1

Løsningsforslag til eksamen i TTT4210 Digital signalbehandling
19. august 2010

Oppgave 1

a) $H_1(z)$ har en pol i $1-3z^{-1}=0 \Rightarrow z=3$. Siden systemet er antikausalt, er ROC gitt ved $|z|<3$.

For det andre delsystemet finner vi $H_2(z)$ ved å ta z-transformen til differensligningen:

$$2Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)(2-z^{-1}) = X(z)(1-2z^{-1})$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{2-z^{-1}}$$

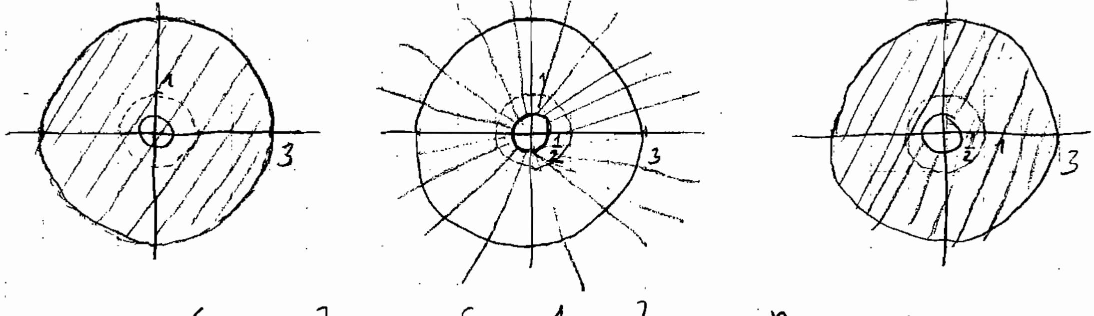
Systemet har en pol i $2-z^{-1}=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$. Siden systemet er kausalt, er ROC gitt ved $|z|>\frac{1}{2}$.

For hele systemet har vi

$$H(z) = H_1(z)\cdot H_2(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(2-z^{-1})}.$$

ROC : $\text{ROC}\{H_1\} \cap \text{ROC}\{H_2\} \Rightarrow \frac{1}{2}<|z|<3$

De tre konvergensområdene er skissert i figuren under



b) $h_1(n) = Z^{-1}\{H_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-3z^{-1}}\right\} = -3^n u(-n-1)$, for $|z|<3$

$$h_1(n) = \begin{cases} -3^n & n<0 \\ 0 & n\geq 0 \end{cases}$$

$$h_2(n) = Z^{-1}\{H_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1-2z^{-1}}{2-z^{-1}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$= \begin{cases} 0, & n<0 \\ 1/2, & n=0 \\ (1/2)^{n+1} - (1/2)^{n-1} = (1/2)^{n+1}(1-4) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n\geq 1 \end{cases}$$

②

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

$$H(z) = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{2-z^{-1}}$$

$$A = H(z)(1-3z^{-1})\Big|_{z=3} = \frac{1-2z^{-1}}{2-z^{-1}}\Big|_{z=3} = \frac{1-\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$B = H(z)(2-z^{-1})\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-3z^{-1}} = \frac{1-4}{1-3\cdot 2} = \frac{3}{5}$$

$$h(n) = \frac{1}{5}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-3z^{-1}}\right\} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} \qquad \frac{1}{2}<|z|<3$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot 3^n u(-n-1) + \frac{3}{5}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$= \begin{cases} -\frac{3^n}{5}, & n<0 \\ \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n\geq 0 \end{cases}$$

Alternativt kan vi finne $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2(k)h_1(n-k) = \frac{1}{2}h_1(n) - 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} h_1(n-k)$$

$$= -\frac{1}{2}3^n u(-n-1) + 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}3^{n-k}u(-n+k-1)$$

$$\left|\begin{matrix} k-1=\ell \\ k=\ell+1\end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}3^n u(-n-1) + 3\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+2}\cdot 3^{n-\ell-1}u(\ell-n)$$

$n<0$

$$h(n) = -\frac{3^n}{2} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+2}\cdot 3^{n-\ell}$$

$$= -\frac{3^n}{2} + \frac{3^n}{2^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ell} = -\frac{3^n}{2} + \frac{3^n}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}$$

$$= -\frac{3^n}{2} + \frac{3^{n+1}}{2\cdot 5} = \frac{3^n}{2}\left(-1+\frac{3}{5}\right) = -\frac{3^n}{5}$$

$n\geq 0$

$$h(n) = 3\sum_{\ell=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+2}\cdot 3^{n-\ell-1} = \left|\begin{matrix} k=\ell-n \\ \ell=k+n\end{matrix}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n+2}\cdot 3^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c) Vi ser at enhetssirkelen befinner seg innenfor ROC for alle de tre systemene. Derfor er de stabile.

Alternativt kan man sjekke at $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ for de tre systemene

Vi ser fra uttrykkene til $h_1(n)$, $h_2(n)$ og $h(n)$ at de har uendelig lengde. Derfor er de IIR-systemer.

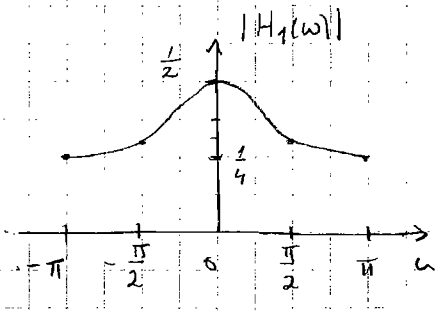
IIR-systemer kan aldri ha eksakt linear fase. Derfor har ingen av systemene linear faserespons.
Alternativt kan man finne $\angle H_1(\omega)$, $\angle H_2(\omega)$ og $\angle H(\omega)$ og sjekke om de er lineære funksjoner av ω.

For å bestemme filtertype, finner vi først amplituderesp.

$$H_1(\omega) = H_1(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$$

$$|H_1(\omega)|^2 = H_1(\omega)H_1^*(\omega) = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-3e^{j\omega}} = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}-3e^{j\omega}+9}$$

$$= \frac{1}{10-6\cos\omega}$$



$\omega = 0 \quad \cos\omega = 1 \quad |H_1(\omega)| = \frac{1}{2}$

$\omega = \frac{\pi}{2} \quad \cos\omega = 0 \quad |H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\omega = \pi \quad \cos\omega = -1 \quad |H_1(\omega)| = \frac{1}{4}$

$H_1(\omega)$ demper høye frekvenser mer en lave $\Rightarrow$ LP-filter.

$$H_2(z) = \frac{1-2z^{-1}}{2-z^{-1}} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \quad n = 2 \Rightarrow n = \frac{1}{p} \Rightarrow \text{allpass}$$

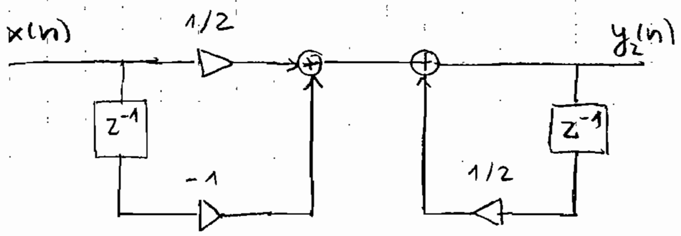
Alternativt kan man bruke samme fremgangsmåte som for $H_1(z)$

$$|H_2(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-2z^{-1}}{2-z^{-1}} \cdot \frac{1-2z}{2-z}\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

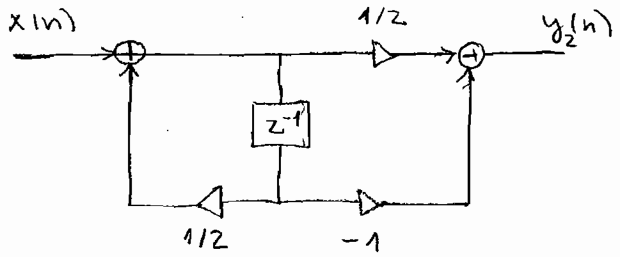
$$= \frac{1-2z^{-1}-2z+4}{4-2z^{-1}-2z+1}\Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 \Rightarrow \text{allpass-filter}$$

$$|H(\omega)| = |H_1(\omega)| \cdot |H_2(\omega)| = |H_1(\omega)| \Rightarrow \text{LP-filter}$$

4 d) $y_2(n) = \frac{1}{2} x(n) - x(n-1) + \frac{1}{2} y_2(n-1)$

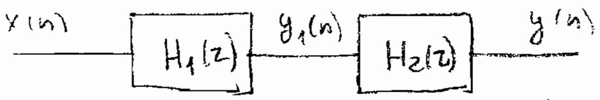


DF1 - struktur til $H_2(z)$

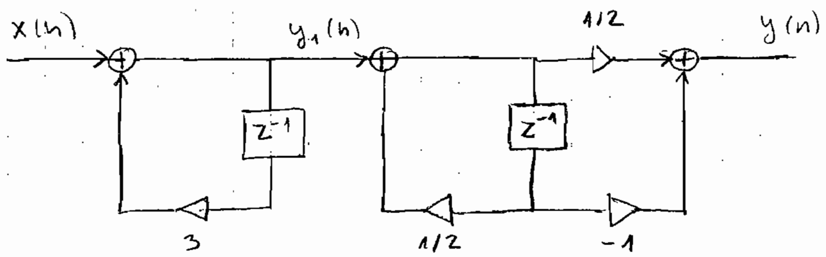


DF2 - struktur til $H_2(z)$

Kaskadestruktur til $H(z)$:

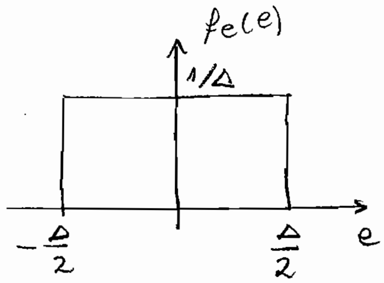


$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \Rightarrow y_1(n) = x(n) + 3 y_1(n-1)$$



Oppgave 2

a) Med $B = 4$ bit kan vi ha $2^B = 16$ forskjellige representasjonsverdier for å dekke intervallet $[-1, 1)$. Avstanden mellom verdiene er derfor $\Delta = \frac{1-(-1)}{16} = \frac{1}{8}$, og den maksimale avrundingsfeilen er lik $\frac{\Delta}{2} = \frac{1}{16}$. Siden avrundingsfeilen $e(n)$ er uniformt fordelt, er dens sannsynlighetstetthetsfunksjonen som vist i figuren under.

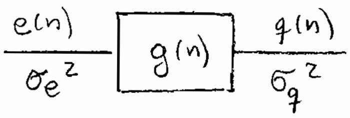


$$\sigma_e^2 = E[e^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_e(e)\,de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \cdot \frac{1}{\Delta}\,de$$

$$= \frac{1}{\Delta}\,\frac{1}{3}\,e^3\Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{1}{3\Delta}\cdot 2\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{8^2\cdot 12} = \frac{1}{768}$$

b)



$$q(n) = e(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\,e(n-k)$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\,e(n-k) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g(\ell)\,e(n-\ell)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g(\ell)\, \underbrace{E[e(n-k)\,e(n-\ell)]}_{=0 \text{ for } \ell \neq k \text{ pga hvit støy}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\cdot g(k)\cdot \sigma_e^2 = \sigma_e^2\, r_{gg}(0)$$

c) Det er til sammen 4 multiplikatorer. De to øverste ser filteret $H_1(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}$ (fra oppgave 1), mens de to nederste ser filteret $H_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Den totale avrundingsfeileffekten på utgangen av filteret er derfor gitt ved

$$\sigma_{q\,tot}^2 = 2\sigma_e^2\, r_{h_1h_1}(0) + 2\sigma_e^2\, r_{h_3h_3}(0) = 2\sigma_e^2\left(r_{h_1h_1}(0) + r_{h_3h_3}(0)\right)$$

$h_1(n) = -3^n u(-n-1)$ (fra oppgave 1)

$$r_{h_1h_1}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^2}\right)^n = \frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

⑥

$$h_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$r_{h_3h_3}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_3^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_{q\,tot}^2 = 2\cdot\sigma_e^2\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{4}{3}\right) = \frac{35}{12}\sigma_e^2 = \frac{35}{12}\cdot\frac{1}{8^2\,12} = \frac{35}{9216} \approx 0{,}0038$$

d) Overflyt kan oppstå på utgangen av summasjonspunkter. Vi må derfor finne den maksimale verdien til signalene på utgangen av de tre summasjonspunktene

$$y_1(n) = \frac{1}{5}\,x(n) * h_1(n)$$

$$y_3(n) = \frac{3}{10}\,x(n) * h_3(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = y_1(n) + y_2(n)$$

$$|y_1(n)| = \left|\frac{1}{5}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)x(n-k)\right| \leq \frac{1}{5}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_1(k)|\,|x(n-k)| \leq \frac{1}{5}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_1(k)|$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10}$$

$$|y_2(n)| \leq \frac{3}{10}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_3(n)| = \frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$|y(n)| = |y_1(n)+y_2(n)| \leq |y_1(n)| + |y_2(n)| \leq \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$$

Vi ser at ingen av signalene på utgangen av summasjonspunktene går utover det dynamiske område $[-1,1)$. Derfor er ingen skalering nødvendig for å unngå overflyt.

Oppgave 3

a) $x(n)$ er en $MA(1)$-prosess fordi $H(z)$ er et 1. ordens FIR-fi[lter]

b) $\Gamma_{xx}(\omega) = \sigma_{ww}^2 \left| H(\omega) \right|^2 = 1 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

$$= (1-2z^{-1})(1-2z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = (1-2z^{-1}-2z+4)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= 5 - 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} = 5 - 4\cos\omega$$

$$\gamma_{xx}(\ell) = \text{IDTFT}\{\Gamma_{xx}(\omega)\} = 5\delta(\ell) - 2\delta(\ell-1) - 2\delta(\ell+1)$$

$$= \begin{cases} 5, & \ell = 0 \\ -2 & \ell = \pm 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Alternativt kan vi starte fra differensligningen

$$x(n) = w(n) - 2w(n-1)$$

og regne ut

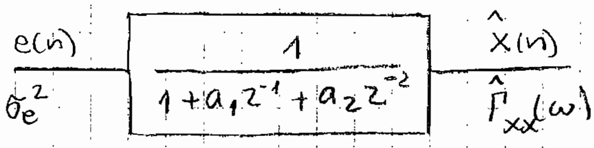
$$\gamma_{xx}(\ell) = E\left[(w(n) - 2w(n-1))(w(n+\ell) - 2w(n+\ell-1)) \right]$$

$$= \gamma_{ww}(\ell) - 2\gamma_{ww}(\ell+1) - 2\gamma_{ww}(\ell-1) + 4\gamma_{ww}(\ell)$$

$$= 5\delta(\ell) - 2\delta(\ell+1) - 2\delta(\ell-1)$$

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \text{DTFT}\{\gamma_{xx}(\ell)\} = 5 - 2e^{j\omega} - 2e^{-j\omega} = 5 - 4\cos\omega$$

c)



Parametre i AR(2)-modellen a_1, a_2 og σ_e^2 kan finnes som de optimale prediksjonskoeffisientene og prediksjons-feileffekten til den lineære prediktoren

$$\hat{x}(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2)$$

Disse kan regnes ut fra Yule-Walker ligningene eller utledes på følgende måte:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$$

$$\sigma_e^2 = E[e^2] = E\left[(x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2))^2 \right]$$

⑧

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a_1} = E\left[2\left(x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)\right) x(n-1)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a_2} = E\left[2\left(x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)\right) x(n-2)\right] = 0$$

$$\gamma_{xx}(1) + a_1 \gamma_{xx}(0) + a_2 \gamma_{xx}(1) = 0$$

$$\gamma_{xx}(2) + a_1 \gamma_{xx}(1) + a_2 \gamma_{xx}(0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \gamma_{xx}(0) + a_2 \gamma_{xx}(1) = -\gamma_{xx}(1) \\ a_1 \gamma_{xx}(1) + a_2 \gamma_{xx}(0) = -\gamma_{xx}(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 5a_1 - 2a_2 = 2 \\ -2a_1 + 5a_2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2} a_2$$

$$5 \cdot \frac{5}{2} a_2 - 2a_2 = 2 \Rightarrow \frac{21}{2} a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{21} \qquad a_1 = \frac{10}{21}$$

$$\sigma_e^2 = E\left[x^2(n) + a_1^2 x^2(n-1) + a_2^2 x^2(n-2) + 2a_1 x(n) x(n-1) + 2a_2 x(n) x(n-2) + 2a_1 a_2 x(n-1) x(n-2)\right]$$

$$= \gamma_{xx}(0)\left(1 + a_1^2 + a_2^2\right) + \gamma_{xx}(1)\left(2a_1 + 2a_1 a_2\right) + \gamma_{xx}(2) \cdot 2a_2$$

$$= 5\left[1 + \left(\frac{10}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2\right] - 2 \cdot 2 \frac{10}{21}\left(1 + \frac{4}{21}\right)$$

$$= 5 \frac{21^2 + 116}{21^2} - \frac{40}{21} \frac{25}{21} = \frac{1785}{21^2} = \frac{1785}{441} = 4{,}0476$$

d) Et estimat til effektspektraltettheten er gitt ved

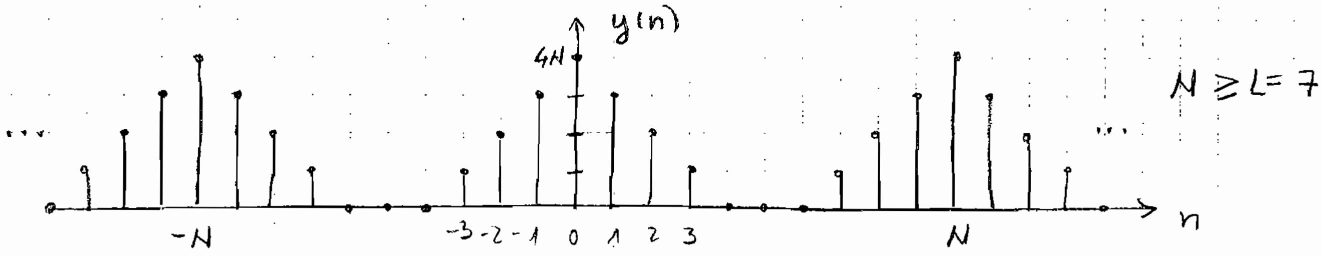
$$\hat{\Gamma}_{xx}(\omega) = \sigma_e^2 \left| \frac{1}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega}} \right|$$

Oppgave 4

a) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = 4 + 3\left(e^{j\omega 3} + e^{-j\omega 3}\right) + 2\left(e^{j\omega 2} + e^{-j\omega 2}\right)$

$$+ \left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) = 4 + 6\cos(3\omega) + 4\cos 2\omega + 2\cos\omega$$

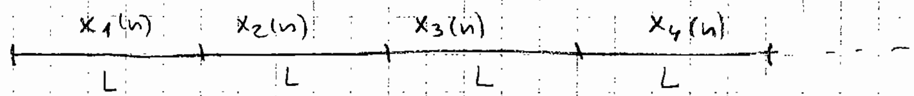
b) Punktprøving i frekvensdomenet med periode $\frac{1}{N}$ er ekvivalent til periodisk utvidelse i tidsdomenet med periode N (og skalering med N).



Skissen viser $y(n)$ for $N \geq L = 7$ der L er lengden til $x(n)$. Hvis $N < L$, vil de enkelte repetisjonene overlappe, og de må da legges sammen for å få $y(n)$.

Vi ser fra tegningen at vi kan gjenvinne $x(n)$ fra $y(n)$, og dermed også fra $X(k)$ hvis $N \geq L = 7$.

c) Sekvensen $x(n)$ som skal filtreres deles inn i mindre biter av lengde L, dvs. $x(n) = \sum x_i(n)$

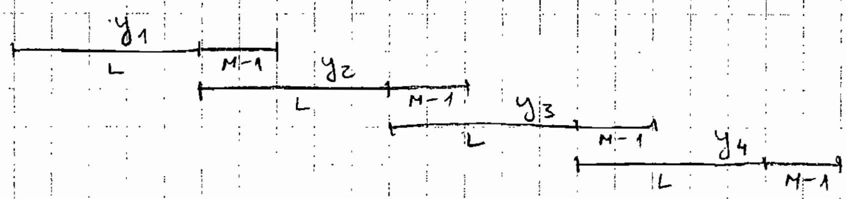


$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum x_i(n) * h(n)$$

Vi beregner $y_i(n) = x_i(n) * h(n)$ via frekvensdomenet:

$$y_i(n) = \mathrm{IDFT}\left\{\mathrm{DFT}(x_i(n)) \cdot \mathrm{DFT}(h(n))\right\}$$

der lengden til DFT og IDFT er lik $L+M-1$.



Signalene $y_i(n)$ stilles opp som vist i figuren over og legges så sammen.