Øving 8, fysikk

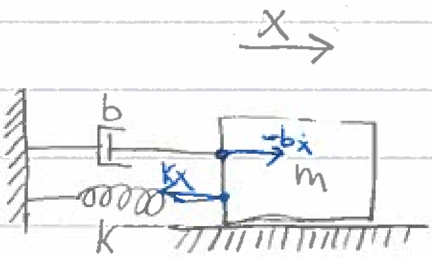
gruppe 2, Rendell Cale

Godkjent
S.B.

Ønsker tilbakemelding :)

Oppgave 1

a)




Kreftene som virker på m er

$F_d = -b\dot{x}$ (demping, går alltid mot farten)

$F_F = kx$ (fjærdrag).

(N2-x) gir

$$-b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (*)$$

↳ $\gamma = \frac{b}{2m}$, $\omega_0 = +\sqrt{\frac{k}{m}}$, Da blir $(*)$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

R

b) Overkritisk: dempekraften er for stor og systemet vil bruke lang tid på å oppnå stasjonærverdi.

Matematisk sett: $b > 2\sqrt{km}$

Underkritisk: dempekraften er for liten så systemet vil oscillere i lengre tid, og amplituden vil gå ned litt for hver oscillasjon

Matematisk sett: $b < 2\sqrt{km}$

Kritisk: Blokken tilnærmer raskt stasjonærverdien uten å få noen svingninger. Dvs. dempingen er valgt perfekt ift. fjæra og massen.

$b = 2\sqrt{km}$

c) $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -\gamma A e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi) - \omega_d A e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \varphi)$

$\ddot{x}(t) = \gamma^2 A e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi) + \gamma\omega_d A e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \varphi)$

$+\gamma\omega_d A e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \varphi) - \omega_d^2 A e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi)$

Innsatt i $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ får vi

$$\gamma^2 \cancel{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\varphi)} + 2\gamma\omega_d \cancel{Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t+\varphi)} - \omega_d^2 \cancel{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\varphi)}$$
$$-2\gamma^2 \cancel{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\varphi)} - 2\gamma\omega_d \cancel{Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t+\varphi)}$$
$$+\omega_0^2 \cancel{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\varphi)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 - \omega_d^2 - 2\gamma^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{antar } A \neq 0, \cos(\omega_d t+\varphi) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\omega_0^2 - \gamma^2}_{\text{positivt kun for } \omega_0 > \gamma} = \omega_d^2$$

Uttrykket gir kun mening for $\omega_0^2 - \gamma^2 \geq 0 \overset{\omega_0, \gamma > 0}{\Leftrightarrow} \omega_0 > \gamma$, altså et underdempet system. Da vil vi ha

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

d) 2. ordens diff likning så vi trenger 2 initial-betingelser

R

Nøyaktigheten er ekstremt høy.
For høye verdier av dt, dt ≥ 1, blir også den generelle formen riktig (sammenlignet med analytisk løsning med samme dt)

R

e) Pendelen har dempet svingninger så $\theta(t)$ er gitt ved

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \varphi)$$

i) Start amplituden er $A = 6{,}00°$
Ved $t = 2{,}0\text{ min} = 120\text{ sek}$ vil
$\theta(t) = 5{,}10°$ $(\cos(\omega_d t + \varphi) = 1)$

Det betyr at

$$\frac{\theta(2)}{\theta(0)} = \frac{5{,}1}{6{,}0}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-120\gamma} = 0{,}85$$

$$\Leftrightarrow \quad -120\gamma = \ln(0{,}85)$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma = 0{,}0014\ s^{-1}$$ G

$\bar{A}(t) = Ae^{-\gamma t}$

$\gamma = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{A}{\bar{A}}\right)$

$t = 120\,s$

$\gamma = \frac{1}{120\,s}\ln\left(\frac{6{,}00}{5{,}10}\right)$

$= 1{,}35 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$

ii) Ved udempet svingning kan det vises at

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} = 9{,}81\ s^{-2}$$

Fortsatt ok.

Siden $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, men siden $\gamma << \omega_0$
sier vi $\omega_d \approx \omega_0$
$\Rightarrow \quad \omega_d = 3{,}13\ \text{rad/s}$

$$\Leftrightarrow \quad f_d = \frac{3{,}13}{2\pi}\ \text{Hz} = 0{,}50\ \text{Hz}$$

$\Leftrightarrow T_d = f_d^{-1} = 2{,}00\ s$ R

## Oppgave 2

a) $\Sigma F = -k_1 x - k_2 x = -(k_1+k_2)x \overset{(N2)}{=} m\ddot{x}$

Dette vil gi $\omega^2 = \dfrac{k_1+k_2}{m}$

$$= \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2}$$

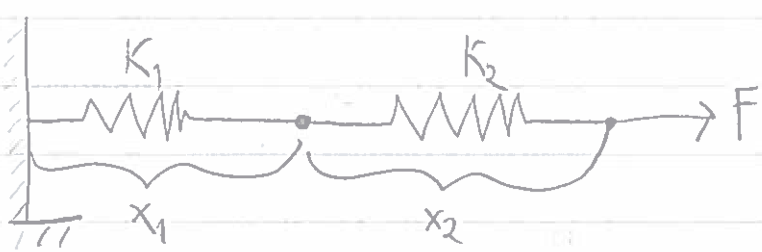
R

c) Vi vil få noe tilsvarende her men kraften fra $k_2$ vil ha negativt fortegn. Nei, $-k\,x_i$ fra vegge Samme regnskap gir

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

b)




$x_{tot} = x_1 + x_2$

Hvis vi bytter ut $k_1$ og $k_2$ med én $k_{eff}$, hvilken verdi må den ha?

Hookes lov sier $F = kx$. Strekket vil fordele seg likt over $k_1$ og $k_2$

$$F = F_{1+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{F}{k_{eff}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\Leftrightarrow k_{eff} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Dette gir $\omega^2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{1}{m}$

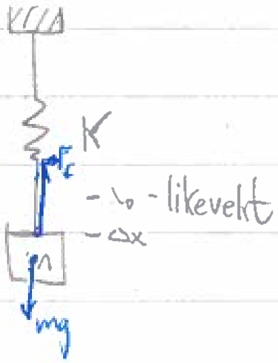
$$= \frac{\frac{k_1}{m} \cdot \frac{k_2}{m}}{\frac{k_1}{m} + \frac{k}{m}}$$

$$= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$ R

## Oppgave 3

a)




$F_f = -k\Delta x$


$$\Sigma F = mg - k\Delta x$$

I likevekt vil (N1) gjelde så

$$mg - k\Delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\Delta x = \frac{mg}{k}}}$$

R

b) Systemet svinger $y$ vekk fra likevektspunktet. Setter dette inn i $\Sigma F$ og bruker (N2).

$y = x - \Delta x \qquad \ddot{y} = \ddot{x}$

$$mg - ky = m\ddot{y} \qquad -k(\Delta x + y) + mg = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{k}{m}y = g \qquad \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = g \quad , \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

G

Gjør et lite lineært variabelbytte $y = u + \frac{g}{\omega_0^2} = u + \Delta x$
som gir

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = g \Leftrightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Hm, ok men likningen skal være med y (se forrige side).

Vi kan da tydelig se at frekvensene er like.

c) Vil finne energien ved $t=0$, $E_0$.
Siden systemet konserverer energi vil $E = E_0$.

$$E_0 = E_{K,0} + E_{p,0} \qquad (*)$$

$$E_{K,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (1)$$

$$E_{p,0} = E_{p,fjær} + E_{p,grav}$$

Fjæra er strekt ut en avstand $y_0$ fra likevekts punktet, så

$$E_{p,fjær} = \frac{1}{2} k y_0^2$$

Vi har også

$$E_{0,grav} = m g y_0$$

Så $$E = E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + m g y_0$$ G

Generelt:

$$E = -mgy + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = -mgy + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \underbrace{k y \Delta x}_{= mgy} + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

Bevaring av E

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

## Oppgave 4

a) Svar: B R $1{,}00\ kg\,m^2$

$$\sum \tau = (0{,}25\ m \cdot 20N \cdot \sin(90°))$$
$$= 5{,}0\ Nm$$

$$V_0 = \omega_0 r = 0$$
$$V = \omega \cdot r = 60 \cdot 0{,}25 = 15\ m/s$$

$$S = \frac{V - V_0}{2} \cdot t = 7{,}5 \cdot 12 = 90\ m$$

$$v^2 = V_0^2 + 2as$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2 \cdot S} = 1{,}25\ m/s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{a}{r} = 5{,}0\ rad/s^2$$

$$I = \frac{\sum \tau}{\alpha} = 1{,}0\ kg\,m^2$$

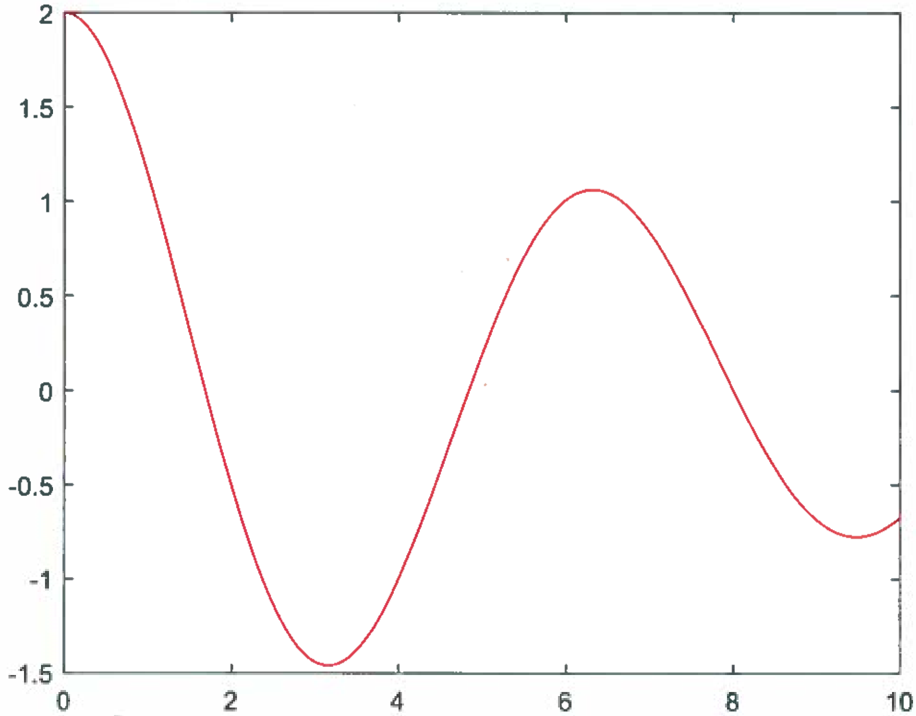
b) E R, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

c) B R, samtidigt spolen roterer

d) A R, $f_1 = f_2 > f_3$

$dt = 0{,}001$ (1 ms)

$x_1 = x_2 = 2$




R

Er det to kurver her? (analytisk og numerisk)

Hva er resten av input?