Oppgave 1

$\mathcal{C}: \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 5t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

a) Buelengden, L, er gitt ved

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-2\sin t, 2\cos t, 5)$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 5^2}$$

$$= \sqrt{4+25}$$

$$= \sqrt{29}$$

Vi får da $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{29}\, dt$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{29}$$

Buelengden er $2\pi\sqrt{29}$ √

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10925

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 2

Emnekode/*Subject* tma4105 Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

b) $\vec{r}(t)$ går gjennom punktet ved $t = \frac{\pi}{2}$.

Ønsker å finne $\hat{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left|\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}$

$$\overset{\text{fra a)}}{=} \frac{1}{\sqrt{29}}\left(-2 \cdot \sin\frac{\pi}{2},\ 2\cos\frac{\pi}{2},\ 5\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\left(-2, 2, 5\right)$$

Enhetstangentvektoren i punktet er

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{29}}\left(-2, 0, 5\right)}}$$ ✓

11,1%

Kandidat nr./*Candidate no.* 10525

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 3

Emnekode/*Subject* tma 4105

Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 2

Siden f er definert på et begrenset område må vi sjekke kritiske punkter (i området) og randen.

Vi har $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+4}$ på $x^2+y^2 \leq 4$

Som gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+4)\frac{\partial y}{\partial x} - 2xy}{(x^2+y^2+4)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2+4)\cdot 1 - 2y^2}{(x^2+y^2+4)^2}$$

Vi ser at $(x^2+y^2+4)^2 \neq 0$ for alle $x,y \in \mathbb{R}$, så vi har ligningene

(i) $\quad -2xy = 0$

(ii) $\quad x^2+y^2 - 2y^2 \cancel{2y=} = 0 \iff x^2 = y^2$

(ii) gir [illegible] $x = \pm y$

satt inn i (ii) gir vi da $\mp 2y^2 = 0 \iff y = 0$

$x^2+4 = 0 \Rightarrow$ ingen løsning.

Antar så $x=0$: (ii) gir da

$y^2 - 2y^2 + 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi har altså to kritiske punkter, som begge er i sirkelskiven: $(0,-2)$ og $(0,2)$.

Sjekker randen ved å parametrisere den med
$$\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)$$

La $g(t) = f(\vec{r}(t)) = \dfrac{2\sin t}{4+4} = \frac{1}{4}\sin t$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\cos t = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \frac{3\pi}{2}$$

Vi får da punktene $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,\ 2)$
og $\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-2)$

som også var de kritiske punktene.

$$f(0,-2) = \frac{-2}{4+4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(0,2) = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4}$$

Laveste verdi er $-\frac{1}{4}$ ✓

Høyeste verdi er $\frac{1}{4}$ ✓

11,1%

Oppgave 3

$z = z(0,1)$ må nødvendigvis oppfylle

$$3\cdot \cancel{0^2} z^4 + 3\cdot 1^3 z = \cancel{5\cdot 0^2} + \cancel{2\cdot 1^4 \cdot 0}$$

$$\Rightarrow z(0,1) = 0$$

Vil nå finne $\frac{\partial z}{\partial y}$ så deriverer mhp. y.

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2z^4 + 2y^3z) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^2 + 2y^4x)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 4z^3 \frac{\partial z}{\partial y} + 6y^2z + 2y^3\frac{\partial z}{\partial y} = 8xy^3$$

Setter inn $x=0, y=1, z(0,1)=0$ og får

$$0 + 0 + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Gjør det samme med x

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2z^4 + 2y^3z) = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + 2y^4x)$$

$$\Leftrightarrow 6xz^4 + 3x^2\cdot 4z^3\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 2y^4$$

$(x,y,z) = (0,1,0)$ gir $2\frac{\partial z}{\partial x} = 2$

altså $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 6

Emnekode/*Subject* tma 4105

Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Siden $\nabla z(0,1) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,1), \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)\right)$

får vi $\nabla z(0,1) = (1, 0)$ ✓

11,1%

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppgave 4

Ønsker å regne ut

$$I = \int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$

over kurven $C: e^t$ $\vec{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$

La $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

slik at $I = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(\frac{e^t\cos t}{e^{2t}}, \frac{e^t\sin t}{e^{2t}}\right)$$

$$= (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)\right)$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[e^{-t}\cos t \cdot e^t(\cos t - \sin t) + e^{-t}\sin t\, e^t(\sin t + \cos t)\right]dt$$

$$= \left[\cos^2 t - \cancel{\sin t\cos t} + \sin^2 t + \cancel{\sin t\cos t}\right]dt$$

$$= dt$$

$$\text{Så } I = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Integralet blir $\underline{2\pi}$ ✓

11,1%

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppgave 5

Vi har $\vec{F}(x,y,z) = (ye^{xy}\cos z,\ xe^{xy}\cos z,\ 1 - e^{xy}\sin z)$

Siden ~~er~~ $\vec{F}$ er konservativt vil en hvilken som helst parametrisering (kurve) med samme start og sluttpunkt gi samme svar.

Vi ønsker å regne $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

hvor $C: \vec{r}(t) = (3\cos t, 6\sin^2 t, 5t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

Det gir $\vec{r}(0) = (3, 0, 0)$

$\vec{r}(2\pi) = (3, 0, 10\pi)$

Lager en ny kurve $D: \vec{p}(t) = (3, 0, t)$ $0 \leq t \leq 10\pi$.

Siden D og C starter og slutter på samme sted vil

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{F} \cdot d\vec{p}$$

Her har vi $\vec{p}\,'(t) = (0, 0, 1)$ så vi trenger kun $\hat{k}$-komponenten til $\vec{F}$

$$\vec{F}(\vec{p}(t)) \cdot \vec{p}\,'(t) = 1 - e^0 \sin t = 1 - \sin t$$

Så $\vec{F} \cdot d\vec{p} = (1 - \sin t)\,dt$

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10825

Dato/Date: 7.6.2016 Side/Page: 9

Emnekode/Subject tma 4105 Antall ark/Number of pages: 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Det gir da

$$I = \int_0^{10\pi} 1 - \sin t \, dt$$

$$= \left[t + \cos t \right]_0^{10\pi}$$

$$= 10\pi + 1 - 0 - 1$$

$$= 10\pi$$

Integralet blir $\underline{\underline{10\pi}}$ ✓

11,1%

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 10

Emnekode/*Subject* tma4105

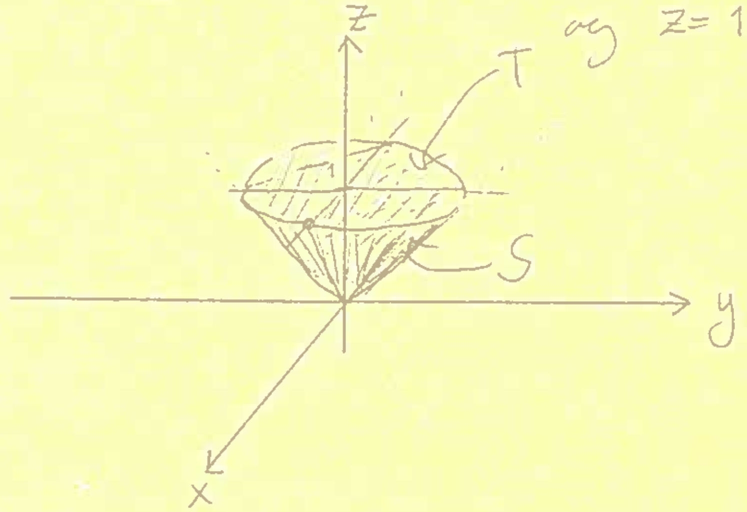
Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 6

Skisserer legemet T: begrenset av $z=\sqrt{x^2+y^2}$ og $z=1$



$$\vec{F}(x,y,z) = (xz, -yx, 2z)$$

Ønsker å regne ut fluksen ut av S (fra T).

$$\Phi_S = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$$

Fluksen ut av hele T er ifølge divergensteoremet

$$\Phi_T = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

Flaten D: $x^2+y^2<1$, $z=1$ gjør slik at $D \cup S$ er randen til T.

Hvis $\Phi_D = \iint_D \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$ er fluksen opp fra D

har vi

$$\Phi_T = \Phi_S + \Phi_D$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi_S = \Phi_T - \Phi_D$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = z - x + 2 = -x + z + 2$$

$$\Phi_T = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} -x + z + 2 \, dz \right) dA$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left[-xz + \frac{z^2}{2} + 2z \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} dA$$

+- feil

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(-x + \frac{1}{2} + 2 + x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{2} - 2\sqrt{x^2+y^2} \right) dA$$

Går over til polarkoordinater

$$\Phi_T = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-r\cos\theta + \frac{5}{2} + r\cos\theta \cdot r - \frac{r^2}{2} - 2r \right) r\,dr\,d\theta$$

Alle ~~ . ~~ leddene med $\cos\theta$ blir null siden $\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$.

$$\Phi_T = 2\pi \left[\frac{5}{4}r^2 - \frac{r^4}{8} - \frac{2}{3}r^3 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{8} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \cancel{\frac{44\pi}{12}} \quad \frac{11}{12}\pi$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Påparametrisering Der med $\hat{N} = \hat{k}$ og $z = 1$ det gir

$\vec{F} \cdot \hat{N} = \cancel{p(r\theta)} \cancel{F} = 2$

så $\vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = 2 \, dS$

Det gir da

$$\Phi_D = \iint_D \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = 2 \iint_D dS$$

$$= 2 \cdot \text{"areal til } D\text{"}$$

$$= 2\pi$$

Siden $\Phi_S = \Phi_T - \Phi_D$ har vi

glemte "2" π

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \cancel{\tfrac{9\pi}{12}} \; \frac{11\pi}{12} - 2\pi = \cancel{\tfrac{-15\pi}{12}} \; -\frac{13}{12}\pi$$

~~Null~~ 9%

Kandidat nr./Candidate no. 10825

Dato/Date: 7.6.2016 Side/Page: 13

Emnekode/Subject tma 4105

Antall ark/Number of pages: 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

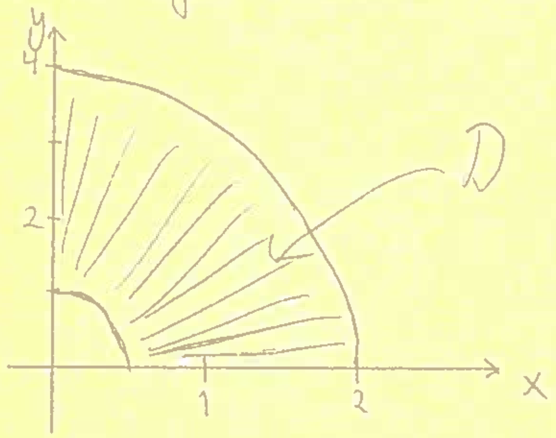
Oppgave 7

D: avgrenset av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4x^2+y^2=16$ og $4x^2+y^2=1$

$$4x^2+y^2 = 16 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

$$4x^2+y^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}x\right)^2 + y^2 = 1$$

Med dette tegner vi området:



Ønsker å regne ut $I = \iint_D \frac{x}{4x^2+y^2}\, dA$

Innfører ellipsekoordinater: $x(r,\theta) = \frac{1}{2} r\cos\theta$

$y(r,\theta) = r\sin\theta$

Må da regne ut $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 14

Emnekode/*Subject* tma 4105

Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}r$$

så $dA = \frac{1}{2}r\,dr\,d\theta$

For å beskrive D må $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ og $1 \leq r \leq 4$

Vi får at $\dfrac{x}{4x^2+y^2} = \dfrac{\frac{1}{2}r\cos\theta}{4\cdot\frac{1}{2^2}r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{r}$

Dette gir $I = \iint_D \frac{x}{4x^2+y^2}\,dA$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{4} \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} 3$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{3}{4}$$

Integralet blir $\cancel{\frac{1}{2}}\ \frac{3}{4}$

6%

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

~~Oppgave 8~~

$S: z = x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$

$\vec{F}(x,y,z) = (e^y, e^z, e^x)$

Ønsker å regne ut

$$I = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

hvor ∂S er orientert mot klokken sett ovenifra. Det gir at S må ha normalvektor med positiv $\hat{k}$-komponent. Vi bruker Stokes teorem og får

$$I = \iint_S \text{curl}\,\vec{F} \cdot \hat{N}\, dS$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y & e^z & e^x \end{vmatrix} = (-e^z, -e^x, -e^y)$$

Vi parametriserer flaten med

$$\vec{p}(x,y) = (x, y, x^2), \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1.$$

Regner ut normalvektoren $\vec{n} = \pm\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial y}\right)$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$\vec{n} = \pm (1, 0, 2x) \times (0, 1, 0)$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2x, 0, 1)$$

Velger $\vec{n} = +(-2x, 0, 1)$ for å ha positiv $\hat{k}$-komponent. Dette gir

$$\vec{F}(\vec{p}(x,y)) \cdot \hat{N} \, dS = (-e^{x^2}, -e^x, -e^y) \cdot (-2x, 0, 1) \, dS$$

$$= 2xe^{x^2} - e^y \, dS$$

Så vi får

$$I = \int_0^2 \int_0^1 2xe^{x^2} - e^y \, dy dx$$

$$= \int_0^2 2xe^{x^2} - e + 1 \, dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$$

Som gir

$$I = \int_{u=0}^{u=4} e^u \, du - 2(e-1)$$

$$= e^4 - e^0 - 2e \cancel{+1} + 2$$

$$= e^4 - 2e + 1$$

Så $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = e^4 - 2e + 1$

10 %

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 17

Emnekode/*Subject* Tma4105 Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 9

$S: x^2+y^2+z^2=4$ hvor $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ og $z \geq 0$

Bruker polarkoordinater: ~~og får~~

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

Det gir $x^2+y^2 = r^2$ så $z^2 = 4-r^2$

$$\Rightarrow z = \sqrt{4-r^2}$$

For z er integra

Vi har da at $0 \leq r \leq 2$.

Må beskrive $\theta = \theta(r,z)$, så bruker sylinderen.

$$(r\cos\theta - 1)^2 + y(r\sin\theta)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 2\cos\theta$$

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 210825

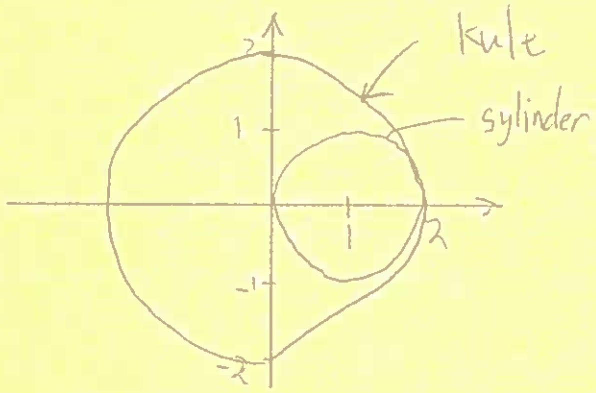
Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 18

Emnekode/*Subject* tma4105 Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ovenifra ser det slik ut:



Vi ser da at $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Og fra forrige utregning har vi $0 \leq r \leq 2\cos\theta$

Vi parametriserer flaten med

$$\vec{p}(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, \sqrt{4-r^2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$dS = |\vec{n}|\,dr\,d\theta \quad \text{hvor } \vec{n} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{-r}{\sqrt{4-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \cancel{=}$$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 19

Emnekode/*Subject* tma4105

Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$\vec{n} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right)$$

$$|\vec{n}|^2 = \frac{(r^2\cos\theta)^2}{4-r^2} + \frac{(r^2\sin\theta)^2}{4-r^2} + r^2$$

$$= \frac{r^4\cos^2\theta + r^4\sin^2\theta}{4-r^2} + r^2$$

$$= \frac{r^4 + (4-r^2)r^2}{4-r^2}$$

$$= \frac{\cancel{r^4} + 4r^2 - \cancel{r^4}}{4-r^2} \Rightarrow |\vec{n}| = \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}$$

Så arealet er gitt ved

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta} \frac{\cancel{4r}\,2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$u = 4-r^2 \Rightarrow du = -2r\,dr$$

$$A = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} -\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{u}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$\cancel{= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cos^2\theta} - \sqrt{4}\,d\theta$$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10825

Dato/*Date:* 7.6.2016 Side/*Page:* 20

Emnekode/*Subject* tma4110S

Antall ark/*Number of pages:* 20

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4-4\cos^2\theta - 4 - 0^2 \, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$

Siden $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi$ så vil $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}$

så vi får $A = \frac{4\pi}{3}$

Arealet til S er $\frac{4\pi}{3}$

6%

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin\theta| - 1 \, d\theta = I$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2} - \pi\right]$$

$$= -\pi$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \pi + \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \pi + 1 + 1$$

$$= \pi + 2$$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015