JS, December 10, 2003
Institutt for Teknisk Kybernetikk
NTNU, Trondheim

TTK 4115/SIE3015 - Linear Systems

Løsningsforslag til eksamen 5. Des, 2003

Oppgave 1

a)(5%) Styrbarhetsmatrisen er gitt ved:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -1 + 2\alpha \end{bmatrix} \tag{1}$$

For at systemet skal være styrbart må vektorene være lineært uavhengige. Krever da $\alpha \neq -1 + 2\alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$. Ekvivalent er å regne ut determinanten og kreve den ulik 0.

b)(5%) Det karakteristiske polynomet blir:

$$(s + 2 - i)(s + 2 + i) = s^2 + (2 + i)s + (2 - i)s + (2 + i)(2 - i) = s^2 + 4s + 5 \tag{2}$$

Systemmatrisen med tilstandstilbakekoplingen blir:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & -k_2 \\ -1 + 4k_1 & 2 + 4k_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Regner så ut det karakteristiske polynomet til $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}) &= (s - 1 + k_1)(s - 2 - 4k_2) - k_2(1 - 4k_1) \qquad (4) \\ &= s^2 + (-1 + k_1)s + (-2 - 4k_2)s + (-1 + k_1)(-2 - 4k_2) - k_2(1 - 4k_1) \\ &= s^2 + (-3 + k_1 - 4k_2)s + 2 - 2k_1 + 3k_2 \Rightarrow \\ -3 + k_1 - 4k_2 &= 4 \Rightarrow k_1 = 7 + 4k_2 \\ 2 + 3k_2 - 2k_1 &= 5 \Rightarrow k_2 = -\frac{17}{5} \Rightarrow k_1 = -\frac{33}{5} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)(5%) Definisjonen på egenverdier og egenvectorer er:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{5}$$

hvor λ_i er egenverdien og $\mathbf{x}_i$ er tilhørende egenvektor.

Vi kan da skrive $\mathbf{AQ}$ som:

$$\begin{aligned}\mathbf{AQ} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \dots & \lambda_n\mathbf{x}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\end{aligned} \tag{6}$$

Som ved å post multiplisere med $\mathbf{Q}^{-1}$ gir oss

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1} \tag{7}$$

Altså, $\mathbf{Q}$ er en matrise med egenvektorene som kolonner og $\bar{\mathbf{A}}$ er en matrise med tilhørende egenverdier på diagonalen.

b)(3%) For at $\mathbf{A}$ skal være diagonaliserbar må det eksistere n lineært uavhengige egenvektorer slik at $\mathbf{Q}$ er inverterbar.

c)(4%) Systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ er stabilt hvis og bare hvis $Re[\lambda_i(\mathbf{A})] \leq 0,\ \forall i$ og alle egenverdier med realverdi lik null er enkle røtter i det minimale polynomet av $\mathbf{A}$.

Ekvivalent er: Systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ er stabilt hvis og bare hvis $Re[\lambda_i(\mathbf{A})] \leq 0,\ \forall i$ og for alle egenverdier med realverdi lik null og algebraisk multiplisitet $q_i \geq 2$, $rank(\mathbf{A} - \lambda_i) = n - q_i$, hvor n er dimensjonen til $\mathbf{x}$.

Ekvivalent er: Jordan blokk argumenter, se side 130 i Chen.

d)(3%) Systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ er asymptotisk stabilt hvis og bare hvis $Re[\lambda_i(\mathbf{A})] < 0,\ \forall i$.

e)(5%) La $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ siden det er en av betingelsene i teorem 5.5 i chen. Vi har ligningen:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Dette gir oss 3 likninger med 3 ukjente:

$$\begin{aligned} -2m_{11} + 4m_{12} &= -1 \\ 2m_{12} + 2m_{22} + m_{11} &= 0 \\ 2m_{12} + 6m_{22} &= -1 \Rightarrow \\ m_{11} &= \frac{1}{2} + 2m_{12} \\ m_{22} &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}m_{12} \Rightarrow \\ 2m_{12} + 2m_{22} + m_{11} &= 2m_{12} + 2\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}m_{12}\right) + \frac{1}{2} + 2m_{12} = 0 \Rightarrow \\ m_{12} &= -\frac{1}{20} \Rightarrow m_{11} = \frac{4}{10} \Rightarrow m_{22} = -\frac{3}{20} \end{aligned} \tag{9}$$

$\mathbf{M}$ blir altså:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.05 \\ -0.05 & -0.15 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Dersom matrisen $\mathbf{M}$ er positiv definitt er alle egenverdiene til $\mathbf{A}$ i venstre halvplan.

Hver og en av de 4 følgende tester er nødvendig og tilstrekkelig for at en matrise er p.d.:

1. $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$
2. $\lambda_i(\mathbf{M}) > 0, \forall i$
3. Alle øvre submatriser $\mathbf{M}_k$ har positive determinanter
4. Alle pivot elementene, uten rad bytter, er positive.

Determinanten til $\mathbf{M}$ er ikke positiv og matrisen er ikke p.d. i følge punkt 3. Systemet er da ikke asymptotisk stabilt.

f)(5%) Mange fremgangsmåter, men to mulige er:

1. La $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{M}^{-1}$ hvor $\mathbf{M}$ og $\bar{\mathbf{A}}$ er definert som i a)
2. $e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$

Metode 1: Finner først egenverdiene til å bli:$\lambda_1 = -1.4495$ og $\lambda_2 = 3.4495$.

Tilhørende egenvektorer blir:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} -0.9757 \\ 0.2193 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} -0.4100 \\ -0.9121 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dette gir oss:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.91 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} + 0.09 \cdot e^{3.4495 \cdot t} & 0.41 \cdot e^{3.4495 \cdot t} - 0.41 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} \\ 0.20 \cdot e^{3.4495 \cdot t} - 0.20 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} & 0.09 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} + 0.91 \cdot e^{3.4495 \cdot t} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Metode 2:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{s-3}{s^2-2s-5} & \frac{2}{s^2-2s-5} \\ \frac{1}{s^2-2s-5} & \frac{s+1}{s^2-2s-5} \end{bmatrix} \right\} \qquad (13) \\ &= \begin{bmatrix} 0.91 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} + 0.09 \cdot e^{3.4495 \cdot t} & 0.41 \cdot e^{3.4495 \cdot t} - 0.41 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} \\ 0.20 \cdot e^{3.4495 \cdot t} - 0.20 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} & 0.09 \cdot e^{-1.4495 \cdot t} + 0.91 \cdot e^{3.4495 \cdot t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a)(4%) En minimal realisasjon på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{14}$$

har følgende egenskaper:

1. Det er ikke mulig å representere systemet ved bruk av færre tilstandsvariable.
2. ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$) er et styrbart par.
3. ($\mathbf{A}$,$\mathbf{C}$) er et observerbart par.
4. Ekvivalent til de to foregående punktene er $dim(\mathbf{A}) = deg(\mathbf{G}(s))$

b)(5%) En transferfunksjon $G(s)$ er realiserbar hvis og bare hvis $G(s)$ er en rasjonal proper matrise. I vårt tilfellet er graden i nevneren lik 2 og i telleren lik 1, funksjonen er strengt proper og dermed realiserbar. (Teorem 4.2 i Chen)

c)(6%)Vi må splitte $\mathbf{G}(s)$ slik at $\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_{sp}(s) + \mathbf{G}(\infty)$. Vi ser at element 1 er en strengt proper transferfunksjon. Element 2 derimot, må deles. Det er enkelt å se at $G_2(\infty) = \frac{1}{2}$. Videre setter vi opp:

$$\begin{aligned} G_2(s) &= G_{2sp} + G_2(\infty) \Rightarrow \\ \frac{1+s}{1+2s} &= \frac{\alpha}{1+2s} + \frac{1}{2} = \frac{s + \frac{1}{2} + \alpha}{1+2s} \Rightarrow \\ 1+s &= \frac{1}{2} + \alpha + s \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

Vi setter videre opp utrykket for $\mathbf{G}(s)$ og bruker formlene i vedlegget til å sette opp tilstandsrommet, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{4s^2+4s+1} & \frac{1}{2(1+2s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{4s^2+4s+1} \begin{bmatrix} -2 & 0.5(1+2s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2+s+1} \begin{bmatrix} [0 \quad 0.25]s + [-0.5 \quad 0.125] \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & -0.5 & 0.125 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

En kan også sette opp en 3'de ordens realisasjon:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Oppgave 4

a)(4%) Dette er en åpen søyfe tilstandsestimator. Estimatoren bruker ikke utgangen til å korrigere estimater som er feil for eksempel pga av modellfeil. For å få nogenlunde tilfredstillende estimater fra denne fremgangmåten må modellen være svært nøyaktig. Legg også merke til at initialtilstandene i den faktiske prosessen og etsimatoren må være like.

b)(4%) Her brukes utgangen som et direkte estimat av tilstanden. Vi vil alstå la støyen ha udempet effekt på estimatet. Dette kan sees fra transferfunksjonen fra støy til estimat.

$$\frac{\hat{x}}{w}(s) = 1 \tag{18}$$

c)(6%) Vi skriver systemet som

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (a-l)\hat{x} + bu + l(x+w) \Rightarrow \\ \hat{x} &= \frac{1}{s-a+l}(bu + lx + lw) \end{aligned} \tag{19}$$

Ved hjelp av superposisjon får vi:

$$\frac{\hat{x}}{w}(s) = \frac{l}{s-a+l} = \frac{8}{s+10} \tag{20}$$

d)(6%) Vi sammenligner først estimatoren i a) med den i c):

- c) bruker utgangen y til å korrigere estimatet slik at estimatet blir mindre følsomt for modellfeil enn i a).
- I c) vil estimatet svinge seg inn til korrekt verdi selv om initialtilstandene er forskjellige.
- I a) vil den ukjente forsyrrelsen v føre til at estimatet raskt avviker fra virkelige verider.
- En teoretisk fordel med a) til fordel for c) er at hvis modellen er perfekt og initialtilstanden kjent, vil ikke målestøyen ha noen innvirkning på estimatet, men dette er er svært sjelden/aldri tilfellet.

Vi ser så på estimatoren i b) sammenlignet med den i c):

- Vi ser av transferfunksjonen fra støyen til estimatet at støyen blir lavpass filtert i c). Dette er en fordel siden støy som regel er høyfrekvent.
- Lavfrekvent støy vil dempes i c)($\frac{\hat{x}}{w}(0) = \frac{8}{10}$) mot enhetsforsterkning i b).
- En teroretisk fordel med b) fremfor c) er at hvis støyen er neglisjerbar, vil vi ikke ha noen dynamikk mellom mellom virkelig og estimert verdi, og derfor ha et bedre estimat.
- (Kreves ikke) Utfall av målinger i b) vil ikke gi oss noe estimat av tilstanden, men i c) kan l settes lik null og estimatoren kan kjøre en bergrenset periode som åpen sløyfe estimator.

Oppgave 5

a) (4%) Ligningene for kontinuerlig Kalman-filter er gitt i formelsamlingen. Vi må da definere matrisene som inngår i filteret: $\mathbf{F} = -0.4$, $\mathbf{B} = 0.1$, $\mathbf{H} = 1$, $\mathbf{Q}$ er gitt, og $\mathbf{R}' = 0.01\mathbf{R}$., $\mathbf{G} = 1$ Ekstra informasjon som trengs er $\mathbf{x}(0)$ og $\mathbf{P}(0)$.

b) (3%) Når $\mathbf{Q}$ økes øker forsterkningen.

c) (3%) Ingenting skjer med forsterkningen.

d) (5%) Faktorisering av spektraltettheten gir:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Hvitstøy gjennom dette filteret gir derfor den ønskede spektraltettheten. Vi vil nå augmentere ligningene for å ta hensyn til modelleringen av den fargede støyprosessen. ligningene blir nå:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u_d + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\
y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad R = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Har man kommet hit vil man få hele oppgaven riktig. Legg likevel merke til at $R = 0$. En må da enten legge til en kunstig målestøy slik at R ikke er singulær eller kjøre en lineær transformasjon på systemet slik at utgangen vil inneholde w.

Oppgave 6

a) (4%) Et normalfordelt hvitsstøy signal med middelverdi 0 og varians 1 har følgende autokorrelasjonsfunksjon og effektspekter.

$$\begin{aligned}
R_w(\tau) &= \delta(\tau) \\
S_w(s) &= 1
\end{aligned} \tag{21}$$

b) (6%) For å finne effektspekteret gjør vi som på side 130 i H&B:

$$\begin{aligned} S_v(s) &= G(s)G(-s)S_w(s) = \frac{K}{1+Ts} \cdot \frac{K}{1+T(-s)} \cdot 1 \quad (22) \\ &= \frac{K^2}{1-T^2s^2} = \frac{\left(\frac{K}{T}\right)^2}{-s^2+\left(\frac{1}{T}\right)^2} \Rightarrow \\ S_v(j\omega) &= \frac{\left(\frac{K}{T}\right)^2}{\omega^2+\left(\frac{1}{T}\right)^2} \end{aligned}$$

Vi finner den inverse laplace transformen til transferfunksjonen

$$g(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (23)$$

Autokorrelasjonsfunksjonen er gitt ved følgende utrykk der vi har antatt $t_2 > t_1$ og brukt at $z = y + t_2 - t_1 = y + \tau$(for at diracen skal bli lik 1) :

$$\begin{aligned} R_v(t_1,t_2) &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(y)g(z)R_w(y-z+t_2-t_1)dydz \quad (24) \\ &= \frac{K^2}{T^2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\frac{y}{T}}e^{-\frac{z}{T}}\delta(y-z+t_2-t_1)dydz \\ &= \frac{K^2}{T^2}\int_0^{t_1} e^{-\frac{y}{T}}e^{\frac{-y-\tau}{T}}dy \\ &= \frac{K^2}{T^2}e^{-\frac{\tau}{T}}\int_0^{t_1} e^{-\frac{2y}{T}}dy = -\frac{K^2}{2T}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{2t_1}{T}}-1\right) \end{aligned}$$

Vi får tilsvarende svar for $t_1 > t_2$ og utrykket for autokorrelasjonen dersom vi ikke har antatt at V er stasjonær er gitt ved:

$$R_v(t_1,t_2) = \begin{cases} -\frac{K^2}{2T}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{2t_1}{T}}-1\right) & t_2 \geq t_1 \\ -\frac{K^2}{2T}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{2t_2}{T}}-1\right) & t_2 < t_1 \end{cases} \quad (25)$$

Siden vi vet at V er stasjonær kan vi la $t_1, t_2 \to \infty$ og få følgende utrykk for autokorrelasjonen:

$$R_v(\tau) = \frac{K^2}{2T}e^{-\frac{\tau}{T}} \quad (26)$$

Dette er i overenstemmelse med at mean square verdien til V er:

$$E[v(t)v(t)] = \frac{K^2}{2T} \quad (27)$$

c) (5%) Grafen knekker ved ca $8Hz = 50.3\ rad/s$. Fra utrykket kan vi da regne ut T

$$T = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{1}{50.3} \approx 0.02 \tag{28}$$

K kan finnes fra utrykket ved å sette $\omega = 0$ slik at $K \approx \sqrt{10}$.

Oppgave 5 og 6 for SIE3015-vesjonen

Oppgave 5

a) Transfer funksjonen i s-planet blir:

$$H(s) = K_p \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1 + T_i s}{T_i s} \tag{29}$$

$H(z)$ er gitt av $\mathcal{Z}$-transformen:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}\left\{ K_p(1 - e^{-Ts}) \frac{1 + T_i s}{T_i s^2} \right\} \\ &= K_p(1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{T_i s^2} + \frac{1}{s} \right\} \\ &= K_p(1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{T_i} \cdot \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \\ &= K_p + \frac{K_p}{T_i} \cdot \frac{T z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = \frac{K_p(T_i - T_i z^{-1}) + T z^{-1})}{T_i(1 - z^{-1})} \\ &= K_p \frac{T_i + (T - T_i) z^{-1}}{T_i(1 - z^{-1})} \end{aligned} \tag{30}$$

b) Algoritmen blir:

$$u(k) = u(k-1) + K_p e(k) + K_p \left(\frac{T}{T_i} - 1 \right) e(k-1) \tag{31}$$

Oppgave 6

a) Frekvensresponsen $H(j\omega)$ er gitt ved:

$$H(j\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega h} + \frac{1}{4} e^{-2j\omega h} \tag{32}$$

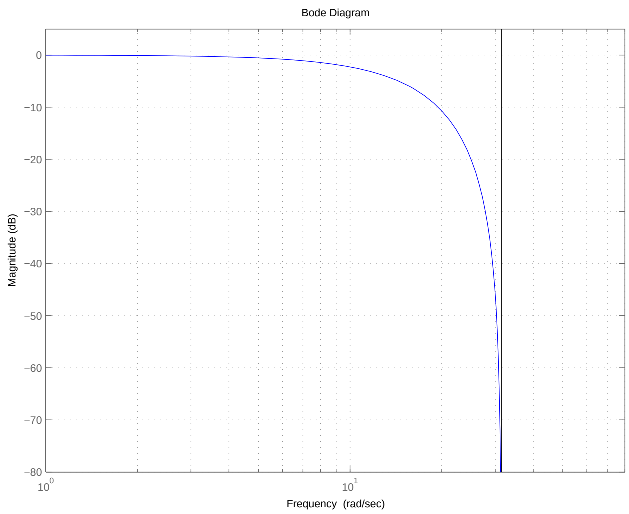

Figure 1: Frekvensrespons

b) Impulseresponsen er gitt av den inverse z-transformen:

$$h(k) = \frac{1}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left\{1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right\} = \frac{1}{4}(\delta(k) + 2\delta(k-1) + \delta(k-2)) \tag{33}$$

h(0)=0.25, h(1)=0.5, h(2)=0.25, h(k>2)=0.

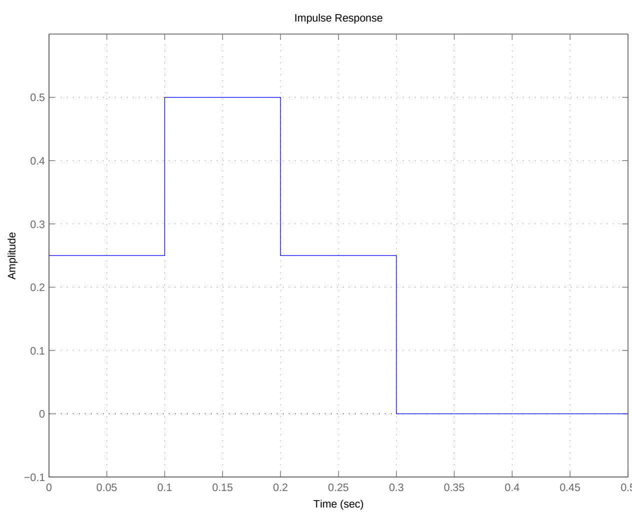

Figure 2: Impulsrespons

c) Transferfunksjonen er gitt ved:

$$H(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{z^2 + 2z + 1}{z^2}\right) \tag{34}$$

Proper transferfunksjon og dobbel pol i origo gir stabilitet.

Dobbelt nullpunkt i -1