NTNU
Det skapende universitet

Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Eksamensoppgave i TTT4120 Digital signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen: Torbjørn Svendsen
Tlf.: 930 80 477

Eksamensdato: Onsdag 4. desember 2013

Eksamenstid (fra - til): 09.00 - 13.00

Hjelpemiddelkode/tillatte hjelpemidler: D – Ingen trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Eksamen består av 4 oppgaver der
  - oppgave 1 omhandler strukturer og implementasjon av digitale filtre
  - oppgave 2 omhandler lineære, tidsinvariante systemer
  - oppgave 3 omhandler design av digitale filtre
  - oppgave 4 omhandler stokastiske prosesser
- Vekting av deloppgavene er angitt i parentes ved starten av hver oppgave .
- Alle oppgavene skal besvares
- Sensurfrist er 3 uker etter eksamensdato.

Målform/språk: Norsk - bokmål

Totalt antall sider: 9

Herav, antall vedleggsider: 3

Kontrollert av:

Dato Signatur

Oppgave 1 (30 poeng = 4+4+5+7+5+5 (34%))

Vi har et kausalt filter som er beskrevet av følgende differanselikning:

$$y(n) = -1.8y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) - x(n-1)$$

1a) Vis at filterets overføringsfunksjon kan utrykkes som

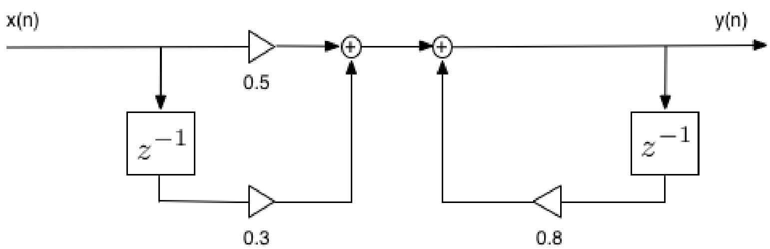
$$H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

.

1b) Finn filterets poler og nullpunkt.
Skissér plasseringen av poler og nullpunkt i z-planet og bestem ut fra dette hva slags type filter dette er (LP, HP, BP osv.).

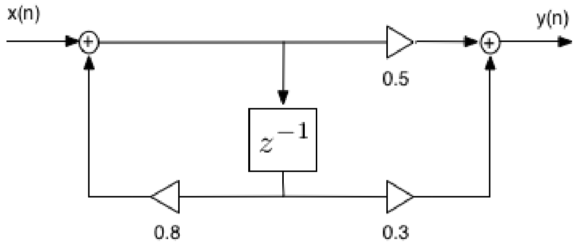
1c) Tegn filteret når det realiseres som henholdsvis direkteform I (DF I) og en direkteform II (DF II) strukturer.
Hva kan du si generelt om egenskapene til direkteform-strukturene?

1d) Finn impulsresponsen til filteret i Figur 1.
Anta at filteret påtrykkes et hvitt signal $x(n)$ med null middelverdi og effekt σ_x^2=1. Hva blir effekten, σ_y^2 til det filtrerte signalet $y(n)$?



Figur 1: Digitalt filter

1e) Filteret i Figur 1 skal realiseres med binær fast-komma representasjon med B bit. Avrunding skjer etter hver multiplikasjon. Anta at avrundingsfeilen etter hver multiplikasjon kan modelleres som en hvit støykilde med null middelverdi og effekt σ_e^2. Finn effekten til avrundingsfeilen på utgangen av filteret uttrykt ved σ_e^2.



Figur 2: Ekvivalent digitalt filter

1f) Vis at filteret i Figur 2 er ekvivalent med filteret i Figur 1.
Dette filteret skal realiseres med samme multiplikatorer og binære representasjon som i forrige oppgave. Finn effekten til avrundingsfeilen på utgangen av fiteret i dette tilfellet. Kommentér.

Oppgave 2 (18 poeng = 4+8+6 (20%))

Et lineært, tidsinvariant system er spesifisert som

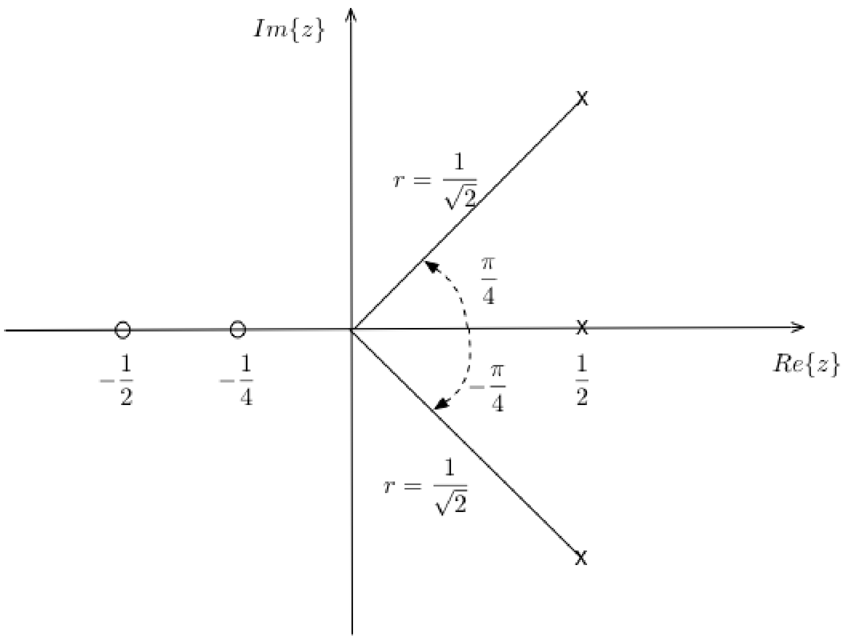
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

2a) Vis at systemet kan representeres i z-planet som

$$H(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - 2z^{-1}} - \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2b) Finn konvergensområde (ROC) og impulsrespons for systemet når det er kausalt, anti-kausalt og ikke-kausalt.
For hvilket tilfelle er systemet stabilt?

2c) Et lineært, tidsinvariant system har poler og nullpunkt som vist i Figur 3.
Finn z-transformen til systemet.
Hva er forutsetningen for at systemet skal være stabilt?



Figur 3: Plassering av poler (x) og nullpunkt (○)

Oppgave 3 (19 poeng = 5+8+6 (21%))

3a) Vi kan designe et IIR-filter $H(z)$ ved å ta utgangspunkt i et kjent analogt filter $H_a(s)$ samt den bilineære transformen

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Ta utgangspunkt i $s = j\Omega$ og $z = e^{j\omega}$ og vis at transformasjonen mellom analog og digital frekvens er gitt ved

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$$

3b) Vi tar utgangspunkt i dette analoge, kausale filteret

$$H_a(s) = 2\frac{s + \Omega_c}{s + 4\Omega_c}$$

Filteret skal transformeres til et tidsdiskret filter ved hjelp av den bilineære transformen, og vi spesifiserer at Ω_c skal transformeres til ω_c som er gitt ved $\tan(\frac{\omega_c}{2}) = 1/2$.

Finn sammenhengen mellom T og Ω_c, og vis at resulterende transferfunksjon er gitt ved

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

3c) Vis at enhetspulsresponsen (impulsresponsen) til $H(z)$ er gitt ved

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n & n > 0 \end{cases}$$

Oppgave 4 (22 poeng = 3+3+7+9 (25%))

Et filter er gitt ved sin enhetspulsrespons (impulsrespons)

$$h(n) = \begin{cases} 3 & n = 0 \\ 2 & n = 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

En stokastisk prosess $x(n)$ genereres ved å sende hvit støy $e(n)$ med null middelverdi og effekt $\sigma_e^2 = 1$ gjennom filteret.

4a) Hvilken type prosess er $x(n)$?
Hvilken orden har prosessen? Begrunn svarene.

4b) Sett opp uttrykk for autokorrelasjonsfunksjonen $\gamma_{ee}(l)$ og effektspektraltettheten $\Gamma_{ee}(\omega)$ til hvitstøyprosessen $e(n)$.

4c) Vis at autokorrelasjonsfunksjonen til prosessen $x(n)$ er gitt ved

$$\gamma_{xx}(l) = \begin{cases} 13 & l = 0 \\ 6 & l = \pm 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn effektspektraltettheten $\Gamma_{xx}(\omega)$ til prosessen $x(n)$.

4d) Sett opp uttrykk i tidsplanet for en generell førsteordens lineær prediktor.
Sett også opp det tilsvarende uttrykket for prediksjonsfeileffekten når prediktoren anvendes på en stokastisk prosess.

Utled et generelt uttrykk for den optimale prediksjonskoeffisienten ved å minimalisere prediksjonsfeileffekten.

Finn den optimale prediksjonskoeffisienten og den tilhørende prediksjonsfeileffekten for prosessen $x(n)$ som har autokorrelasjonsfunksjon som gitt i oppgave 4c.

Vedlegg: Noen grunnleggende likninger og formler.

A. Sekvenser:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

$$|\alpha| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{og} \quad -\sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

B. Lineær foldning:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow$$

$$Y(f_k) = H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \quad \text{for} \quad k = 0, \ldots, N-1 \quad \text{der vi skriver} \quad Y(k) = Y(f_k)$$

C. Transformer:

$$\text{Z: } H(z) = \sum_n h(n)z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\ e^{-j2\pi nf}$$

$$\text{DFT: } H(k) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\ e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$\text{IDFT: } h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\ e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1$$

D. Punktprøvingsteoremet (Nyquist):

Gitt et analogt signal $x_a(t)$ med båndbredde $\pm B$ som er punktprøvd med $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$x_a(t)$ kan gjenvinnes fra c $x(n)$ $\quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B$

E. Autokorrelasjon, energispektrum og Parsevals teorem:

Gitt en sekvens $h(n)$ med endelig energi E_h :

Autokorrelasjon: $\quad r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$

Energispektrum: $\quad S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$

Parsevals teeorem: $\quad E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$

F. Multirateformler:

Desimering, der $\quad T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Oppsampling, der $\quad T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolasjon, der $\; T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autokorrelasjon, effektspektrum og Wiener-Khintchins teorem:

Gitt en stasjonær, ergodisk sekvens $x(n)$ med uendelig energi:

Autokorrelasjon: $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]\ m = -\infty, ..., \infty$

Effektspektrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin: $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_{m} \gamma_{xx}(m)\ e^{-j2\pi mf}$

H. Yule-Walker og Normallikningene, der $a_0 = 1$:

Yule-Walker likningene: $$\sum_{k=0}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2\ \delta(m) \quad m = 0, ..., p$$

Normallikningene: $$\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., p$$