



NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

INSTITUTT FOR TEKNISK KYBERNETIKK

# LØSNINGSFORSLAG

## Avsluttende Eksamen TTK4100

### Kybernetikk Introduksjon

Mandag 29. mai 2006

Tid: 09:00 - 13:00

Da tidligere vurdering i faget teller 30% av den endelige karakteren i faget, teller denne eksamen 70%.

## Oppgave 1. (22%)

Kursdynamikken til et skip er gitt av modellen

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= -\frac{1}{T}r + \frac{K}{T}\delta + w \\ y &= \psi,\end{aligned}$$

der  $\psi$  er kursvinkelen,  $r$  er kursraten,  $\delta = u$  er rorvinkelen og  $w$  er en forstyrrelse.  $T > 0$  og  $K > 0$  er henholdsvis tidskonstant og forsterkning.

- a) (3%) Systemet er *monovariabelt* da det bare har én inngang,  $u = \delta$ , og én utgang,  $y = \psi$ .
- b) (4%) Ved å sette inn

$$\delta = -K_p(\psi - \psi_d) - K_d r,$$

i systemlikningene får vi følgende lukket-sløyfe system:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= -\frac{1}{T}r + \frac{K}{T}(-K_p(\psi - \psi_d) - K_d r) + w \\ &= -\frac{1}{T}r - \frac{KK_p}{T}\psi + \frac{KK_p}{T}\psi_d - \frac{KK_d}{T}r + w\end{aligned}$$

Differensier den første likningen med hensyn på tiden, slik at  $\ddot{\psi} = \dot{r}$ , og sett deretter inn for  $\dot{r}$  og bruker at  $r = \dot{\psi}$ . Da får vi uttrykket

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{1}{T} + \frac{KK_d}{T}\right)\dot{\psi} + \frac{KK_p}{T}\psi = \frac{KK_p}{T}\psi_d + w$$

Altså kan systemet skrives som

$$m\ddot{\psi} + d\dot{\psi} + k\psi = f(t)$$

med

$$\begin{aligned}m &= 1 \\ d &= \frac{1 + KK_d}{T} \\ k &= \frac{KK_p}{T} \\ f(t) &= \frac{KK_p}{T}\psi_d + w = w\end{aligned}$$

hvor det i siste likning er brukt at  $\psi_d = 0$ . Man kan selvfølgelig også bruke

$$\begin{aligned} m &= T \\ d &= 1 + KK_d \\ k &= KK_p \\ f(t) &= KK_p\psi_d + wT = wT \end{aligned}$$

eller andre tilsvarende uttrykk.

**c)** (4%) Den karakteristiske likningen til systemet er

$$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$$

Eigenverdiene er gitt av

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4mk}}{2m} \quad (1)$$

For at  $\lambda_{1,2}$  skal ha negativ realdel, ser vi at  $d > 0$  og at  $k > 0$ . Kravet til  $K_d$  er da gitt av

$$d = \frac{1 + KK_d}{T} > 0$$

og vi får at

$$K_d > -\frac{1}{K}$$

må være oppfylt.

**d)** (4%) For at kursen ikke skal oscillere må egenverdiene  $\lambda_{1,2}$  være reelle. Det vil si at uttrykket under rottegnet i løsningen til egenverdien,  $d^2 - 4mk$ , ikke kan være negativt. Merk at  $d^2 - 4mk \geq 0$  impliserer at

$$\frac{(1 + KK_d)^2}{T^2} - \frac{4KK_p}{T} = \frac{(1 + KK_d)^2}{T^2} - \frac{4KK_pT}{T^2} \geq 0$$

Følgelig må

$$(1 + KK_d)^2 - 4KK_pT \geq 0$$

og endelig får vi kravet til  $K_p$  for at kursen til skipet ikke skal oscillere:

$$K_p \leq \frac{(1 + KK_d)^2}{4KT} = \frac{1 + 2KK_d + K^2K_d^2}{4KT}$$

- e) (3%) Mens skipet etter en tidsbegrenset forstyrrelse igjen vil rette seg til samme kurs (men med et stasjonært avvik), vil dette ikke være tilfellet for en konstant forstyrrelse. Dette fordi autopiloten mangler integralvirkning. Eventuelt kan man bruke en foroverkobling fra forstyrrelsen dersom den er målbar.
- f) (4%) At roret til skipet har dødsone vil si at man ikke får noe utslag på styringen før rorvinkelen overstiger en nedre grense. Dette kan redusere ytelsen til reguleringssystemet, men også lede til grensesvingninger og ustabilitet.

## Oppgave 2. (15%)

- a) (4%) Resistansen i tråden etter at den har blitt strukket er gitt av

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{A} \\ &= \rho \frac{l_0 + \Delta l}{A_0 - \Delta A} \\ &= \rho \frac{(l_0 + \Delta l)^2}{l_0 A_0} \\ &= \rho \frac{(l_0^2 + 2l_0 \Delta l + \Delta l^2)}{l_0 A_0} \end{aligned}$$

La os si at  $\Delta l \ll 1$ , slik at  $\Delta l^2 \approx 0$ . Da får vi at

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{\rho}{l_0 A_0} (l_0^2 + 2l_0 \Delta l) \\ &\approx \rho \frac{l_0}{A_0} \left( 1 + 2 \frac{\Delta l}{l_0} \right) \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise.

- b) (3%) Merk at uttrykket fra forrige oppgave kan skrives som

$$R \approx R_0 \left( 1 + 2 \frac{\Delta l}{l_0} \right)$$

Vi ser da at resistansendring,  $\Delta R$ , er gitt av

$$\begin{aligned} \Delta R &\approx 2 \frac{\Delta l}{l_0} R_0 \\ &= 2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \\ &= 0,10 \Omega \end{aligned}$$

Dette tilsvarer en økning i resistansen på 0.2 %.

- c) (4%) Newtons lov sier oss at for å akselerere en masse,  $m$ , men en akselerasjon,  $a$ , må det virke en kraft på massen, gitt ved  $F = ma$ . Likeledes sier Hooks lov oss at dersom en fjær med fjærkonstant,  $k$ , er strekt en distanse,  $\Delta x$ , fra sitt likevektspunkt, så må det virke en kraft på fjæra gitt ved  $F = k\Delta x$ . Ved å kombinere disse to lovene, ser vi at vi kan måle akselerasjonen ved å måle forlengelsen av fjæra:

$$a = \frac{k}{m} \Delta x$$

- d) (4%) Fire forskjellige typer akselerometre er beskrevet på side 255-256 i Johnson (2006). Et sammendrag er gjengitt her:

**Potentiometric:** Dette er den enkleste formen for akselerometer og fungerer ved å koble masse-fjær systemet til en slepekontakt på en spenningsmåler. Posisjonen til massen er dermed gitt som endringen i resistanse.

**LVDT:** Denne typen akselerometer bruker målingen fra en LVDT ("linear variable differential transformer") for å måle forskyvningen av massen i systemet. Massen er i dette tilfellet kjernen til LVDT.

**Variable Reluctance:** I dette akselerometeret brukes vanligvis en permanentmagnet, og spenningen induisert i de omsluttende viklingene gir et uttrykk for akselerasjonen. Merk at dette akselerometeret bare fungerer når permanentmagneten er i bevegelse

**Piezoelectric:** Et piezoelektrisk akselerometer er basert på egenskapen til en type krystaller som genererer spenning når krystallet utsettes for en kraft. Spenningen generert er da et mål på akselerasjonen.

### Oppgave 3. (9%)

- a) (4%) Nyquist samplingsteorem sier at et signal kan rekonstrueres der samplingsfrekvensen er dobbelt så høy som den høyeste frekvensen i det samplede signalet, dvs

$$f_{\text{sample}} = 2f_{\text{max}}$$

For signalet

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{2} \cos(3t),$$

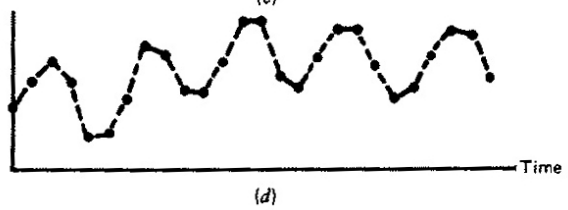
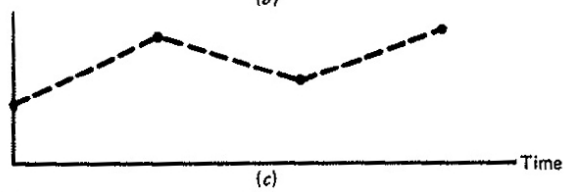
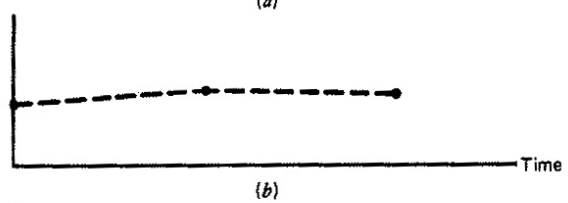
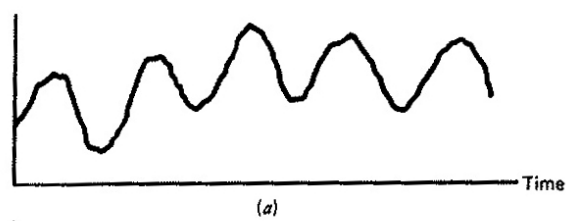
er den høyeste frekvensen  $\omega_{\text{max}} = 3 \text{ rad/s}$  eller  $f_{\text{max}} = 3/(2\pi) \text{ Hz}$ . Samplingsfrekvensen må i følge Nyquistteoremet da være

$$\omega_{\text{sample}} = 2\omega_{\text{max}} = 6 \text{ rad/s}$$

eller

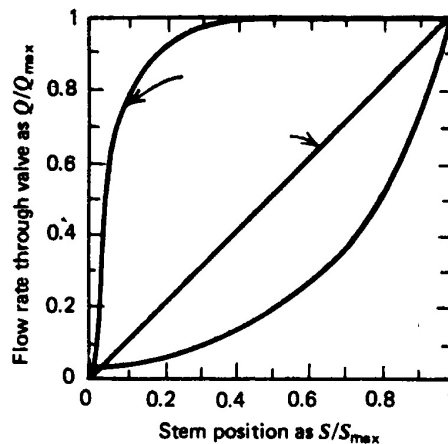
$$f_{\text{sample}} = 2f_{\text{max}} = \frac{3}{\pi} \text{ Hz}$$

- b) (5%) Nedfolding er en fenomen som opptrer dersom samplingsfrekvensen er for lav. Da vil det rekonstruerte signalet kunne synes å ha en annen (lavere) frekvens enn i det samplede signalet. Dette er illustrert i figuren under, hvor det rekonstruerte signalet har en lavere frekvens, se Figur c), enn signalet som skal samples, gitt i Figur a).





#### Oppgave 4. (6%)



Figur 1: Ventilkarakteristikker

Ventilkarakteristikkene kalles *lineær* (linear"), *likeprosentlig* (equal percentage") og *raskt åpneende* (quick opening).

**Lineær:** I en lineær ventil vil strømningsrate variere lineært med ventilposisjonen, slik

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{S}{S_{\max}}$$

hvor  $Q$  og  $Q_{\max}$  er henholdsvis strømningsrate og maksimal strømningsrate, og  $S$  og  $S_{\max}$  er henholdsvis ventilåpning og maksimal ventilåpning.

**Likeprosentlig:** I en likeprosentlig ventil er karakteristikken slik at en prosentvis endring i ventilposisjonen, gir en tilsvarende prosentvis endring i strømningsraten.

**Raskt åpneende:** I en raskt åpneende ventil, vil en liten åpning av ventilen føre til maksimal gjennomstrøming. Slike ventiler benyttes i beskyttelsessystemer hvor rask avlastning er viktig for å unngå uheldige prosessstilstander, og andre steder hvor det er ønskelig med av/på virkning.

## Oppgave 5. (18%)

Gitt et system bestående av to førsteordens systemer:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2x_2 + u\end{aligned}$$

a) (2%) Vi ser her at systemet er på formen

$$\dot{x} = ax + bu$$

med  $x = x_2$ ,  $a = -k_2$  og  $b = 1$ . Fra side 34 i Gravdahl (2006) har vi at stasjonærverdien til dette systemet for  $u = 1$  er gitt av:

$$\begin{aligned}x_{stasjonær} &= -\frac{bu}{a} \\ &= \frac{1}{k_2}\end{aligned}$$

b) (4%) La  $y = x_1$ . Ved å differensiere denne to ganger med hensyn på tiden får vi:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{x}_1 \\ &= -k_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= -k_1\dot{y} + (-k_2x_2) + u \\ &= -k_1\dot{y} - k_2(\dot{y} + k_1y) + u\end{aligned}$$

Etter å ha stokket om på rekkefølgen ender vi opp med:

$$\ddot{y} + (k_1 + k_2)\dot{y} + k_1k_2y = u$$

Her var det en feil i oppgavesettet, og oppgaven ble ikke tatt hensyn til under sensur.

c) (4%) Siden det var en feil i forrige oppgave, ble det under eksamen oppgitt at studentene skulle bruke uttrykket:

$$\ddot{y} + k_2\dot{y} + (k_1 + k_1k_2)y = u$$

i resten av oppgaven. Ved å sette inn  $u = -k_3y$ , får vi følgende lukket-sløyfe system:

$$\ddot{y} + k_2\dot{y} + (k_1 + k_1k_2 + k_3)y = 0$$

For at systemet skal være stabilt, må koeffisientene i uttrykket over ha samme fortegn, dvs at  $k_1 + k_1k_2 + k_3 > 0$ , eventuelt kan  $k_1 + k_1k_2 + k_3 = 0$ . Altså må  $k_3$  oppfylle følgende krav:

$$k_3 \geq -k_1 - k_1k_2$$

- d) (5%) Andreordens systemer kan ved hjelp av den udempede resonansfrekvensen,  $\omega_0$ , og den relative dempingsfaktoren,  $\zeta$ , skrives på følgende måte

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = 0$$

Ved å sammenlikne med uttrykket i deloppgave b), ser vi at

$$\omega_0 = \sqrt{k_1 + k_1k_2 + k_3}$$

og at

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{k_2}{2\omega_0} \\ &= \frac{k_2}{2\sqrt{k_1 + k_1k_2 + k_3}}\end{aligned}$$

- e) (3%) Blokkdiagrammet for systemet kan tegnes på mange forskjellige måter. Ett eksempel er figuren under, hvor regulatoren er gitt av den ytterste sløyfen:

