Dette er et uoffisielt LF og det vil kunne bli revidert ved en senere anledning.

Oppgave 1

a) Vi velger $x_1 = \omega$ og $x_2 = i_a$, ved hjelp av blokkdiagrammet får vi: $\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(K_T x_1 - B x_2)$ og $\dot{x}_1 = \frac{1}{L_a}(u_a - R_a x_1 - K_e x_2)$. Dette gir følgende tilstandsrommodell:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{2}$$

b) Vi deler opp oppgaven ved å sette opp uttrykket fra i_a og T_L til ω først:

$$\omega = \frac{1}{Js}(T_L + K_T i_a - B\omega) \tag{3}$$

$$\omega(1 + \frac{B}{Js}) = \frac{1}{Js}(T_L + K_T i_a) \tag{4}$$

$$\omega = \frac{1}{Js + B}(T_L + K_T i_a) \tag{5}$$

Vi finner nå uttrykket fra ω til i_a (husk å sette den andre inngangen u_a til 0):

$$i_a = \frac{1}{L_a s}(-R_a i_a - K_e \omega) \tag{6}$$

$$i_a(1 + \frac{R_a}{L_a s}) = -\frac{K_e}{L_a s}\omega \tag{7}$$

$$i_a = -\frac{K_e}{L_a s + R_a}\omega \tag{8}$$

Vi kan nå sette inn uttrykket for ω:

$$i_a = -\frac{K_e}{(L_a s + R_a)}\frac{1}{(Js + B)}(T_L + K_T i_a) \tag{9}$$

$$i_a(1 + \frac{K_e K_T}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a}) = \frac{-K_e}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a} T_L \tag{10}$$

$$i_a = \frac{-K_e}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + K_T K_e + BR_a} T_L \tag{11}$$

Denne oppgaven kan også løses ved manipulring av blokk-diagrammet.

c) Hvis vi ser på den elektriske delen av systemet (setter $\omega = 0$) får vi:

$$i_a = \frac{1}{L_a s + R_a} u_a = \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{L_a}{R_a} s + 1} u_a = \frac{K_a}{T_a s + 1} \tag{12}$$

ved å la tidkonstanten gå mot null får vi $T_a = \frac{L_a}{R_a} \to 0$, hvilket vil si $L_a << R_a \Rightarrow \frac{1}{L_a s + R_a} \approx \frac{1}{R_a}$. Den nye forenklede utgaven av ligning (1.1) blir da:

$$i_a = \frac{-K_e}{J R_a s + K_T K_e + B R_a} T_L \tag{13}$$

d) Vi skriver om ligning (1.1) til:

$$\frac{i_a}{T_L}(s) = \frac{\frac{-K_e}{J L_a}}{s^2 + \frac{(J R_a + B L_a)}{J L_a} s + \frac{(K_T K_e + B R_a)}{J L_a}} \tag{14}$$

Hvis vi sammenlikner denne likningen for et resonansledd i formelsamlingen ser vi at nevneren er $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$. Den udempede resonansfrekvensen blir dermed:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e + B R_a}{J L_a}} \tag{15}$$

og den relative dempningskonstanten blir:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(J R_a + B L_a)}{J L_a} \tag{16}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_0} \frac{J R_a + B L_a}{J L_a} \tag{17}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{J R_a + B L_a}{\sqrt{J L_a (K_T K_e + B R_a)}} \tag{18}$$

e) En tapsfri motor vil ha ingen viskøs demping (B=0) og ingen ohmske tap (R=0) $\Leftrightarrow \zeta = 0$. Motoren vil være på stabilitetsgrensa, så den vil oscillere med konstant utslag. Vi kan regne ut responsen ved å se på formelen for sprangrespons for et system av 2. orden med $\zeta = 0$:

$$i_a = K(1 - \cos(\omega_0 t)) \tag{19}$$

hvor $K = \frac{-1}{K_T}$ og $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T K_e}{J L_a}}$ Denne siste utregningen i ligning (19) er ikke et krav for å få alle poengene på denne oppgaven

Oppgave 2

a) Vi har et nullpunkt i høyre halvplan, dvs. at vi har et *ikke-minimum-fase(IMF)-system*. Den økte negative fasen gjør det vanskelig å oppnå rask og nøyaktig regulering samtidig som kravene til stabilitesmarginer er tilfredsstilt.

Det som kjennetegner sprangresponsen for dette systemet er at vi få et utslag i motsatt retning før det svinger inn mot referansen.

Prosessen er åpent stabil ettersom begge polene er i venstre halvplan.

b) Vi har transferfunksjonen:

$$h_u(s) = 2\frac{1 - 0.5s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = K\frac{1 - T_z s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \tag{20}$$

siden vi ikke har noen rene integrasjoner får vi:

$$|h_u(j\omega)|_{\omega<<1} = K = 2 = 6\text{dB} \tag{21}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5(\text{negativ pol, } -90^o \text{ og -1}) \tag{22}$$

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 2(\text{positivt nullpunkt, } -90^o \text{ og } +1) \tag{23}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10(\text{negativ pol, } -90^o \text{ og -1}) \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Se figur 1 for asymptotene.

c) Vi må bestemme kritisk forsterkning og ω_{180} for å bruke Ziegler-Nichols' metode. I figur 1 er både kritisk forsternking $\Delta K_{pk} \approx 6,5\text{dB} = 2,11$ og $\omega_{180} \approx 5$ rad merket. Fra tabellen for Ziegler-Nichols' får vi da:

$$K_p = 0,45 \cdot K_{pk} = 0,95 \tag{26}$$

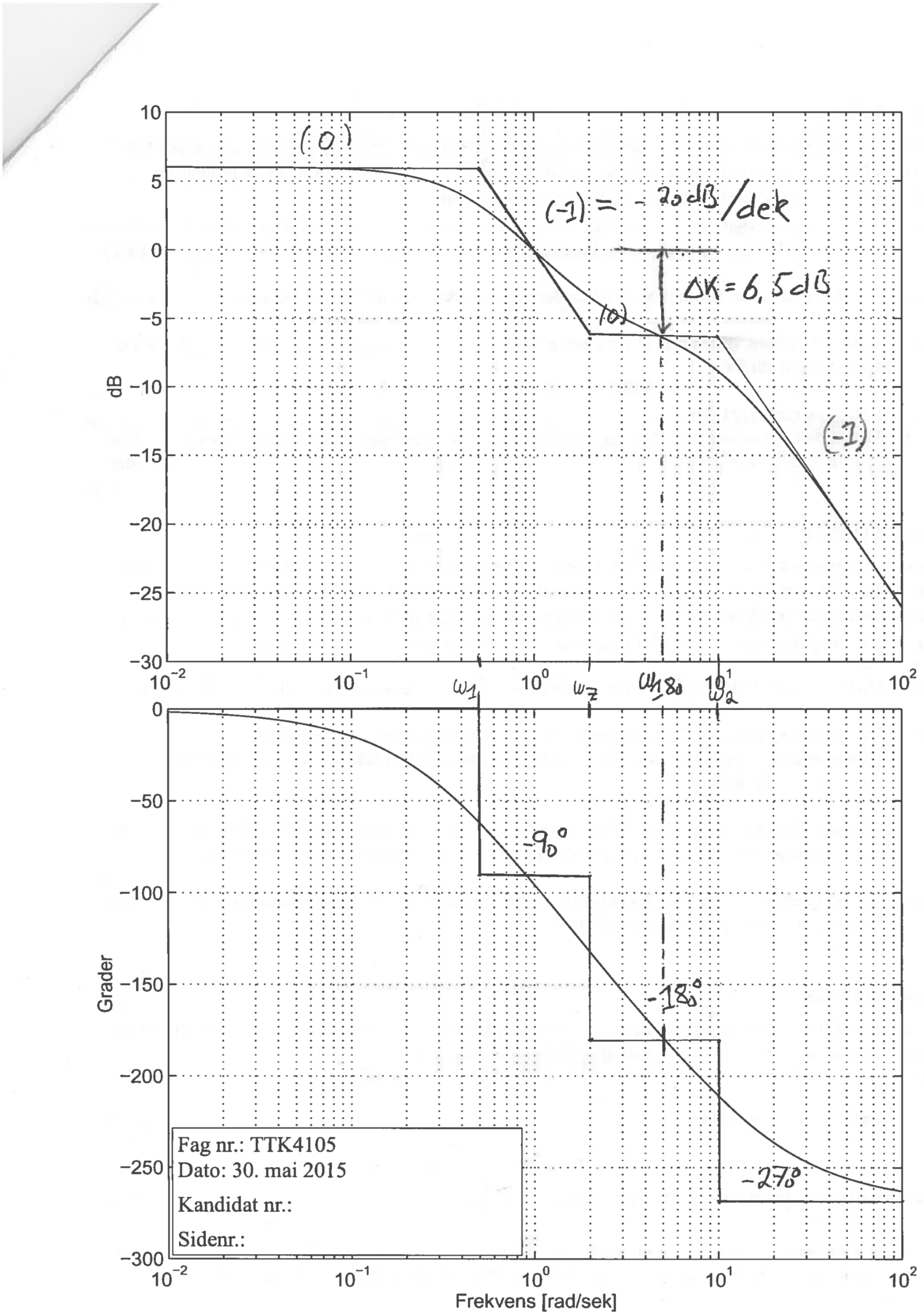
$$T_i = 0,85 \cdot T_k = 0,85 \cdot \frac{2\pi}{\omega_{180}} = 1,07 \tag{27}$$

d) Fra figur 2:

$$\psi = 35^o \tag{28}$$

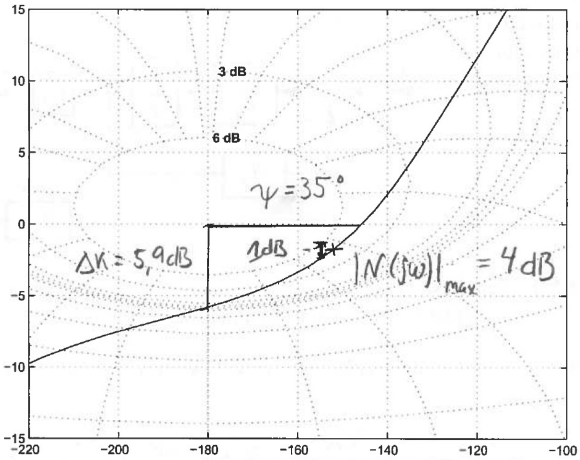
$$\Delta K = 5,9\text{dB} \tag{29}$$

Vi legger merket til at å øke forsterkningen tilsvarer å parallellforskyve Nichols diagrammet i amplitude-retning. I figur 2 ser vi at vi kan øke forsterkningen med 1 dB. Vi kan da



figur 2.1

Figur 1: Oppgave 2b Asymptoter



Figur 2: Oppgave 2d Nichols

regne ut $K_{p,ny}$ som følger (dette kreves ikke for maks poeng): Først regner vi ut forsterkningen i prosess med opprinnelig regulator $h_0(s=0) = h_r \cdot h_u(s=0) = \frac{K_p K}{T_i} = 4,99$dB. Vi lurer på hvor mye vi kan øke K_p med for å få en forsterkning på 1 dB mer, vi kaller økningen før K':

$$20 \cdot \log(K' \frac{K_p K}{T_i}) = (4,99 + 1)\text{dB} \tag{30}$$

$$K' = \frac{T_i \cdot 10^{\frac{5,99}{20}}}{K_p K} = 1.12 \tag{31}$$

$$K_{p,ny} = K' \cdot K_p = 1,07 \tag{32}$$

Kommentar: I denne oppgaven er det en feil i oppgavesettet. Høydekurvene i Nicholsdiagrammet viser følgeforholdet $M(j\omega)$ og ikke avviksforholdet $N(j\omega)$ (denne delen av diagrammet er opp ned). Studenter som påpekte dette på eksamen ble belønnet med et halvt poeng ekstra. På tross av denne feilen er oppgaven like meningsfylt.

e) Først setter vi opp transferfunksjonen fra $r(t)$ til $e(t)$:

$$e = r - h_0 e \tag{33}$$

$$e = \frac{1}{1+h_0} r = \frac{1}{1+\frac{t_0}{n_0}} r = \frac{n_0}{n_0 + t_0} r \tag{34}$$

Innsatt for $h_0 = h_r h_u$:

$$e(s) = \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} r(s) \tag{35}$$

Vi kan nå bruke sluttverdi teoremet for å regne ut det stasjonære avviket for e(t) når $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{T_i s(1+2s)(1+0.1s)}{T_i s(1+2s)(1+0.1s) + 2K_p(1-0.5s)(1+T_i s)} \frac{1}{s^2} = \frac{T_i}{2K_p}$$

f) En diskret regulator med tastetid T tilsvarer å legge til en ekstra tidsforsinkele på $T/2$. Tastetiden skal gi kun 2^o mindre fasemargin:

$$\omega_c \frac{T}{2} < 2 \cdot \frac{\pi}{180} \tag{36}$$

$$T < 2 \cdot 2 \frac{\pi}{180} \frac{1}{\omega_c} = 0,05 \tag{37}$$

Dette er akseptabelt.

Oppgave 3

a) Dette systemet er ulinær pga. det kvadratiske leddet $-cx^2$. Systemet er også autonomt fordi det ikke har noen eksterne pådrag.

b) Vi lineariserer systemet, $\dot{x} = f(x)$, rundt punktet $x^* = 0$:

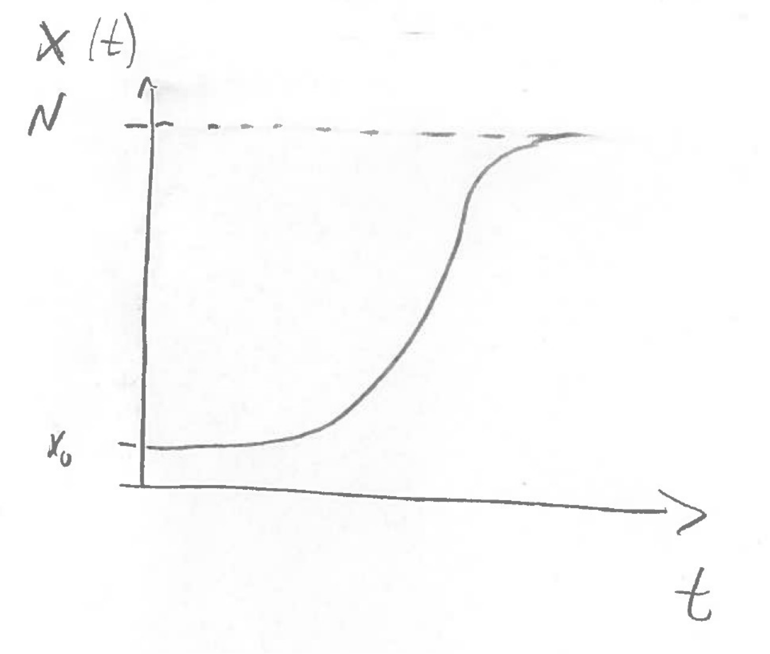
$$\dot{x} = \frac{df}{dx}|_{x=x^*} x = [cN - 2cx|_{x=x^*}]x = cNx \tag{38}$$

Dette gir tidforløpet $x(t) = e^{cNt}$ for små x.

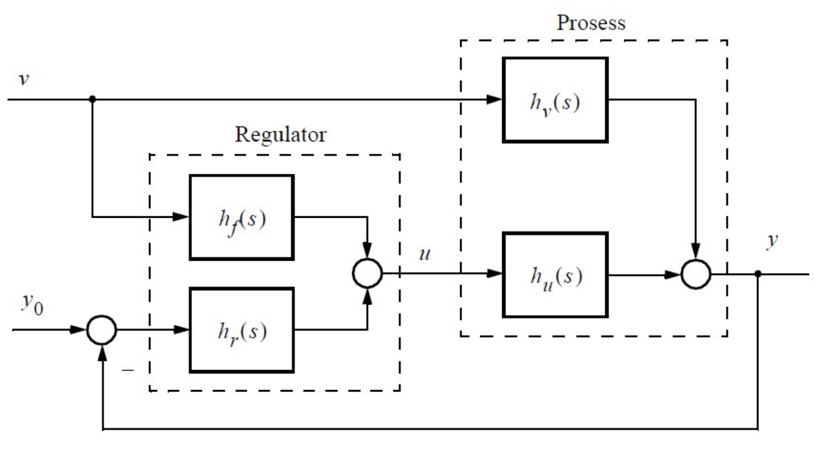
c) Vi regner ut likevektspunkter for systemet:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = N \tag{39}$$

Vi ser at i starten vil systemet ha tidforløpet vi fant i under forrige punkt. Etter en stund vil det ulinære leddet bli dominerende og systemet vil svinge seg inn mot verdien $x(t) = N$, vist i figur 3.



Figur 3: Oppgave 3c Skisse av foreløp for smittet befolkning



Figur 4: Oppgave 4a blokkdiagram for fartøy

Oppgave 4

a) Se figur 4

b) Vi har Newtons 2. lov $F = ma$. I denne prossen har vi posisjonsmåling y dette gir følgende modell:

$$h_u = \frac{K}{Ts+1}\frac{1}{ms^2} \tag{40}$$

$$h_v = \frac{1}{ms^2} \tag{41}$$

c) Den ideelle forevkopling fjerner forstyrrelsen:

$$h_{fi}(s) = -\frac{h_v}{h_u} = -\frac{Ts+1}{K} \tag{42}$$

En mer realistisk foroverkopling vil være:

$$h_f(s) = -\frac{Ts+1}{K(T\alpha s+1)} \tag{43}$$

En statisk foroverkopling tilsvarer når frekvensen går mot 0 ($s \to 0$):

$$h_{fs}(s) = -\frac{1}{K} \tag{44}$$

Denne foroverkoplingen kan motvirke konstante forstyrrelser.

d) Vi har to integratorer i prosessen ($\frac{1}{s^2}$), dette gjør at fasen vil starte under -180 grader. Dersom vi inkluderer en integrator i regulatoren også vil fasen starte på -270 grader. Vi trenger en regulator med derivatvirkning for å få hevet fasen opp fra -180 grader.

Oppgave 5

a) Når skurken låner ut penger med pengestrøm $u(t)$ får vi lånet stige i tillegg til å avta:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + u(t) \tag{45}$$

Dersom vi kombinerer denne likningen med (5.1) kan vi finne en transferfunksjon fra $u(t)$ til $q(t)$:

$$x(s + \frac{1}{T}) = u \tag{46}$$

$$x = \frac{T}{Ts+1}u \tag{47}$$

Dersom vi setter inn dette uttrykket for x i likningen for q får vi transerfunksjonen:

$$q = (i + \frac{1}{T})\frac{T}{Ts+1}u = \frac{1+Ti}{1+Ts}u = -h_0 u \tag{48}$$

Vi vet at pengestrømmen består av forbruk og gjeldsbetjening (u = c + q), det gir blokkdiagrammet i oppgaven.

b) Vi regner ut $h(j\omega)$:

$$h(j\omega) = -\frac{1+Ti}{1+Tj\omega} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{1+Ti}{1+T^2\omega^2}(-1+T\omega j) \tag{49}$$

Legg merke til at vi får et negativt fortegn foran transferfunksjonen fra $u(t)$ til $q(t)$. Dette er fordi h_0 i et nyquist diagram antar en negativ tilbakekobling. Ved hjelp av dette uttrykket kan vi regne ut amplituden til $h(j\omega)$ og vinkelen. Grunnen til at vi må legge til π på vinkelen er at $Re(h(j\omega)) < 0$:

$$|h(j\omega)| = \frac{1+Ti}{1+T^2\omega^2}\sqrt{1+T^2\omega^2} = \frac{1+Ti}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \tag{50}$$

$$\angle h(j\omega) = \arctan(T\omega) + \pi \tag{51}$$

Av disse likningene er det lett å se at ved $\omega = 0$ så starter vi med amplitude (Ti+1) i rettning π. Når $\omega \to \infty$ går amplituden mot 0. Vinkelen øker fra π til 2π. Vi får dermed nyquist kurven vi ser i figure 5

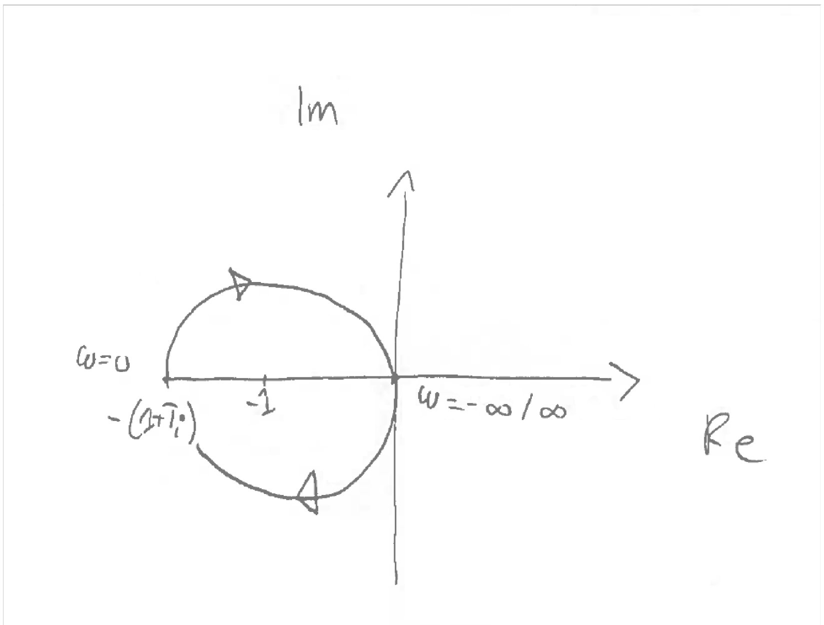
c) Vektoren $(1+h_0)$ har en negativ dreieretning rundt punktet (-1+0j), $\Delta\angle(1+h_0) = -2\pi$. Transferfunksjonen h_0 har ingen poler i høyre halvplan (så lenge T>0), $N_p = 0$. Vi kan ved hjelp av formel (V.11) regne ut antall poler i høyre halvplan for det lukkede systemet: $N_n = N_p - \frac{1}{2\pi}\Delta\angle(1+h_0) = 1$. Vi har dermed en pol i høyre halvplan, hvilket vil si at systemet er ustabilt. Dersom $i = 0$ vil vektoren $(1+h_0)$ få en negativ omdreining rundt punktet (-1+0j) og systemet vil være (marginalt) stabilt.

d) Fra oppgave a) har vi $x = \frac{T}{Ts+1}u$ og $u = c + q = c + (i + \frac{1}{T})x$. Setter vi disse to likningene sammen får vi:

$$x = \frac{T}{Ts+1}\left(c + (i + \frac{1}{T})x\right) \tag{52}$$

$$x(Ts + 1 - Ti - 1) = Tc \tag{53}$$

$$x = \frac{T}{Ts - Ti}c = \frac{1}{s-i}c \tag{54}$$



Figur 5: Oppgave 5b Nicholsdiagram for pyarmidespill

e) Denne oppgaven kan både løses på flere måter blant annet konvolusjon og residueregning: Alternativ 1 konvolusjon: Fra formelsamlingen kan vi finne at $h(t) = e^{it}$, dette gir:

$$x(t) = h(t) * c(t) = \int_0^t e^{i\tau} e^{\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{\alpha t} \int_0^t e^{(i-\alpha)\tau} d\tau \tag{55}$$

$$= e^{\alpha t} \frac{e^{(i-\alpha)t} - 1}{i - \alpha} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \tag{56}$$

Alternativ 2 residuregning: Vi har $c(s) = \frac{1}{s-\alpha}$. Dermed får vi $x(s) = \frac{1}{(s-i)(s-\alpha)}$, som vi kan bruke til å regne ut $x(t)$ ved hjelp av residuregning:

$$x(t) = (s - i)\frac{1}{(s-i)(s-\alpha)} e^{st}|_{s=i} + (s - \alpha)\frac{1}{(s-i)(s-\alpha)} e^{st}|_{s=\alpha} \tag{57}$$

$$= \frac{e^{it}}{i - \alpha} + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha - i} = \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \tag{58}$$

f) Denne oppgaven kan vi også løse på flere måter. Vi kan gjenta utregningene fra forrige oppgave med $\alpha = i$ eller vi kan bruke L'Hôpital:

$$x(t) = \lim_{\alpha \to i} x(\alpha) = \lim_{\alpha \to i} \frac{e^{it} - e^{\alpha t}}{i - \alpha} \text{ L'Hôpital} \rightarrow \tag{59}$$

$$= \lim_{\alpha \to i} \frac{-te^{\alpha t}}{-1} = te^{it} \tag{60}$$