Løsning eksamen i SIE 3005/43021 reguleringsteknikk
16/5 - 2001, T. A.

1a) Setter $x_1 = p$ og $x_2 = m_s$. Vi får fra blokkdiagrammet:

$$\dot{x}_1 = k_2\left[k_1(p_0 - x_1) + x_2 + u\right]$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{K}{T}k_2\left[k_1(p_0 - x_1) + x_2 + u\right]$$

Setter $p_0 = 0$, og får da:

$$A = \begin{bmatrix} -k_1k_2 & k_2 \\ -\frac{Kk_1k_2}{T} & -\frac{1}{T}(1-Kk_2) \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} k_2 \\ \frac{K}{T}k_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↙NB!

c) $$h(s) = \frac{p}{m_e}(s) = \frac{h_1 \cdot \frac{1}{s}}{1 + k_1 h_1 \frac{1}{s}} = \frac{h_1}{s + k_1 h_1}$$

der $$h_1 = \frac{k_2}{1 - k_2\frac{K}{1+Ts}} = \frac{k_2(1+Ts)}{1+Ts - k_2K}$$

Setter h_1 inn i h:

$$h(s) = \frac{\frac{k_2(1+Ts)}{1+Ts-k_2K}}{s + \frac{k_1k_2(1+Ts)}{1+Ts-k_2K}} = \frac{k_2(1+Ts)}{s(1+Ts-k_2K) + k_1k_2 + k_1k_2Ts} = \frac{k_2(1+Ts)}{Ts^2 + (1+k_1k_2T - k_2K)s + k_1k_2}$$

b) Alternativt - å bruke tilstandsrommodellen: Vi har

$$h(s) = \underline{c}^T(sI-A)^{-1}\underline{b}$$

Søker først $$(sI-A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI-A)}{|sI-A|}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s + k_1k_2 & -k_2 \\ \frac{K}{T}k_1k_2 & s + \frac{1}{T}(1 - Kk_2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+k_1k_2)(s+\frac{1}{T}(1-Kk_2)) + \frac{k_1Kk_2^2}{T}} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T}(1-Kk_2) & k_2 \\ -\frac{K}{T}k_1k_2 & s+k_1k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + (k_1k_2 + \frac{1}{T}(1-Kk_2))s + \frac{k_1k_2}{T}} \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow h(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ \frac{K}{T}k_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{q(s)} = \frac{1}{q(s)} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T}(1-Kk_2) & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ \frac{K}{T}k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{k_2 s + \frac{1}{T}(1-Kk_2)k_2 + \frac{K}{T}k_2^2}{q(s)} = \frac{k_2(s + \frac{1}{T})}{s^2 + (k_1k_2 + \frac{1}{T}(1-Kk_2))s + \frac{k_1k_2}{T}}$$

Det samme med $h(s)$ funnet fra blokkdiagram!

d)

$$h(s) = \frac{k_2}{T} \frac{1+Ts}{s^2 + \frac{1+k_1k_2T-k_2K}{T} + \frac{k_1k_2}{T}} = \frac{k_2}{T} \frac{1+Ts}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1k_2}{T}}}}, \quad \xi = \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{1+k_1k_2T-k_2K}{T}\right) = \underline{\underline{\frac{1+k_1k_2T-k_2K}{2\sqrt{k_1k_2T}}}}$$

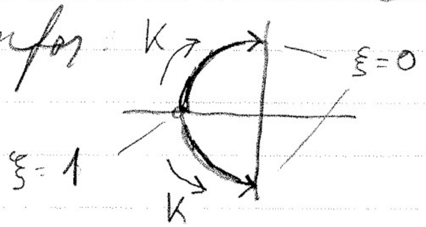
Når K er stor, dominerer spekulativ oppførsel: Aktørene følger hverandre, og den positive tilbakekoplingssløyfen motvirkes ikke tilstrekkelig av den negative og stabiliserende tilbake-koplingssløyfen som skyldes realøkonomisk motivert handel.

e) Polene er kompleks konjugerte og systemet er stabilt for $0 < \xi < 1$. Vi definerer K_2 slik at $K = K_2$ gir $\xi = 0$, og K_1 slik at $K = K_1$ gir $\xi = 1$.

Dette gir $1 + k_1 k_2 T - k_2 K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{1 + k_1 k_2 T}{k_2}$

og $\frac{1 + k_1 k_2 T - k_2 K_1}{2\sqrt{k_1 k_2 T}} = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{k_2}\left(1 + k_1 k_2 T - 2\sqrt{k_1 k_2 T}\right)$

Siden ω_0 fra (1.3) er uavhengig av K, må de komplekskonjugerte polene ligge i konstant avstand fra origo. Rotkurven blir derfor en sirkelbue:



f) Dette er sprangresponsen til et system av typen $\frac{1}{1 + T_x s}$. Av figur 1.1 ser vi at dette bare kan inntreffe for $K = 0$, dvs. ingen spekulativ oppførsel. Vi ser også at da er

$$T_x = \frac{1}{k_1 k_2}$$

2a) $\left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J}\left(\beta - 3\gamma (x_2^p)^2\right) \end{bmatrix}$ $\left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial u}\right|_p = \begin{bmatrix} 0 \\ K/J \end{bmatrix}$

Vi ser at det er bare x_2^p som inngår. Det er fordi resten av modellen er lineær.

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J}\left(\beta - 3\gamma (x_2^p)^2\right) \end{bmatrix}$, $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{J}\left(\beta - 3\gamma (x_2^p)^2\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \underline{\underline{\frac{1}{J}\left(\beta - 3\gamma (x_2^p)^2\right)}} \end{cases}$

Kursdynamikken er ustabil for x_2^p liten, da blir $\lambda_2 = \beta/J$

For x_2^p stor, derimot, dominerer leddet $-3\gamma (x_2^p)^2$. Dermed blir $\lambda_2 = \frac{1}{J}\left(\beta - 3\gamma (x_2^p)^2\right)$ negativ og skipet blir kurs-stabilt.

c) Vi har $N_p = 1 \Leftrightarrow$ én pol i h.h.p. for det åpne systemet. (V.8) gir oss da kravet om

2π omdreininger (i positiv dreieretning). Siden den uendelig store halvsirkelen går inn i v.h.p., ser vi at den heltrukne kurve for h_0 alltid dreier seg -2π om $(-1,0) \Rightarrow$ ustabilt for alle K_p

d) Den stiplede løkka til høyre gir oss én omdreining rundt $(-1,0) \Rightarrow$ nå er systemet stabilt.
Av figuren ser vi at $h(j0) = -270°$. Av (2.2) ser vi at $h_u(j0) = -270°$. Dermed kan ikke h_r gi noe fasebidrag til h_0 for $\omega = 0$. Altså kan ikke h_r inneholde noen ren integrasjon. Da gjenstår en begr. PD-regulator, som ikke gir noe fasebidrag ved $\omega = 0_+$.

2e) Det er ingen ren integrasjon foran forstyrrelsens angrepspunkt. For å fjerne stasjonært avvik når v er et sprang, må det være minst en integrasjon der. Dermed vil en bPD-regulator ikke fjerne stasjonært avvik.

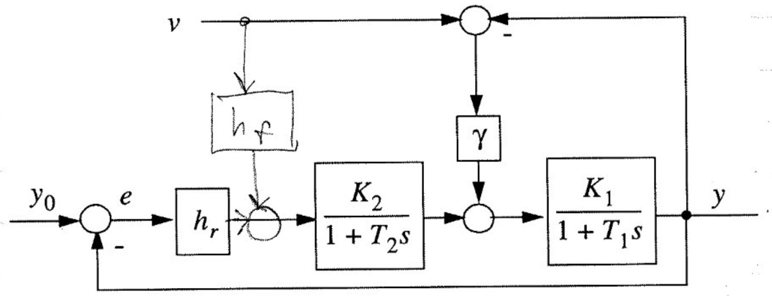
Dette kan besvares algebraisk v.h.a. sluttverditeoremet:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\, e(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{e}{v}(s)\, v(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(-h_v(s) N(s)\right)\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\beta s(-1+Ts)}}_{h_v} \cdot \frac{\beta s(-1+Ts)(1+\alpha T_d s)}{\beta s(-1+Ts)(1+\alpha T_d s) + K_p K(1+T_d s)}$$

$$= \frac{-1}{K_p K} \Rightarrow \text{stasjonært fjernes ikke helt}$$

Oppgave 3a)



Vi krever $h_{fi}\cdot\frac{K_2}{1+T_2 s} + \gamma = 0 \Rightarrow h_{fi}(s) = -\frac{\gamma}{K_2}(1+T_2 s)$

b) $K_f = h_{fi}(s)\Big|_{s=j0} = -\frac{\gamma}{K_2}$

Den fjerner stasjonært avvik når $v(t)$ er konstant (et sprang)

Oppgave 4 a)

Se neste side

b) $\Delta K \approx 8\,dB$ og $\psi \approx 79^\circ$, se neste side. Dette er litt romslige marginer, K_p kunne vært økt litt, f.eks. med 2 dB.

c) Se neste side

d) $|h_0|$ blir uforandret $\Rightarrow \omega_c$ forblir den samme. $\psi = \angle h_0(j\omega_c) + 180^\circ$

Endringa i fasemargin blir da lik endringa i $\angle h_0(j\omega_c)$. Vi har

$$\angle \tilde{h}_0(j\omega_c) = \angle h_0(j\omega_c) + \angle e^{-j\omega_c \frac{T}{2}}$$

$$\angle e^{-j\omega_c \frac{T}{2}} = -\omega_c \frac{T}{2} = -0.4 \cdot 0.05 = -0.02 \; [rad]$$

fra Bode-diagram neste side

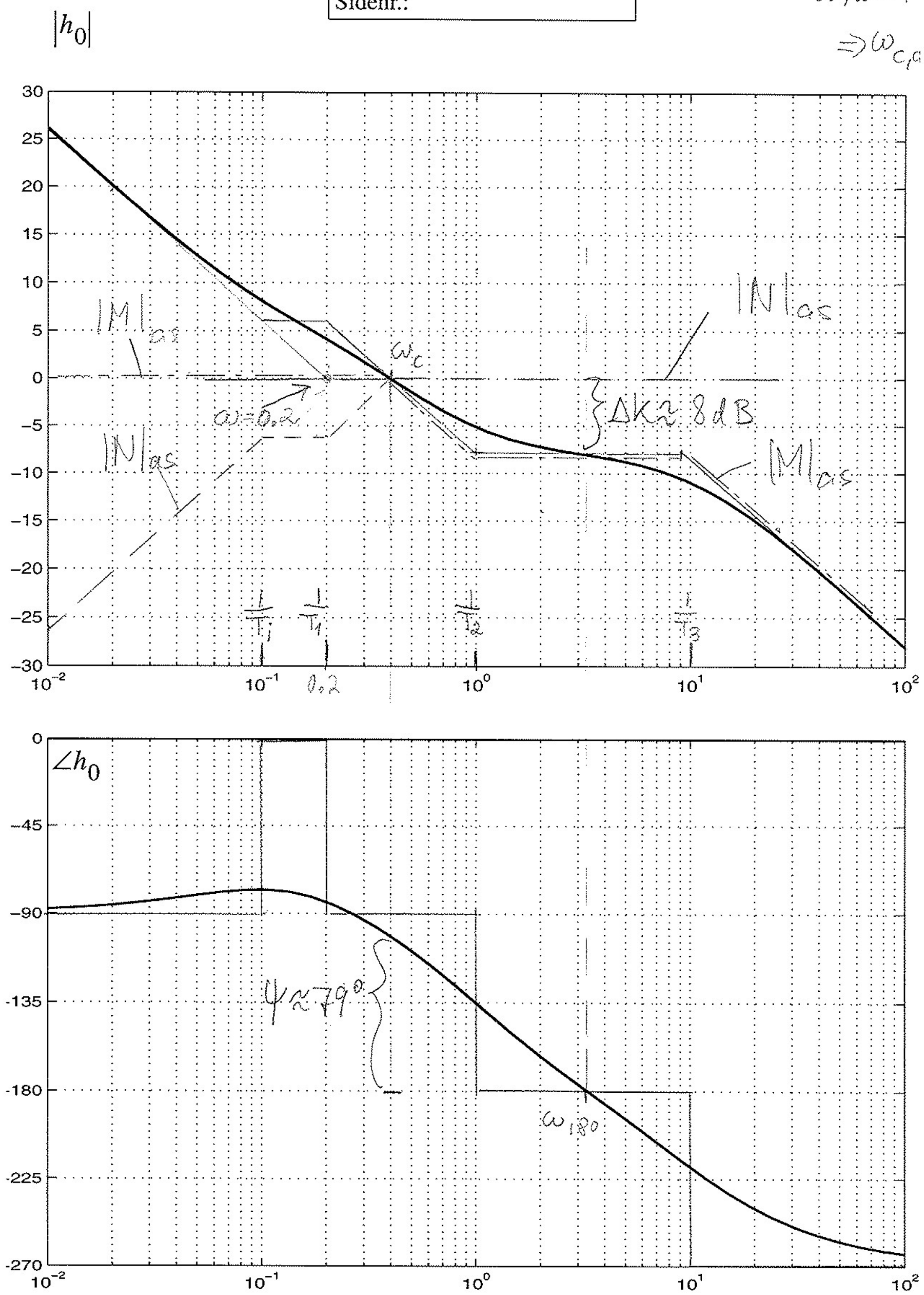
$$= -0.02 \, \frac{180}{\pi} = -1.15^\circ$$

e) T_i kunne vært minket. Dette ville økt kryssfrekvensen uten at den unødvendig store fasemarginen hadde blitt uakseptabelt lav.

Fag nr.: SIE3005 og 43021
Dato: 16. mai 2001
Student nr.:
Sidenr.:

$|h_0(j\omega)|_{as,\omega\ll 1} = \frac{2}{10\omega}$

$\Rightarrow \omega_{c,as,\omega\ll 1} = 0.2$



figur 4.1