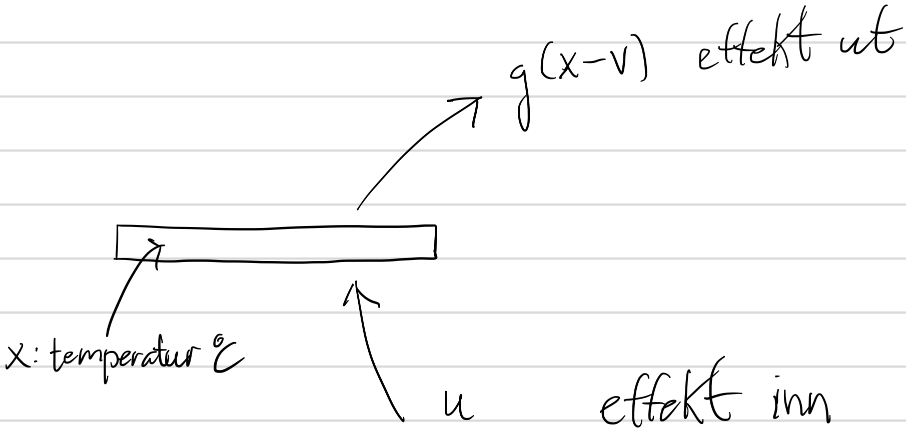
Øving 1

Rendell Cale , rendellc@stud.ntnu.no
MTTK

Oppgave 1

a)



Energibalanse gir

$$\Delta E = C\Delta x = u\Delta t - g(x-v)\Delta t$$

Deler med Δt og lar $\Delta t \to 0$:

$$\Rightarrow \quad C\frac{dx}{dt} = u - g(x-v)$$

Siden $v = 0°C$ får vi

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{1}{C}u - \frac{g}{C}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x} = -\frac{g}{C}x + \frac{1}{C}u}}$$

b) Vi har $\dot{x} = ax + bu$, $a = -\frac{g}{C}$, $b = \frac{1}{C}$

Har $x(t_0) = x_0$ og konstant $u = 500$ W $t \geq t_0$.

Dette gir

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x} - ax = bu$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x}e^{-at} - axe^{-at} = bue^{-at}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(xe^{-at}\right) = bue^{-at}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} d\left(xe^{-at}\right) = \int_{t_0}^{t} bue^{-at}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad xe^{-at} - x_0e^{-at_0} = -\frac{bu}{a}\left(e^{-at} - e^{-at_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,e^{-a(t-t_0)} - x_0 = -\frac{bu}{a}\left(e^{-a(t-t_0)} - 1\right)$$

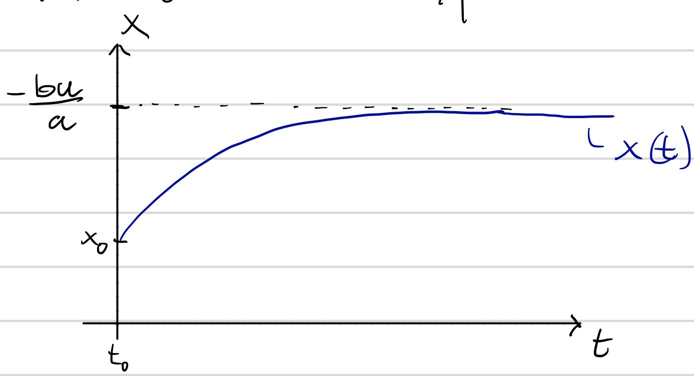
$$\Leftrightarrow \quad x = x_0e^{a(t-t_0)} - \frac{bu}{a}\left(1 - e^{a(t-t_0)}\right)$$

Når $t \to \infty$ vil $e^{a(t-t_0)} \to 0$ og

$$1 - e^{a(t-t_0)} \to 1$$

så $x(t) \to -\frac{bu}{a}$

Vi får dette forløpet:



For $t \geq t_1$ vil samme utledning gjelde men vi har nå

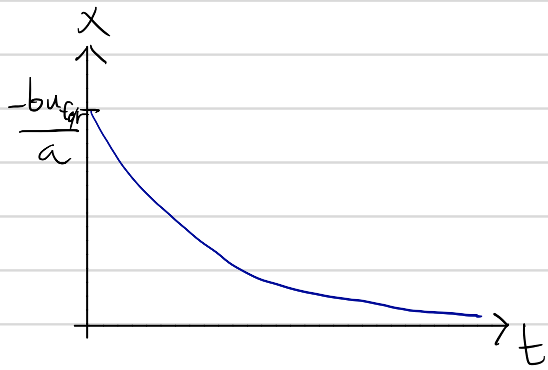
$$x_0 \leftarrow -\frac{b u_{før}}{a} \quad , \quad u_{før} = 500 \text{ W}$$

$$t_0 \leftarrow t_1$$

$$u \leftarrow 0 \text{ W}$$

Det gir

$$x(t) = -\frac{b \cdot u_{før}}{a} e^{a(t-t_1)}$$



Med tallverdier har vi da

$$a = -\frac{g}{C} = \frac{-2\ W/°C}{400\ J/°C}$$

$$= -0{,}005\ s^{-1}$$

$$b = \frac{1}{C} = \frac{1}{400\ J/°C} = 0{,}0025\ °C/J$$

Det gir at temperaturen etter lang tid har verdi:

$$x = -\frac{bu}{a} = -\frac{0{,}0025\ °C/J \cdot 400\ W}{-0{,}005\ s^{-1}}$$

$$\underline{\underline{= 200\ °C}}$$

c) Tidskonstanten T er gitt ved

$$T = -\frac{1}{a}$$

$$= \frac{C}{g}$$

Med tallverdier har vi

$$T = \frac{400\ J/°C}{2\ W/°C}$$

$$\underline{\underline{= 200\ s}}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker massebevarelse og har da at massen i tanken er

$$m = \rho A x \quad , [m] = kg$$

Massen som strømmer ut blir

$$q_m = \rho q = \rho K_v \sqrt{\Delta p} \quad , [q_m] = kg/s$$

Massen som strømmer inn blir

$$u_m = \rho u \quad , [u_m] = kg/s$$

Massebevarelse gir at

$$\dot{m} = u_m - q_m$$

$$\Rightarrow \rho A \dot{x} = \rho u - \rho K_v \sqrt{\rho g x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x} = -\frac{K_v}{A}\sqrt{\rho g x} + \frac{1}{A} u}}$$

Dette er en ulineær modell pga. $\sqrt{x}$ i uttrykket.

b) Vi antar $u = u_s$ og statisk system. Det betyr at $\dot{x} = 0$ som gir

$$0 = -\frac{K_v}{A}\sqrt{\rho g x_s} + \frac{1}{A} u_s$$

$$\Leftrightarrow \quad K_v \sqrt{\rho g x_s} = u_s$$

$$\Leftrightarrow \quad x_s = \frac{u_s^2}{K_v^2 \rho g}$$

Vi må ha $u = q$ siden tanknivået er konstant.

Oppgave 3

a) $$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - d_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2 \qquad (2)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + c_2 x_1 x_2 \qquad (3)$$

Ulineært system pga. x_1^2 og $x_1 x_2$ leddene.
Autonomt fordi det ikke avhenger eksplisitt av t.
Kan altså skrive

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Dersom det er ingen harer vil $x_1 = 0$ og ligningen vi får blir

$$\dot{x}_2 = -a x_2 \quad , \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2(t) = x_{20} e^{-a(t-t_0)}}}$$

b) Leddet $-d_1 x_1^2$ vil gjøre seg gjeldene dersom harepopulasjonen blir for stor og den vil da senke den. Det er dette som modellerer at vi ikke kan ha for mange harer på endelig med ressurser.

c) Hvis harepopulasjonen anses som liten ift. beiteressursene kan vi tilnærme dette med $d_1 = 0$. Det gir

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 \quad , \quad x_1(t_0) = x_{10} \quad , \quad x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1(t) = x_1 e^{a(t-t_0)}}}$$

Når populasjonsveksten har stagnert vil $\dot{x}_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = a_1 x_1 - d_1 x_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a_1}{d_1}$$

Den maksimale harepopulasjonen er $x_1 = \frac{a_1}{d_1}$.

d) Økologisk tror jeg forklaringen er at reven er totalt avhengig av haren, mens haren er "selvforsynt". Derfor vil harepopulasjonen kunne tilpasses ethvert beiteforhold.

Dette gjelder ikke reven matematisk fordi den er avhengig av at leddet $+c_2 x_1 x_2$ er stort nok til å motvirke tapet fra $-a_2 x_2$.