Chapter 1

Robotikk

1.1 Kinematikk

1.1.1 Foroverkinematikk

Foroverkinematikkproblemet består i følgende: Gitt leddvariablene til en robot, beregn posisjon og orientering til griperen. Det enkleste tilfellet vi kan se for oss er en såkalt 1-link manipulator i planet. Denne er vist i Figur 1.1. Enkel trigonometri gir oss posisjonen til griperen som

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos\theta_1 \\ y &= a_1 \sin\theta_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

og vi ser at griperen peker i samme retning som leddvinkelen θ_1. Dette kan ganske lett utvides til en 2-link manipulator i planet som er vist i Figur 1.2. Her vil koordinatene til griperen være gitt av

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

og retningen til griperen er gitt av summen av leddvinklene $\theta_1 + \theta_2$.

Foroverkinematikk kan også formuleres for roboter med translasjonsledd, eller kombinasjoner av rotasjonsledd og rotasjonsledd. Uansett vil det være snakk om bruk av geometri og trigonometri for å finne posisjon og orientering til griperen som funksjon av leddvinkelene.

1.1.2 Inverskinematikk

Inverskinematikken betegner det motsatte problemet, nemlig gitt posisjonen og orienteringen til griperen, finn alle leddvariablene. Dette er matematisk sett et mye vanskeligere problem. Det er heller ikke sikkert at det eksisterer en analytisk løsning, det avhenger av kompleksiteten til roboten. Dessuten er det slik at selv om en løsning eksisterer, er det ikke sikkert at den er unik, det kan eksistere mange løsninger.

For 1-link manipulatoren er problemet slik: Gitt (x, y), finn θ_1. Ved å se på Figur 1.1, ser vi at

$$\theta_1 = \mathrm{Atan(y, x)} \tag{1.3}$$

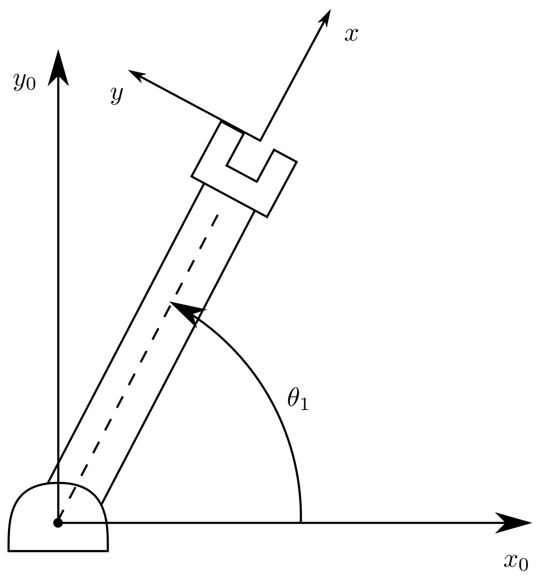

Figure 1.1: 1-link manipulator i planet.

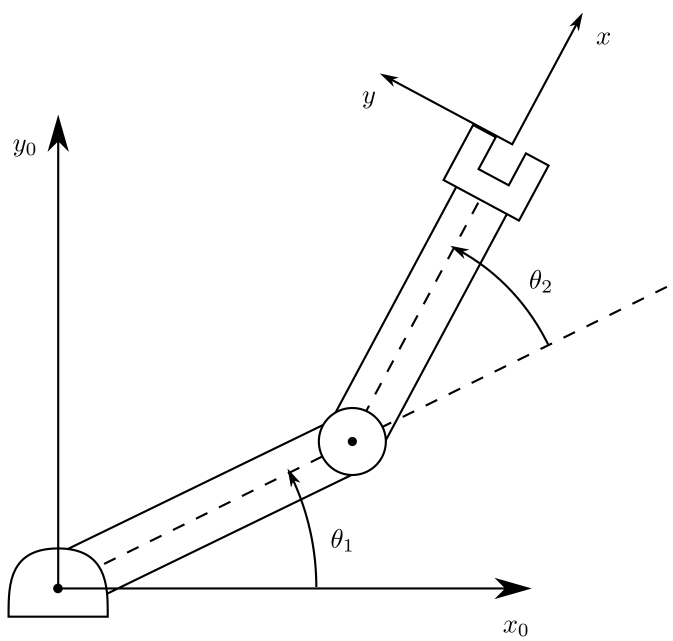

Figure 1.2: 2-link manipulator i planet.

der Atan(y, x) er en to-arguments invers tangens funksjon[1].

For 2-link manipulatoren i Figur 1.2 vil det vise seg at inverskinematikken blir ganske mye mer komplisert å regne ut. Gitt (x, y), finn θ_1 og θ_2. Som før har vi at

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned} \tag{1.4}$$

men det vil nå være nyttig å kvadrere disse sammenhengene slik at vi får

$$\begin{aligned} x^2 &= a_1^2 \cos^2\theta_1 + a_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2a_1a_2 \cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y^2 &= a_1^2 \sin^2\theta_1 + a_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2a_1a_2 \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ved å summere x^2 og y^2 finner[2] vi nå

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a_1^2(c_1^2 + s_1^2) + a_2^2(c_{12}^2 + s_{12}^2) + 2a_1a_2\,(c_1(c_1c_2 - s_1s_2) \\ &\quad + s_1(c_1s_2 + s_1c_2)) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\left(c_1^2c_2 - c_1s_1s_2 + s_1c_1s_2 + s_1^2c_2\right) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2\left(c_1^2 + s_1^2\right) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

der vi også har brukt formlene for *cos* og *sin* til summen av vinkler. Vi kan nå finne θ_2 fra (1.6) ved sammenhengen

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \tag{1.7}$$

men det viser seg at dette kan bli numerisk unøyaktig for små vinkler, og dessuten vil vi gjerne utnytte fordelen med å automatisk få rett vinkel ved hjelp av Atan-funksjonen. Derfor renger vi også ut

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2} \tag{1.8}$$

slik at vi kan finne θ_2 ved hjelp av

$$\theta_2 = \mathrm{Atan}\left(\sin\theta_2, \cos\theta_2\right). \tag{1.9}$$

Legg merke til at de to løsningene i (1.8) svarer til de såkalte albue opp og albue ned løsningene som er illustrert i Figur 1.3. For å finne θ_1 tar vi igjen utgangspunkt i (1.4) som kan skrives som

$$\begin{aligned} x &= a_1c_1 + a_2c_1c_2 - a_2s_1s_2 \\ y &= a_1s_1 + a_2c_1s_2 + a_2s_1c_2, \end{aligned} \tag{1.10}$$

og videre som

$$\begin{aligned} x &= k_1\cos\theta_1 - k_2\sin\theta_1 \\ y &= k_1\sin\theta_1 + k_2\cos\theta_1, \end{aligned} \tag{1.11}$$

[1] Atan(y, x) er definert for alle $(x, y) \neq (0, 0)$ slik at vinkelen alltid kommer i riktig kvadrant. For eksempel så er $\mathrm{Atan}(-1, 1) = \frac{3\pi}{4}$ og $\mathrm{Atan}(1, -1) = -\frac{\pi}{4}$. I Matlab er den tilsvarende funksjonen `atan2(y,x)`

[2] For å forenkle notasjonen har vi innført $c_1 = \cos\theta_1$, $s_1 = \sin\theta_1$, $c_2 = \cos\theta_2$, $s_2 = \sin\theta_2$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ og $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

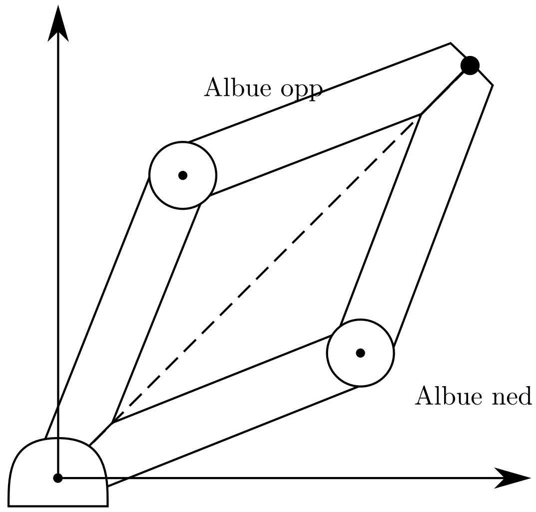

Figure 1.3: 1-link manipulator i planet.

der $k_1 = a_1 + a_2 c_2$ og $k_2 = a_2 s_2$. Hensikten med å innføre k_1 og k_2 er at disse er begge avhenige av kun θ_2 som nå er kjent. Som illustert i Figur V innfører vi nå $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ og vinkelen $\gamma = \mathrm{Atan(k_2, k_1)}$ og vi ser at vi nå kan skrive $k_1 = r\cos\gamma$ og $k_2 = r\sin\gamma$. Uttrykkene for x og y kan nå skrives

$$\begin{aligned} x &= r\cos\gamma\cos\theta_1 - r\sin\gamma\sin\theta_1 \\ y &= r\cos\gamma\sin\theta_1 + r\sin\gamma\cos\theta_1, \end{aligned} \tag{1.12}$$

og ved å dividere med r får vi

$$\begin{aligned} \frac{x}{r}x &= \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1 \\ \frac{y}{r} &= \cos\gamma\sin\theta_1 + \sin\gamma\cos\theta_1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

og vi kan kjenne igjen høyre sidene i (1.13) som uttrykkene for cos og sin til summer av vinkler slik at

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\gamma + \theta_1) \\ \frac{y}{r} &= \sin(\gamma + \theta_1). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Fra (1.14) ser vi at

$$\gamma + \theta_1 = \mathrm{Atan}(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}}, \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}) = \mathrm{Atan(y, x)} \tag{1.15}$$

og dermed har vi at

$$\theta_1 = \mathrm{Atan(y, x)} - \gamma = \mathrm{Atan(y, x)} - \mathrm{Atan(k_2, k_1)}. \tag{1.16}$$

1.2 Dynamikk

For å kunne styre en robotmanipulator må vi vite sammenhengen mellom kreftene eller momentene som motorene yter og bevegelsen som følger. Denne sammenhengen, altså robotens dynamiske ligninger eller dynamikk, kan finnes ved hjelp

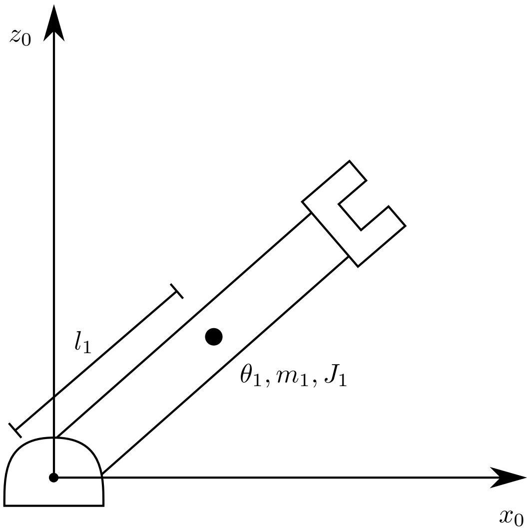

Figure 1.4: 1-link manipulator i planet.

av Euler-Lagranges bevegelsesligninger. Disse ligningene kan benyttes til å modellere en mengde kompliserte mekaniske systemer og er spesielt godt egnet til å modellere robotmanipulatorer. Euler-Lagranges bevegelsesligninger er gitt av

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j, \tag{1.17}$$

der $L = K - V$ er systemets Lagrange-funksjon, K er kinetisk energi, V er potensiell energi, q_j er generalisert koordinat nr j som for vårt tilfelle tilsvare leddvinklene og τ_j er generalisert kraft nr j som for en robotmaipulator betyr motormoment nr j. Symbolet ∂ brukes for å betegne en partiellderivert, det vil si vi deriverer en funksjon av flere variable med hensyn på en av variablene[3]. Vi skal se på et enkelt eksempel med en 1-link manipulator som i Figur 1.4. Leddet som har masse m_1, lengde $2l_1$ og dreiemoment J_1 er drevet av en motor med moment τ_1. Den kinetiske energien til leddet er gitt av

$$K = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2, \tag{1.18}$$

og den potensielle energien er gitt av

$$V = m_1 g h = m_1 g l_1 \sin q_1. \tag{1.19}$$

Lengden l_1 er da avstanden fra leddet og til massemiddelpunktet for leddet. Lagrangefunksjonen kan nå beregnes som

$$L = K - V = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 - m_1 g l_1 \sin q_1. \tag{1.20}$$

[3]For eksempel så vil funksjonen $f(x,y) = 2x^2y^3$ ha partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2$, mer om dette i Matematikk 2

Vi kan nå beregne de ulike uttrykkene vi trenger i Euler-Lagrange ligningen som

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= 2\frac{1}{2}J_1\dot{q}_1 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= J_1\ddot{q}_1
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

og

$$
\frac{\partial L}{\partial q_j} = -m_1 g l_1 \cos q_1 \tag{1.22}
$$

og ved å sette inn (1.21) og (1.22) i (1.17) får vi

$$
J_1\ddot{q}_1 + m_1 g l_1 \cos q_1 = \tau_1 \tag{1.23}
$$

som er en ulineær andreordens differensialligning som beskriver bevegelsen til en 1-leddet robotmanipulator.