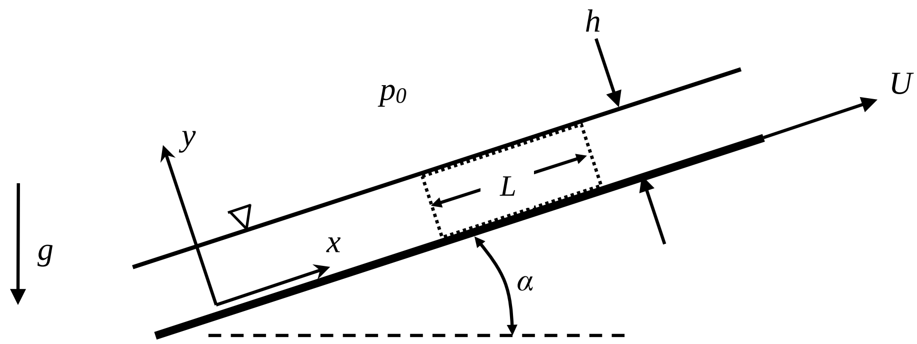
Oppgave 1



Et kontinuerlig belte trekkes med konstant hastighet *U* i en vinkel *α* med horisontalplanet. Beltet trekker med seg et væskesjikt med konstant tykkelse *h*, og det har etablert seg en stasjonær og laminær strømning på beltets overside. Væsken har konstant tetthet *ρ* og kinematisk viskositet *ν*. Hastigheten er overalt parallell med *x*-aksen i det viste aksekorset. Forholdene forutsettes å være uavhengige av *z*-retningen som er loddrett på figurplanet. Tyngdens akselerasjon er *g*, atmosfæretrykket er p_0 og friksjonskrefter mot atmosfæren ved sjiktets ytterkant neglisjeres.

a) Finn trykket i væskesjiktet på båndet.

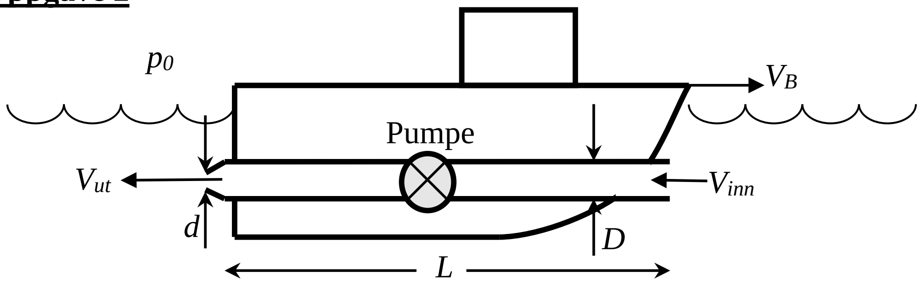
b) Vis at væskehastigheten på båndet kan skrives som

$$u(y) = U + \frac{g\sin\alpha}{\nu}\left[\frac{1}{2}y^2 - hy\right]$$

c) Finn et uttrykk for volumstrømmen *Q* per breddeenhet i *z*-retningen av beltet. Finn hastigheten *U* slik at den totale volumstrømmen i *x*-retning blir null, og lag en skisse av hastighetsprofilet for dette tilfellet.

d) Betrakt et kontrollvolum plassert oppå beltet som vist i figuren som et stiplet rektangel. Kontrollvolumet har en lengde *L* i *x*-retningen, en høyde *h* i *y*-retningen, og en bredde *B* inn i papirplanet (*z*-retningen). Finn alle kreftene som virker på væsken inne i kontrollvolumet i både *x*- og *y*-retning, samt summen av disse.

Oppgave 2



En båt med masse m skal utstyres med et vannjet fremdriftssystem som skissert i figuren over. Vannjeten består av et hovedrør som går horisontalt gjennom hele skroget, og som har lengde L og diameter D. Ved utløpet bak båten har hovedrøret en innsnevring til diameter d. En pumpe montert i hovedrøret yter en volumstrøm Q. Vannets tetthet ρ regnes konstant. Atmosfæretrykket er p_0 og tyngdens akselerasjon er g.

a) Når båten er i bevegelse får vi en motstandskraft F_D på skroget fra vannstrømningen rundt båten. For å finne en verdi på $C_D{\cdot}A$ gjøres følgende eksperiment uten vannjeten koblet inn: ved tiden $t = 0$ gis båten en hastighet V_0. Etter en tid t_0 er hastigheten V_0 halvert. Finn $C_D{\cdot}A$ uttrykt ved ρ, V_0, t_0 og m.

b) Pumpen startes, og vi får en konstant volumstrøm Q gjennom hovedrøret. Veggruheten i hovedrøret er gitt som ε/D og vannets viskositet er ν. Gi en skisse av et dataprogram (korrekt syntaks er ikke viktig) som gir alle nødvendige konstanter og

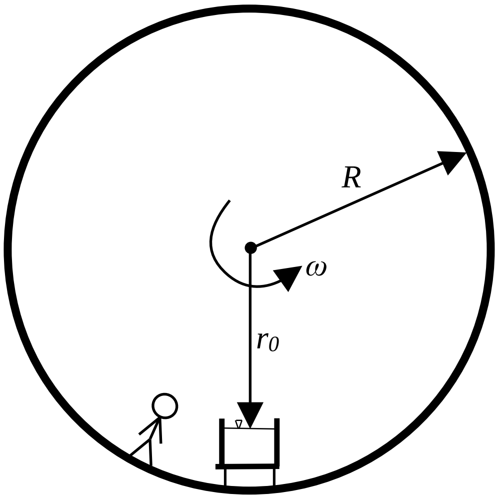
- ➢ beregner Reynoldstallet i strømningen i hovedrøret,
- ➢ avgjør om strømningen er laminær eller turbulent,
- ➢ og finner friksjonsfaktoren f.

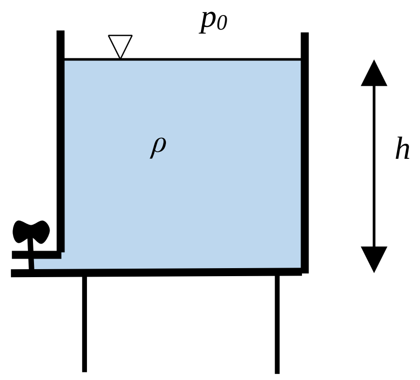
Bruk følgende data i resten av oppgaven:
Q = 20 liter/s, ρ = 1000 kg/m^3, g = 10 m/s^2, L = 5 m, D = 5 cm, d = 2.5 cm, $C_D{\cdot}A$ = 0.01, f = 0.01, $K_{\text{innløp}}$ = 0.5, $K_{\text{kontraksjon}}$ = 0.4, $K_{\text{utløp}}$ = 1.
Båten går med konstant hastighet V_B.

c) Finn tapshøyden h_L og pumpehøyden h_p for strømningen fra innløp til utløp. Finn også effekten til pumpen i Watt. Gi svarene først med symboler. Sett inn tallverdier etterpå.

d) Horisontale trykkrefter på båtskroget neglisjeres. Finn hastigheten V_B til båten i m/s. Gi svaret først med symboler. Sett inn tallverdier etterpå.

Oppgave 3





En romstasjon er formet som en sylinder med radius R = 10 m som vist i figuren til venstre. Stasjonen roterer med konstant vinkelhastighet ω = 1 s^{-1} for å lage en kunstig gravitasjon. En tank med vann med tetthet ρ = 1000 kg/m^3 står på et bord som vist i figuren til høyre. Tanken har kvadratisk formet bunn med areal A = 1 m^2. Vannoverflaten er egentlig svakt krummet, men tankens utstrekning er liten sammenliknet med avstanden fra rotasjonssenteret til vannoverflaten r_0 = 8 m, så vi regner dybden i tanken som konstant h = 1 m, og sideveggene i tanken orientert i radiell retning. Inne i stasjonen er lufttrykket konstant lik p_0. Tyngdens akselerasjon ved jordoverflaten er g = 10 m/s^2. Romstasjonen er så langt vekk at gravitasjonskrefter fra jorden kan neglisjeres.

Nederst i vanntanken er det montert en kran som foreløpig holdes stengt.

a) Vis at trykket i vanntanken kan skrives som

$$p(r) = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(r^2 - r_0^2\right)$$

der r er radiell avstand fra rotasjonssenteret.

b) Vanntanken står på en vekt kalibrert slik at den viser 0 kg i romstasjonen når tanken er tom. Finn utslaget på vekten i kg når vanndybden i tanken er h.

c) Finn netto trykkraft i Newton på en sidevegg i vanntanken.

d) Kranen åpnes. Finn utstrømningshastigheten i m/s når vi regner strømningen som friksjonsfri og stasjonær (h regnes konstant). Sammenlikn svaret ditt med utstrømningshastigheten hvis vanntanken sto på jordoverflaten.

LØSNING EKSAMEN I FAG TEP4100 JUNI 2016

OPPGAVE 1 a)

- Inkompressibelt fluid $\Rightarrow$ $\rho = \text{konst.}$
- Viskøst fluid $\Rightarrow$ $\mu \neq 0$
- Stasjonær strømning $\Rightarrow$ $\partial / \partial t = 0$ I
- Kun *x*-hastighet $\Rightarrow$ $\vec{V} = (u, 0)$ II
- Laminær strømning

Bestemmer trykket $p(x,y)$.

Kontinuitetslikning: $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

men $v = 0$, slik at $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = u(y)}$ III

Navier-Stokes: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$ Dekomponerer:

x-komponent: $\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} - g \sin\alpha + \nu \left(\cancel{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

I III II III

y-komponent: $\cancel{\dfrac{\partial v}{\partial t}} + u \cancel{\dfrac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v} \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} - g \cos\alpha + \nu \left(\cancel{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \right)$

I II II II II

Navier-Stokes reduseres dermed til:

x-komponent: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \sin\alpha + \rho \nu \dfrac{d^2 u}{dy^2}$

y-komponent: $\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha$

Fra *y*-komponenten: $p = -\rho g y \cos\alpha + F(x)$

Grensebetingelse: $p(x, y = h) = p_0$ men dette er kun mulig hvis vi ikke har noen *x*-avhengighet, dvs. $F(x) = p_0$. Trykket varierer dermed kun med *y*:

$$p(y = h) = p_0 = -\rho g \cos\alpha h + C \quad \Rightarrow \quad C = p_0 + \rho g \cos\alpha h$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{p(y) = p_0 + \rho g \cos\alpha (h - y)}}$$

dvs. statisk trykkvariasjon i *y*-retning.

b)

Fra x-komponenten av Navier-Stokes: $\qquad \dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{g\sin\alpha}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dy} = \dfrac{g\sin\alpha}{\nu} y + C_1$

Det er oppgitt at friksjonskrefter mot atmosfæren neglisjeres, altså må skjærspenningen τ i avstanden $y = h$ fra beltet være null:

$$\tau_{\text{OVERFLATE}} = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = \mu\left(\frac{g\sin\alpha h}{\nu} + C_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = -\frac{g\sin\alpha h}{\nu}}$$

Setter inn for C_1:

$$\frac{du}{dy} = \frac{g\sin\alpha}{\nu}(y-h) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{g\sin\alpha}{\nu}(½ y^2 - hy) + C_2$$

Grensebetingelse: Mot bunnen må væskehastigheten bli den samme som for beltet:
$u(y=0) = U_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = U_0$

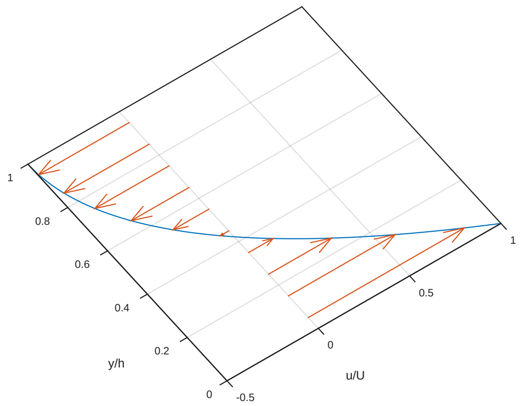
Hastighetsfordelingen blir: $\qquad \underline{\underline{u = U_0 + \dfrac{g\sin\alpha}{\nu}(\tfrac{1}{2}y^2 - hy)}}$

c)
Volumstrømmen finnes ved å integrere hastigheten over tverrsnittet av strømningen:

$$\frac{Q}{\text{bredde}} = \int_0^h u\,dy = U_0 h + \frac{g\sin\alpha}{\nu}\left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2}\right) = \underline{\underline{U_0 h - \frac{g\sin\alpha h^3}{3\nu}}}$$

$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \dfrac{g\sin\alpha}{3\nu}h^2 \quad$ Innsatt i uttrykket for $u(y)$:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 3\frac{y}{h} + 1$$



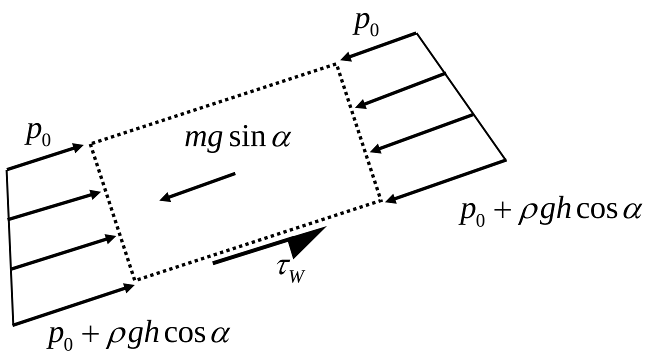
d)
Høyresiden i kraftloven blir null i denne oppgaven, fordi vi har ikke akselerasjon. (Enkelt å vise dette, men ikke nødvendig.) Dermed blir kraftloven her $\sum \vec{F} = 0$.

Krefter som virker i *x*-retningen er tyngde-, trykk- og friksjonskraft.

Vi trenger skjærspenningen nede ved beltet, $y = 0$:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{g \sin \alpha}{\nu} (y-h) \right], \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{Dermed:} \quad \tau_W = \tau\big|_{y=0} = \mu \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}(-h) = \underline{-\rho g h \sin \alpha}$$

Tyngdekraft: $mg \sin \alpha = \rho hLBg \sin \alpha$
virker i negativ *x*-retning.



Trykkraft: $(p_0 + \rho g \frac{h}{2} \cos \alpha) \cdot h \cdot B$
virker på begge sider og kanselleres.

Friksjonskraft:
$|\tau_W| \cdot Areal = \rho gh \sin \alpha \cdot LB$
virker i positiv *x*-retning (beltet drar med seg væsken).

Vi får kraftbalanse mellom tyngdekraft og friksjonskraft i x-retning: $\sum F_x = 0$

Krefter som virker på kontrollvolumet i *y*-retning er trykk- og tyngdekraft:

$$\sum F_y = -p_0 \cdot LB + (p_0 + \rho gh \cos \alpha) \cdot LB - mg \cos \alpha \quad \text{der} \quad m = \rho \cdot h \cdot LB$$

Innsatt for *m* gir dette: $\sum F_y = 0$

Oppgave 2

a)

Motstandskraft på båten i *x*-retning (horisontalt): $F_D = \tfrac{1}{2}\rho u^2 A$ der *u* er båtens hastighet i vannet og *A* er båtens areal sett i *x*-retningen. Bevegelsen til båten som bremses opp av friksjonen mot vannet er gitt av Newton's 2. lov:

$$m\frac{du}{dt} = -F_D = -C_D \cdot \tfrac{1}{2}\rho u^2 A \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\rho C_D A}{m}dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -\frac{C_D A\rho}{2m}t + C$$

Integrasjonskonstanten C bestemmes fra initialbetingelsen:

$$\mathrm{u}(t=0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{V_0}$$

Etter en tid $t = t_0$ er hastigheten V_0 halvert:

$$-\frac{2}{V_0} = -C_D A\frac{\rho}{2m}t_0 - \frac{1}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_D A = \frac{2m}{\rho V_0 t_0}}}$$

b)

```
clear all
close all
clc
Q  = 0.02;        % 20 liter/s
D  = 0.05;        % Diameter in meter
A  = pi*D^2/4;    % Pipe cross-sectional area
u  = Q/A;         % Average velocity
ny = 1e-6;        % kinematic viscosity for water
Re = u*D/ny       % Reynolds number
if Re>2300
    disp('Turbulent flow')
    epd = 0.0001;
    L   = 5;
    cole= @(f)1/sqrt(f)+2*log10(epd/3.7+2.51/(Re*sqrt(f)));
    f   = fzero(cole,[1e-9 1])  % Colebrook solution
else
    disp('Laminar flow')
    f = 64/Re                  % Laminar pipe flow solution
end
```

gir følgende utskrift:

```
Re=  5.0930e+05
Turbulent flow
f =    0.0144
```

c)
Volumstrømmen gjennom vannjeten er konstant:

$$Q = V_{inn}\frac{\pi}{4}D^2 = V_{ut}\frac{\pi}{4}d^2 \quad \Rightarrow \quad V_{ut} = V_{inn}\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Tallverdier:

$$Q = 20\,\text{liter/s} = 0.02\,\text{m}^3/\text{s} \quad \Rightarrow \quad V_{inn} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4\cdot 0.02\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi\cdot 0.05\,\text{m}} = 10.2\,\text{m/s}, \quad V_{ut} = V_{inn}\left(\frac{0.05}{0.025}\right)^2 = 40.7\,\text{m/s}$$

Energilikningen langs en strømlinje fra vannoverflaten foran båten gjennom vannjeten til vannoverflaten bak båten:

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_{overflate}^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_{overflate}^2}{2g} + h_L - h_p$$

$V_{overflate}$ blir det samme i begge ender av strømlinja både med absolutt og med relativt koordinatsystem, så tapshøyden h_L må balansere pumpehøyden h_p:

$$h_p = h_L = f\frac{V_{inn}^2}{2g}\frac{L}{D} + K_{innløp}\frac{V_{inn}^2}{2g} + \left(K_{kontraksjon} + K_{utløp}\right)\frac{V_{ut}^2}{2g}$$

$$= \frac{V_{inn}^2}{2g}\left[f\frac{L}{D} + K_{innløp} + \left(K_{kontraksjon} + K_{utløp}\right)\left(\frac{D}{d}\right)^4\right]$$

Tallverdi:

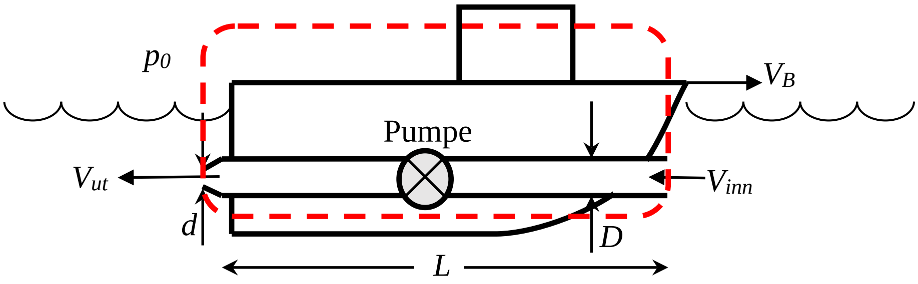
$$h_p = h_L = \frac{(10.2\,\text{m/s})^2}{2\cdot 10\,\text{m/s}^2}\left[0.01\frac{5\,\text{m}}{0.05\,\text{m}} + 0.5 + (0.4+1)\left(\frac{0.05}{0.025}\right)^4\right] = 124.0\,\text{m}$$

Pumpeeffekt:

$$P = \rho g h_p Q = 1000\,\text{kg/m}^3\cdot 10\,\text{m/s}^2\cdot 124\,\text{m}\cdot 0.02\,\text{m}^3/\text{s} = 24800\,\text{W}$$

dvs. litt over 33 hp.

d)
Legger et kontrollvolum rundt båten og bruker impulssatsen (positiv *x*-retning i fartsretningen):



$$\sum F_x = \iint_{inn} \rho \vec{v}_x (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{ut} \rho \vec{v}_x (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

Den eneste ytre kraften i *x*-retning som virker på vannet inne i kontrollvolumet er motkraften til motstandskraften F_D fra vannstrømningen rundt skroget. På høyre side i impulssatsen får vi kun bidrag fra inn- og ut-løpet. Velger et relativt koordinatsystem som beveger seg med båthastigheten V_B:

$$\sum F_x = -F_D = \rho\left(-V_{inn}\right)\left(-V_{inn}\right)A_{inn} + \rho\left(-V_{ut}\right)V_{ut}A_{ut} = \rho Q\left(V_{inn} - V_{ut}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_D = C_D A \tfrac{1}{2} \rho V_B^2 = \rho Q\left(V_{ut} - V_{inn}\right) \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{\frac{2Q\left(V_{ut} - V_{inn}\right)}{C_D A}}$$

Tallverdi:

$$V_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.02\,\mathrm{m^3/s}\left(40.7\,\mathrm{m/s} - 10.2\,\mathrm{m/s}\right)}{0.01}} = 11.06\,\mathrm{m/s} \quad \text{dvs 40 km/t.}$$

Hvis vi velger koordinatsystemet relativt til land, altså et absolutt system:

$$\sum F_x = \rho(V_B - V_{inn})(-V_{inn})A_{inn} + \rho(V_B - V_{ut})V_{ut}A_{ut} = \rho Q(V_{inn} - V_{ut})$$

som gir same svar.

Oppgave 3

a)

Fluidstatikkens grunnlikning: Trykkraft + tyngdekraft = 0. Her utvider vi denne til også å dekke roterende systemer:

$$0 = -\nabla p + \rho \vec{g}_{effektiv} \quad \text{der} \quad \vec{g}_{effektiv} = \omega^2 r \cdot \vec{e}_r$$

Trykket varierer kun i *r*-retningen:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad p = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C$$

Finner integrasjonskonstanten *C* fra grensebetingelsen:

$$p(r = r_0) = p_0 = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r_0^2$$

Innsatt for *C*:

$$p(r) = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(r^2 - r_0^2\right)$$

b)

Kraften på vekten som skyldes vannet blir lik netto trykkraft mot karets bunn:

$$p(r = r_0 + h) - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(\left(r_0 + h\right)^2 - r_0^2\right)$$

$$F = \left(p(r = r_0 + h) - p_0\right)A = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(\left(r_0 + h\right)^2 - r_0^2\right)A$$

Vekten viser massen *m* fra tyngdekraften *mg* på jordoverflaten:

$$m = \frac{\tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(\left(r_0 + h\right)^2 - r_0^2\right)A}{g}$$

Tallverdi:

$$m = \frac{\tfrac{1}{2}1000\,\mathrm{kg/m^3}(1\mathrm{s}^{-1})^2\left((9\,\mathrm{m})^2 - (8\,\mathrm{m})^2\right)1\mathrm{m}^2}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 850\,\mathrm{kg}$$

c)

For å finne netto trykkraft på en sidevegg med bredde b = 1m i tanken må vi integrere overtrykket:

$$F_{Sidevegg} = \int_A \left(p(r) - p_0\right)dA = \int_{r_0}^{r_0+h} \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(r^2 - r_0^2\right)b\,dr = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 b\int_{r_0}^{r_0+h}\left(r^2 - r_0^2\right)dr$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 b\left[\tfrac{1}{3}\left(r_0 + h\right)^3 - r_0^2\left(r_0 + h\right) - \left(\tfrac{1}{3}r_0^3 - r_0^3\right)\right]$$

Tallverdi:

$$F_{Sidevegg} = \tfrac{1}{2}1000\,\mathrm{kg/\,m^3}\left(1\mathrm{s}^{-1}\right)^2 1\mathrm{m}\left[\tfrac{1}{3}\left(9\,\mathrm{m}\right)^3 - \left(8\,\mathrm{m}\right)^2 9\,\mathrm{m} - \left(\tfrac{1}{3}\left(8\,\mathrm{m}\right)^3 - \left(8\,\mathrm{m}\right)^3\right)\right] = 4167\,\mathrm{N}$$

På jorden hadde kraften vært $\rho g \tfrac{1}{2} hA$ = 5000N.

d)
Friksjonsfri og stasjonær strømning kan beskrives med Bernoulli's likning, men leddet for potensiell energi vil her bli annerledes. Problemet kan unngås hvis vi bruker Bernoulli langs en strømlinje som starter i bunnen av tanken på motsatt side av utløpet (der er hastigheten ≈ 0), og ender i utløpet. Disse punktene har samme potensielle energi, så:

$$\frac{p\left(r = r_0 + h\right)}{\rho} + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_{ut}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_{ut} = \sqrt{2\cdot\tfrac{1}{2}\omega^2\left(\left(r_0 + h\right)^2 - r_0^2\right)}$$

Tallverdi:

$$V_{ut} = \sqrt{\left(1\mathrm{s}^{-1}\right)^2\left(\left(9\,\mathrm{m}\right)^2 - \left(8\,\mathrm{m}\right)^2\right)} = 4.12\,\mathrm{m/\,s}.$$

På jordoverflaten ville vi fått Torichelli's lov: $V_{ut} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\,\mathrm{m/\,s^2}\cdot 1\mathrm{m}} = 4.47\,\mathrm{m/\,s}$.

Alternativt kan vi lage en egen variant av Bernoulli's likning. Under utledningen av Bernoulli må vi integrere tyngdekraft/masse i *z*-retningen:

$\int g dz = gz + C$ Her får vi i stedet: $\int \omega^2 r dr = \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + C$

Da kan vi bruke Bernoulli langs en strømlinje fra vannoverflaten til utløpet:

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\omega^2 r_0^2}_{\text{Potensiell energi ved vannoverflaten}} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_{ut}^2}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\omega^2\left(r_0 + h\right)^2}_{\text{Potensiell energi ved utløpet}}$$ og vi får samme svar.