesielt ulineære metoder som bruker fysikken og strukturen i systemet i design av regulatoren. For lineære systemer, eller lineariserte ulineære systemer, er det slik at metoden for design av regulator er uavhengig av fysikken til systemet vi skal regulere. Ulike typer begrensninger vil på den annen side komme inn i bildet: en ventil kan ikke åpnes mer enn så og så mye, det er begrenset hvor mye strøm, spenning eller



Figur 7.1: Generell tilbakekoblet prosess med regulator.

effekt vi kan tilføre, hastigheter er begrenset, og så videre.

## 7.2 Tilbakekobling

Vi har allerede sett at flere prosesser inneholder tilbakekobling. Både kokeplata og masse-fjær-demper systemet har slike naturlige tilbake-koblinger. Det viktigste verktøyet i reguleringssteknikken er å innføre kunstig *tilbakekobling*. Hensikten med dette er å endre systemets dynamikk slik at det oppfører seg slik vi vil. Tilbakekobling betyr da at vi måler en eller flere tilstander i systemet og sammenligner disse med en referanseverdi. Forskjellen, kalt reguleringsavviket, avviket, eller reguleringsfeilen, mellom disse størrelsene blir så brukt av en regulator til å beregne et pådrag til prosessen. Prinsippet er illustrert i Figur 7.1. Med tilbakekoblingen på plass sier vi at vi har *lukket reguleringsløyfen*. I motsatt fall snakker vi om en *åpen sløyfe*.

Et velkjent eksempel på dette er justering av temperaturen i en dusj. En vanlig fremgangsmåte er å måle temperaturen i vannet med hånden. Vi har en formening, referanse, om hvilken temperatur vi vil ha på vannet, og justerer på krana, pådraget, inntil disse to verdiene er like store, det vil si at vannet har den temperaturen vi vil ha.

### 7.2.1 P-regulator

Tilbakekobling brukes alltid sammen med en regulator. Den enkleste type regulator kalles for *P-regulator*. P'en står for proporsjonal, og betyr at pådraget

beregnes som en konstant multiplisert med reguleringsavviket:

$$u = K(r - y), \quad (7.1)$$

der  $K$  er regulatorens forsterkning,  $r$  er referansen og  $y$  er målingen. Forsterkningen  $K$  velges når vi designer regulatoren for å få den oppførselen vi ønsker av systemet. Vi skal nå bruke P-regulator for å designe cruise-control for en bil:

**Example 29 Cruise control**, eller hastighetsholder på godt norsk, er en hastighetsregulator for biler. Funksjonaliteten er at man skal kunne sette en ønsket hastighet, altså en referanse, og at bilen skal holde denne hastigheten. Dette løses ved hjelp av tilbakekobling. Vi tar utgangspunkt i den modellen vi satte opp i Eksempel 2 for bilen:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}u. \quad (7.2)$$

Vi bruker (7.1) og kombinerer med modellen (7.2) slik at vi får en differensialligning som beskriver modellen med regulator, det vil si lukket-sløyfedynamikken:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m} \underbrace{K(r - y)}_u.$$

For å realisere denne regulatoren, må vi måle hastigheten, det vil si  $y = v$ , slik at

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}K(r - v) \\ \dot{v} &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right)v + \frac{K}{m}r \end{aligned} \quad (7.3)$$

Vi har nå endret dynamikken til bilmodellen og har en førsteordens differensialligning med

$$\begin{aligned} a &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m}\right) \\ b &= \frac{K}{m}r, \end{aligned}$$

der vi betraker  $r$  som en ny inngang til systemet. Ifølge (3.13) vil vi nå få følgende løsning på differensialligningen

$$v(t) = \frac{Kr}{K+k} \left(1 - e^{-\frac{1}{m}(k+K)t}\right). \quad (7.4)$$

For å sjekke hvordan cruise-controllen vår fungerer, vil vi nå beregne stasjonærverdien til hastigheten. Dette kan vi gjøre ved å sette  $\dot{v} = 0$  i (7.3) eller undersøke hva  $v$  går mot når vi lar  $t$  bli veldig stor i ligning (7.4). Vi finner uansett at

$$v_{\text{stasjonær}} = \frac{Kr}{K+k}. \quad (7.5)$$

Ved å studere (7.5) ser vi at  $v_{\text{stasjonær}}$  aldri vil bli lik  $r$ , men vi vil komme nærmere og nærmere jo høyere vi velger regulatorens forsterkning  $K$ . I Figur 7.2 er løsningen (7.4) plottet for ulike verdier av  $K$ , og som vi ser kommer vi nærmere og nærmere referansen. Avviket mellom stasjonærverdien som oppnås og den ønskede referansen kalles for **stasjonært avvik**. Som vi ser av figuren vil endring av forsterkningen føre til både endring i stasjonærverdien og i transienten til systemet. Jo høyere forsterkning vi velger, jo raskere oppnår hastigheten sin stasjonærverdi.

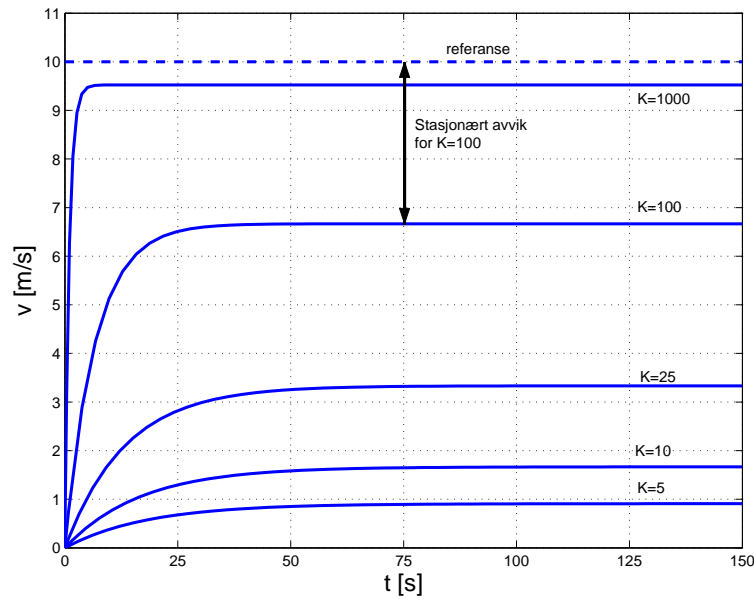
Det er ikke tilfredsstillende at hastigheten ikke oppnår sin referanseverdi, og regulatordesignet vårt kan ikke sies å være helt vellykket. En tilsynelatende løsning på dette problemet vil være å skru opp forsterkningen veldig mye slik at stasjonærverdien blir så og si lik referanseverdien, og stasjonærverdien vil i tillegg oppnås svært raskt. Et praktisk problem forhindrer imidlertid denne løsningen: nemlig begrensninger i pådraget. En forsterkning på  $K = 1000$ , vil gi et initielt pådrag på 10000 N, noe som er mye mer enn det motoren kan yte. Vi må derfor finne en annen løsning på dette problemet.

### 7.2.2 Integralvirkning, PI-regulator

Når vi bruker en P-regulator vil pådraget bli mindre og mindre jo nærmere målingen kommer referansen. Dette følger direkte av uttrykket for P-regulatoren

$$u = K(r - y).$$

Dette fører til at referansen aldri nås. Regulatorer med integralvirkning er en type regulator som ikke har denne egenskapen. Feilen  $(r - y)$  integreres slik



Figur 7.2: Hastigheten til bilen for ulike verdier av forsterkningen  $K$ .

at pådraget vil ha en verdi forskjellig fra null selv om feilen blir null. Dette vil løse problemet med stasjonært avvik. En PI-regulator vil ha formen

$$u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (7.6)$$

der  $K_p$  er forsterkningen som før, mens  $K_i$  kalles integralforsterkningen. Fellesbetegnelsen for  $K_p$  og  $K_i$  er regulatorparametere. Ved å innføre integralvirkning har vi fått en integrator til i systemet, og vi har øket systemets orden fra første til andre. Det vil si at systemet vårt nå er beskrevet av en andre ordens differensialligning, eller to førsteordens, noe følgende eksempel illustrerer.

**Example 30 Forbedret cruise control for bil.** Ved å bruke regulatoren (7.6) i bilmodellen får vi følgende:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m} \left( K_p e + K_i \int_0^t e d\tau \right). \quad (7.7)$$

Dette er en ligning som inneholder både førsteordens deriverte og et integral, og dessuten opptrer både tilstanden  $v$  og avviket  $e$ . Vi kan skrive om dette til



en andreordens differensialligning eller som to førsteordens ligninger. Først skal vi håndtere tilstanden  $v$  og avviket  $e$ . Avviket er gitt av

$$e = v_r - v, \quad (7.8)$$

der  $v_r$  er referansen. Vi antar at referansen er en konstant verdi, slik at  $\dot{v}_r = 0$ . Ligning (7.7) inneholder både deriverte og integraler, og vi ønsker å skrive dette som et sett av to første ordens differensialligninger. Av den grunn definerer vi

$$x_1 = \int_0^t e d\tau \quad (7.9)$$

og

$$x_2 = v. \quad (7.10)$$

Den tidsderivate av (7.9) er

$$\dot{x}_1 = e = v_r - v,$$

og den deriverte av (7.10) skrives da som

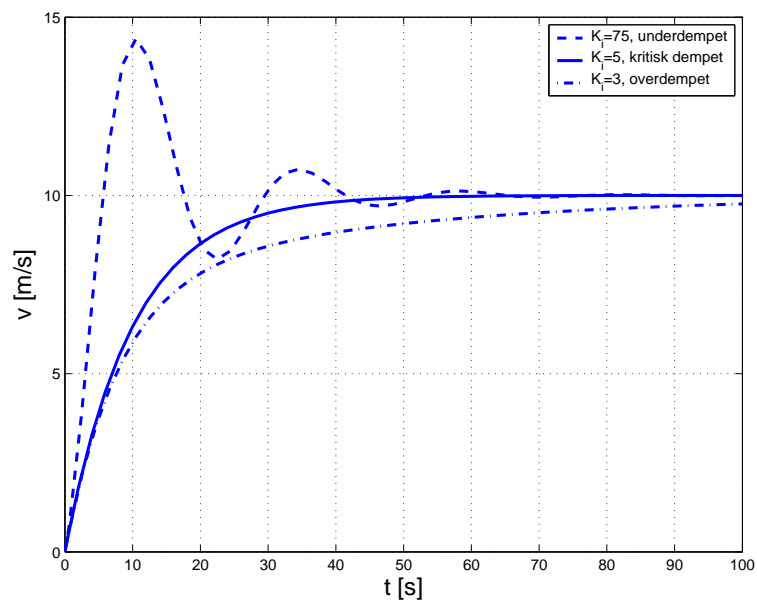
$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{v} \\ &= -\frac{k}{m}x_2 + \frac{K_p}{m}(v_r - x_2) + \frac{K_i}{m}x_1. \end{aligned}$$

Samlet kan bilsystemet nå skrives som

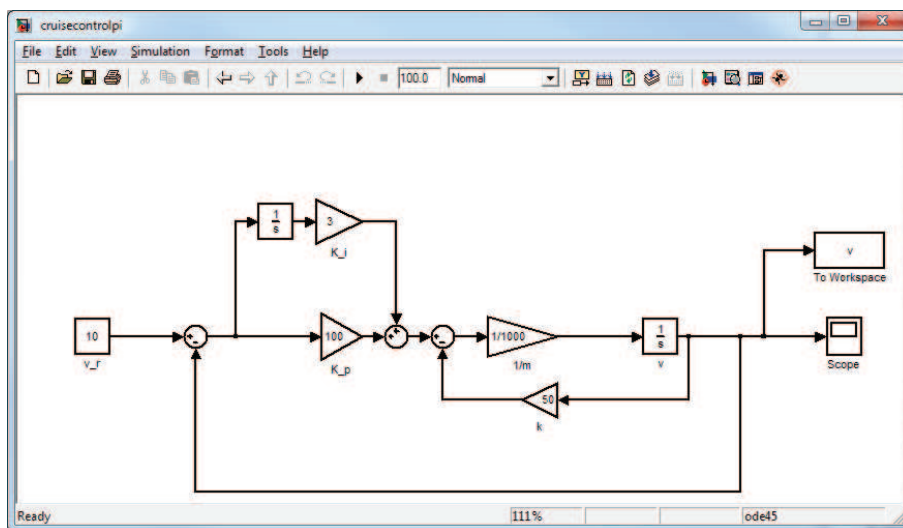
$$\dot{x}_1 = -x_2 + v_r \quad (7.11)$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{k + K_p}{m}\right)x_2 + \frac{K_i}{m}x_1 + \frac{K_p}{m}v_r. \quad (7.12)$$

I ligning (7.12) kan vi kan kjenne igjen mye av strukturen fra ligning (7.3). Siden vi her har et andreordens system med et konstantledd ( $v_r$ ), passer ikke denne ligningen rett inn i rammeverket for homogene andreordens differensialligninger. Med det vi har lært til nå kan vi ikke sette opp en eksakt løsning, men den kan lett simuleres for eksempel i Simulink. Et eksempel på hvordan denne simuleringen kan settes opp i Simulink er vist i Figur 7.4. Dette er også en blokkdiagramrepresentasjon av systemet (7.11)-(7.12). Resultater av en slik simulering er vist i Figur 7.3, der vi har brukt  $K_p = 100$  i alle tre tilfellene, mens  $K_i$  har blitt variert. Vi ser de tre typene av andreordens transienter: underdempet, kritisk dempet og overdempet. I alle tilfellene blir ønsket hastighet nådd, men det er kvalitative forskjeller på transientene.



Figur 7.3: Cruisecontrol med PI-regulator.



Figur 7.4: Simulink-diagram av cruise control eksempelet.

### 7.2.3 Demping, PD-regulator

I Eksempel 15 studerte vi dynamikken til en satellitt. Et konstant pådrag førte der til at vinkelen bare økte og økte, dvs satellitten gikk i spinn. Dette er et problem som kan løses på flere måter.

For det første er det ikke fornuftig å sette på et konstant pådrag på en av thrusterne til satellitten, men selv om vi bare ga et kort “støt”, ville satellitten allikevel fortsette å rotere. Ved å bygge inn en ringformet tank fylt med væske inne i satellitten vil denne rotasjonen kunne dempes. Dette er rotasjonsvarianten av demperen vi hadde i masse-fjær-demper systemet, og romfartøyer og satellitter ble, i hvert fall tidligere, utstyrt med slike dempere. Dette er en robust måte å gjøre det på og sjansene for feil er små. En alternativ metode er å innføre denne dempingen kunstig, ved hjelp av en regulator, noe vi skal se på i neste eksempel.

**Example 31** Modellen for rotasjon om en akse for en satellitt var gitt av ligningen

$$J\ddot{\theta} = F_t d,$$

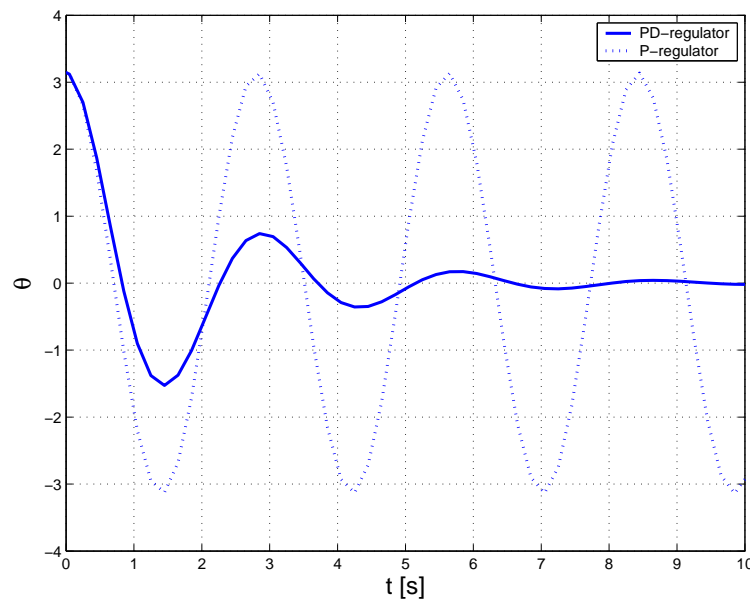
der  $F_t$  er kraften fra thrusteren. Denne kraften bruker vi som pådrag, slik at vi setter  $u = F_t$ . Vi prøver først en  $P$ -regulator, det vil si uten demping, med tilbakekobling fra vinkelen  $\theta$  slik at

$$u = K_p (\theta_r - \theta)$$

der  $\theta_r$  er referansen. Vi antar her at satellitten i utgangspunktet har en vinkel  $\theta = \pi$ , og at målet vårt er å styre mot referansen  $\theta_r = 0$ .  $P$ -regulatoren gir responsen som er plottet med stiplet linje i Figur 7.5. Dette er for såvidt en forbedring fra bruken av konstant pådrag, men satellitten oppfører seg nå som en pendel som svinger frem og tilbake. Utslaget til pendelbevegelsen er gitt av initialtilstanden. Dette er et eksempel på et svingesystem eller en oscillator. Hvis satellitten hadde vært utstyrt med en demper ville vi hatt et ledd av typen  $K_d \dot{\theta}$  i **modellen**. Legg merke til at dette er helt analogt med demperen fra masse-fjær-demper systemet. Istedenfor å bygge demperen fysisk, kan vi inkludere et ledd av denne typen i **regulatoren** slik at

$$u = K_p (\theta_r - \theta) + K_d (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}), \quad (7.13)$$

der vi har i tillegg koblet tilbake fra den deriverte av  $\theta$ . Hvis vi har konstant referanse, vil  $\dot{\theta}_r = 0$ . Vi har her innført en ny regulatorparameter  $K_d$ . Regulatoren (7.13) er kjent som en  $PD$ -regulator, der  $D$ 'en står for derivat, og vi



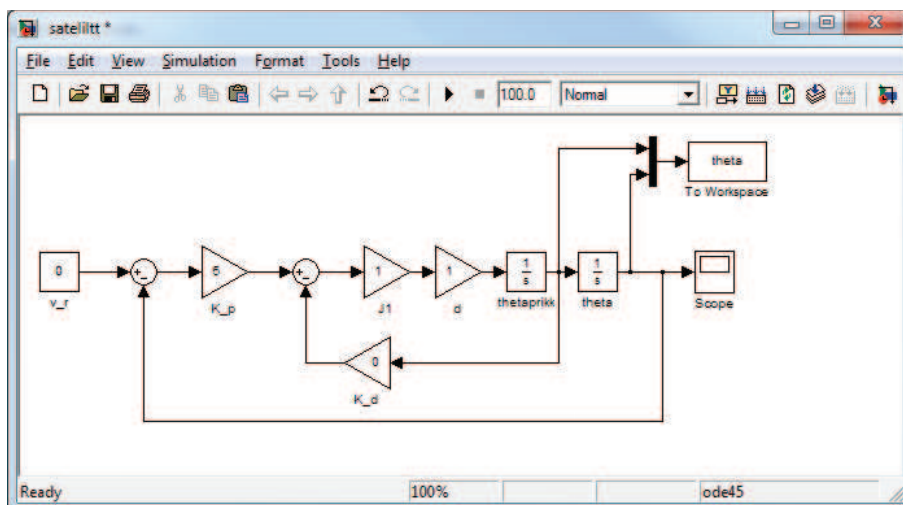
Figur 7.5: Styring av orientering for satellitt

sier at regulatoren har derivatvirkning. Som vi ser at den heltrukne linjen i Figur 7.5, så svinger nå satellitten seg inn til referanseverdien av vinkelen. Sammenlign dette med responsen til masse-fjær-demper systemet. Dette er et underdempet system, og ved å øke verdien til  $K_d$  kunne vi oppnådd et kritisk- eller overdempet system. Dette kunne vært gjort hvis det for eksempel hadde vært et krav om at vi ikke kunne ha svingninger i systemet. Løsningene i dette eksempelet er generert med Simulink modellen i Figur 7.6.

Vi har nå sett på tre typer regulatorer: P-regulator, PD-regulator og PI-regulator. Disse typene kan skrives på samlet form som

$$u = K_p e + K_i \int e dt + K_d \dot{e}. \quad (7.14)$$

Regulatoren (7.14) kalles en PID-regulator, og er den meste brukte regulatorstrukturen i regulerings teknikken. Den har anvendelser innen alle områder, som for eksempel prosessindustrien, olje og gass-industrien, robotstyring, fartøystyring og så videre.



Figur 7.6: Simulink-diagram for satellitt eksempelet.

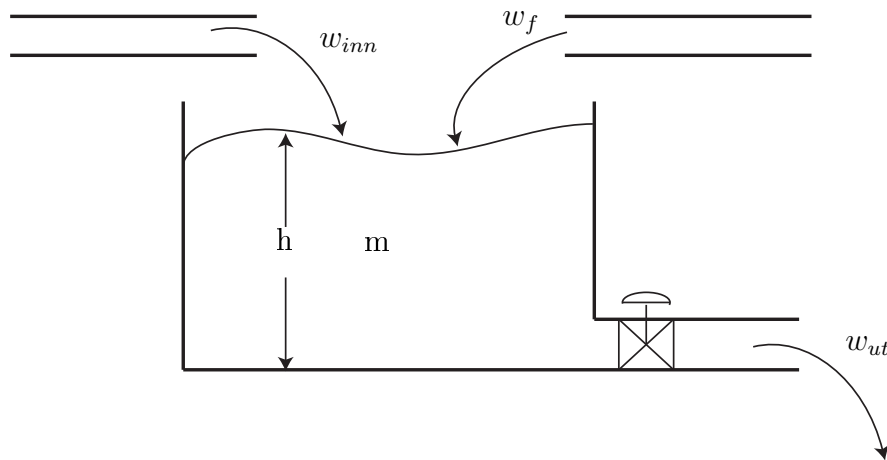
### 7.3 Foroverkobling

Eksemplene vi har sett på til nå har stort sett vært uten en type fenomener kjent som forstyrrelser. I nivåreguleringseksempelet vil vi kunne kalle en inn- eller utstrømning vi ikke har kontroll på for en forstyrrelse, i bileksempelet kan vi se på varierende luftmotstand som en forstyrrelse og i satellittstyrings-eksempelet vil solvindens trykk på solcellepanelene faktisk være en forstyrrelse man må ta hensyn til. For de fleste reguleringssystemer må forstyrrelsene tas med i betraktning når regulatorer designes. Vi skal her se på en svært enkel og intuitiv metode for håndtering av forstyrrelser: *foroverkobling fra forstyrrelsen*. Denne metoden forutsetter at man kjenner forstyrrelsen, og at den kan måles. I mange tilfeller er dette mulig, noe vi skal se på i et eksempel.

**Example 32** *Gitt en tank som skal nivåreguleres. Tanken er den samme som i Eksempel 3, der vi fant følgende modell for nivået i tanken.*

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A},$$

der  $u = w_{inn}$  er pådraget. Nå har vi i tillegg en forstyrrelse i form av en innstrømning vi ikke har direkte styring på. Dette kan for eksempel være et



Figur 7.7: To komponenter blandes i en tank. Massestrømmen til den ene komponenten er pådraget vårt, mens den andre massestrømmen betraktes som en forstyrrelse.

prosessanlegg der to ingredienser eller komponenter skal blandes, se Figur 7.7.

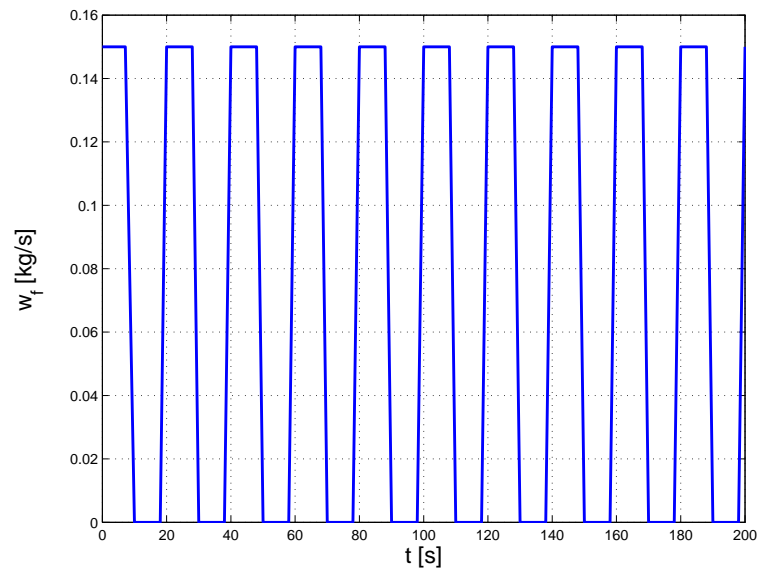
Hvis den nye innstrømningen hadde vært konstant, kunne vi kompensert for den ved å bruke en PI-regulator. Dette gjelder generelt: konstante forstyrrelser kan motvirkes av integralvirkning i regulatoren. I dette eksempelet varierer imidlertid forstyrrelsen med tiden, slik at vi vil bruke **foroverkobling** for å kompensere for den. Med forstyrrelse blir modellen nå

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}}{\rho A} + \frac{w_f}{\rho A},$$

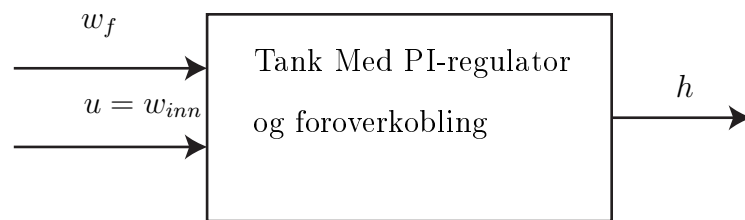
der  $w_f$  er forstyrrelsen. Forstyrrelsen er en massestrøm som varierer mellom 0 kg/s og 0.15 kg/s som vist i Figur 7.8. For å unngå stasjonært avvik, bruker vi en PI-regulator med foroverkobling fra forstyrrelsen:

$$u = K_P(h - h_r) + K_i \int (h - h_r)dt - w_f, \quad (7.15)$$

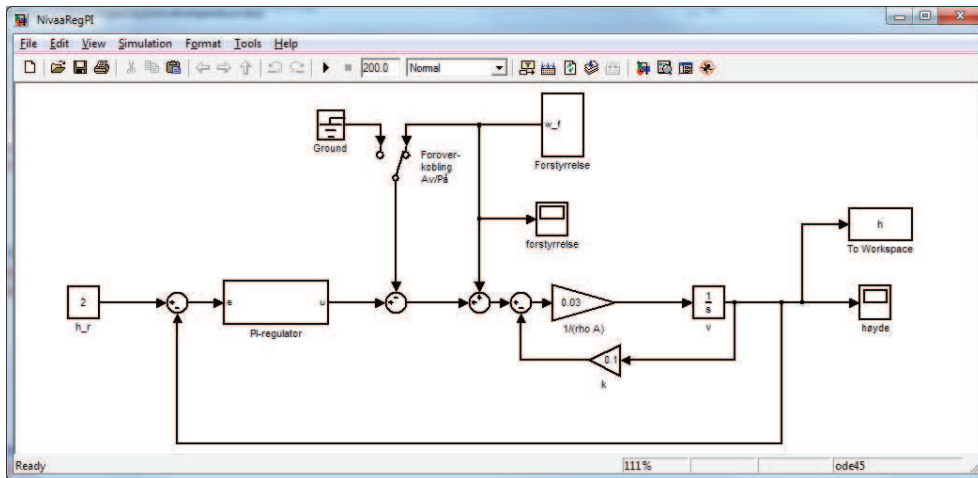
der  $h_r$  er referansenivået. Foroverkoblingen består i at vi plusser på  $w_f$  på pådraget. Siden  $u = w_{inn}$ , ser vi at foroverkoblingen fjerner forstyrrelsen  $w_f$  fra ligningen. Vi har nå et system med to innganger og en utgang som vist i



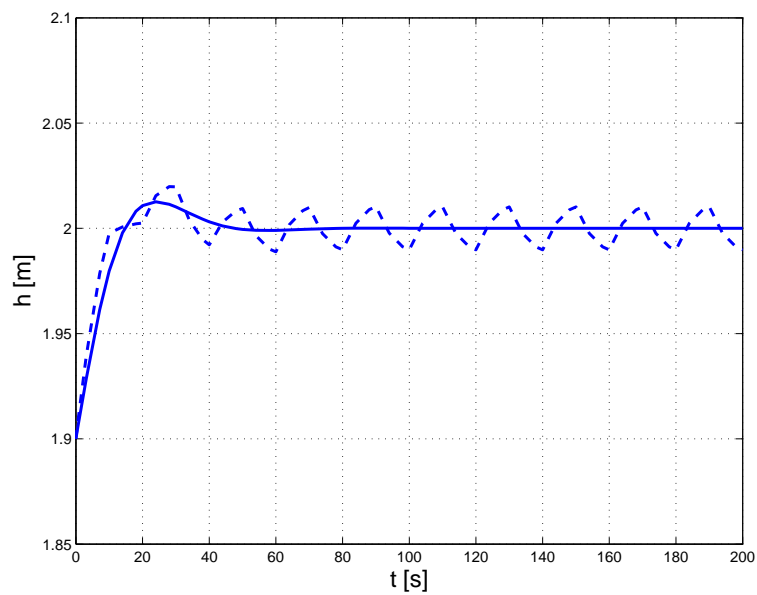
Figur 7.8: Massestrømmen  $w_f$ . Dette kalles også en firkantpuls.



Figur 7.9: Tankmodellen med nivåreguleringen er en prosess med to innganger og en utgang.



Figur 7.10: Simulink-diagram for nivåregulering med PI-regulator. Bryteren brukes til å skru foroverkoblingen fra forstyrrelsen av og på.



Figur 7.11: Nivået i tanken regulert med PI-regulator med (heltrukket) og uten (stiplet) foroverkobling fra forstyrrelsen.



*Figur 7.9. Simulinkdiagram for modellen og regulatoren er vist i Figur 7.10. Simulering med og uten foroverkobling er vist i Figur 7.11.*

Eksempelet som ble gitt her er meget enkelt; i mange tilfeller vil det være dynamikk mellom forstyrrelsen og pådraget, eller det er dynamikk i måleinstrumentet som måler forstyrrelsen. Alt dette kan tas hensyn til ved design av foroverkoblingen.

Nøkkelen til suksess i eksempelet over er at vi her kjente forstyrrelsen og kunne inkludere  $w_f$  i regulatoren (7.15). I andre tilfeller kjenner vi ikke forstyrrelsene, eller de er ikke målbare. Da må man designe regulatorer som kan undertrykke forstyrrelsene selv om de er ukjente. En annen løsning er å designe en estimator som beregner et estimat av forstyrrelsen og bruker denne verdien i regulatoren. Estimering er en viktig del av reguleringssteknikken. Dette temaet tas blant annet opp i faget TTK4180 Stokastiske og adaptive systemer, men brukes også mye i andre fag som for eksempel TTK4190 Fartøystyring og TTK4135 Optimalisering og regulering. Det er også mulig med andre typer foroverkoblinger, for eksempel foroverkobling fra referansen. Dette vil bli grundig behandlet i faget TTK4105 Reguleringssteknikk.

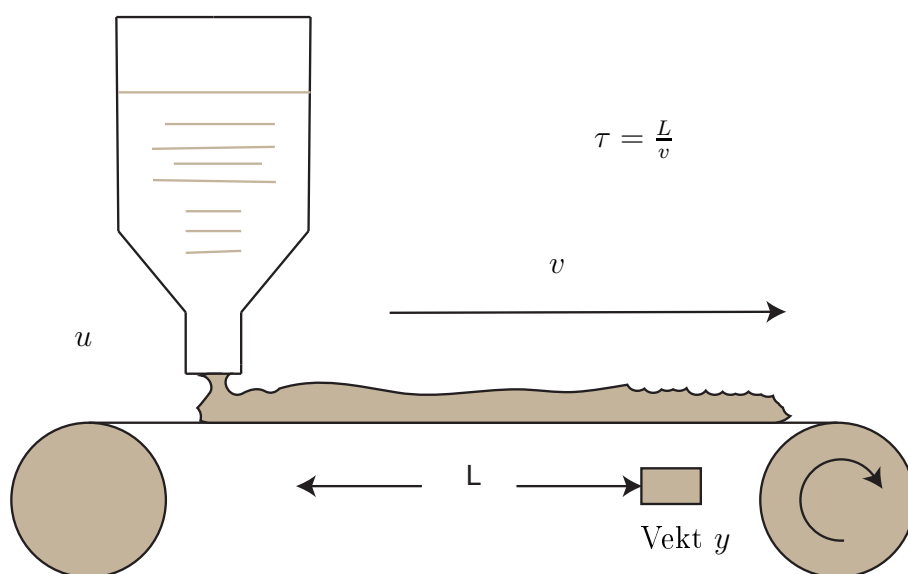
## 7.4 Tidsforsinkelse

Tidsforsinkelse (også kjent som transportforsinkelse eller dødtid) opptrer ofte i reguleringsystemer, både i prosessene og fra forsinkelser i prosessering av målte signaler. I kjemiske prosesser har vi ofte tidsforsinkelser som representerer transporttid i rør. Det vil også være tidsforsinkelse knyttet til andre former for transport, som for eksempel på transportbånd som vist i Figur 7.12.

Videre vil det være en viss tidsforsinkelse knyttet til prosesseringstid i datamaskiner og prosessorer. Tidsforsinkelse påvirker *alltid* responsen og stabiliteten (som vi skal lære om i neste kapittel) til et system, og det er derfor viktig å analysere den. Hvis et signal  $u(t)$  er forsinket med  $\tau$  sekunder skrives dette som  $u(t - \tau)$ , eller i et dynamisk system

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t - \tau). \quad (7.16)$$

Legg merke til at systemet (7.16) fortsatt er et lineært system.



Figur 7.12: Transportforsinkelse mellom pådrag  $u$  og måling  $y$ .

**Example 33** Vi skal se på nivåreguleringsproblemet igjen. Vi antar nå at det er en viss transporttid i røret som transporterer den massestrømmen vi har styring på. Det vil si det tar  $\tau$  sekunder før pådraget vårt påvirker prosessen. transportforsinkelse i rør kan beregnes som

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{AL}{q} = \frac{\rho AL}{w},$$

der  $L$  er lengden av røret,  $v$  er hastigheten til strømmingen i m/s,  $A$  er tverrsnittsarealet til røret,  $q$  er volumstrøm i m<sup>3</sup>/s,  $\rho$  er tetthet i kg/m<sup>3</sup> og  $w$  er massestrømmen i m<sup>3</sup>/s. Vi antar nå at vi ikke har forstyrrelse eller foroverkobling slik at modellen blir

$$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A}h + \frac{w_{inn}(t - \tau)}{\rho A}.$$

Denne modellen er simulert for forskjellige verdier av rørlengden  $L$ , noe som gir forskjellige verdier for  $\tau$ . Resultatet er vist i Figur 7.13 og som vi ser så vil reguleringssystemet få stadig mer problemer med å holde referansenivået i tanken ettersom tidsforsinkelsen øker. Hvis tidsforsinkelsen økes utover en kritisk verdi, vil ikke referansenivået oppnås i det hele tatt, noe som er vist i Figur 7.14.

I Simulink legger vi inn tidsforsinkelse med **Transport-Delay** blokken som er vist i Figur 7.15. Denne finnes under **Simulink**→**Continuous** i Library Browseren.

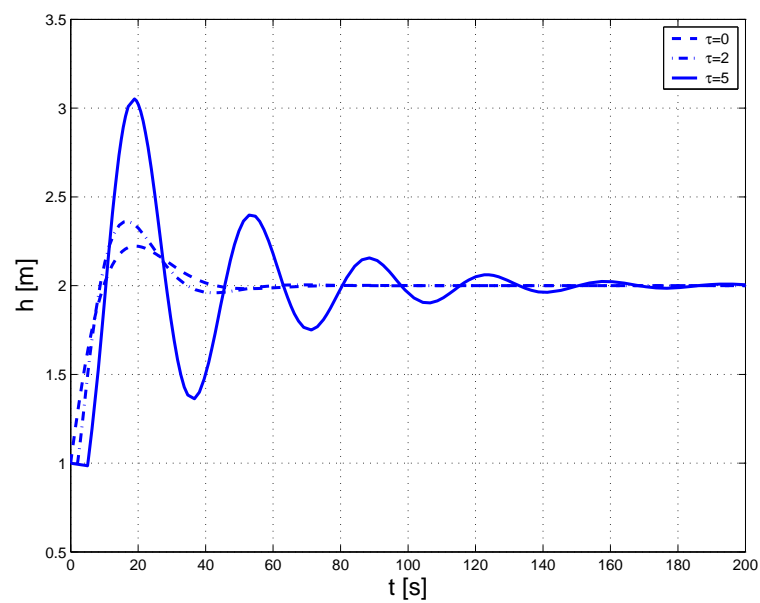
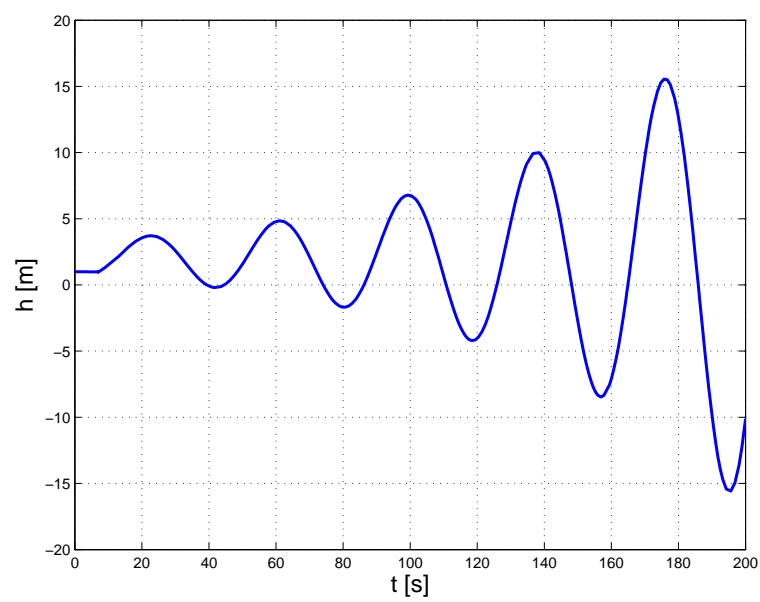
## 7.5 Valg av regulatorparametere

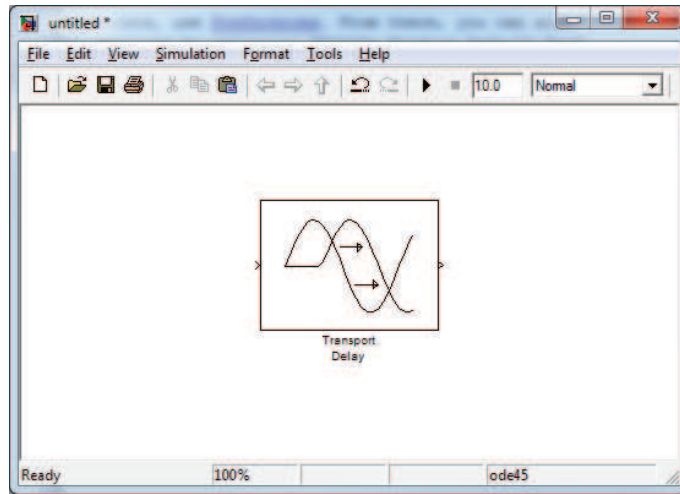
Vi vil nå se på hvordan vi kan velge fornuftige verdier for regulatorparametrene  $K_p$ ,  $K_i$  og  $K_d$  i PID-regulatorer. Prosessen med å finne disse parametrene kalles for tuning.

### 7.5.1 Polplassering

Denne metoden går ut på å velge regulatorparametrene slik at vi bestemmer verdien på løsningene til systemets karakteristiske ligning. Vi skal se dette anvendt på et system av andre orden, men metoden er generell og kan brukes på systemer av vilkårlig orden. Gitt systemet

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = u \quad (7.17)$$

Figur 7.13: Nivået i tanken med tre forskjellige verdier av  $\tau$ .Figur 7.14: Nivået i tanken med en transportforsinkelse på  $\tau = 7$ .



Figur 7.15: Tidsforsinkelsesblokken i Simulink

med PD-regulatoren

$$u = K_p x + K_d \dot{x}. \quad (7.18)$$

Generelt ville vi hatt  $u = K_p e + K_d \dot{e}$  der  $e = y - r$ , men nå har vi for enkelhets skyld valgt  $y = x$  og  $r = 0$ . Problemet vi skal finne svar på er følgende: Velg  $K_p$  og  $K_d$  slik at systemet

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + \omega_o^2 x = K_p x + K_d \dot{x}, \quad (7.19)$$

det vil si systemet i lukket sløyfe, får udempet resonansfrekvens gitt av  $\hat{\omega}_0$  og relativ dempingsgrad gitt av  $\hat{\zeta}$ . Systemet kan nå skrives som

$$\ddot{x} + \underbrace{(2\zeta\omega_o - K_d)}_{2\hat{\zeta}\hat{\omega}_0} \dot{x} + \underbrace{(\omega_o^2 - K_p)}_{\hat{\omega}_0^2} x = 0. \quad (7.20)$$

Vi har nå at  $\omega_o^2 - K_p = \hat{\omega}_0^2$ , hvilket betyr at vi skal velge  $K_p$  slik at

$$K_p = \omega_o^2 - \hat{\omega}_0^2. \quad (7.21)$$

Videre ser vi at  $2\zeta\omega_o - K_d = 2\hat{\zeta}\hat{\omega}_0$ , hvilket betyr at vi skal velge  $K_d$  slik at

$$K_d = 2(\zeta\omega_o - \hat{\zeta}\hat{\omega}_0). \quad (7.22)$$

Metoden kan anvendes til å tilorde de egenskapene vi vil til det endelige systemet, men et mye brukt valg er å velge regulatorparametere slik at systemet får kritisk demping. Vi velger da  $\hat{\zeta} = 1$ . Grunnen til dette er at vi da får et raskest mulig system, men som ikke har svingninger. Vi skal illustrere dette gjennom et eksempel

**Example 34** *Modellen for det aktive fjæringssystemet i en bil er gitt av*

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_o\dot{x} + \omega_0^2x = u, \quad (7.23)$$

der  $\omega_0 = 5\text{rad/s}$  og  $\zeta = 0.9$ . Under visse forhold kan systemet utsettes for forstyrrelser med frekvens rundt resonansfrekvensen. For eksempel kan bilen kjøre på en humpet veg med en slik fart at vibrasjonene som oppstår har en frekvens i nærheten av  $\omega_0$ . Disse forstyrrelsene vil da forsterkes, men dette kan unngås ved riktig valg av regulatorparametrene  $K_p$  og  $K_d$ . Vi skal nå finne disse parametrene slik at resonansfrekvensen blir flyttet til  $\hat{\omega}_0 = 10\text{rad/s}$  og at systemet får kritisk demping.

$$\begin{aligned} K_p &= \omega_0^2 - \hat{\omega}_0^2 = 5^2 - 10^2 = -75 \\ K_d &= 2(\zeta\omega_0 - \hat{\zeta}\hat{\omega}_0) = 2(0.9 \cdot 5 - 1 \cdot 10) = -11 \end{aligned} \quad (7.24)$$

### 7.5.2 Ziegler-Nichols' metoder

Disse metodene ble først publisert i artikkelen [13]. De to metodene gir oppskrifter for hvordan man finner fornuftige regulatorparametere for regulatorer av typen P, PI og PID. Regulatoren har formen

$$u = K_p \left( e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e d\tau + T_d \dot{e} \right), \quad (7.25)$$

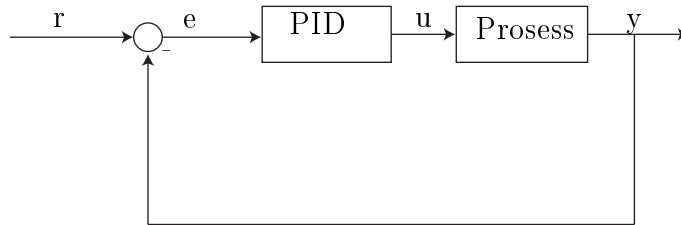
der  $e = r - y$ . Sammenlignet med vår tidligere fremstilling av PID-regulatoren i (7.14), vil nå

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d. \quad (7.26)$$

Metodene baseres på bruk av simuleringer eller eksperimenter.

#### Ziegler-Nichols' lukket sløyfe metode

Metoden tar utgangspunkt i et system der man har en PID-regulator koblet til en prosess som vist i Figur 7.16. For å finne parameterne simulerer man systemet, eller eventuelt gjør eksperimenter, og følger følgende oppskrift:



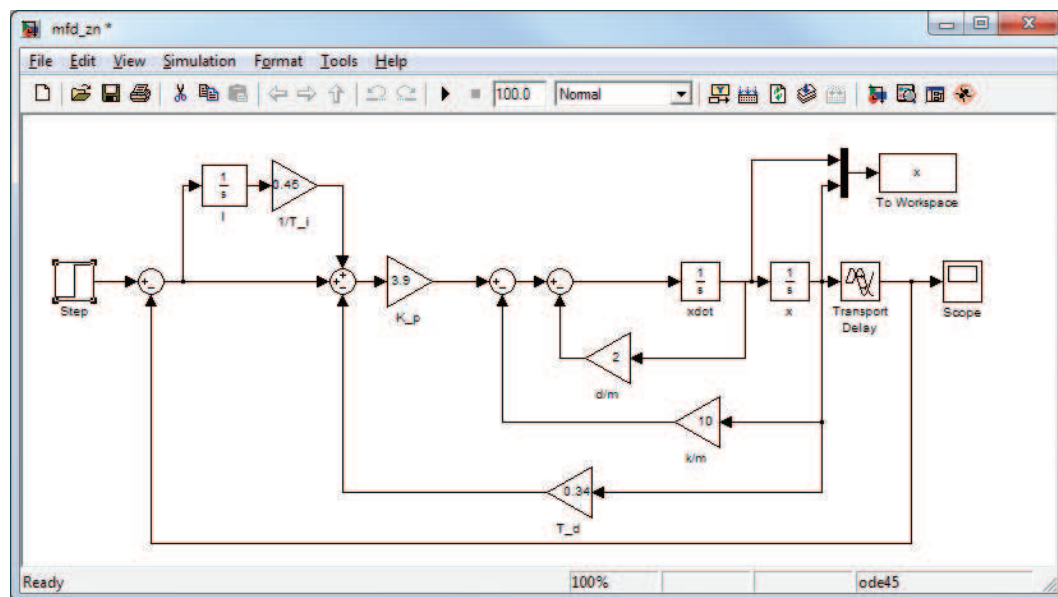
Figur 7.16: Prosess med PID-regulator.

1. Sett  $K_i = K_d = 0$  og velg  $K_p$  liten
2. Sett på et sprang i referansen, det vil si legg inn en endring fra  $r = 0$  til  $r = \textit{konstant}$
3. Øk verdien på  $K_p$  inntil det oppstår stående svingninger i systemet. Skriv ned den kritiske forsterkningen  $K_{pk}$ , regulatorforsterkningen som fikk svingningene til å oppstå, og perioden til svingningene, kalt den kritiske perioden  $T_k$ .
4. Beregn  $K_p$ ,  $K_i$  og  $K_d$  etter tabellen

Regulator	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{pk}$	$\infty$	0
PI	$0.4K_{pk}$	$0.8T_k$	0
PID	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.125T_k$

Legg merke til at systemet må være av en slik type at stående svingninger kan oppstå ved bruk av P-regulator. Som vi har sett, utelukker dette systemer av første orden, og også andreordens systemer. Vi skal derfor anvende metoden på et system av andre orden med tidsforsinkelse i et eksempel

**Example 35** Vi skal nå simulere masse-fjær-demper systemet, men for å få til stående svingninger, har vi også lagt til en tidsforsinkelse på ett sekund. Simulink-diagrammet for dette systemet er vist i Figur 7.17. Legg merke til hvordan PID-regulatoren er implementert. I-leddet er konstruert ved å innføre en integrator, mens D-leddet er implementeres ved å koble tilbake fra  $\dot{x}$ . Grunnen til dette er at vi ikke ønsker å innføre en derivasjon i regulatoren. Vi følger oppskriften over, og setter først  $K_i = K_d = 0$  og velger  $K_p = 0.5$ .



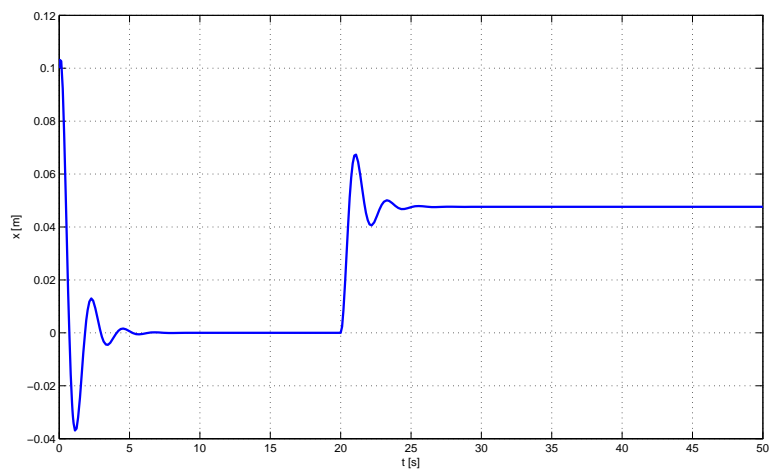
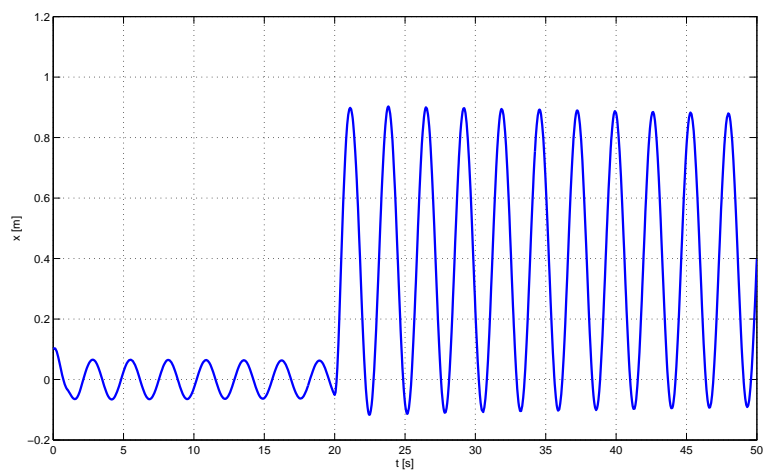
Figur 7.17: Simulink diagram for masse-fjær-demper system med PID regulator

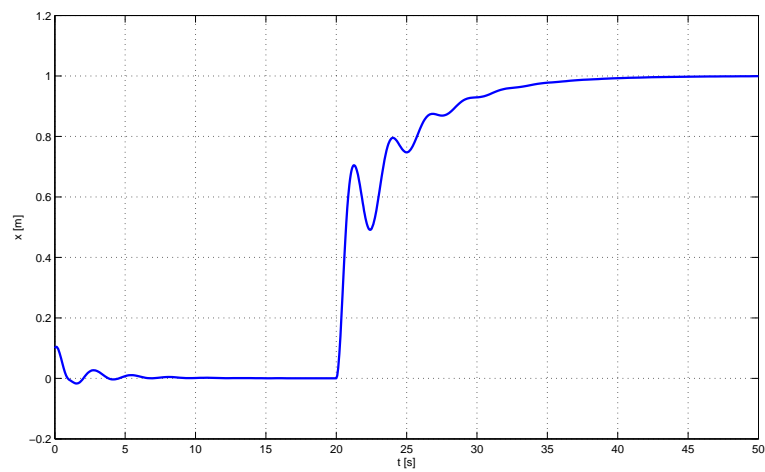
Simuleringen av dette er vist i Figur 7.18. Deretter økes  $K_p$  inntil vi får svingninger. I dette tilfellet gir  $K_p = 6.5$  stående svingninger. Vi setter derfor  $K_{pk} = 6.5$ . De stående svingningene er vist i Figur 7.19. Den kritiske perioden avleses til å være  $T_k = 2.75\text{s}$ . Vi bruker nå tabellen til å regne ut parametrene for de tre regulatorene:

$$\begin{aligned}
 P\text{-regulator:} \quad K_p &= 0.5 \cdot 6.5 = 3.25 \\
 PI\text{-regulator:} \quad K_p &= 0.4 \cdot 6.5 = 2.6 \\
 &\quad T_i = 0.8 \cdot 2.75 = 2.2 \\
 PID\text{-regulator} \quad K_p &= 0.6 \cdot 6.5 = 3.9 \\
 &\quad T_i = 0.5 \cdot 2.75 = 1.38 \\
 &\quad T_d = 0.125 \cdot 2.75 = 0.34
 \end{aligned}$$

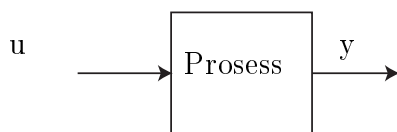
Simuleringen for systemet med PID-regulator er vist i Figur 7.20.



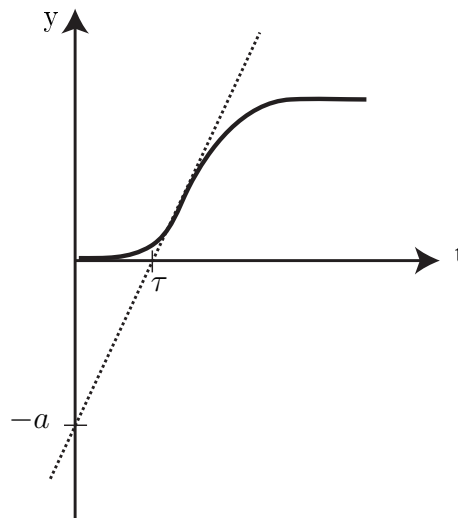
Figur 7.18: P-regulator med  $K_p = 0.5$ Figur 7.19: Stående svingninger når  $K_p = 6.5$



Figur 7.20: Masse-fjær-demper system med PID-regulator tunet etter Ziegler-Nichols' metode



Figur 7.21: Prosess for Ziegler-Nichols' åpen sløyfe metode



Figur 7.22: Sprangrespons for bruk i Ziegler-Nichols' åpen sløyfe metode

### Ziegler-Nichols' åpen sløyfe metode

Denne metoden tar utgangspunkt i et system der man ikke har koblet til en regulator til prosessen som vist i Figur 7.21. For å finne parameterne simulerer man systemet (evt gjør eksperimenter) og følger følgende oppskrift:

1. Sett systemet i åpen sløyfe, det vil si koble fra eventuelle regulatorer og tilbakekoblinger
2. Sett på et enhetssprang i pådraget, det vil si legg inn en endring fra  $u = 0$  til  $u = 1$
3. Tegn på en tangent i vendepunktet til sprangresponsen. Les av skjæringspunktet  $-a$  og dødtiden  $\tau$  for tangenten slik som på figur 7.22
4. Beregn  $K_p$ ,  $K_i$  og  $K_d$  etter tabellen

Regulator	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$	$\infty$	0
PI	$0.9/a$	$3\tau$	0
PID	$1.2/a$	$2\tau$	$0.5\tau$

# Kapittel 8

## Stabilitet

### 8.1 Definisjon

Vi har nå begynt å se på hvordan reguleringsteknikk for å designe regulatoren som styrer systemets tilstander til ønsket verdi, eller sørger for at en utgang følger en referanse. Et annet vesentlig poeng er at systemet er *stabilt*. Dette er en grunnleggende egenskap for et reguleringssystem. Stabilitet er et svært viktig begrep og vil dukke opp i fag som Reguleringsteknikk, Lineær systemteori, Ulineære systemer og fagene i fjerde klasse. Stabilitet er et omfattende tema som vil bli utførlig behandlet i disse senere fagene.

Det finnes mange typer stabilitet for dynamiske systemer, og vi skal ikke gå i stor detalj her, men det er viktig med en klar og presis definisjon. Denne definisjonen er hentet fra [7], som er læreboken i Ulineære systemer.

Anta at vi har et dynamisk system på formen

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.1)$$

og anta at  $\bar{x}$  er et likevektspunkt for (8.1), det vil si  $f(\bar{x}) = 0$ . Systemet (8.1) kan være en matematisk modell av et fysisk system, eller en prosess og en regulator i lukket sløyfe. Vi skal nå studere stabiliteten til likevektspunktet  $\bar{x}$ . For enkelhets skyld antar vi at  $\bar{x} = 0$ . Definisjonen blir ikke mindre generell for det, siden vi alltid kan forskyve likevektspunktet til origo ved hjelp av et variabelskifte. Anta for et øyeblikk at  $\bar{x} \neq 0$ . Anta videre at vi gjør et variabelskifte

$$y = x - \bar{x}.$$

Den tidsderiverte av  $y$  er gitt av

$$\dot{y} = \dot{x},$$

siden  $\bar{x}$  er konstant. Vi har derfor

$$\dot{y} = f(x) = f(y + \bar{x}) \triangleq g(y), \text{ der } g(0) = 0.$$

I den nye variabelen  $y$  har systemet et likevektspunkt i origo. Derfor kan vi uten tap av generalitet anta at  $\bar{x} = 0$  og studere stabiliteten til origo  $x = 0$ .

**Definition 36** *Likevektspunktet  $x = 0$  til (8.1) er*

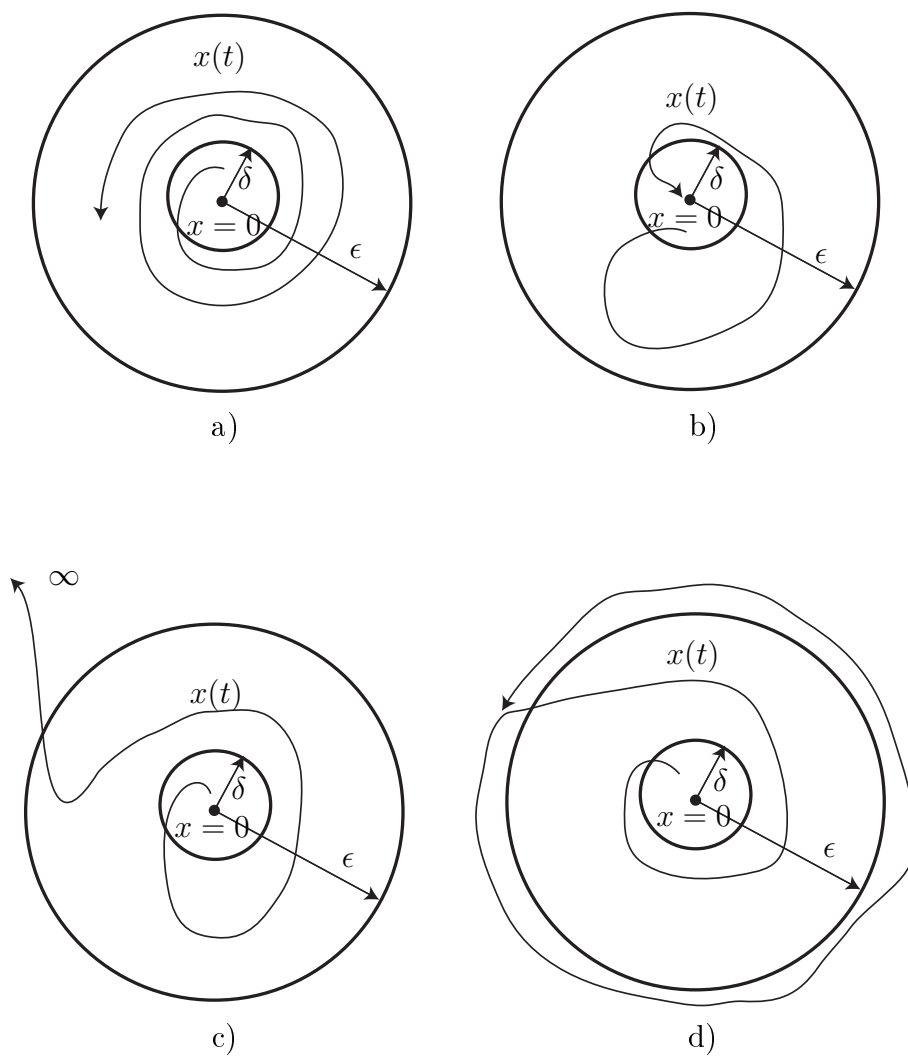
1. *stabil* hvis det, for enhver  $\varepsilon > 0$ , finnes en  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  slik at  $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ <sup>1</sup>
2. *asymptotisk stabil* hvis det er stabil og  $\delta$  kan velges slik at  $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
3. *ustabil* hvis det ikke er stabil

I figur 8.1 er disse tre forskjellige typene av stabilitet illustrert. I figur a) ser vi en løsning som initielt, det vil si for  $t = 0$ , starter innenfor en sirkel med radius  $\delta$ , og dermed har vi at  $\|x(0)\| < \delta$ . Etter som tiden går holder tilstanden  $x(t)$  seg innenfor sirkelen med radius  $\varepsilon$ , og følgelig er  $\|x(t)\| < \varepsilon$ , og likevektspunktet er stabil i henhold til definisjon 36 punkt 1. I figur b) er likevektspunktet stabil, og i tillegg går  $x \rightarrow 0$  når  $t \rightarrow \infty$ , slik at likevektspunktet er asymptotisk stabil. I figur c) ser vi at systemet ikke er stabil, og er derfor ustabil i henhold til definisjon 36 punkt 3. I figur d) er det vist en ulineær grensesvingning. Dette fenomenet skal vi komme tilbake til.

**Remark 37** *Den praktiske tolkningen av stabilitet er at hvis tilstanden initielt er nær likevektspunktet, så forblir tilstanden nær likevektspunktet, noe som kan sees tydelig av figur 8.1 a)*

---

<sup>1</sup>Normen  $\|x\|$  til en vektor  $x$  er et mål på lengden til vektoren. Den er definert som  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . Hvis  $x$  er en skalar, så er  $\|x\| = |x|$ .



Figur 8.1: a) Stabil b) Asymptotisk stabil c) Ustabil d) Grensesvingning

## 8.2 Stabilitet for lineære systemer

Legg merke til at stabilitet er definert helt uavhengig av om vi studerer lineære eller ulineære systemer. Vi skal nå se nærmere på stabilitet for lineære systemer.

### 8.2.1 Systemer av første orden

Først skal vi studere hvordan stabilitetsegenskapene til likevektspunktet  $x = 0$  til førsteordenssystemet

$$\dot{x} = ax, \quad a < 0$$

kan bestemmes ut fra definisjonen. Denne differensialligningen kan løses eksplisitt, og vi finner løsningen som

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

der  $x_0 = x(0)$ . Vi antar nå at initialverdien oppfyller  $|x_0| < \delta$ , det vil si vi starter innenfor  $\delta$ -sirkelen. Da vil løsningen  $x(t)$  oppfylle

$$|x(t)| = |x_0 e^{at}| \leq |x_0| |e^{at}|. \quad (8.2)$$

Siden  $a < 0$  vil  $e^{at} < 1$ , og dermed

$$|x(t)| \leq |x_0| \leq \delta = \varepsilon.$$

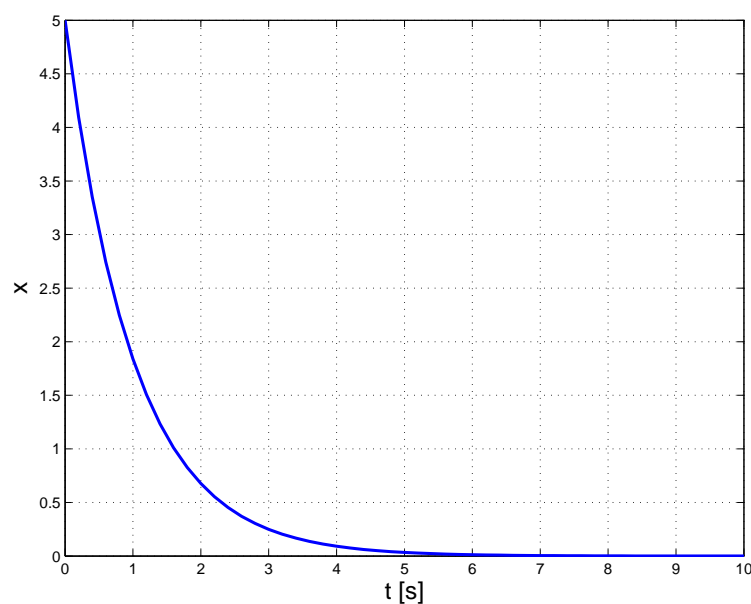
Dermed er systemet stabilt med  $\delta = \varepsilon$ .

Vi kan også se på tilfellet  $a > 0$ . Da vil vi finne at ligning (8.2) ikke har noen øvre begrensning siden  $e^{at} \rightarrow \infty$  når  $t \rightarrow \infty$ , og systemet er dermed ustabilt.

I Figur 8.2 og 8.3 har vi plottet  $x(t)$  som er løsningen av differensialligningen

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = 5$$

for de to forskjellige tilfellene,  $a < 0$  og  $a > 0$ . Som vi ser vil  $a > 0$  føre til at  $x \rightarrow \infty$  når  $t \rightarrow \infty$ . Dette er et eksempel på et *ustabilt* system. For tilfellet  $a < 0$  får vi at  $x(t) \rightarrow 0$  når  $t \rightarrow \infty$ , som vil være et eksempel på et asymptotisk stabilt system.

Figur 8.2:  $a < 0$  gir et stabilt system

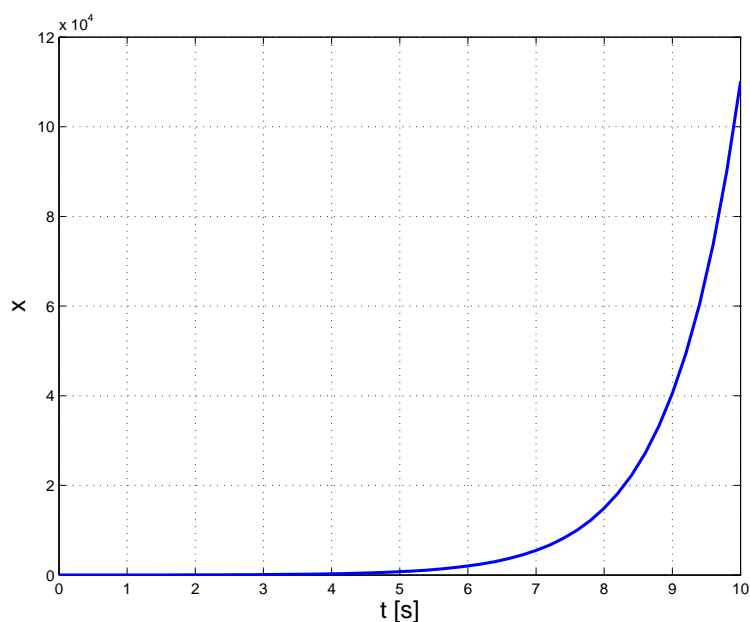
### 8.2.2 Systemer av andre orden

Vi skal nå se på stabilitet for andreordens systemer. I figurene 8.4, 8.5 og 8.6 er det vist simuleringer av et andreordenssystem i tre forskjellige tilfeller.

Figur 8.4 viser et andreordens system uten damping, og som vi ser resulterer dette i en stående svingning. Løsningen, som her er funnet numerisk selv om den også kan finnes analytisk, blir sinuskurver. Dette er et andre ordens system, og har således to tilstander. Som tidligere vist kan vi velge  $x_1 = x$  og  $x_2 = \dot{x}$ . Disse to tilstandene er plottet mot hverandre i figuren og som vi ser så blir løsningen en sirkel. Dette systemet kalles også for en harmonisk oscillator. En figur der en tilstand er plottet mot en annen kalles et faseplot, eller et faseportrett. Dette vil behandles i mer detalj i Reguleringssteknikk og Ulineære systemer. Dette systemet er slik at enhver initialtilstand forskjellig fra null vil gi en ny sirkel.

Vi skal nå ved hjelp av faseportrettet i figur 8.4 påvise at dette systemet er stabilt i henhold til definisjonen. Verdien til  $\varepsilon$  velges fritt. Videre kan vi fritt velge  $\delta < \varepsilon$ . En løsning som starter innenfor  $\delta$ -sirkelen vil nå forbli der, og likevektspunktet er dermed stabilt. En betegnelse som ofte brukes om et



Figur 8.3:  $a > 0$  gir et ustabilt system

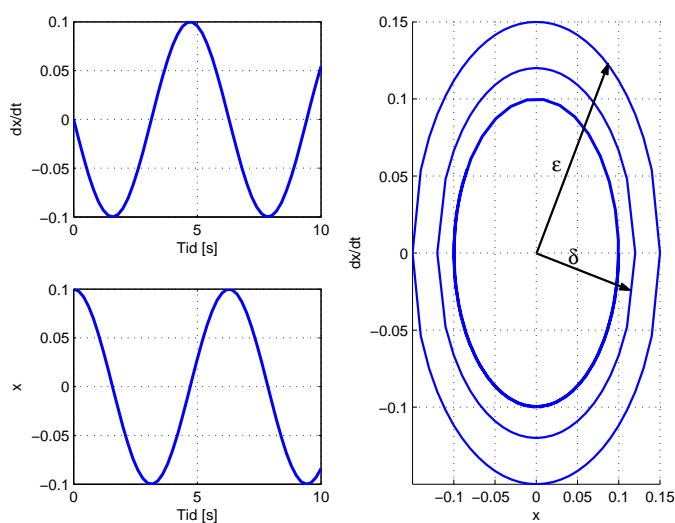
lineært svingesystem slik som dette er *marginal stabilitet*. Det er verdt å merke seg at en lineær harmonisk oscillator kun er en teoretisk konstruksjon. Ethvert fysisk system vil ha en eller annen form for friksjon, motstand eller damping som vil gjøre systemet enten asymptotisk stabilt eller ustabilt. Det finnes imidlertid fysiske ulineære svingekretser. Vi skal se eksempel på dette senere.

Figur 8.5 viser et underdempet andreordens system. Løsningen, som starter innenfor  $\delta$ -sirkelen, og holder seg innenfor  $\varepsilon$ -sirkelen vil i dette tilfellet svinge seg inn mot likevektspunktet i origo, og vi har et asymptotisk stabilt system.

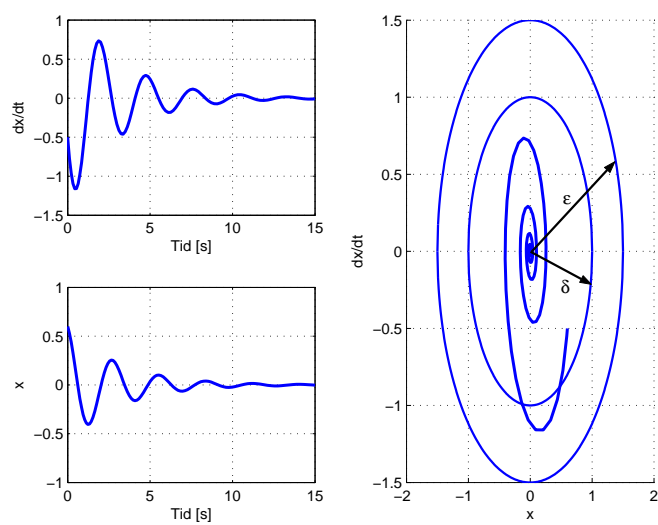
Figur 8.6 viser et ustabilt andreordens system. Trajektoren starter innenfor  $\delta$ -sirkelen, men forsvinner mot uendelig.

Vi kan også studere stabilitet for andreordens systemer ved å se på løsningene til den karakteristiske ligningen. Systemet

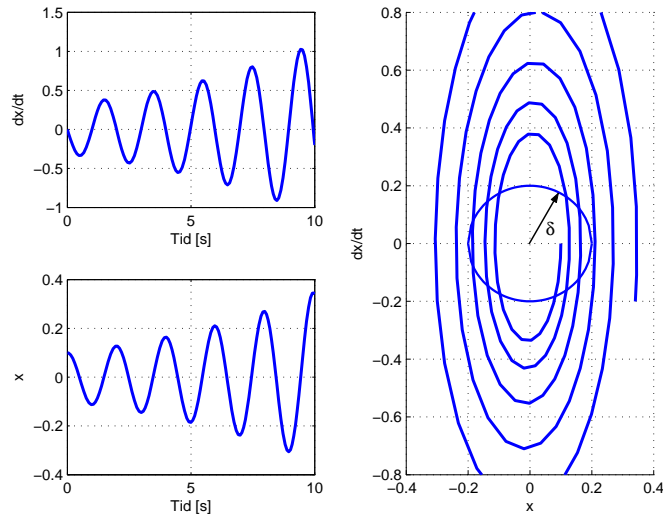
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (8.3)$$



Figur 8.4: Stabilt andreordens system.



Figur 8.5: Asymptotisk stabilt andreordens system.



Figur 8.6: Ustabilt andreordens system.

har i følge det vi lærte i kapittel 3.2.6 følgende karakteristiske ligning:

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0. \quad (8.4)$$

Røttene til (8.4) er gitt av

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\omega_0^2(\zeta^2 - 1)}}{2} \\ &= -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

og vi kan nå se hva forskjellige verdier av  $\zeta$  og  $\omega_0$  har å si for stabiliteten til dette andreordens systemet.

**To komplekse røtter** Fra (8.5) ser vi at  $0 < \zeta < 1$  og  $\omega_0 > 0$  gir to komplekskonjugerte røtter, altså underdamping, og i følge (3.25) er løsningen nå gitt av

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left( C \cos(\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}t) + D \sin(\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}t) \right). \quad (8.6)$$

Vi kan nå se at siden  $\zeta\omega_0 > 0$  så har vi en løsning som er slik at  $x(t) \rightarrow 0$  hvis  $t \rightarrow \infty$ , altså asymptotisk stabilitet. Hvis  $\zeta = 0$  så har vi ingen damping, og vi sier at systemet er udempet. Dette svarer til den harmoniske oscillatoren diskutert over. Vi får stående svingninger representert ved

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t), \quad (8.7)$$

og systemet er stabilt.

**To reelle røtter** Fra (8.5) ser vi at  $\zeta > 1$  og  $\omega_0 > 0$  gir to forskjellige reelle røtter som begge er negative, det vil si overdamping, og i følge (3.23) er løsningen nå gitt av

$$x(t) = Ce^{(-\zeta\omega_0 + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + De^{(-\zeta\omega_0 - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}, \quad (8.8)$$

og siden begge røttene er negative har vi igjen at  $x(t) \rightarrow 0$  hvis  $t \rightarrow \infty$ , altså asymptotisk stabilitet.

**En reell rot** Fra (8.5) ser vi at  $\zeta = 1$  og  $\omega_0 > 0$  gir to identiske reelle negative røtter, det vil si kritisk damping, og i følge (3.24) er løsningen nå gitt av

$$x(t) = Ce^{-\omega_0 t} + Dte^{-\omega_0 t}, \quad (8.9)$$

og siden  $\omega_0 > 0$  har vi igjen at  $x(t) \rightarrow 0$  hvis  $t \rightarrow \infty$ , altså asymptotisk stabilitet.

**Ustabilitet** I alle tilfellene over vil det være slik at hvis  $\zeta < 0$  eller  $\omega_0 < 0$  så vil systemet være ustabilt. Dette fører til at eksponenten i eksponensialfunksjonen i løsningene vil bli positiv og vi får at  $x(t) \rightarrow \infty$  når  $t \rightarrow \infty$ , altså ustabilitet.

For å oppsummere: Den andreordens differensialligningen i (8.4) har asymptotisk stabile løsninger hvis  $\zeta > 0$  og  $\omega_0 > 0$ . Hvis  $\zeta = 0$  har vi et grensetilfelle der løsningen er stabil, og hvis  $\zeta < 0$  eller  $\omega_0 < 0$  så vil systemet være ustabilt. Dette betyr også at hvis  $p > 0$  og  $q > 0$  så vil løsningene til (3.20) være asymptotisk stabile.

### 8.3 Andre systemer

Ulineære systemer av forskjellig type kan oppvise mange forskjellige typer stabilitet. Et interessant fenomen i den forbindelse er grensesvingninger. Et eksempel på dette er gitt av Van der Pols ligning:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2.\end{aligned}$$

Dette er et andreordens ulineært system. Systemet er simulert, med parameterverdien  $\mu = 1$ , i figur 8.7. Systemet har den egenskapen at uansett initialverdier, så vil løsningen gå mot en grensesvingning. Vi skal undersøke stabiliteten til likevektspunktet i origo. Ved å velge  $\varepsilon$  slik at  $\varepsilon$ -sirkelen ligger innenfor grensesvingningen, vil trajektorer som starter nær origo, innenfor enhver  $\delta$ -sirkel, måtte krysse  $\varepsilon$ -sirkelen. Likevektspunktet er derfor ustabilt. Grensesvingninger slik som dette opptrer kun i ulineære systemer.

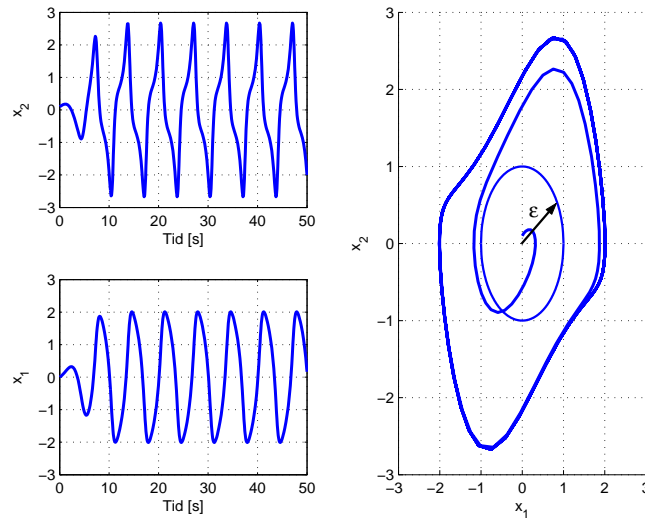
**Remark 38** *Legg merke til forskjellen mellom de to typene ustabilitet i figur 8.7 og figur 8.6. Selv om grensesvingningen i figur 8.7 forblir i nærheten av likevektspunktet, så kan den ikke være vilkårlig nær. Dette er den fundamentale forskjellen mellom stabilitet og ustabilitet.*

I Eksempel 33 ble det vist at nivåreguleringssystemet ble ustabilt når transportforsinkelsen ble for høy. Dette er et eksempel på noe generelt: Transportforsinkelse er destabiliserende.

Metning er også destabiliserende, men som oftest i en annen form. Resultatet av metning i for eksempel pådragsraten  $\dot{u}$ , det vil si hastigheten pådraget kan endres med, vil ofte være grensesvingninger, og reguleringssystemet kan dermed ikke sies å fungere tilfredsstillende. Et eksempel på begrensning i pådragsraten er at en ventil kan bare åpnes og lukkes med en viss øvre hastighet. Det finnes metoder for å håndtere metning, der den enkleste vil være å designe regulatorene slik at ikke pådraget går i metning.

### 8.4 Stabilisering

Til nå har vi hatt som hovedmål med regulatorene våre å styre en tilstand mot en referanseverdi, som for eksempel å holde hastigheten til en bil på ønsket verdi. Satellitteksempelen illustrerer også et annet poeng: Før vi koblet



Figur 8.7: Simulering av Van der Pols ligning.

tilbake fra vinkel og vinkelhastighet, var systemet ustabilt. Dette kaller vi å *stabilisere* systemet.

La oss se på systemet

$$\dot{x} = Ax + u$$

igjen. Som vi har sett, vil  $A > 0$  (med  $u = 0$ ) gi oss et ustabilt system. La oss tenke oss at dette er en modell for et fysisk system der vi har mulighet til å innføre en tilbakekobling og en P-regulator

$$u = -Kx, \quad K > 0$$

I lukket sløyfe blir da systemet

$$\dot{x} = Ax - Kx = (A - K)x,$$

gitt at vi bruker negativ tilbakekobling. I følge (3.14) er løsningen  $x(t)$  gitt av

$$x = x_0 e^{(A-K)t}.$$

Vi ser at systemet vil være stabilt for  $A - K < 0$ , eller

$$K > A.$$

Vi har med andre ord funnet et krav på regulatorparameteren  $K$  for at vi kan stabilisere systemet. Motsatt kan dette også vise at vi kan destabilisere et stabilt system hvis vi bruker positiv tilbakekobling og stor nok forsterkning. Vi kan også se at hvis vi øker  $K$  vil responsen til systemet bli hurtigere. Det kan virke som om vi dermed kan styre ethvert system så fort vi vil, men metning i pådraget vil hindre oss i dette.

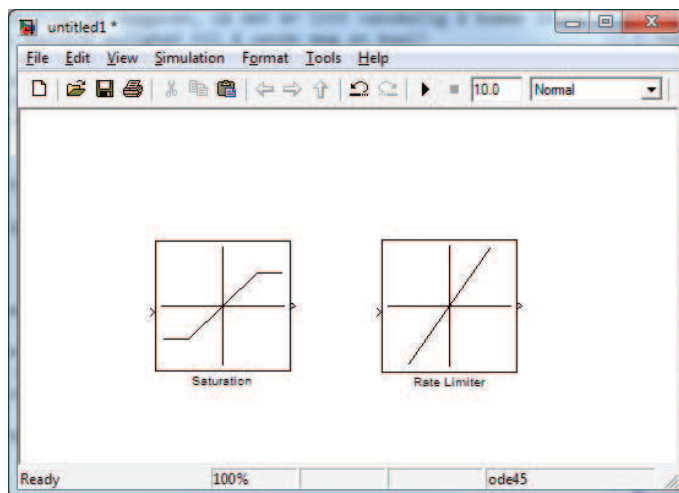
# Kapittel 9

## Ulineære systemer

### 9.1 Ulineære fenomener

Alle fysiske systemer er ulineære hvis vi modellerer nøyaktig nok. Ofte gir en linearisering en tilstrekkelig modell for regulatordesign, men dette er en tilnærming og burde være motivasjon nok til å studere ulineære systemer. Det finnes også en mengde fenomener som opptrer kun i ulineære systemer og som en linearisert modell dermed ikke vil kunne oppvise. Ulineariteter vil kunne oppstå i modellen som følge av fysikken som er involvert. Eksempler på dette er luftmotstanden  $-k_l v^2$  i cruise-control eksempelet eller ventilligningen  $w = k' \sqrt{h}$  fra nivåreguleringseksempelet. Det kan også i visse tilfeller være ønskelig å designe regulatoren til å være en ulineær funksjon av tilstandene i systemet. Dette kan gjøres på grunn av stabilitetsårsaker eller på grunn av et ønske om høyere ytelse, det vil si raskere og mer nøyaktig respons. I mange tilfeller vil også en analyse av det ulineære systemet være enklere enn å først linearisere systemet og så analysere den lineære modellen. En annen grunn til å beholde en ulineær modell av systemet er det kan inneholde såkalte *harde ulineariteter*. Dette er ulineære funksjoner som inneholder diskontinuiteter (enten i funksjonsverdi eller den deriverte) eller som ikke er en-entydige, og som av den grunn ikke lar seg linearisere. Harde ulineariteter inkluderer fenomener som Coulomb-friksjon, metning, dødsoner, slark og hysteres. Dette er fenomener som ofte opptrer i reguleringssystemer og som av den grunn er viktige å ta hensyn til. Dette temaet behandles i faget Ulineære systemer, men vi skal se på to av disse ulinearitetene her





Figur 9.1: Simulink-blokker for metning i amplitude og rate.

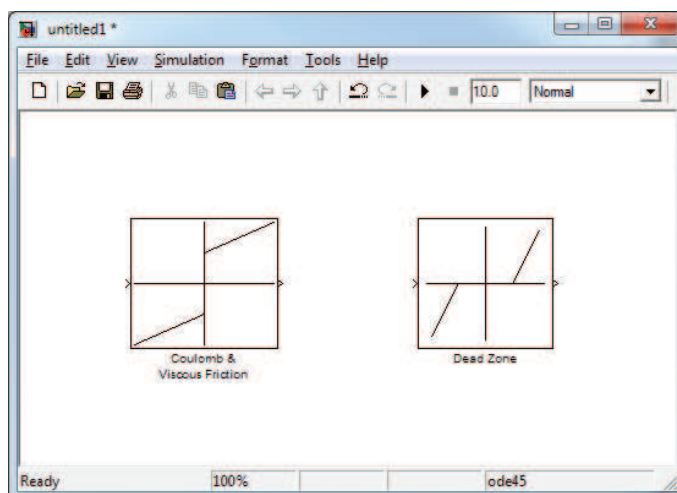
### 9.1.1 Metning

Et fenomen som er viktig å ta hensyn til i design av reguleringsystemer er *metning*. Metning betyr at pådrag eller tilstander ikke kan bli større (eller mindre) enn en viss grense. For eksempel så vi at skyvkraften til thrusterene i satellittekspelet ikke kunne bli større enn en viss øvre verdi, uansett hva regulatoren måtte diktere. Vi kan også ha metning i rate, det vil si tilstander eller pådrag kan ikke endre seg fortere enn en viss grenseverdi. For eksempel så kan ikke en ventil åpnes fortere enn en viss maksimalhastighet. Metning, både i absoluttverdi og rate, kan gi store problemer i styringssystemer hvis ikke hensyn er blitt tatt under designet.

I Simulink legger vi inn metning i verdien (amplituden) på signaler med **Saturation** blokken som er vist i Figur 7.15. Metning i raten eller hastigheten som signaler kan endre seg med legges inn med **Rate Limiter** blokken. Begge disse blokkene finnes under **Simulink**→**Discontinuities** i Library Browseren.

### 9.1.2 Dødsone

Dødsone opptrer i mange fysiske enheter. Et klassisk eksempel er rattet på en bil; man får ikke noe utslag på styringen før rattvinkelen overstiger en ned-



Figur 9.2: Simulink-blokker for friksjon og dødsone.

re grense. Et annen eksempel er elektriske motorer, det må en viss minste spenning til før motorakslingen gir noe utslag. I virkeligheten skyldes dette statisk friksjon, en annen ulinearitet, da rotasjon av akslingen bare skjer dersom drivmomentet er over en viss nedre grense. Dødsoner kan redusere ytelsen til reguleringssystemer, men også lede til grensesvingninger og ustabilitet.

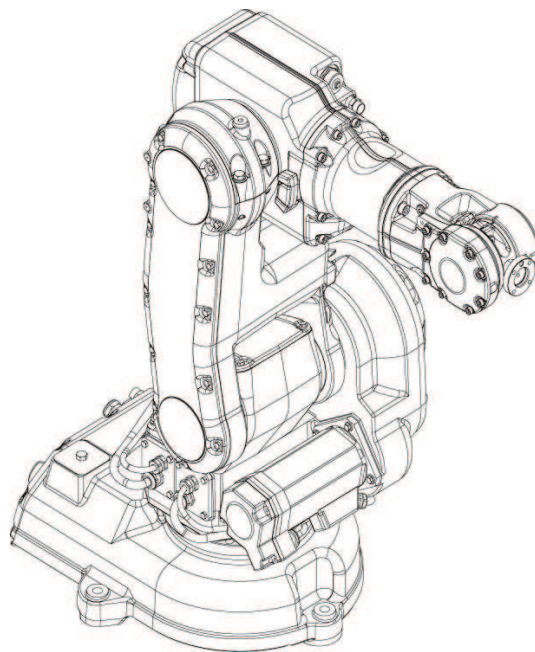
I Simulink legger vi inn dødsone med `Dead Zone` blokken i Figur 9.2 som finnes under `Simulink` → `Discontinuities` i Library Browseren. I Figur 9.2 ser vi også friksjonsblokken fra Simulink.

## 9.2 Ulineær regulering

Enten vi skal regulere et ulineært system, eller vi ønsker å designe en ulineær regulator for et ellers lineært system, så trenger vi teknikker fra fagfeltet ulineære systemer. Vi skal se på regulering av et ulineært system i et eksempel.

**Example 39** *I dette eksempelet henvises det til vektorer og matriser. Matriser og regneregler for disse vil behandles i detalj i Matematikk 3. Dynamikken til en robotmanipulator, se figur 9.3, kan beskrives med ligninger av typen*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + D\dot{q} + g(q) = u, \quad (9.1)$$



Figur 9.3: Eksempel på robotmanipulator.

der  $q$  er en vektor bestående av robotens leddvinkler, eller koordinater,  $M(q)$  er robotens treghetsmatrise,  $C(q, \dot{q})$  er en matrise som inneholder sentripetal- og Coriolis-ledd,  $D$  er dempematrisen,  $g(q)$  er en vektor av tyngdemomenter, og  $u$  er en vektor av påtrykte momenter, for eksempel moment fra motorene i hvert ledd. For roboten i figur 9.3 vil

$$q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad u = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{pmatrix},$$

der  $\tau_i$  er momentet fra motoren i ledd nr  $i$ . Det er nokså vanlig å bruke en PD-regulator med tyngdekraftskompensasjon

$$u = -K_d \dot{q} - K_p q + g(q)$$

for å styre roboten mot likevektspunktet  $q = \dot{q} = 0$ . Stabiliteten til dette systemet kan undersøkes ved å studere den totale energien i systemet. I dette tilfellet kan et uttrykk for kinetisk og potensiell energi skrives som

$$V = \frac{1}{2} (\dot{q}^T M(q) \dot{q} + q^T K_p q).$$

Totalenergien i systemet er alltid et positivt tall. Hvis vi kan vise at regulatoren medfører at denne energien alltid er avtagende vil dette implisere at systemet er stabilt. Hvis vi deriverer  $V$  med hensyn på tiden, og dermed finner tilført effekt, vil vi finne at

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_d \dot{q},$$

som alltid er negativ. Dette betyr at energi trekkes ut av systemet. Beregningene som ligger bak dette resultatet vil bli gjennomgått i detalj i Ulineære systemer. Stabiliteten til systemet er nå bevist. Det kan også vises at likevektspunktet er asymptotisk stabilt. Denne type stabilitetsanalyse, kjent som Lyapunovs direkte metode, etter den russiske matematikeren A.M. Lyapunov, kan vises å være ekvivalent med  $\delta - \varepsilon$ -analysen.

Det er verdt å merke seg at modeller på formen (9.1) også brukes for å modellere andre mekaniske systemer slik som skip, undervannsfarkoster, fly og romfartøy.



# Kapittel 10

## Måling av resistans og kapasitans

I forbindelse med regulering er ikke måling av resistans og kapasitans av primær interesse. Men de inngår veldig ofte i instrumenter for måling av andre størrelser.

### 10.1 Resistans

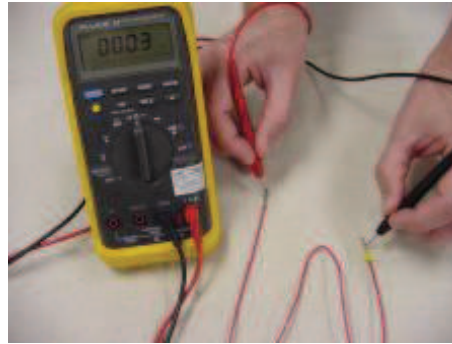
Elektrisk motstand, resistans, kan variere med andre fysiske størrelser slik som temperatur og belastning. Hvis man kjenner sammenhengen mellom den fysiske størrelsen og resistansen, kan man dermed måle den ukjente størrelsen ved å måle resistansen. For å realisere dette trengs metoder for å måle resistans.

#### 10.1.1 Direkte måling av resistans

Ifølge Ohms lov

$$U = RI$$

er spenningen  $U$  over en motstand proporsjonal med resistansen  $R$  hvis det går en strøm  $I$  gjennom motstanden. Ved måling av en resistans vil alltid resistansen  $r$  i ledningene spille inn, slik at man ikke bare måler den ukjente resistansen  $R_x$ , men den totale resistansen  $R_x + r$ . Dette er måleprinsippet som er mest brukt i multimetre, se Figur 10.1. En tilsynelatende løsning er å måle ledningsmotstanden  $r$ , og så trekke denne fra den totale målte motstanden  $R_x + r$ . Imidlertid er måling av motstand i en leder er veldig avhengig av kontaktpunktet mellom lederen og måleinstrumentet. Denne målingen blir



Figur 10.1: Multimeter som anvender toledermåling for måling av resistans.

dermed svært lite repeterbar, og et annet måleprinsipp er nødvendig for mer nøyaktige målinger av resistans. Målefeil som følger av ledningsmotstanden kan gjøres mye mindre ved hjelp av en teknikk kjent som firepunktskobling. Prinsippet er illustrert i Figur 10.2. Strømmen  $I$  er konstant og uavhengig av ledningsmotstanden  $r$ . Spenningen  $u$  over motstanden  $R$  måles med et separat ledningspar, der spenningsmåleren har meget høy inngangsimpedans slik at strømmen i dette ledningsparet kan ignoreres, det vil si  $i \ll I$ , eller  $i \approx 0$ . Resistansen  $R$  kan da beregnes som

$$R = \frac{u}{I}.$$

Et måleinstrument som måler resistans etter dette prinsippet er vist i Figur 10.3.

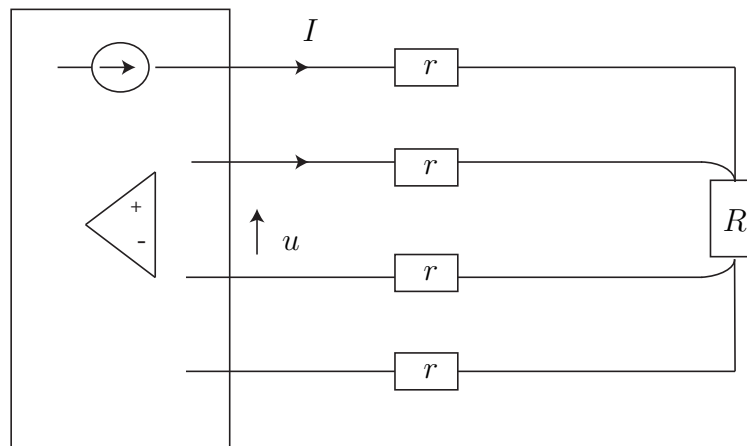
### 10.1.2 Indirekte måling av resistans

Resistans kan også måles ved å sammenligne en ukjent motstand med en kjent. Dette gir høy presisjon ved riktig kalibrering. Den enkleste formen for målebro, som denne teknikken kalles, er vist i Figur 10.4. Dette er en halvbro. Den kjente referanse-motstanden  $R_r$  og den ukjente  $R_x$  seriekobles. Spenningen  $U_r$  over  $R_r$  måles, og siden strømmen  $I$  gjennom begge motstandene er lik har vi at

$$\frac{U_r}{R_r} = \frac{U_x}{R_x},$$

der spenningen over den ukjente motstanden beregnes som

$$U = U_r + U_x \Rightarrow U_x = U - U_r.$$

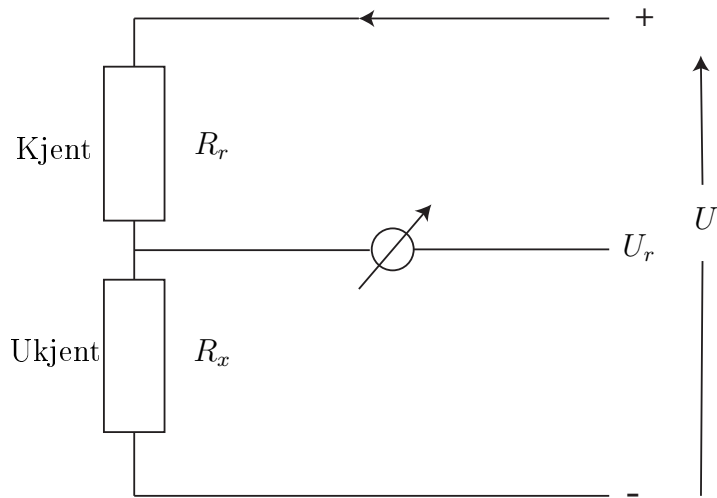


Figur 10.2: Firepunktskobling for måling av motstand.



Figur 10.3: Instrument som anvender firledermåling for måling av resistans.





Figur 10.4: Halvbro, eller spenningsdeler.

Dermed følger det at

$$\begin{aligned}\frac{U_r}{R_r} &= \frac{U - U_r}{R_x} \\ R_x &= R_r \frac{U - U_r}{U_r}.\end{aligned}$$

Ulempen med denne metoden er avhengigheten av forsyningsspenningen  $U$  som igjen varierer med ledningsmotstanden.

Dette problemet kan løses ved å bruke en helbro, eller Wheatstone-bro, som er vist i Figur 10.5. Av de fire motstandene  $R_1, \dots, R_4$  motstandene i helbroen er én ukjent, minst én variabel og de resterende konstante og kjente. Voltmeteret måler potensialforskjellen mellom punktene  $A$  og  $B$ . Ved å variere den variable motstanden inntil voltmeteret viser  $U_{AB} = 0$  sier vi at målebroen er balansert. Det går da ikke noe strøm gjennom voltmeteret, og vi har at

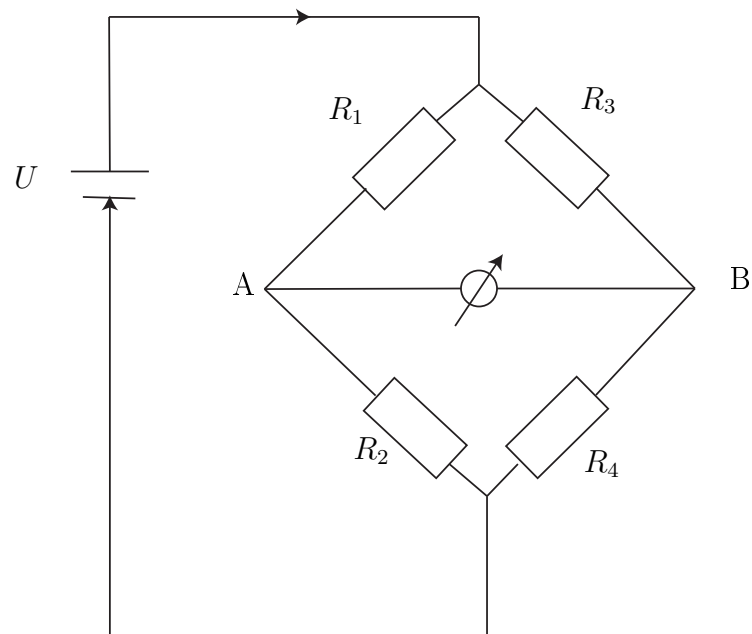
$$I_1 = I_2 \text{ og } I_3 = I_4. \quad (10.1)$$

Siden  $U_{AB} = 0$  har vi at

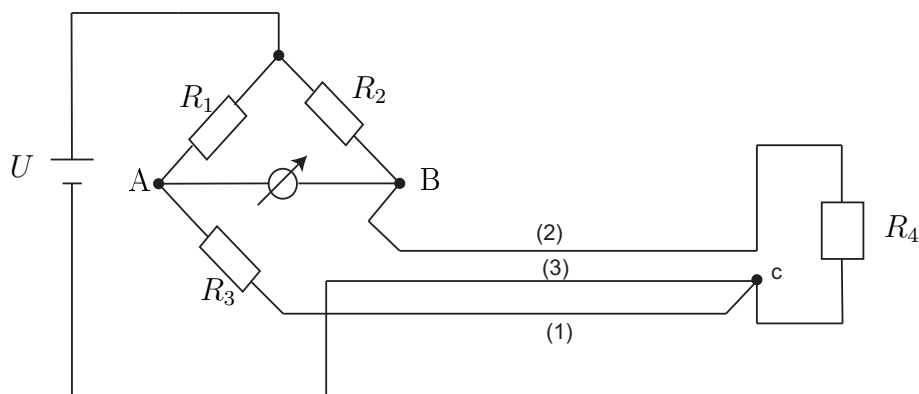
$$I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad (10.2)$$

og

$$I_2 R_2 = I_4 R_4. \quad (10.3)$$



Figur 10.5: Helbro, eller Wheatstone-bro.



Figur 10.6: Helbro med trelederkobling.

Ved å dividere (10.2) på (10.3) får vi

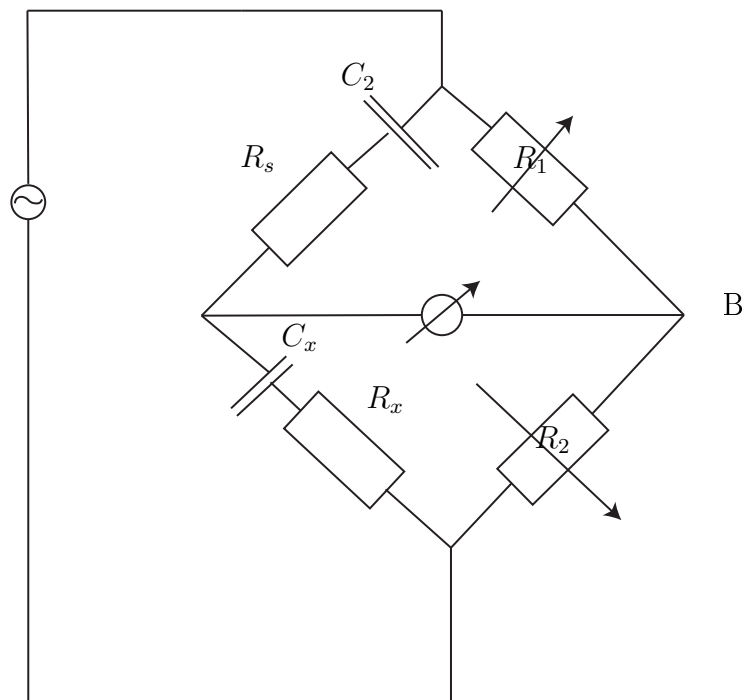
$$\frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} = \frac{I_3 R_3}{I_4 R_4},$$

som ifølge (10.1) gir

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

som kan løses med hensyn på den ukjente motstanden. Som vi ser er resultatet uavhengig av driftspenningen til målebroen.

Hvis den ukjente motstanden er en resistiv føler (som måler temperatur, krefter, mm) som er ligger langt fra resten av målebroen i avstand vil temperaturvariasjoner i ledningenes resistans kunne bli vesentlige [9]. Dette vil i stor grad påvirke nøyaktigheten til målebroen. En god løsning i slike tilfeller er en trelederkobling som vist i Figur 10.6. Temperaturvariasjonene vil være like store i begge lederene slik at nullpunktet ikke flyttes. Trelederkoblingen fungerer bra for resistive elementer plassert langt unna resten av broen, og som er del av en arm i en bro der én motstand varierer. På den annen side, målebroer der alle resistorene er variable er gjerne plassert i én pakke/komponent og når en slik bro er plassert langt borte fra resten av systemet, må andre teknikker brukes for å opprettholde nøyaktigheten. Målebroer kan også bli drevet av konstante strømkilder. Dette har en fordel når broen er lokalisert langt fra eksitasjonen fordi motstand i ledningene ikke introduserer feil i målingen.



Figur 10.7: Målebro for måling av ukjent kapasitans.

## 10.2 Kapasitans

Kapasitans kan måles ved hjelp av en målebro drevet av vekselsspenning slik som vist i Figur 10.7. Det kan da vises at den ukjente kapasitansen  $C_x$  kan finnes ved hjelp av sammenhengene

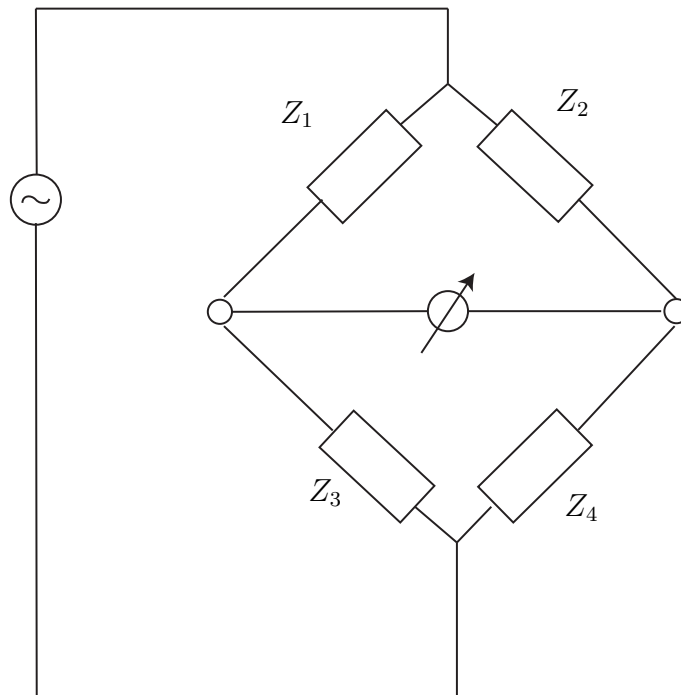
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C_s}.$$

der  $R_1$  og  $R_2$  er variable, men kjente motstander og  $C_s$  er en kjent kapasitans.

Kapasitans kan også måles ved å la den ukjente kapasitansen være den frekvensbestemmende komponenten i en oscillator krets. Dermed kan man måle frekvensen, og så regne ut kapasitansen.

Det er også mulig å formulere en målebro for generell impedans  $Z$ . En slik generell vekselspenningsdrevet impedansmålebro er vist i Figur 10.8. Denne broen er i balanse når

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \quad (10.4)$$



Figur 10.8: Målebro for måling av ukjent generell impedans.

Legg merke til at  $Z_i$  i (10.4) er et kompleks tall, det vil si både med fase og amplitude. Slik kan man også konstruere målebroer for måling av induktans.

### 10.3 Lys og optiske sensorer

En viktig egenskap ved et måleinstrument er at det så liten grad som mulig påvirker det som skal måles, det vil si prosessen. Når elektromagnetisk stråling, for eksempel synlig lys, brukes for å utføre målinger av tilstander i en prosess, oppnås i stor grad dette. Slike måleinstrumenter er ikke i fysisk kontakt med omgivelsene.

Det er aktuelt å måle både synlig lys, infrarødt og ultrafiolett lys. Lyskilder velges slik at de gir ønsket bølgelengde på lyset som detektoren skal detektere. Eventuelt kan lyset filteres slik at kun ønskede frekvenskomponenter når detektoren. Lysdioder kan brukes som lyskilde hvis effektkravet er lavt.

### 10.3.1 Emisjonsceller

Fotoelektrisitet er et fenomen som oppstår når metaller bestråles med lys med tilstrekkelig energi. Elektroner blir frigjort fra overflaten av metallet hvis energien til lyset er høy nok. Denne energien  $E$  er gitt av Einsteins lov,

$$E = h(f - f_0),$$

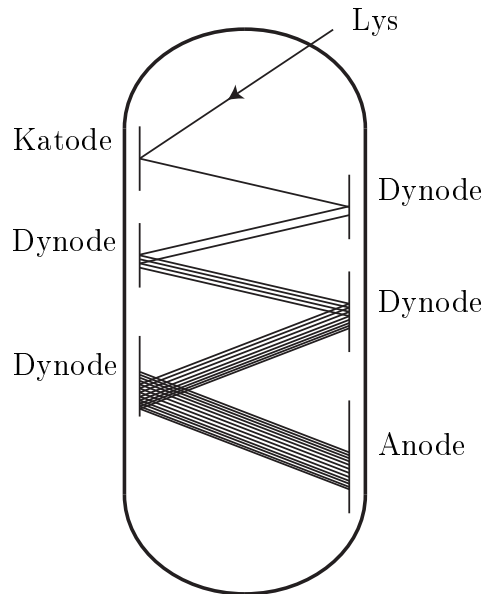
der  $h$  er Plancks konstant,  $f_0$  er den materialavhengige terskelfrekvensen og  $f$  er frekvensen til lyset. Emisjonscellen består av en anode og en katode. Katoden belegges med det lysfølsomme metallet og det settes opp et potensial over cellen. Strømmen av de løsrevne elektronene som dannes i kretsen er avhengig av lysintensiteten. Emisjonscellen brukes i dag mest i det ultrafiolette området.

En fotomultiplikator er en følsom lysmåler som bygger på samme prinsipp som emisjonscellen. De frigjorte elektronene trekeks mot en positiv elektrode kalt en dynode for å frigjøre enda fler elektroner. Dette repeteres et antall ganger før elektronstrømmen til slutt når anoden. Fotomultiplikatoren har således en forsterkning: ett enkelt foton som treffer katoden kan resultere i en million elektroner på anoden. Forsterkninger på  $10^5$  til  $10^7$  er typisk. Det er dette som gjør fotomultiplikatoren til en av de mest sensitive tilgjengelige lysmålerene. En skisse av en fotomultiplikator er vist i figur 10.9.

### Fotomotstander

Fotomotstander er også kjent som lysfølsomme motstander eller LDR (Light dependent resistor). Disse er produsert av halvledermaterialer og har variabel elektrisk motstand som følge av elektromagnetisk stråling. Hvis lysets frekvens er større enn en materialavhengig grensefrekvens vil elektronhullpar frigjøres. Vanlige materialer for fotomotstander for synlig (400 nm - 700nm) og nær infrarødt (700nm - 1400 nm) lys er kadmiumbaserte slik som kadmiumsulfid (CdS), CdSe og CdTe. CdS har en respons som er nær det menneskelige øyet, og er således mest vanlig i målinger som involverer menneskelig persepsjon av lys. For infrarødt lys brukes blyforbindelser som blysulfid PbS, PbSe og PbTe. For infrarødt ( $3\mu m - 14mm$ ) brukes diverse indiumbaserte materialer (InSb, InAs), tellur, og HgCdTe-legeringer. Disse lange bølgelengdene er ute av rekkevidde for fotodioder.

Sammenhengen mellom motstanden  $R$  for en fotomotstand og belysningsstyrken  $E[\text{lux}]$  er sterkt ulineær. Detaljerte modeller finnes for dette, men en



Figur 10.9: Fotomultiplikator.

enkel modell er gitt av

$$R = AE^{-\alpha},$$

der  $A$  og  $\alpha$  er materialavhengige konstanter. For CdS er  $0.7 < \alpha < 0.9$  [10]. Endringen i motstand kan også oppgis som en funksjon av lysets intensitet,

$$\Delta R = f(I), \quad (10.5)$$

der lysintensitet  $I = P/A$  er effekt pr areal og måles i  $W/m^2$ . Funksjonen  $f(I)$  er ulineær og avtar med økende  $I$ . Fotomotstanden er en førsteordens prosess og tidskonstanten er avhengig av materialet, belsningsstyrken, belsningshistorien og temperaturen. Responstiden når lysstyrken økes kan være på noen få millisekunder. Glemmetiden, det vil si responsen når lysstyrken minsker, er som regel mye tregere. Denne hastigehten oppgis gjerne i  $k\Omega/s$ .

### Lysfølsomme dioder og transistorer

Fotovoltaiske celler er best kjent for bruk i solcellepaneler for genereing av elektrisk energi fra sollys, men dette prinsippet brukes også til å produsere måleinstrumenter. Lysfølsomme dioder og transistorer genererer en spenning

som er avhengig av den mottatte elektromagnetiske strålingen. De krever liten plass, har lang levetid og rask respons. [6] oppgir at spenningen følger formelen

$$V_c \approx V_0 \ln(1 + I_R),$$

der  $V_c$  er den åpne krets genererte spenningen,  $V_0$  er konstant avhengig av konstruksjonen til komponenten og  $I_R$  er den mottatte lysintensiteten. Den interne resistansen  $R_c$  varierer også med lysintensitet, men er nær konstant for høye intensiteter. Fototransistorer/dioder har en responstid (10-90%) i  $\mu s$ -området, og er således raskere enn fotomotstander. Komponenter med responstid i  $ns$ -området finnes.

### 10.3.2 Magnetfelt

Måling av magnetfelt kan gjøres på flere forskjellige måter, vi vil her presentere to.

#### Hallgenerator

Hall-effekten, oppdaget av Edwin Hall i 1879 i gull, kan brukes til å måle magnetfelt. Strøm sendes gjennom et ledende materiale, gjerne halvleder, plassert i et magnetfelt  $\mathbf{B}$ . En Lorentz-kraft gitt av

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

virker på elektronene, der  $q$  er elektronets ladning og  $\mathbf{v}$  er elektronhastigheten. Kraften virker normalt på planet spent ut av strømrretningen og magnetfeltet. Ladning trekkes over på den ene siden av sensoren slik at en spenning  $V_H$  proporsjonal med  $B$  dannes. Hallspenningen,  $V_H$ , er gitt av

$$V_H = \frac{A_H}{d}IB,$$

der  $d$  er tykkelsen av det ledende materialet,  $I$  er strøm,  $A_H$  er Hallkoeffisienten som er avhengig av materialet i sensoren og  $\mathbf{B}$  er magnetfeltet som måles. Hall sensorer levers som integrerte kretser.

#### Magnetoresistive sensorer

Disse sensorene baserer seg på magnetoresistive effekt som ble oppdaget av Lord Kelvin i 1856 i jern og nikkel. Magnetfeltet gir en resistansendring på 2 – 5% som kan måles. Endringen i resistans kan måles i en målebro.



Den såkalte gigantiske magnetoresistive effekt som er basert på lagdelte strukturer av magnetisk og ikke-magnetiske materialer ble oppdaget så sent som 1988. I slike sensorer er resistansendringen på 4 – 20%. De er også mer nøyaktige, tåler større temperaturvariasjoner og høyere frekvenser, men er dyrere enn Hallgeneratorer.

# Kapittel 11

## Mekaniske sensorer

### 11.1 Måling av posisjon

#### 11.1.1 Potensiometer

Måling av posisjon ved hjelp av et potensiometer, eller variabel motstand, benytter prinsippet om å måle motstand og så regne om til avstand. Dette er en av de enkleste metodene for avstandsmåling. Prinsippet er illustrert i figur 11.1. En slepekontakt beveger seg langs en motstand med resistans  $R_T$  og delmotstanden  $R$  følger sammenhengen

$$R = \frac{\rho}{A}x = \frac{\rho l}{A}\alpha, \quad (11.1)$$

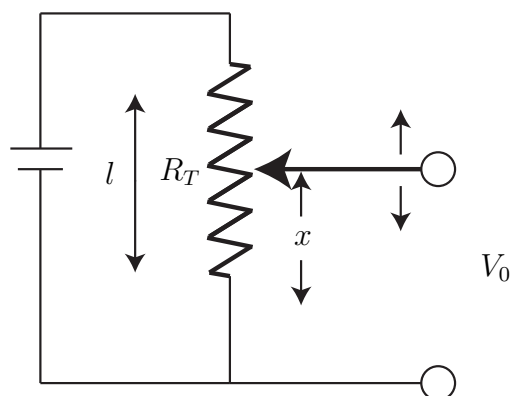
der  $\rho$  er resistivitet, eller spesifikk motstand,  $A$  er tverrsnittsareal,  $l$  er lengden av potensiometeret,  $x$  er avstanden som måles og  $\alpha = x/l$ . Hvis  $R$  måles i for eksempel en målebro, vil den ukjente avstanden  $x$  kunne beregnes som

$$x = \frac{A}{\rho}R. \quad (11.2)$$

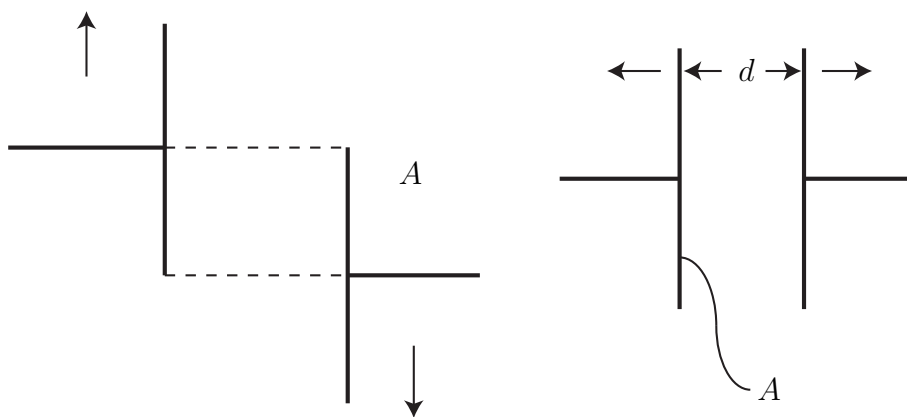
Slitasje på grunn av friksjon vil være et problem i slike målinger, og man vil også få mye målestøy.

#### 11.1.2 Kapasitive sensorer

Kapasitans mellom to elektroder varierer både med arealet, avstanden og mediet mellom elektrodene. Dermed er variabel kapasitans velegnet for måling



Figur 11.1: Potensiometer for måling av posisjon.



Figur 11.2: Kapasitans varierer med avstand og areal.

av for eksempel nivå i tanker og mekanisk forskyvning. Kapasitansen  $C$  for en kondensator bestående av to parallelle plater som vist i Figur 11.2 er gitt av

$$C = K\varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

der  $K$  er den dielektriske konstanter,  $\varepsilon_0$  er permitiviteten,  $A$  er overlappende plateareal og  $d$  er avstanden mellom platene. Kapasitansen endres hvis  $d$  eller  $A$  endres, hvilket kan utnyttes i avstandsmålinger.

### 11.1.3 Strekkklapper

Bruk av strekkklapper som sensorer for posisjon bygger på prinsippet om at resistansen i en leder endres når den strekkes. Dette ble oppdaget av Lord Kelvin i 1856. Sammenhengen mellom spesifikk påtrykt kraft, stress, og strekk er illustrert i figur 11.3. Stress er definert som

$$stress = \frac{F}{A}, \quad (11.3)$$

og strekk defineres som

$$strekk = \frac{\Delta l}{l}, \quad (11.4)$$

der  $\Delta l$  er endringen i lengde. Det engelske ordet strain er mye i bruk i stedet for strekk. Strekk er dimensjonsløst, men gis som oftest enheten  $[\mu m/m]$ . Sammenhengen mellom strekk og stress for et materiale er vist i figur 11.4. Forholdet mellom disse størrelsene,

$$E = \frac{stress}{strekk} = \frac{F/A}{\Delta l/l}, \quad (11.5)$$

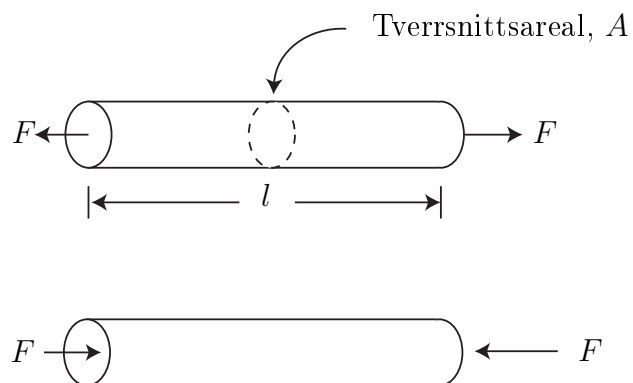
kalles elastisitetsmodulen.  $E$  er en materialkonstant, men den varierer med temperatur.

Vi vil nå utlede hvordan resistansen i en elektrisk motstand varierer med strekk. Resistansen er gitt av

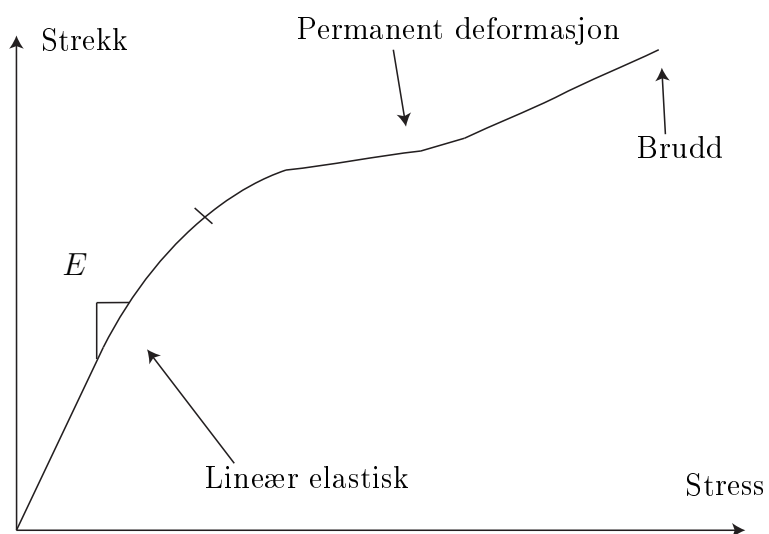
$$R_0 = \rho \frac{l_0}{A_0}, \quad (11.6)$$

der  $\rho$  er resistivitet,  $l_0$  er nominell (ustrekt) lengde og  $A_0$  er nominellt tverrsnittsareal. Vi antar at metallet utsettes for en kraft  $F$  og strekkes  $\Delta l$  slik at

$$l = l_0 + \Delta l. \quad (11.7)$$



Figur 11.3: Strekk og kompresjon av en leder.



Figur 11.4: Sammenheng mellom stress og strekk

Volumet av motstanden forblir konstant slik at tverrsnittarealet minker

$$A = A_0 - \Delta A. \quad (11.8)$$

Volumet av motstanden kan nå skrives som

$$V = l_0 A_0 = l A = (l_0 + \Delta l)(A_0 - \Delta A), \quad (11.9)$$

og resistansen er endret til

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)}{(A_0 - \Delta A)}. \quad (11.10)$$

Vi ønsker å finne en sammenheng som er uavhengig av endringen i areal og fra (11.9) har vi at

$$(A_0 - \Delta A) = \frac{l_0 A_0}{(l_0 + \Delta l)} \quad (11.11)$$

som innsatt i (11.10) gir

$$R = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)}{(A_0 - \Delta A)} = \rho \frac{(l_0 + \Delta l)^2}{l_0 A_0} \quad (11.12)$$

$$R = \rho \frac{l_0^2 + 2l_0 \Delta l + (\Delta l)^2}{l_0 A_0} \quad (11.13)$$

Siden endringen i lengde er liten, gjør vi nå en tilnærming og antar

$$(\Delta l)^2 \approx 0. \quad (11.14)$$

Dette er en brukt antagelse og kan sammenlignes med linearisering der vi bare beholder førsteordens ledd av  $\Delta$ -størrelser. Vi har nå følgende sammenheng

$$R = \rho \frac{l_0^2 + 2l_0 \Delta l}{l_0 A_0} = \rho \frac{l_0 + 2\Delta l}{A_0} \quad (11.15)$$

som også kan skrives som

$$R = \underbrace{\rho \frac{l_0}{A_0}}_{R_0} \left( 1 + 2 \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (11.16)$$

og vi ser at

$$R = R_0 + \Delta R, \quad (11.17)$$

der

$$\Delta R = 2R_0 \frac{\Delta l}{l_0} \quad (11.18)$$

som er den sammenhengen vi ønsket å finne. Vi skal se hvordan dette kan brukes i et eksempel

**Example 40** *En metalltråd med  $R_0 = 120\Omega$  utsettes for et strekk på  $1000\mu\text{m}/\text{m}$ . Endringen i resistans kan da regnes ut som*

$$\Delta R = 2R_0 \frac{\Delta l}{l_0} = 2 \cdot 120\Omega \cdot 1000 \cdot 10^{-6} = 0.24\Omega \quad (11.19)$$

*Dette svarer til en endring i resistans på  $\frac{0.24}{120} \cdot 100 = 0.2\%$ .*

Siden endringen i resistans som følge av strekk ser ut til å være liten er det interessant å sammenligne denne effekten med andre kilder for endring i resistans.

**Example 41** *Den samme metalltråden som i eksempel 40 utsettes nå for en temperaturendring på  $1^\circ\text{C}$ . Endringen i resistans er da gitt av*

$$\Delta R_T = R_0 \alpha \Delta T, \quad (11.20)$$

der  $\Delta T$  er temperaturendringen og  $\alpha$  er en materialkonstant. Vi har at

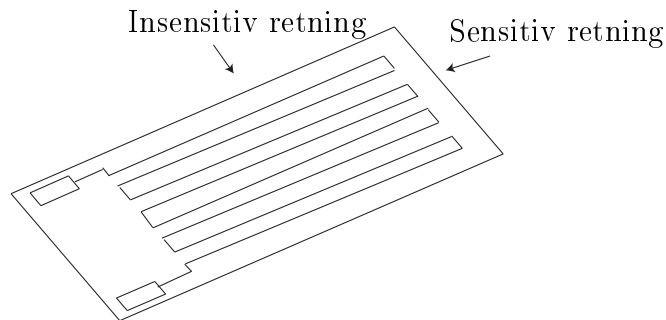
$$\Delta R_T = 120\Omega \cdot 0.004(^{\circ}\text{C})^{-1} \cdot 1^\circ\text{C} = 0.48\Omega. \quad (11.21)$$

Eksempelene over viser at i dette tilfellet er endringen i resistans som følge av en liten temperaturendring dobbelt så stor som endringen i resistans som følge av et strekk. Dette medfører at instrumenter for måling av strekk som er basert på dette prinsippet må ha en mekanisme for å kompensere for temperaturendringer.

En mye brukt formel for endring i resistans som følge av strekk er

$$\frac{\Delta R}{R} = k \frac{\Delta l}{l}, \quad (11.22)$$

der  $k = 2$  i (11.17). Dette gjelder for metaller. Det finnes legeringer som er spesielt designet for dette bruk og de kan ha verdier på  $k$  opp til 10, og halvledere kan ha  $k$ -verdier opp til 200. Prinsippet om motstandsending som følge av strekk brukes i en type sensorer kalt strekkklapper. En slik er vist i figur 11.5 og som vi ser er en metalltråd lagt frem og tilbake mange ganger for å mangedoble effekten av strekket. Sensoren består av en plastikkklapp med en innvevd tråd. Endringen av resistans i lappen kan måles i en målebro, og det trengs en lapp for hver retning man ønsker å måle i.



Figur 11.5: Strekkapp

### 11.1.4 Måling av nivå

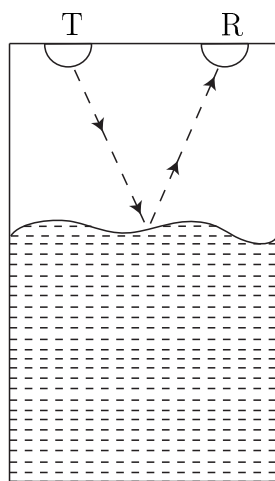
Måling av nivå i tanker er beslektet med måling av posisjon. I figur 11.6 er det vist fire forskjellige prinsipper. Figur a) og b) viser bruk av ultralyd for nivåmåling. Et signal sendes fra en sender T (transmitter) og mottas i R (receiver). Avstanden beregnes ved å ta tiden det tar før signalet er mottatt. Ved å ha måleutstyret over overflaten, kan det brukes til å måle nivå for både fluider og fast stoff. Et lignende måleprinsipp er å bruke radar inne i tanken. Figur c) viser bruk av en flottør. Endring av nivå fører til endring av vinkel som kan måles. Figur d) viser bruk av kapasitiv måling av nivå. To konsentriske sylindere er nedsenket i væsken. Dette fungerer som to kondensatorer i parallell med forskjellige dielektriske konstanter, og en endring i nivå vil føre til en endring i den totale kapasitansen  $C$  som kan måles i for eksempel en målebru.

## 11.2 Måling av strømning

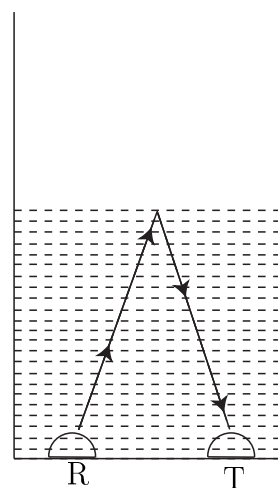
Måling av strømning omfatter måling av faststoff, væsker og gass. Valg av måleprinsipp avhenger av egenskapene til det mediet som skal måles. Det er tre forskjellige størrelser som er aktuelle for måling:

1. volumstrøm  $Q$  med enhet  $[m^3/s], [m^3/h]$  osv
2. strømningshastighet  $v = \frac{Q}{A}$  der  $A$  er tverrsnittsareal. Enhet  $[m/s]$
3. massestrøm  $w = \rho Q$  der  $\rho$  er tetthet. Enhet  $[kg/s]$

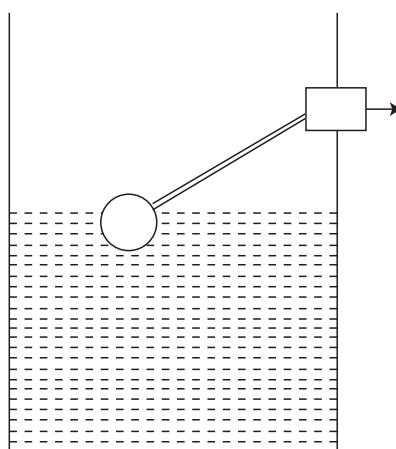




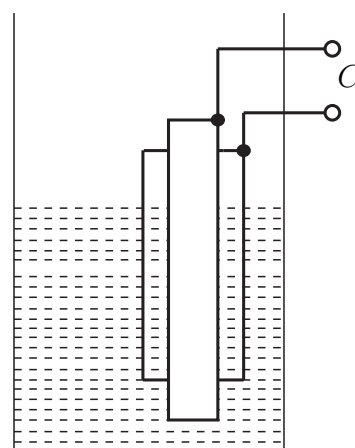
a)



b)



c)



d)

Figur 11.6: Prinsipper for måling av nivå.

### 11.2.1 Måling av faststoff

Måling av faststoffstrømning kan utføres ved hjelp av en båndvekt. Dette prinsippet er vist i Figur 7.12. Massestrømmen beregnes som

$$w = \frac{mv}{L}, \quad (11.23)$$

der  $m$  er målt masse ved hjelp av en vekt eller en lastcelle,  $v$  er båndets hastighet og  $L$  er lengden vi måler over.

### 11.2.2 Måling av gass og væske

For strømning i rør er kunnskap om strømningsbildet avgjørende, se figur 11.7. De horisontale pilene illustrerer størelsen på strømningshastigheten i et tverrsnitt av røret. Figur a) viser et generelt strømningsbilde, b) illustrerer et Newtonsk, laminært strømningsbilde der profilen har parabelform, C) viser turbulent strømning og d) viser plastisk strømning. Hvilken type strømning vi har vil diktere hva slags måleprinsipp som kan brukes.

#### Måleskive

Bruk av måleskive for måling av strømning baserer seg på bruk av bevaring av potensiell energi  $E_p$  og kinetisk energi  $E_k$

$$E_p + E_k = pV + \frac{1}{2}\rho V v^2, \quad (11.24)$$

der  $p$  er trykk,  $V$  er volum og  $v$  er strømningshastighet. Hvis vi setter opp denne sammenhengen for målingene i figur 11.8 får vi følgende sammenheng

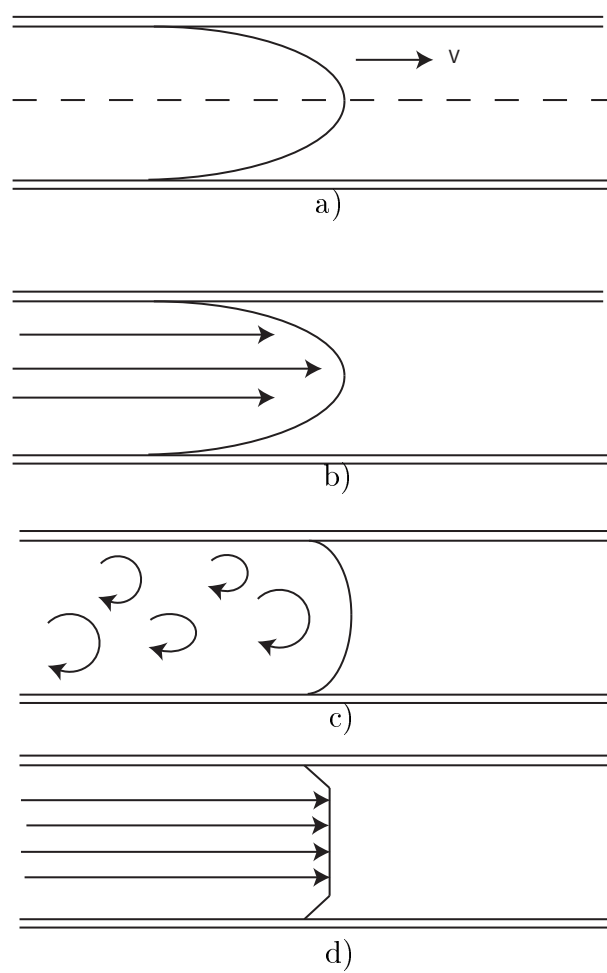
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (11.25)$$

også kjent som Bernoullis ligning. I kombinasjon med kontinuitetsligningen

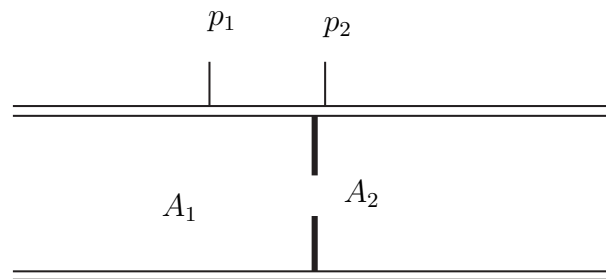
$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (11.26)$$

gir dette oss muligheten til å beregne strømmingen når vi kjenner trykkene:

$$Q = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - m^2)}}, \quad (11.27)$$



Figur 11.7: Forskjellige strømningsbilder



Figur 11.8: Måleskive

der  $m = A_2/A_1$ . Måleskiver er den enkleste formen for trykkfallbastert strømningsmåling. Andre varianter basert på samme prinsipp er bruk av dyser og venturidyser. Disse måleinstrumentene egner seg for turbulent strømning av både væsker og gasser. Andre måleinstrumenter for måling av strømning inkluderer pitotrør, rotametre, turbinmetre, ultralydsmålere, og magnetisk strømningsmåler



# Kapittel 12

## Signaler og sampling

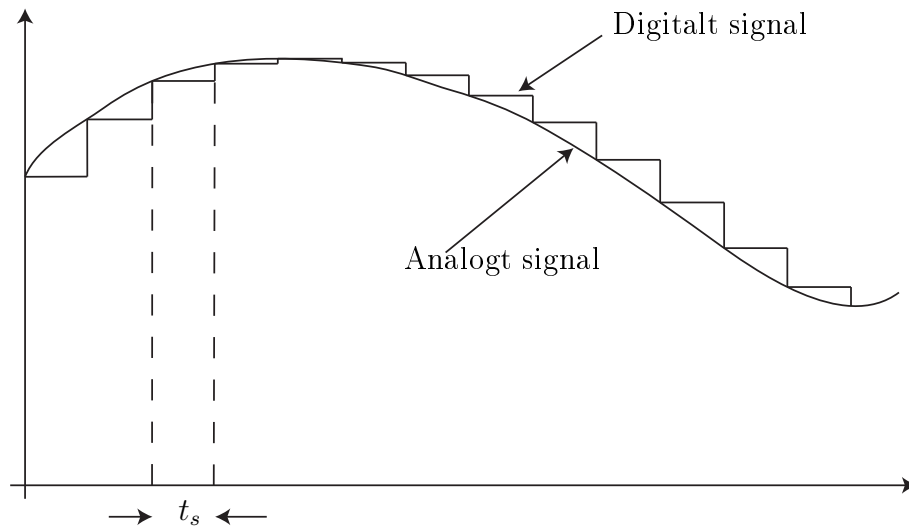
### 12.1 Digitale og analoge signaler

Signaler er informasjonsbærere i reguleringsystemer og riktig behandling av signalene er en viktig del av reguleringsystemet. Vi skal her skille mellom to typer signaler: analoge og digitale. En hovedforskjell på disse signalene er at analoge signaler er kontinuerlige i tid, mens digitale signaler er det vi kaller diskrete i tid, det vil si de består av øyeblikksverdier. De to typene signaler er illustrert i Figur 12.1. De fleste fysiske størrelsene vi finner i en reguleringsprosess er analoge. Dette kan være nivået i en tank, hastigheten til en bil, posisjonen til en robot eller spenningen over en kondensator. For at en datamaskin som kun opererer med digitale signaler skal kunne kommunisere med disse prosessene må vi kunne gjøre om de analoge signalene til digitale. Overføring fra måleinstrumenter til datamaskin krever at analoge signaler gjøres digitale, dette er kjent som AD-omsetning. Overføring fra datamaskin til pådragsorgan krever at digitale signaler gjøres analoge. Dette er kjent som DA-omsetning.

### 12.2 Sampling

For å omsette fra analog til digital brukes ofte en tast-og-hold krets (Eng: sample and hold) som vist i figur 12.2. Bryteren åpnes og lukkes med en frekvens

$$f_s = 1/t_s, \quad (12.1)$$



Figur 12.1: Analog og digital signal

der  $t_s$  er tastetiden, og øyeblikksverdier av den analoge inngangsspenningen  $V_i$  kan måles som utgangsspenningen  $V_o$  over kondensatoren  $C$ . En tast-og-hold krets opererer i ett av tre modus:

**Holdemodus** Bryeren er åpen. Utgangsverdien påvirkes ikke av signalet på inngangen

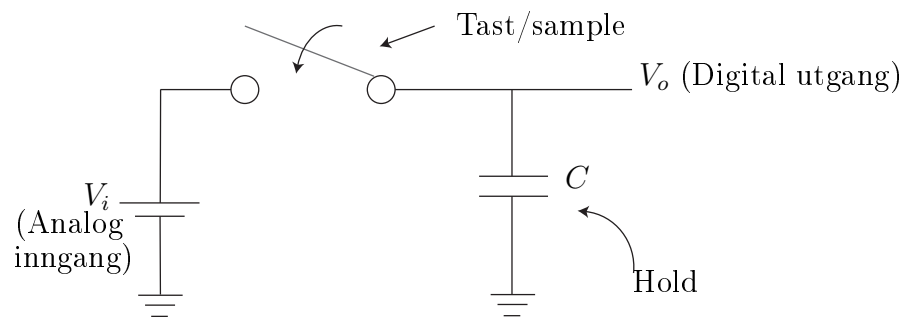
**Følgemodus** Bryteren er sluttet. Utgangen følger inngangen

**Innsvingningsmodus** Den tiden det tar for  $V_o$  å svinge seg inn til riktig verdi. Vi har her å gjøre med et førsteordens system med tidskonstant  $T = RC$ .

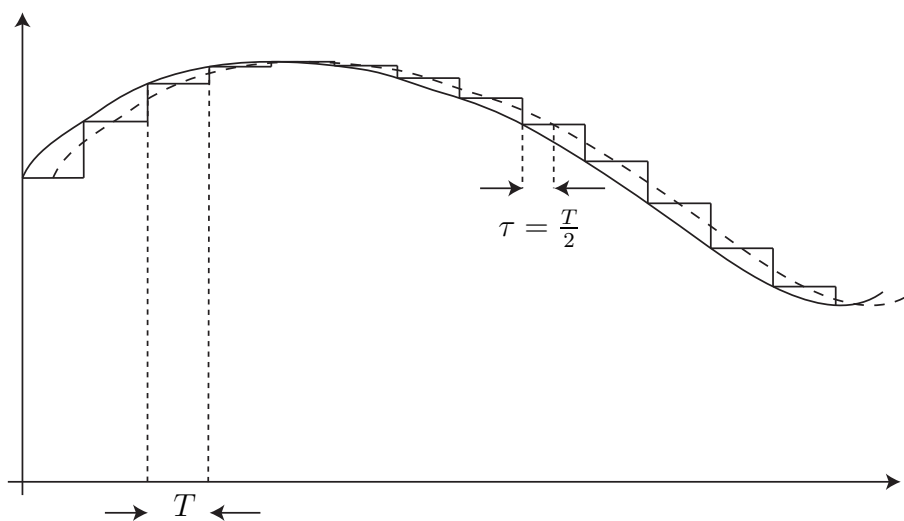
En slik tastemetode som vi har beskrevet her kalles nullte-ordens hold (Eng: zero order hold, ZOH). Det finnes også forskjellige typer av 1.ordens hold som også involverer en integrator.

En effekt av tasting er at hvis vi glatter ut det tastede signalet så får vi et signal som er tidsforsinket med en halv taste-periode. Dette er illustrert i figur 12.3 og det kan være viktig å ta hensyn til denne forsinkelsen i design av reguleringsystemer.

Et viktig spørsmål i denne sammenheng er: Hvor fort må vi taste for å kunne korrekt representere et analog signal på digital form? Svaret på dette



Figur 12.2: Sample and hold krets



Figur 12.3: Sampling medfører tidsforsinkelse



gis av følgende teorem:

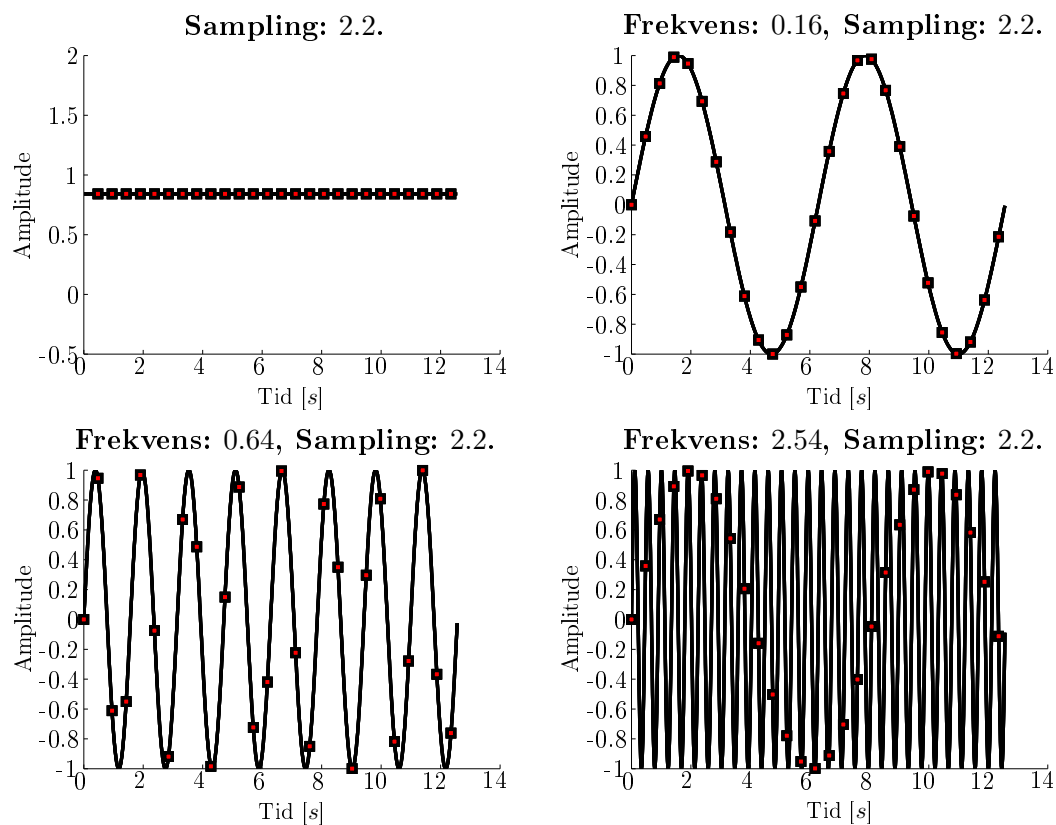
**Nyquist-Shannons samplingsteorem**

*Et analog signal kan representeres med et digital signal, og rekonstrueres fra dette, hvis samplingsfrekvensen  $f_s$  er minst dobbelt så stor som den høyeste frekvensen  $f_{max}$  i signalet,*

$$f_s \geq 2f_{max}. \quad (12.2)$$

Frekvensen  $f_{max}$  kalles for signalets nyquistfrekvens. Hvis vi taster med for lav frekvens, oppstår et fenomen kalt nedfolding (Eng: aliasing). Dette er illustrert i figur 12.4. Samme frekvens er brukt for å sample signaler med forskjellig frekvens. Neders til høyre ser vi hva som skjer hvis vi sampler et signal med frekvens  $2.54Hz$  med en tastefrekvens på  $2.2Hz$ . Sinussignalet som oppstår har en mye lavere frekvens enn originalsignalet, det er dette som er nedfolding.

Merk at det er noen forutsetninger som ligger til grunn for samplings-teoremet. For det første må signalet være båndbegrenset, det vil si at det inneholder en max-frekvens, og for det andre må vi, for å gjenskape et signal ved å taste med  $f_s = 2f_{max}$ , taste uendelig mange ganger. Disse forutsetningene er som regel ikke oppfylt, og en god regel er derfor å taste raskere, for eksempel å velge  $f_s = 10f_{max}$ .



Figur 12.4: Konsekvensen av å bruke samme tastefrekvens på signaler med forskjellige frekvens.



# Bibliografi

- [1] J. Balchen, T. Andresen, and B. Foss. *Reguleringsteknikk*. Institutt for teknisk kybernetikk, NTNU, Trondheim, 2003.
- [2] O. Egeland. *Servoteknikk*. Tapir Forlag, Trondheim, 1993.
- [3] O. Egeland and J. Gravidahl. *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics, Trondheim, 2002.
- [4] T. Fossen. *Marine Control Systems: Guidance, Navigation, and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*. Marine Cybernetics, Trondheim, 2002.
- [5] J. Gravidahl and O. Egeland. New undergraduate courses in control. *IEEE Control Systems magazine*, 24(5):31–35, 2004.
- [6] C. Johnson. *Process Control Instrumentation Technology*. Prentice Hall, 7th edition, 2003.
- [7] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [8] L. Lorentzen, A. Hole, and T. Lindstrøm. *Kalkulus Med En Og Flere Variable*. Universitetsforlaget, Oslo, 2003.
- [9] O. Olsen. *Instruemnteringsteknikk*. Tapir, Trondheim, 1989.
- [10] R. Pallàs-Areny and J. Webster. *Sensors and Signal Conditioning*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 2001.
- [11] G. Rizzoni. *Principles and Applications of Electrical Engineering*. McGraw-Hill, New York, 2004.

- [12] N. Wiener. *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine*. Wiley, New York, 1948.
- [13] J. Ziegler and N. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64:759–768, 1942.

# Tillegg A

## Komplekse tall

### A.1 Introduksjon

De fleste vil si at man ikke kan ta kvadratroten til et negativt tall. Dette utsagnet er kun riktig hvis man begrenser seg til de reelle tall. De komplekse tall er et større tallsystem som inneholder slike tall som kvadratrøtter til negative tall i tillegg til de reelle tallene. Et kompleks tall  $z \in \mathbb{C}$ , der  $\mathbb{C}$  er mengden av komplekse tall, skrives som

$$z = a + bi, \quad (\text{A.1})$$

der  $a, b \in \mathbb{R}$  og  $i$  er den imaginære enhet definert som

$$i^2 = -1 \quad (\text{A.2})$$

eller

$$i = \sqrt{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Realdelen til det komplekse tallet  $z$  er gitt av

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (a + bi) = a, \quad (\text{A.4})$$

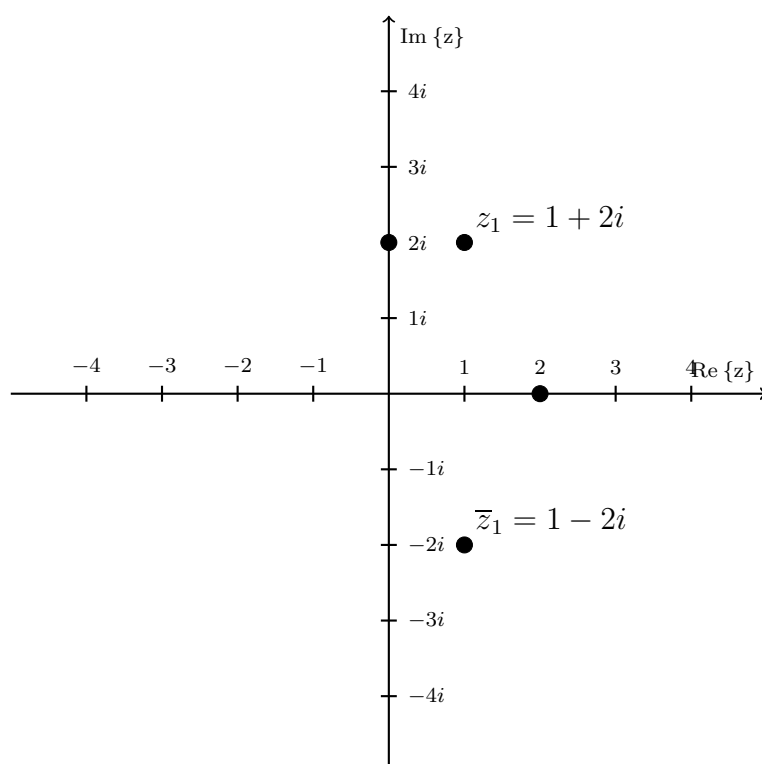
mens imaginærdelen til det komplekse tallet  $z$  er gitt av

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (a + bi) = b. \quad (\text{A.5})$$

Videre så er absoluttverdien til  $z$  gitt av

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{A.6})$$

De komplekse tall utgør et utvidelse av de reelle tall. De reelle tallene  $\mathbb{R}$  kan plasseres på tallinjen, mens de komplekse tallene kan avsettes som punkter i det komplekse plan  $\mathbb{C}$  som vist i figur A.1.



Figur A.1: Det komplekse plan. Det reelle tallet 2, det imaginære tallet  $2i$  og de to komplekskonjugerte tallene  $1 + 2i$  og  $1 - 2i$  er markert

## A.2 Regneregler

Vi vil introdusere regneregler for komplekse tall ved å regne på de to komplekse tallene  $z_1 = 1 + 2i$  og  $z_2 = -2 + 3i$

### A.2.1 Komplekskonjugering

Konjugering betyr å skifte fortegn på den imaginære delen av et kompleks tall. Dette skrives på følgende måte

$$\bar{z}_1 = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i. \quad (\text{A.7})$$

### A.2.2 Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av komplekse tall foregår ved at man adderer realdelen og imaginærdelen hver for seg, det vil si

$$z_1 + z_2 = (1 - 2) + (2 + 3)i = -1 + 5i \quad (\text{A.8})$$

og tilsvarende med subtraksjon

$$z_1 - z_2 = (1 + 2) + (2 - 3)i = 3 - i. \quad (\text{A.9})$$

### A.2.3 Multiplikasjon

Ved multiplikasjon følger vi vanlige regneregler, vi må bare passe på at  $i^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 2i)(-2 + 3i) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3i + 2i \cdot (-2) + 2i \cdot 3i \\ &= -2 + 3i - 4i + 6i^2 = -2 - 6 + 3i - 4i \\ &= -8 - i. \end{aligned}$$

Det er verdt å legge merke til at et kompleks tall multiplisert med den komplekskonjugerte av det samme tallet vil gi et reelt tall:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_1 &= (1 + 2i)\overline{(1 + 2i)} = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 \\ &= 1 - 2^2 i^2 = 5 = |z_1|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Den siste likheten gjelder generelt, det vil si

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (\text{A.11})$$



### A.2.4 Divisjon

Divisjon av komplekse tall er litt mer omfattende. Fremgangsmåten er å multiplisere både telleren og nevneren i den aktuelle brøken med den komplekskonjugerte av nevneren.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{-2+3i} = \frac{(1+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i-4i+6}{4+9} \\ &= \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i\end{aligned}\tag{A.12}$$

### A.3 Anvendelser

Komplekse tall har anvendelser i mange forskjellige grener av matematikk og ingeniørfag. For eksempel vil vi nå være i stand til å finne løsningen på alle andregradsligninger, også de som gir negative tall under rottegnet:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm 2i.\end{aligned}\tag{A.13}$$

Som vi ser, får vi to komplekskonjugerte tall  $x_1 = -1 + 2i$  og  $x_2 = -1 - 2i$  som svar.

En annen nyttig egenskap ved de komplekse tall er sammenhengen mellom eksponensialfunksjonen og trigonometriske funksjoner gjennom ligningen

$$e^{i\phi} = \sin \phi + i \cos \phi,\tag{A.14}$$

som er kjent som Eulers formel. Ved å sette inn  $\phi = \pi$  får man den kjente Eulers likhet

$$e^{i\pi} + 1 = 0\tag{A.15}$$

som gir oss sammenhengen mellom 0, 1,  $e$ ,  $\pi$  og  $i$ . Mer om dette og andre anvendelser av komplekse tall vil dere lære i Matematikk 3.