Norwegian university of science and technology
Department of engineering cybernetics

Kontaktperson under eksamen:
Navn: Stipendiat Tor Aksel Heirung
Tlf: 91120005

Norsk/nynorsk utgave/utgåve

Eksamen i TTK4135

Optimalisering og regulering

Optimization and Control

Fredag 10. juni 2011

Kl: 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler / Tilletne hjelpemiddel:

D - Ingen trykte eller skrevne hjelpemidler / Inga trykte eller skrevne hjelpemiddel.

Godkjent kalkulator med tomt minne / Godkjend kalkulator med tomt minne

---

Nyttig informasjon finnes i vedlegg / Nyttig informasjon finns i vedlegg

(Denne informasjonen er gitt på engelsk for å samsvare med pensumlitteraturen som den er hentet ifra).

Sensur faller 1.7 / Sensur fell 1.7.

1 LP og Simplex (42%)

a (4%) Er et LP-problem et konvekst optimaliseringsproblem? Dersom ja; er det da i tillegg et strengt konvekst optimaliseringsproblem.

b (2%) Benytter Simplex-metoden gradienten av Lagrange-funksjonen eller objektfunksjonen for å finne et nytt iterasjonspunkt?

c (6%) Beregn KKT-betingelsene for følgende LP-problem på standard form.

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^3} \; 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.t. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

d (12%) (1) har to basisløsninger (basic feasible points). Finn disse. Sjekk KKT-betingelsene for disse to punktene og vis at det punktet som tilfredstiller KKT-betingelsene er lik løsningspunktet.

e (6%) Vis hvordan følgende LP-problem

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^3} \; 3x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

kan omskrives til et LP-problem på standard form, se vedlegg (7).

f (8%) Det duale problemet til et LP-problem på standard form, se vedlegg (7), er gitt av

$$\begin{aligned} &\max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \; b^T\lambda \\ s.t. \quad & A^T\lambda \leq c \end{aligned} \tag{2}$$

Vis at KKT-betingelsene for det duale problemet er like med KKT-betingelsene for (primal) LP-problemet på standard form.

g (4%) Diskuter sammenhengen mellom løsninger av (primal) standardproblemet (7) og det duale problemet. (2). Hint: Eksistens av løsning, 'unboundedness' og 'infeasibility' av løsning kan være relevant.

2 MPC og optimalregulering (30%)

a (6%) Løsningen av LQ-problemet med uendelig tidshorisont

$$\begin{array}{lll} & \min\limits_{x_1,x_2,..,u_0,u_1,...} & f_\infty = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\{x_i{}^TQx_i + u_i{}^TPu_i\}, \quad Q \succeq 0, \quad P \succ 0 \\ s.t. & & x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \; 0 \le i \le \infty \end{array}$$

er gitt av regulatoren $u_i = Kx_i$ hvor K beregnes fra Riccati-likningen. Dersom vi tar med begrensninger (øvre og nedre skranker) på pådraget og noen utganger $y_i = Dx_i$ (kallt CV av S.O.Hauger), kan vi beskrive en dual-mode MPC regulator ved tid $i = 0$ som

$$u_i = \begin{cases} Kx_i + c_i, & i \in \{0, 1, ..., L-1\} \\ Kx_i, & i \ge L \end{cases} \tag{3}$$

Prediksjonshorisonten er inndelt i to deler; $i \in \{0, 1, ..., L-1\}$ og $i \ge L$. Hvorfor kan vi anta $c_i = 0$ for $i \ge L$, og hvordan påvirker dette valget av L.

b (6%) Diskuter optimaliseringsproblemet som benyttes for å beregne c_i i (3). Detaljer skal ikke tas med.

c (4%) Anta at den lineære modellen i vedlegg (9) erstattes av en ulineær modell $x_{i+1} = g(x_i, u_i)$ i optimaliseringsproblemet (8)-(12). Hva slags optimaliseringsproblem er dette? Foreslå en algoritme for å løse dette problemet.

d (4%) Prediksjonshorisonten er en nøkkelparameter i tuningen av MPC regulatorer. Forklar hvordan du velger denne parameteren. Du kan bruke en figur i forklaringen.

e (4%) Hva betyr "control input blocking" (kallt "MV blocking" av S.O.Hauger) og hvorfor er dette viktig? Bruk en figur i forklaringen.

f (6%) Gitt en tidsinvariant to-dimensjonal vektmatrise $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$ i en kvadratisk objektfunksjon som i (8). Anta at en akseptabel variasjon i y_1 er ± 10 omkring settpunktet og at en akseptabel variasjon i y_2 er ± 0.1 omkring settpunktet. Foreslå et fornuftig forhold $\frac{q_1}{q_2}$ ved valg av q_1 og q_2.

3 Ulike spørsmål (28%)

a (6%) Anta et 2-dimensjonalt minimaliseringsproblem uten bibetingelser ($x \in \mathbb{R}^2$) hvor vi vil benytte Nelder-Mead metoden. Anta følgende ordnede punkter.

$$\begin{aligned} x^1 &= (0.7, 0.8)^T, \quad f(x^1) = 10 \\ x^2 &= (0.5, 0.8)^T, \quad f(x^2) = 20 \\ x^3 &= (0.7, 0.5)^T, \quad f(x^3) = 30 \end{aligned}$$

Refleksjonspunktet x^{refl} for $x \in \mathbb{R}^n$ er gitt av

$$\begin{aligned} & x^{refl} \stackrel{def}{=} g(-1) \\ & \text{hvor} \\ g(t) &= \overline{x} + t(x^{n+1} - \overline{x}) \\ \overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^i \end{aligned}$$

Punktene x^1, x^2, x^3 er ordnet på en spesiell måte. Forklar denne ordningen.

Anta at $f(x^{refl}) = 35$. Vi må da forsøke med "inside contraction". Hva mener vi med "inside contraction"?

b (6%) Gitt et minimaliseringsproblem uten bibetingelser hvor $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$, $Q = Q^T \succeq 0$ og søkeretningen ved iterasjon k er p_k. Anta $\nabla f(x_k)^T p_k < 0$. Finn den optimale steglengden α, dvs. verdien av α som minimaliserer $f(x_k + \alpha p_k)$.

c (16%) Gitt problemet

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}2} \; -2x_1 + x_2 \\ s.t. \quad & (1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0 \\ & 0.25x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Den optimale løsningen er $x^* = (0, 1)^T$ og begge bibetingelsene er aktive i dette punktet.

- Er LICQ betingelsen tilfredstilt i løsningspunktet?
- Er KKT-betingelsene oppfyllt i løsningspunktet?
- Er 2.ordens nødvendige betingelser tilfredstilt?
- Er 2.ordens tilstrekkelige betingelser oppfyllt?

Appendix

Part 1 Optimization problems and optimality conditions

$\mathcal{E}$ and $\mathcal{I}$ given below are two finite sets of indices.

General optimization problem. f and c_i are differentiable functions:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \; & f(x) \\ c_i(x) = 0, \qquad & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \geq 0, \qquad & i \in \mathcal{I} \end{aligned} \tag{4}$$

The Lagrangian function is given by

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x)$$

The KKT-conditions for (4) are given by:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 & \\ c_i(x^*) = 0, \qquad & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x^*) \geq 0, \qquad & i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i^* \geq 0, \qquad & i \in \mathcal{I} \\ \lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \qquad & i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I} \end{aligned} \tag{5}$$

2nd order (sufficient) conditions for (4) are given by:

$$w \in \mathcal{C}(\lambda^*) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i \in \mathcal{E} \\ \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* > 0 \\ \nabla c_i(x^*)^T w \geq 0 & \text{for all } i \in \mathcal{A}(x^*) \cap \mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* = 0 \end{cases}$$

Theorem (Second-Order Sufficient Conditions)
Suppose that for some feasible point $x^* \in R^n$ there is a Lagrange multiplier vector λ^* such that the KKT conditions (5) are satisfied. Suppose also that

$$w^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w > 0, \qquad \text{for all } w \in \mathcal{C}(\lambda^*), \; w \neq 0. \tag{6}$$

Then x^* is a strict local solution for (4).

LP-problem on standard form:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ & f(x) = c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

where $A \in R^{m \times n}$ and $rank(A) = m$.

QP-problem on standard form:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ & f(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T d \\ s.t. \quad & a_i^T x = b_i, \qquad i \in \mathcal{E} \\ & a_i^T x \geq b_i, \qquad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

where $G = G^T$. Alternatively, the equalities can be written $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Iterative method:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$x_0 \ given$$
$$x_k, p_k \in \mathbb{R}^n, \ \alpha_k \in \mathbb{R}$$

p_k is the search direction and α_k is the line search parameter.

Part 2 Linear quadratic control of discrete dynamic systems

A typical optimal control problem on the time horizon 0 to n might take the form

$$\begin{aligned} \min \quad f_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{&(y_i - y_{ref,i})^T Q_i (y_i - y_{ref,i}) \\ &+ (u_i - u_{i-1})^T P_i (u_i - u_{i-1})\} \\ &+ \frac{1}{2}(y_n - y_{ref,n})^T S (y_n - y_{ref,n}) \end{aligned} \tag{8}$$

subject to equality and inequality constraints

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i, \; 0 \le i \le n-1 \tag{9}$$

$$y_i = H x_i$$

$$x_0 = \text{given (fixed)} \tag{10}$$

$$U_L \le u_i \le U_U, \; 0 \le i \le n-1 \tag{11}$$

$$Y_L \le y_i \le Y_U, \; 1 \le i \le n \tag{12}$$

where system dimensions are given by

$$\begin{aligned} u_i &\in \mathbb{R}^m \\ x_i &\in \mathbb{R}^l \\ y_i &\in \mathbb{R}^j \end{aligned}$$

The subscript i refers to the sampling instants. That is, subscript $i+1$ refers to the sample instant one sample interval after sample i. Note that the sampling time between each successive sampling instant is constant. Further, we assume that the control input u_i is constant between each sample.

Theorem: Assume that $x_{ref,i} = 0$, $u_{ref,i} = 0$, $0 \le i \le n$ and that $H = I$, i.e. $y_i = x_i$. The solution of (8), (9) and (10) is given by $u_i = K_i x_i$, $0 \le i \le n-1$ where the feedback gain matrix is derived by

$$\begin{aligned} K_i &= -P_i^{-1} B_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i, \; 0 \le i \le n-1 \\ R_i &= Q_i + A_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i, \; 0 \le i \le n-1 \\ R_n &= S \end{aligned}$$