NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR TELETEKNIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne H. Johnsen
Tlf.: 73 59 26 78/930 25 534

EKSAMEN I FAG TTT4120 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

Dato: Tirsdag 13. desember 2011
Tid: Kl. 09.00 - 13.00

Hjelpemidler: D–Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

INFORMASJON

- **Dette er en korrigert eksamen. Korreksjoner er i fet skrift.**
  - Oppgave 1 omhandler analyse av filtre.
  - Oppgave 2 omhandler rasjonale prosessmodeller.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma realisering.
  - Oppgave 4 omhandler frekvenstransformasjoner.
  - En del formler er oppgitt i appendiks
  - Vekting av hver deloppgave er angitt i parentes. Totalt antall poeng er 63.
- Alle svar skal begrunnes!
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, første gang ca. kl. 10.00 og andre gang ca. 11.45.

Oppgave 1 **(3+3+6+3 = 15 poeng)**

1a) Et stabilt, kausalt LTI-filter er beskrevet ved følgende differanse-ligning:

$$y(n) - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}y(n-1) + \frac{1}{3}y(n-2) = x(n) - \frac{7}{6}x(n-1),\ \ n = -\infty, \infty \tag{1}$$

Vis at filterets transferfunksjon er gitt ved:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{(1-\frac{7}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\frac{1}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})} \tag{2}$$

Svar:

$$Y(z) - \frac{7}{6}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-2} = X(z) - \frac{7}{6}X(z)z^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$Y(z)(1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}) = X(z)(1 - \frac{7}{6}z^{-1}) \quad \Rightarrow$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{7}{6}z^{-1}}{1-\frac{7}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}$$

Ved å multiplisere parantesene i nevneren i ligning 2 får en nevneren over, ergo er polene gitt ved $z = \frac{1}{2}$ and $z = \frac{2}{3}$

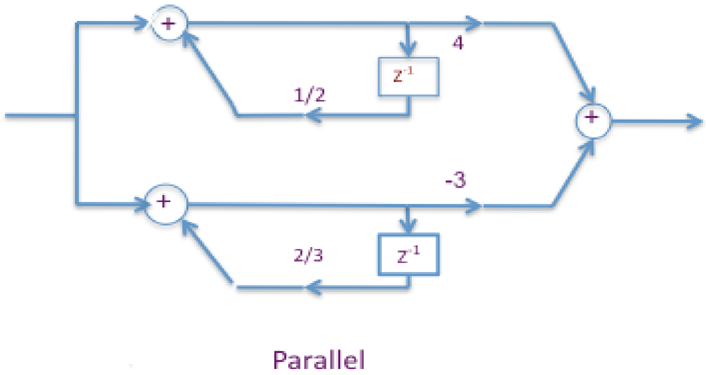
1b) Gi et *begrunnet* svar på følgende :

- Hva blir konvergensområdet til filteret i oppgave 1a?
- Har filteret lineær fase?
- Har filteret minimum fase?

Svar:

- $\max[|p_1|, |p_2|] = max[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \ \text{ROC} : |z| > \frac{2}{3}$
- Filteret har ikke lineær fase da det har poler.
- Minimum fase krever at både poler og nullpunkter ligger innenfor enhetssirkelen. Vi har her et nullpunkt i $z = \frac{7}{6} > 1$. Altså har filteret ikke minimum fase.

1c) Gitt parallellstrukturen i Figur 1.



Figur 1: *Parallellstruktur*

Vis at enhetspulsresponsen til filteret er gitt ved :

$$
\begin{aligned}
h_P(n) &= h_3(n) + h_4(n) \qquad \text{hvor} \\
h_3(n) &= \begin{cases} 4(\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\
h_4(n) &= \begin{cases} -3(\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vis også at parallellstrukturen implementerer filteret gitt ved lign 2, dvs :

$$H(z) = H_P(z) = H_3(z) + H_4(z) \tag{3}$$

Svar:

$$\begin{aligned}
H_P(z) &= \frac{1-\frac{7}{6}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}} = \frac{C}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{D}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \quad \Rightarrow \\
H_P(z) &= \frac{C+D-(\frac{2C}{3}+\frac{D}{2})z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C+D &= 1 \\
(\frac{2C}{3}+\frac{D}{2})z^{-1} &= \frac{7}{6}z^{-1} \quad \Rightarrow \quad 4C+3D=7 \\
4(1-D)+3D &= 4-D=7 \;\Rightarrow\; D=-3 \quad \text{og} \quad C=4
\end{aligned}$$

Dermed har en :

$$\begin{aligned}
H_P(z) &= H_3(z)+H_4(z) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-3}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \quad \Rightarrow \\
h(n) &= h_3(n)+h_4(n) = \begin{cases} 4(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{2}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

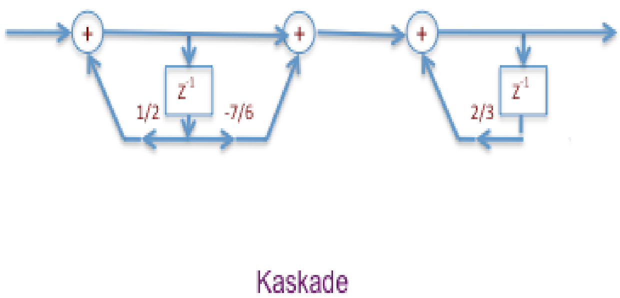
Setter vi $H_P(z)$ på en felles brøkstrek får vi identisk nevner med lign 2.
mens teller blir :

$$4(1-\frac{2}{3}z^{-1})-3(1-\frac{1}{2}z^{-1}) = 4-3-(\frac{8}{3}-\frac{3}{2})z^{-1} = 1-\frac{16-9}{6}z^{-1} = 1-\frac{7}{6}z^{-1} \Rightarrow \text{qed} \quad (4)$$

1d) Skisser en kaskadestruktur basert på lign. 2 som oppfyller følgende to kriterier :

- $H_1(z)$ er på direkte form 2 (DF2)
- $H_2(z)$ er plassert nærmest utgangen

Svar :



Figur 2: *Kaskadestrukturen*

Oppgave 2 **(4+5+3+4 = 16 poeng)**

2a) Krysskorrelasjonssekvensen til to sekvenser $y(n)$ og $x(n)$ med endelig energi er gitt ved

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+m)x(n) \quad m \geq 0 \\ r_{yx}(m) &= r_{xy}(-m) \quad\quad\quad m < 0 \end{aligned}$$

Vis at krysskorrelasjonssekvensen til $h_3(n)$ og $h_4(n)$ i deloppgave 1c er gitt ved

$$r_{h_3h_4}(m) = \begin{cases} -18(\frac{1}{2})^m & m \geq 0 \\ \\ -18(\frac{3}{2})^m & m < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Svar :

$$\begin{aligned} r_{h_3h_4}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_3(n+m)h_4(n) \quad m \geq 0 \\ r_{h_3h_4}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} 4(\frac{1}{2})^{n+m}(-3(\frac{2}{3})^n) \quad m \geq 0 \\ r_{h_3h_4}(m) &= -12(\frac{1}{2})^m \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n \quad m \geq 0 \\ r_{h_3h_4}(m) &= -12(\frac{1}{2})^m \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -18(\frac{1}{2})^m \end{aligned}$$

Tilsvarende utregning for $r_{h_4h_3}(m)$ gir :

$$\begin{aligned} r_{h_4h_3}(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} -3(\frac{2}{3})^{n+m}(4(\frac{1}{2})^n) \quad m \geq 0 \\ r_{h_4h_3}(m) &= -12(\frac{2}{3})^m \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -18(\frac{2}{3})^m \end{aligned}$$

Da $r_{h_3h_4}(m) = r_{h_4h_3}(-m)$ for $m < 0$ er ligning 4 bevist!

2b) Vis at filteret $H(z)$ gitt i oppgave 1 har autokorrelasjonssekvensen :

$$r_{hh}(m) = \begin{cases} \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^m - \mathbf{\frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m} & m \geq 0 \\ r_{hh}(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{6}$$

Svar :

Setter en $h(n) = h_3(n) + h_4(n)$ inn i

$$\begin{aligned} r_{hh}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n+m)h(n) \qquad \text{får en} \\ r_{hh}(m) &= r_{h_3h_3}(m) + r_{h_3h_4}(m) + r_{h_4h_3}(m) + r_{h_4h_4}(m) \end{aligned}$$

De to autokorrelasjonssekvensene for hhv $h_3(n)$ og $h_4(n)$ blir

$$\begin{aligned} r_{h_3h_3}(m) &= 16\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n+m}(\frac{1}{2})^n \qquad m \geq 0 \\ r_{h_3h_3}(m) &= 16(\frac{1}{2})^m\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n \qquad m \geq 0 \\ r_{h_3h_3}(m) &= 16(\frac{1}{2})^m\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{64}{3}(\frac{1}{2})^m \qquad m \geq 0 \\ r_{h_4h_4}(m) &= 9\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n+m}(\frac{2}{3})^n \qquad m \geq 0 \\ r_{h_4h_4}(m) &= 9(\frac{2}{3})^m\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^n \qquad m \geq 0 \\ r_{h_4h_4}(m) &= 9(\frac{2}{3})^m\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{81}{5}(\frac{2}{3})^m \qquad m \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Fra deloppgave 2a henter vi uttrykkene for krysskorrelasjonene og samler to og to ledd med samme eksponent

$$\begin{aligned} (\frac{64}{3} - 18)(\frac{1}{2})^m &= \frac{(64 - 3 * 18)}{3}(\frac{1}{2})^m = \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^m \\ (\frac{81}{5} - 18)(\frac{2}{3})^m &= \frac{(81 - 5 * 18)}{5}(\frac{2}{3})^m = -\frac{9}{5}(\frac{2}{3})^m \end{aligned}$$

Som tilsvarer de to leddene i lign 5.

2c) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes parallellstrukturen i deloppgave 1c.

Hvilke parametriske prosess-typer tilsvarer henholdsvis utgangssignalet og de interne signalene i strukturen? Begrunn svaret!

Svar :
Vi har to interne signaler i parallellstrukturen, nemlig utgangene av de to summasjonsjonsnodene. Forsinkelser eller grenforsterkninger (hhv 4 og -3) endrer ikke de statistiske egenskapene til signaler.
Den øverste grenen tilsvarer responsen ut fra filteret $h_1(n)$ (bortsett fra grenforsterkning). Filteret er av første ordens allpoltype (en pol), noe som tilsier at en her har en AR[1]-prosess. Det samme resonnementet gjelder for den nederste grenen og filteret $h_2(n)$, altså har en også der en AR[1]-prosess.
Utgangen av filteret er selvsagt gitt av hele filterresponsen $h(n)$. Fra lign 2 ser en at filteret har et nullpunkt og to poler, ergo er utgangssignalet en ARMA[1,2]-prosess.

2d) Hvit støy $w(n)$ med effekt $\sigma_w^2 = 1$ påtrykkes filteret $H(z)$. Finn, ved hjelp av lineær prediksjon (dvs. Yule-Walker eller Normal ligningene) filterkoeffisienten a_1 for den beste AR[1]-modellen til filterets utgangssignal $y(n)$.

Vis at prediksjonsfeileffekten σ_f^2 alltid oppfyller : $\sigma_f^2 \leq \sigma_y^2$
hvor $\sigma_y^2 = \gamma_{yy}(0)$ er signaleffekten til inngangssignalet.

Svar :

For hhv tidslag $m = 1$ og prediksjonsfeileffekten ($m = 0$) får en :

$$\begin{aligned} a_1\gamma_{yy}(0) &= -\gamma_{yy}(1) & m = 1 \\ \sigma_f^2 &= \gamma_{yy}(0) + a_1\gamma_{yy}(1) & m = 0 \end{aligned}$$

Vi har at $\gamma_{yy}(m) = \sigma_w^2 r_{hh}(m)$, dvs med $\sigma_w^2 = 1$ får vi

$$\begin{aligned} \gamma_{yy}(0) &= \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^0 - \frac{9}{5}(\frac{2}{3})^0 = \frac{10}{3} - \frac{9}{5} = \frac{10*5 - 9*3}{3*5} = \frac{23}{15} \\ \gamma_{yy}(1) &= \frac{10}{3}(\frac{1}{2})^1 - \frac{9}{5}(\frac{2}{3})^1 = \frac{5}{3} - \frac{6}{5} = \frac{25-18}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Dvs $a_1 = -\gamma_{yy}(1)/\gamma_{yy}(0) = -7/23 \approx -0.3$

Videre kan vi omskrive prediksjonsfeileffekten : $\sigma_f^2 = \gamma_{yy}(0)(1 + a_1\gamma_{yy}(1)/\gamma_{yy}(0))$. Brøken i siste ledd tilsvarer filterkoeffisienten, ergo har vi $\sigma_f^2 = \gamma_{yy}(0)(1 - a_1^2)$. For alle stabile filtre (dvs. $|a_1| < 1$) vil $\sigma_f^2 \leq \gamma_{yy}(0)$. Forholdet $\gamma_{yy}(0)/\sigma_f^2 = 1/(1 - a_1^2)$ kalles derfor prediksjonsgevinsten.

Oppgave 3 (4+4+5+4 = 17 poeng)

Det diskrete filteret i oppgave 1 skal implementeres ved hjelp av **parallellstrukturen** i figur 1.
Filteret skal videre realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1,1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen, $e(n)$, kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med totaleffekt σ_z^2.

3a) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av parallellestrukturen uttrykt ved σ_e^2.

Svar :

I parallellstrukturen har vi fire multiplikasjoner/avrundinger og dermed fire hvitstøykilder. Kildene ved hhv 1/2 og 2/3 kan begge flyttes til foran sine respektive summasjonsnoder. De tilsvarende enhetspulsresponsene er derfor $h_1(n)$ og $h_2(n)$. De to kildene som oppstår pga multiplikasjon med grenforsterkningene 4 og -3 er begge i forovergrener og kan flyttes til utgangen (etter siste summasjonsnode). Den tilsvarende enhetspulsresponsen er dermed en enhetspulssekvens $\delta(n)$ som har en autokorrelasjon også lik en enhetspulssekvens, dvs lik 1 for tidslag 0 .
Vi får da : $\sigma_z^2 = (r_{h_3h_3}(0) + r_{h_4h_4}(0) + 2*1)\sigma_e^2 =$
$(64/3 + 81/5 + 2)\sigma_e^2 = ((64*5 + 81*3 + 30)/15)\sigma_e^2 = (593/15)\sigma_e^2 \approx 39.5\sigma_e^2$

3b) Finn resulterende støyeffekt, σ_z^2, på utgangen av parallell-strukturen når en flytter de to grenforsterkningene *foran* sine respektive tilbakekoblinger.

Svar :

Kildene ved hhv 1/2 og 2/3 kan også nå flyttes til foran sine respektive summasjonsnoder men ser nå hhv. $h_3(n)/4$ og $-h_4(n)/3$ pga flyttingen. De to støykildene tilsvarende grenforsterkningene vil også se de samme enhetspulsresponsene, dvs $h_3(n)/4$ og $-h_4(n)/3$. Ergo har vi nå fått to støykilder for hvert nedskalerte delfilter.
Vi får da : $\sigma_z^2 = 2*(r_{h_3h_3}(0)/16 + r_{h_4h_4}(0)/9)\sigma_e^2 = 2*(64/(3*16) + 81/(5*9))\sigma_e^2 =$
$2*((4*5 + 9*3)/15)\sigma_e^2 = 2*(47/15)\sigma_e^2 \approx 6.2\sigma_e^2$
Altså ser det klart lurest ut å sette grenforsterkningene foran tilbakekoblingene.

3c) Inngangssignalet $x(n)$ til filteret har full utstyring, dvs. $x_{max} = \max_n |x(n)| = 1$.

Vis at en for å unngå overstyring i parallellstrukturen brukt i deloppgave 3a må skalere på inngangen **med** $1/3$ **(nedskalering med** 3**).**

Vis videre at man for den andre parallellstrukturen (deloppgave 3b) må skalere på inngangen **med** $S = 1/9$ **(dvs. nedskalering med** 9**).**

Svar :

En har to interne summasjonsnoder og en ved utgangen. Strukturen i deloppgave 3a er lik figur 1. For de to interne nodene er enhetspulsresponsene fra inngang til nodene gitt ved hhv. $h_3(n)/4$ og $-h_4(n)/3$. Utgangsnoden tilsvarer selvsagt en enhetspulsrespons lik $h(n)$. Dette gir for de interne nodene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}|h_3(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \\ \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}|h_4(n)| &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \end{aligned} \tag{8}$$

For utgangsnoden ser en at $h(n) = h_3(n) + h_4(n) \leq 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1$ mens $h(0) = h_3(0) + h_4(0) = 1$. Dette kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(h_3(n) + h_4(n)) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty}(h_3(n) + h_4(n)) \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| = 2 - 4 * 2 + 3 * 3 = 2 - 8 + 9 = 3$$

En har at 3 er størst, ergo må en velge skalering med 1/3.

I den andre strukturen kommer grenforsterkninger før nodene, dvs. en må bruke $h_3(n)$ og $h_4(n)$ for de interne nodene. Fra utregningen over har en at dette tilsvarer hhv. verdiene 8 og 9. For utgangsnoden får en selvsagt samme verdi som for den andre strukturen, dvs. 3. Da 9 er den største verdien er skaleringen gitt ved 1/9.

3d) Signal-støy forholdet på utgangen er definert ved $SNR = \sigma_y^2/\sigma_z^2$, hvor σ_y^2 og σ_z^2 er henholdsvis signaleffekt og total støyeffekt på utgangen av det nedskalerte filteret.

Beregn SNR på utgangen av to nedskalerte parallellstrukturene.

Svar :

Vi kaller signaleffekten på utgangen uten nedskalering for σ_{y1}^2. Etter nedskalering får en da hhv signaleffekter på utgangen gitt ved hhv. $\sigma_y^2 = (1/3)^2\sigma_{y1}^2$ og $\sigma_y^2 = (1/9)^2\sigma_{y1}^2$. De tilsvarende støyeffektene er gitt av deloppgavene 3a og 3b som $\sigma_z^2 \approx 40\sigma_w^2$ og $\sigma_z^2 \approx 6\sigma_w^2$. Ergo får en for de to strukturene :

$$
\begin{aligned}
SNR_a &\approx (\frac{1}{3})^2\sigma_{y1}^2/(40\sigma_w^2) = \frac{1}{360}\frac{\sigma_{y1}^2}{\sigma_w^2} \\
SNR_b &\approx (\frac{1}{9})^2\sigma_{y1}^2/(6\sigma_w^2) \approx \frac{1}{486}\frac{\sigma_{y1}^2}{\sigma_w^2}
\end{aligned}
$$

En ser altså at selv om en må nedskalere mest i strukturen fra deloppgave 3b så gir

den likevel størst SNR på utgangen.

Oppgave 4 (3+4+4+4 = 15 poeng)

4a) An analogue signal, $x_a(t)$, is sampled by a distance $T = 1/F_s$, i.e. $x(n) = x_a(nT)$

Which condition must the signal $x_a(t)$ fulfil if it shall be possible to reconstruct it from $x(n)$?

Answer :
The analogue signal must be bandlimited to $-F_s/2 < F < F_s/2$ (Nyquist theorem)

Given that the sequence $x(n)$ has length L. An N-point DFT (Discrete Fourier Transform) is performed on the sequence.

For which frequency values are the DFT calculated?
Discuss the importance of the size of N versus L.

Answer :
N frequency values uniformly spaced over a period, $0 \geq f < 1$.
That is $f_k = k/N \; k = 0, \ldots, N-1$.
One must choose $N \geq L$ in order to reconstruct $x(n)$ from $X(k)$. If $N > L$ so called zero-padding is used.

4b) How can DFT be used to perform linear convolution of two signals $x_1(n)$ og $x_2(n)$ of lenghts L_1 and L_2 ?

Answer :
The result $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ has length $L = L_1 + L_2 - 1$. Thus one has to use $N \geq L$ samples of $X(f)$ in order to calculate $x(n)$. Given that $X(f) = X_1(f)X_2(f)$ one therefore has to use a corresponding number of samples also of $X_1(f)$ and $X_2(f)$. This leads to the following procedure :

- $x_1(n) \rightarrow X_1(k) \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, N-1$
- $x_2(n) \rightarrow X_2(k) \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, N-1$
- $X(k) = X_1(k)X_2(k) \quad k = 0, .., N-1$
- $X(k) \rightarrow x(n) \quad n = 0, .., N-1 \quad (\text{where } x(n) = 0 \quad \text{for} \quad n = L, .., N-1)$

4c) What is the basic idea of the "overlap-add"method for FIR filtering of long sequences?

Why should the DFT technique in subtask 4b be used as a part of this method?

Answer :
The (infinitely) log input sequence is split into non-overlapping segments of length L. Each segment is filtered by the FIR-filter $h(n)$ of length M. The result is a segment of length $N = L + M - 1$. These output segments must be added in time as subsequent segments overlap with M samples.

L is chosen such that $N = 2^R$. Thus each filtering operation can be performed as described in subtask 4b. However, of course FFT is applied instead of direct DFT. This leads to substantial fewer operations (m+a) than by implementing the filtering in the time domain.

4d) Explain shortly the principle of the radix-2 N-point FFT (Fast Fourier Transform).

Answer :
The main idea is to utilize the fact that a $N = 2^R$ point DFT can be implemented by 2 $N/2$ point DFTs plus N multiplications. It can easily be shown that the latter can be implemented by substantial fewer m+a. Comparing we get $N^2 \geq 2*(N/2)^2) + N = N^2/2 + N$ for all $N > 2$!
The algorithm successively splits DFTs in accordance with the above idea. One ends up with a structure consisting of $(N/2) * log_2(N)$ 2-point DFTs (so called butterflies), where one butterfly takes 2 m+a. The complexity relation thus becomes $N^2/(N * log_2(N)) = N/log_2(N)$. This relation becomes large for typical values. $N = 64, 128, 256, 512, 1024, ...$

Oppgave 5 **(3+4+4+4 = 15 poeng)**

5a) Et analogt signal, $x_a(t)$, punktprøves med en avstand $T = 1/F_s$, dvs. $x(n) = x_a(nT)$

Hvilken betingelse må signalet $x_a(t)$ oppfylle hvis det skal kunne gjenvinnes fra $x(n)$?

Svar :
Det analoge signalet må være båndbegrenset til $-F_s/2 < F < F_s/2$ (Nyquist teoremet)

Gitt at sekvensen $x(n)$ har lengde L. En utfører en N-punkts DFT (Diskret Fourier Transform) på sekvensen.

Hvilke frekvensverdier blir beregnet?
Diskuter betydningen av størrelsen på N versus L.

Svar :
En beregner N frekvensverdier med lik avstand over en periode dvs $0 \geq f < 1$.
Dvs. $f_k = k/N \; k = 0, \ldots, N-1$.
En må velge $N \geq L$ for å kunne gjenvinne $x(n)$ fra $X(k)$. Hvis $N > L$ brukes såkalt zero-padding.

5b) Hvordan kan man ved bruk av DFT beregne lineær foldning til to signaler $x_1(n)$ og $x_2(n)$ av lengde henholdsvis L_1 og L_2?

Svar :
Resultatet $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ har lengde $L = L_1 + L_2 - 1$. Altså må en beregne $N \geq L$ punktprøver av $X(f)$ for å kunne beregne $x(n)$. Da $X(f) = X_1(f)X_2(f)$ må en derfor også beregne tilsvarende antall punktprøver av $X_1(f)$ og $X_2(f)$.
Altså blir prosedyren som følger :

- $x_1(n) \rightarrow X_1(k) \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, N-1$
- $x_2(n) \rightarrow X_2(k) \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, N-1$
- $X(k) = X_1(k)X_2(k) \quad k = 0, .., N-1$
- $X(k) \rightarrow x(n) \quad n = 0, .., N-1 \quad (\text{hvor } x(n) = 0 \quad \text{for} \quad n = L, .., N-1)$

5c) Hva menes med "overlap-add"metoden for FIR-filtrering av lange sekvenser?

Hvorfor bør en bruke teknikken i deloppgave 4b i denne metoden?

Svar :
Den lange inngangssekvensen deles opp i ikke-overlappende segmenter av lengde L. Hvert segment filtreres av FIR-filteret $h(n)$ av lengde M. Resultatet blir et segment av lengde $N = L + M - 1$. Utgangs-segmentene adderes i tid da påfølgende utgangs-segment overlapper med M punktprøver.

L velges slik at $N = 2^R$. Da kan hver filtrering utføres som angitt i 4b men hvor en bruker FFT i stedet for DFT. Dette vil resultere i langt færre m+a enn å gjøre filtreringen i tidsplanet.

5d) Forklar kort prinsippet for en radix-2 N-punkts FFT (Fast Fourier Transform).

Svar :
Hovedideen er at man kan implementere en $N = 2^R$ punkts DFT vha. 2 $N/2$ punkts DFTer samt N multiplikasjoner. En kan videre lett vise at sistnevnte alternativ krever færre operasjoner (m+a). En sammenligning gir $N^2 \geq 2 * (N/2)^2) + N = N^2/2 + N$ for alle $N > 2$!
En splitter suksessivt opp DFTer i henhold til ovenstående. En ender opp med en struktur bestående av $(N/2) * log_2(N)$ 2-punkts DFTer (såkalte butterflies), som hver enkelt krever 2 m+a. Altså blir forholdet $N^2/(N * log_2(N)) = N/log_2(N)$. Forholdet blir stort for typiske verdier, dvs. $N = 64, 128, 256, 512, 1024, ...$

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned}
y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\
Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\
Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \ \text{ for } \ k = 0, \ldots, N-1 \ \text{ where we write } \ Y(k) = Y(f_k)
\end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_n h(n) z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf} \\
\text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\
\text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1
\end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{9}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

$$\text{Autocorrelation : } \quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

$$\text{Energy spectrum : } \quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$$

$$\text{Parsevals theorem: } \quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $$\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$$

Normal equations: $$\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$$