NTNU
Det skapende universitet

Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Eksamensoppgave i TTT4120 Digital signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen: Magne H. Johnsen
Tlf.: 93025534

Eksamensdato: 05.08.2013

Eksamenstid (fra - til): 09.00 - 13.00

Hjelpemiddelkode/tillatte hjelpemidler: D – Ingen trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Eksamen består av 4 oppgaver der
  - Oppgave 1 omhandler filtre.
  - Oppgave 2 omhandler stasjonære prosesser.
  - Oppgave 3 omhandler fast komma implementering
  - Oppgave 4 omhandler frekvensanalyse.
- Faglig kontakt vil gå rundt to ganger, henholdsvis en og tre timer etter oppstart. Lykke til!
- Sensurfrist 3 uker etter eksamensdato.

Målform/språk: Norsk - bokmål

Totalt antall sider: 9

Herav, antall vedleggsider: 3

Kontrollert av:

Dato Signatur

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 (2+3+4+4+2=15)

Et stabilt, kausalt tidsdiskret system med overføringssystem $H(z)$ er satt sammen av to delsystemer koblet i serie. Det første delsystemet $H_1(z)$ er gitt ved sin overføringsfunksjon

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{1}$$

Det andre delsystemet $H_2(z)$ er gitt ved følgende differanseligning

$$2y(n) - y(n-1) = x(n) - 2x(n-1) \tag{2}$$

1a) Vis at overføringsfunksjonen $H_2(z)$ er gitt ved

$$H_2(z) = \frac{1}{2}\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{3}$$

1b) Skisser konvergensområdene (ROC) til både de to delsystemene og til deres seriekobling $H(z) = H_1(z)H_2(z)$

1c) Vis at enhetspulsresponsene til de to delsystemene er gitt ved

$$h_1(n) = (-\frac{1}{2})^n \quad n \geq 0 \tag{4}$$

$$h_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ -\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n & n > 0 \end{cases} \tag{5}$$

hvor $h_1(n) = h_2(n) = 0 \quad n < 0$ på grunn av kausalitet.

1d) Vis at totalsystemet $H(z)$ er gitt ved :

$$H(z) = \frac{\frac{5}{4}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{6}$$

$$h(n) = \frac{5}{4}(-\frac{1}{2})^n - \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n \qquad n \geq 0 \tag{7}$$

hvor $h(n) = 0 \;\; n < 0$ på grunn av kausalitet

1e) Har filteret $H(z)$ et kausalt og stabilt inversfilter? Begrunn svaret.

Oppgave 2 **(4+5+4+2+3=18)**

2a) Vis at filteret $H_2(z)$ er et allpassfilter, dvs. $H_2(f)H_2^*(f) = |H_2(f)|^2 = 1$

Vis også at autokorrelasjonssekvensen til $H_2(z)$ er gitt ved

$$r_{h_2h_2}(m) = \delta(m) \quad m = -\infty, \ldots, \infty \tag{8}$$

2b) Vis ved hjelp av allpassegenskapene til $H_2(z)$ at autokorrelasjonsfunksjonen til $H(z)$ er gitt ved

$$r_{hh}(m) = r_{h_1h_1}(m) = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^m \quad m \geq 0 \tag{9}$$

hvor i tillegg $r_{hh}(m) = r_{hh}(-m)$

2c) Hvit støy med effekt σ_w^2 påtrykkes $H(z)$. En ønsker å modellere resulterende utgangssekvens $y(n)$ som en AR[P] prosess ved å bruke lineær prediksjon.

Hvilken modellorden P er optimal og hva blir tilsvarende prediksjonsparametre og prediksjonsfeileffekt?

2d) Forklar prinsippet for generell Wiener-filtrering, gjerne med å inkludere en skisse.

2e) En sekvens $x(n) = s(n) + w(n)$ observeres hvor $w(n)$ er additiv hvit støy med effekt σ_w^2.

Forklar hvordan et Wiener-filter kan brukes til støyreduksjon.

Det tilsvarende teoretisk optimale ikke-kausale Wiener-filteret er gitt ved

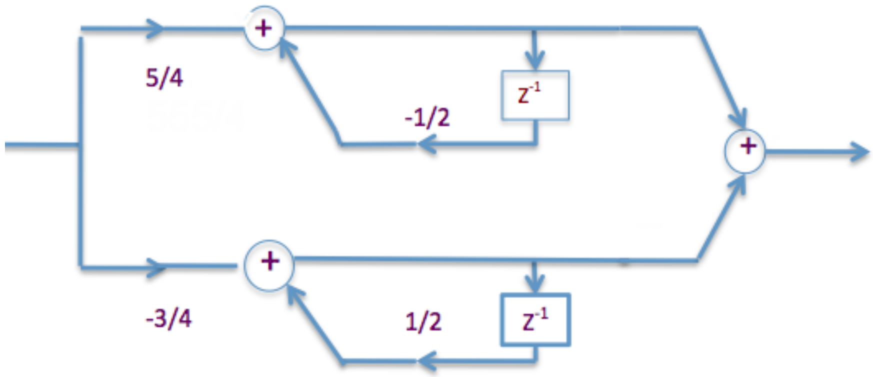
$$H(f) = \frac{\Gamma_{ss}(f)}{\Gamma_{ss}(f) + \sigma_w^2} \tag{10}$$

hvor $\Gamma_{ss}(f)$ er effektspekteret til den støyfrie sekvensen $s(n)$.

Forklar hvordan filteret fungerer i frekvensplanet for ulike signal/støy-forhold.

Oppgave 3 (4+5+6=15)

Figur 1 viser parallellstrukturen til filteret $H(z)$ fra oppgave 1.
Parallellstrukturen skal realiseres med fast komma tallrepresentasjon med $B+1$ bit og dynamikk $[-1,1)$. Avrunding (kvantisering) foretas etter hver multiplikasjon og avrundingsfeilen kan regnes som hvit støy med effekt $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$. Til sammen bidrar alle støykildene på grunn av avrunding til et støysignal $z(n)$ på utgangen med effekt σ_z^2.



Figur 1: Parallellstruktur til $H(z)$.

3a) Finn den totale avrundingseffekten σ_z^2 på utgangen av parallellstrukturen i figur 1.

3b) Finn nødvendig skaleringsfaktor på inngangen til parallellestrukturen for å unngå overflyt.

3c) En kan flytte skaleringskonstantene 5/4 og $-3/4$ i figur 1 til etter tilbakekoblingene i de to parallellgrenene.

Finn resulterende avrundingseffekt og skaleringskonstant for dette tilfellet.

Hvilken variant er den beste med hensyn på signal/støy-forhold på utgangen?

Oppgave 4 **(2+3+4+3=12)**

4a) En ønsker å finne frekvensen f_0 til et sinus-signal utfra et signalutsnitt av lengde L,

$$x(n) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n) & n = 0, L-1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{11}$$

Vis at Fourier-transformen til utsnittet er gitt ved

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[W(f - f_0) + W(f + f_0)\right] \tag{12}$$

hvor

$$W(f) = \frac{\sin(\pi f L)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi f(L-1)} \tag{13}$$

4b) Gitt utsnittslengde $L = 100$ og ukjent frekvens $f_0 = 0.18$.
En ønsker å estimere frekvensen f_0 basert på en N-punkts DFT (Diskret Fourier Transform)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)\; e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, N-1 \tag{14}$$

Diskuter muligheten for å estimere frekvenstoppen ved f_0 korrekt når antall frekvenspunkter er gitt ved henholdsvis $N = 25$, 50 og 100.

4c) Gitt en sum av to sinussignaler

$$y(n) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n) + \cos(2\pi f_1 n) & n = 0, L-1 \\ \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{15}$$

hvor $f_0 = 0.18$ og $f_1 = 0.19$.

Hvilke krav vil du sette til utsnittslengde L og antall frekvenspunkter N for å kunne skille de to harmoniske ved hjelp av DFT til signalet $y(n)$?

4d) Hvordan kan man ved bruk av DFT og IDFT beregne lineær foldning til to signaler $x_1(n)$ og $x_2(n)$ av lengde hhv. L_1 og L_2?

Some basic equations and formulas.

A. Sequences :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \Longleftrightarrow |\alpha| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

B. Linear convolution :

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow \\ Y(f_k) &= H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \ \text{ for } \ k = 0, \ldots, N-1 \ \text{ where we write } \ Y(k) = Y(f_k) \end{aligned}$$

C. Transforms :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_n h(n) z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\, e^{-j2\pi nf} \\ \text{DFT } : H(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\, e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1 \\ \text{IDFT} : h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\, e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1 \end{aligned}$$

D. The sampling (Nyquist) theorem :

Given an analog signal $x_a(t)$ with bandwidth $\pm B$ which is sampled by $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \quad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$$x_a(t) \text{ can be recovered from } x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B \tag{16}$$

E. Autocorrelation, energy spectrum and Parsevals theorem :

Given a sequence $h(n)$ with finite energy E_h :

Autocorrelation : $r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$

Energy spectrum : $S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$

Parsevals theorem: $E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$

F. Multirate formulaes :

Decimation where $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Upsampling where $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolation where $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U}T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autocorrelation, power spectrum and Wiener-Khintchin theorem :

Given a stationary, ergodic sequence $x(n)$ with infinite energy :

Autocorrelation : $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Power spectrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin : $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. The Yule-Walker and Normal equations where $a_0 = 1$:

Yule-Walker equations : $\sum_{k=0}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., P$

Normal equations: $\sum_{k=1}^{P} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., P$