NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10327

Dato/*Date:* 2.12.2015 Side/*Page:* 1

Emnekode/*Subject* TMA4100 Matematikk 1 Antall ark/*Number of pages:* 16

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

oppg 1

Oppgave 1

$xe^{x-y} - xy = e \qquad x=1 \quad y=0$

Antar at $y = y(x)$ og deriverer implisitt

$$\frac{d}{dx}(xe^{x-y} - xy) = \frac{d}{dx}(e)$$

$$e^{x-y} + x \cdot \frac{d}{dx}(e^{x-y}) - y - x \cdot y' = 0$$

$$e^{x-y} + x \cdot e^{x-y} \cdot \frac{d}{dx}(x-y) - y - xy' = 0$$

$$e^{x-y} + xe^{x-y}(1-y') - y - xy' = 0$$

Setter inn $x=1$ og $y=0$ for å finne et uttrykk for $y'|_{x=1}$

$$e^{1-0} + 1 \cdot e^{1-0}(1-y') - 0 - 1y' = 0 \quad \text{i punktet } (1,0)$$

$$e^1 + e^1 - y'e^1 - y' = 0$$

$$y'(-e-1) + 2e = 0$$

$$y' = \frac{-2e}{-e-1}$$

$$y' = \frac{2e}{e+1}$$

Tangent er på formen

$$y = y'(x-x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{2e}{e+1}(x-1) + 0$$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2013

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Svar: Tangenten gjennom $(1,0)$ har likning:

$$y = \frac{2e}{e+1}(x-1)$$

Oppgave 2

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$$

Vil gjøre det om til et litt mer håndterlig ubestemt integral.

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 = A(x-1)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-1)$$

$$= Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$$

$$= (A+B)x^2 + (B-C)x + (-A) = 1$$

For at dette skal stemme må:

$$A+B+C = 0,\quad B-C = 0,\quad -A = 1$$

$$\Rightarrow A = -1$$

$$-1 + B = 0 \Leftrightarrow B = 1$$

$$1 - C = 0 \Leftrightarrow C = 1$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Kan da skrive at:

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \cancel{-\ln|x| + \ln|1+x| + \ln|1+x| + C}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \ln\left| \frac{x^2-1}{x(1-x)} \right| + C$$

Oppgave 3

$$y' = \cos(xy - x), \quad y(0) = \frac{9}{10}$$

Eulers metode:

hvis $y' = f(x,y)$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad x_{n+1} = x_n + h$$

Her er $h = \frac{1}{10}$, $y_0 = y(0) = \frac{9}{10}$. Vi vil finne y_2.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{9}{10}$$

$$x_1 = \frac{1}{10}, \quad y_1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \cos\left(\cancel{0 \cdot \tfrac{9}{10}} - 0\right) = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{10}, \quad y_2 = 1 + \frac{1}{10} \cdot \cos\left(\frac{1}{10} \cdot 1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{10}$$

Svar: y_2 blir $\frac{11}{10}$

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10327

Dato/Date: 8.12.2015 Side/Page: 4

Emnekode/Subject TMA4100 Matematikk 1

Antall ark/Number of pages: 16

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 4

$$P_4(x) = 3 + 2x^2 + x^3 + 4x^4 \quad , \text{om } x = a = 0$$

a) Generelt sett vil Taylor polynom av fjerde grad være på formen: (om $x=0$)

$$P_4(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

Det følger av dette at:

$$\frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad f'''(0) = 3!$$

$$\Leftrightarrow \quad f'''(0) = 6$$

$$\underline{f'''(0) = 6}$$

b) Taylors formel sier at

$$|f(x) - P_4(x)| \leqslant \left|\frac{f^{(5)}(s)}{5!}x^5\right| \quad , 0 < s < x$$

Vi vet at $|f^{(5)}(x)| \leqslant 12$ for alle x så da kan vi skrive om Taylors formel til en ulikhet.

$$\left|\frac{f^{(5)}(s)}{5!}\right||x^5| \leqslant \frac{12}{5!}|x^5| \quad \text{for alle } x.$$

Vi vil finne de x-ene som gir $|f(x) - P_4(x)| \leqslant 10^{-6}$, og det gjør vi ved å finne de x-ene som gir

$$\frac{12}{5!}|x^5| \leqslant 10^{-6}$$

Løser for x og får:

$$|x^5| \leq \frac{10^{-6}\cdot 5!}{12}$$

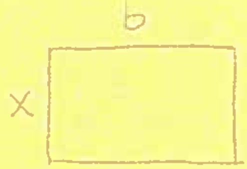
$$|x|^5 \leq 10^{-5}$$

$$|x| \leq \sqrt[5]{10^{-5}} = \frac{1}{10}$$

$$\iff \quad -\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{10}$$

For $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ kan vi garantere at feilen er mindre enn eller lik 10^{-6}

Oppgave 5 (del 1)



Vil skrive om slik at $b = b(x)$. Vet at

$$2x + 2b = C$$

$$\iff \quad b = \frac{C-2x}{2} \quad (= b(x) \text{ siden } C \text{ er konstant})$$

Arealet vil være $A = x \cdot b$. For å få $A(x)$ setter jeg inn formlen for b og får

$$A = x \cdot \left(\frac{C-2x}{2}\right) \quad (= A(x)).$$

Vil maksimere A og siden x lever på et lukket intervall, $0 \leq x \leq \frac{C}{2}$, må vi sjekke endepunkter (1), der $A' = 0$ (2), og der A' ikke er definert (3).

(1) Endepunkter

$$A(0) = 0$$

$$A\left(\frac{c}{2}\right) = 0$$

(2) $A' = 0$?

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\left(\frac{c-2x}{2}\right)\right)$$

$$= x\cdot(-1) + 1\cdot\frac{c-2x}{2}$$

$$= -x + \frac{c-2x}{2}$$

$$= \frac{-2x+c-2x}{2} = \frac{-4x+c}{2}$$

$$\Rightarrow A'(x) = 0 \text{ når } x = \frac{c}{4}.$$

(3) A' ~~er~~ har ingen udefinerte punkter så trenger ikke å sjekke dette.

Må bare vise at $x = \frac{c}{4}$ ikke er et minima, men et maksima.

$$A\left(\frac{c}{4}\right) = \frac{c}{4}\cdot\left(\frac{c-2\cdot\frac{c}{4}}{2}\right) =$$

Ser at dette blir større enn 0 (endepunktene) så da vet vi at dette er et maksima.

Konklusjon: arealet er maksimert når allesidene har lengde $\frac{c}{4}$.

(del 2)

Største lengde l og omkrets x skal ikke overskride 150 cm. Dvs. $l + x \leq 150$

Leter etter størst mulig dimensjoner så ser på tilfellet

$$l + x = 150$$

$$\Leftrightarrow \quad l = 150 - x \quad (= l(x))$$

Volumet vil være lengde × side × høyde = lengde × grunnflate

Vet fra del 1 at de største arealet er når sidene er en fjerdedel av summen av sidene.

$$\text{areal}_{maks} = \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^2}{16}$$

Volumet får da formlen:

$$V(x) = l(x) \cdot \frac{x^2}{16} \quad , \ 0 \leq x \leq 150$$

$$= (150 - x)\frac{x^2}{16}$$

$$= \frac{150}{16}x^2 - \frac{x^3}{16}$$

Ser at volumet vil være null i endepunktene og at $V(x)$ er kontinuerlig så toppunktet må være der $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \frac{150}{8}x - \frac{3}{16}x^2 = \frac{3x}{8}\left(50 - \frac{x}{2}\right)$$

$$V'(x) = 0 \text{ når } x = 0 \text{ eller } x = 100$$

Vet at Volumet når $x = 0$ er 0 så toppunktet må være ved $x = 100$.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Hvis omkretsen $x = 100$ cm så vil den største lengden være

$$l = 50 \text{ cm}$$

Arealet er kvadratisk så høyden og bredde vil være like og lik $\frac{x}{4}$

$$b = h = \frac{x}{4} = 25 \text{ cm}$$

Pakken har dimensjoner: 25cm, 25cm, 50cm

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10327

Dato/*Date:* 8.12.2015 Side/*Page:* 9

Emnekode/*Subject* TMA4100 Matematikk 1

Antall ark/*Number of pages:* 16

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 6

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{t^4-1}\,dt \quad , \quad x \geq 1$$

Formlen for buelengden S er:

$$S = \int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Må vite $f'(x)^2$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sqrt{t^4-1}\,dt\right) = \sqrt{x^4-1}$$

$$\Rightarrow f'(x)^2 = x^4-1$$

Regner ut buelengden med dette:

$$S = \int_1^2 \sqrt{1+x^4-1}\,dx$$

$$= \int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}(8-1)$$

$$S = \frac{7}{3}$$

Buelengden til $f(x)$ på $[1,2]$ er $\frac{7}{3}$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2013

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppgave 7

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Definisjon av den deriverte:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siden $x=0$ får vi:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \cdot \sin \frac{1}{h}$$

Gjør substitusjonen $h = \frac{1}{t}$. Må dasepå når $t \to +\infty$ og $t \to -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{\sin(t)}{t} = 0 \end{array}\right\} \text{Samme grense.}$$

$\Rightarrow f$ er kontinuerlig i $x=0$.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 9

Må først finne Maclaurinrekken til $\sin(t)$

Den er gitt ved formlen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad , \text{hvor } f(t) = \sin(t)$$

(Kan skrive $f(t) =$ "rekken" fordi denne funksjonen er analytisk)

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin(t) \quad , & f(0) &= 0 \\
f'(t) &= \cos(t) \quad , & f'(0) &= 1 \\
f''(t) &= -\sin(t) \quad , & f''(0) &= 0 \\
f'''(t) &= -\cos(t) \quad , & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(t) &= f(t) \quad , & &\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$f^{(n)}(0) = 0$ for alle partall n. Når n er oddetall veksler det mellom 1 og -1. Hvis vi istedet for n skriver $2n+1$ så blir formlen:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$f(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots$$

Maclaurinrekken til sin(t) er altså

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot t^{2n+1}$$

Hvis vi setter $t = x^3$ får vi maclaurinrekken til $\sin(x^3)$

$$\sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n+1}$$

Funksjonen $\frac{\sin(x^3)}{x^3}$ blir da:

$$\frac{\sin(x^3)}{x^3} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n+1}}{x^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n}$$

$$\frac{\sin(x^3)}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}$$

Maclaurinrekken til funksjonen $\frac{\sin(x^3)}{x^3}$ er

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}}}$$

som konvergerer for alle x.

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^3)}{x^3}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}\,dx$$

Rekken konvergerer for alle x så vi kan bytte rekkefølge på integralet og summen.

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{6n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{6n+1} x^{6n+1}\right]_0^1$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{6n+1}}$$

Har da at $\int_0^1 \frac{\sin(x^3)}{x^3}\,dx$ kan uttrykkes som denne alternerende rekken:

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{6n+1}}}$$

Feilestimat for alterende rekker er gitt ved:

$$|E_n| \leq |a_{n+1}|$$

Vi ønsker $|E_n| < 10^{-3}$ som vil si at vi må ha

$$|a_{n+1}| < 10^{-3}$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{1}{6(n+1)+1} \right| < 10^{-3}$$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10327

Dato/*Date*: 8.12.2015 Side/*Page*: 16

Emnekode/*Subject* TMA4100 Matematikk 1

Antall ark/*Number of pages*: 16

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Tester med forskjellige n:

n	$\lvert a_{n+1} \rvert$
0	$1/42$
1	$1/1560$ $< 10^{-3}$ ✓
2	

Man må summere minst 2 $(n=1)$ ledd for å garantere at feilen er mindre enn 10^{-3}.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12.2013