Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 1

a)
$$x = d_1 + q_1$$
$$y = d_2 + q_2$$
$$z = -d_3 - q_3$$

b)
$$q_1 = x - d_1$$
$$q_2 = y - d_2$$
$$q_3 = -\cancel{d_3} + \cancel{d_3}$$

c)
$$v = r\omega \quad (1)$$
$$J\dot{\omega} = \cancel{T} - \cancel{T_L} \quad (2)$$
$$m\dot{v} = F - F_f = F - dw + K \quad (4)$$
$$T_L = \cancel{F_f} \quad (3)$$

$$m\dot{v} = F - F_f \quad \text{(setter inn (1) og (3))}$$
$$m \cdot r\dot{\omega} = \frac{T_L}{r} - F_f \quad \Big| \cdot r$$
$$mr^2\dot{\omega} = T_L - F_f r \quad \text{(adderer med (2))}$$
$$mr^2\dot{\omega} + J\dot{\omega} = \cancel{T_L} - F_f r + T - \cancel{T_L}$$
$$\underline{(J + mr^2)\dot{\omega} = T - rF_f}$$

d) (2) : momentbalanse

(4) : Newtons andre lov, kraftbalanse

e) $T = -\frac{1}{a}$

$$(J+mr^2)\dot{\omega} = T - rF_f$$
$$= T - r(d\omega + k)$$
$$= T - dr\omega - rk$$
$$= -dr\omega + T - rK$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{-dr}{J+mr^2}\omega + \frac{T-rK}{J+mr^2}$$

Ser da at $a = -\frac{dr}{J+mr^2}$

$$T = -\frac{1}{\frac{-dr}{J+mr^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{J+mr^2}{dr}$$

f) Når $t \to \infty$ vil $\dot{\omega} \to 0$ og $(\omega_r - \omega) \to e_s$

Det gjør at

$$\dot{\omega} = -\frac{dr}{J+mr^2}\omega + \frac{K_p(\omega_r-\omega) - rK}{J+mr^2}$$

blir til (går mot)

$$0 = -\frac{dr}{J+mr^2}\omega_s + \frac{K_p e_s - rK}{J+mr^2}$$

$$0 = -d_r w_s + K_p e_s - K r$$

Har at: $w_s = w_r - e_s$

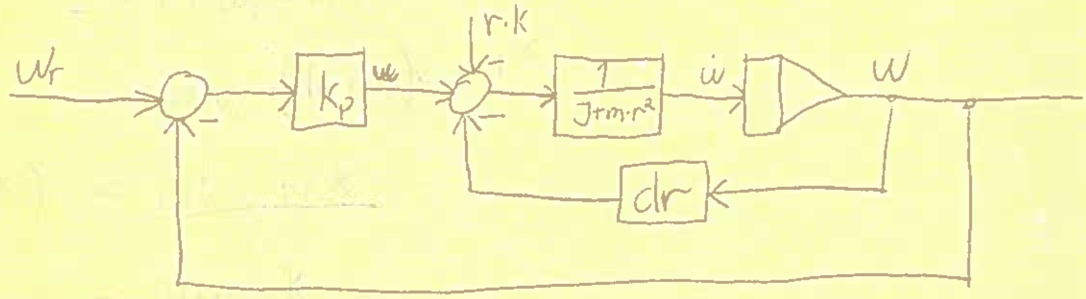
$$K r = -d_r w_r + d_r e_s + k_p e_s$$

$$= -d_r w_r + (d_r + k_p) r_s e_s$$

$$e_s = \frac{K_r + d_r w_r}{(d_r + k_p) r}$$

$$= \frac{K + d\,w_r}{d_{K_p} + d K_p} \cdot r$$

g)



h) En PI-regulator fordi i leddet vil håndtere den konstante forstyrrelsen.

i) Kalles dødgang og den fører til at systemet blir ulineært og vanskeligere å håndtere

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 2

Hvis $\dot{x} = -3x$ vil

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (-3x_n)$$
$$= x_n(1-3h)$$

Kravet sier at:

$$|x_{n+1}| \leq |x_n|$$

$$|x_n(1-3h)| \leq |x_n|$$

$$\cancel{|x_n|}|1-3h| \leq \cancel{|x_n|}$$
$$|1-3h| \leq 1$$

$$\left|\frac{1}{3} - h\right| \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq h \leq \frac{2}{3}$$

Nedre grense: $h = 0$

Øvre grense: $h = \frac{2}{3}$

Oppgave 3

a) Koeffisientene har ulike fortegn så vi kan på grunnlag av det si at systemet er ustabilt.
Et stabilt 2.ordens system vil ha negative ~~løser~~ rotter (realdel) for den karakteristike ligningen. Her er ligningen $r^2 - 2r + 4 = 0$, som har rotter $r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2}$, som vi ser har en positiv realdel.

b) $$\ddot{x} - 2\dot{x} + 4x = -k_p x - k_d \dot{x}$$

$$\ddot{x} + (-2 + k_d)\dot{x} + (4 + k_p)x = 0$$

Må ha et underdempet stabit system for å få asymtotisk stabilitet.

Stabilitet (like fortegn): $-2 + k_d > 0 \Rightarrow \underline{k_d > -2}$

$4 + k_p > 0 \Rightarrow \underline{k_p > -4}$

Underdempet: $0 < \zeta < 1$, har også $\omega_0^2 > 0$

$\zeta < 1$: $2\zeta\omega_0 = -2 + k_d$

$\zeta = \frac{-2 + k_d}{2\omega_0} < 1$

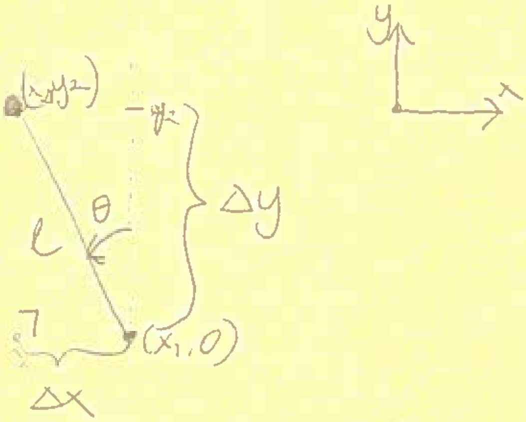
$k_d < 2\omega_0 + 2$

$\Rightarrow \underline{k_d < 2\sqrt{4 + k_p} + 2}$

(siden $\omega_0^2 = 4 + k_p$)

oppgave 4

a)



$$\Delta x = \cancel{x_1} - \cancel{x_2} = x_1 - l \cdot \sin\theta \qquad (i)$$

$$\Delta y = y_2 - y_2 = -l \cdot \cos\theta \qquad (ii)$$

(i) gir: $x_2 = x_1 - l\sin\theta$

(ii) gir: $y_2 = l \cdot \cos\theta$

Deriverer uttrykkene m.h.p. tid:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - l \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta$$

$$\dot{y}_2 = -l \cdot \dot{\theta} \sin\theta$$

b) $L = K - V$

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\left((\dot{x}_1 - l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right.$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}\right)$$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Kandidat nr./*Candidate no.* 10169

Dato/*Date:* 18.12.2016 Side/*Page:* 7

Emnekode/*Subject* TTK4100 Kyb intro

Antall ark/*Number of pages:* 11

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = mg \cdot l \cdot \cos\theta$$

$$L = K - V$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) - mgl\cos\theta$$

$$2 \cdot L = M\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1^2 - 2m\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_1 l^2\dot{\theta}^2 - 2mgl\cos\theta$$

$$2L = (M+m)\dot{x}_1^2 - 2ml\cos\theta(\dot{x}_1\dot{\theta} + g) + ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\underline{\underline{L = \frac{(M+m)}{2}\dot{x}_1^2 - 2ml\cos(\theta)(\dot{x}_1\dot{\theta} + g) + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}}}$$

c) (14) [illegible] funksjoner $\dot{\theta}^2$ i potenser osv.

Det er mutivariabelt fordi to tilstander endrer seg avhengig av et pådrag. (inngang)

d) Konstant $\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$

(15) gir da $l \cdot 0 - g \cdot \sin(0) = \ddot{x}_1 \cdot \cos 0$

$$\ddot{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = C$$

$$\Rightarrow x_1 = Ct + D$$

~~Konstant fart~~

Vogna har konstant fart, C, og vil bevege seg lineært.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 12 2015

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10269

Dato/*Date:* 18.12.2015 Side/*Page:* 8

Emnekode/*Subject* TTK4100 kyb intro

Antall ark/*Number of pages:* 11

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

e) $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ og $\theta = \theta^*$

$$(M+m)\ddot{x}_1 \cancel{-ml\ddot{\theta}\cos\theta} + \cancel{ml\dot{\theta}^2\sin\theta} = F \qquad (14)$$

$$F = (M+m)\ddot{x}_1$$

$$l\ddot{\theta} - g\cdot\sin\theta^* = \ddot{x}_1\cdot\cos\theta^* \qquad (15)$$

$$\ddot{x}_1 = -g\cdot\tan\theta^*$$

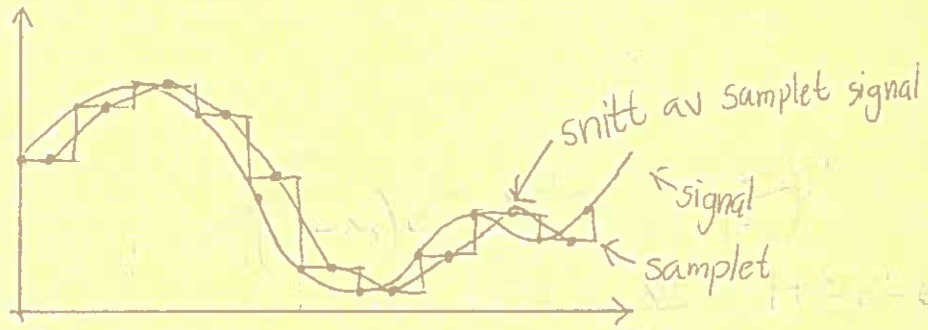
$$\Rightarrow \underline{F = -g(M+m)\cdot\tan(\theta^*)}$$

f) D-leddet vil dempe svingninger.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppgave 5

a)



Det grønne signalet viser hvordan samplingssignalet i praksis ligger bak det faktiske signalet.
Tidsforsinkelson er halvparten av samplingstiden, eller:

$$\tau_s = \frac{1}{2f_s}$$

hvor f_s er samplingsfrekvensen

b) (Antar første ordens system)

$$\dot{x} = ax + b$$

Tidskonstanten er $T = -\frac{1}{a}$

Løser systemet:

$$\dot{x} - ax = b \quad | \cdot e^{-at}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x e^{-at}\right) = b e^{-at}$$

$$x e^{-at} = -\frac{b}{a} e^{-at} + C$$

$$x(t) = C e^{at} - \frac{b}{a}$$

Antar at $a < 0$ for å få et stabilt system.

Antar at $x(0) = x_0$

$$x(0) = x_0$$
$$x_0 = C \cdot e - \frac{b}{a}$$
$$C = x_0 + \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

Når $t \to \infty$ vil $x(t) \to -\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow x_s = -\frac{b}{a}$$

Forholdet mellom $x(T)$ og x_s blir da:

$$\frac{x(T)}{x_s} = \frac{\left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a \cdot \frac{1}{a}} - \frac{b}{a}}{x_s}$$
$$= \frac{-\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} + \frac{\left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{-1}}{-b/a}$$
$$= +1 \cancel{\pm} \frac{x_0}{x_s} e^{-1} + e^{-1}$$
$$= \left(+1 \cancel{\pm} e^{-1}\right) - \frac{x_0}{x_s} e^{-1} \quad \Big| \cdot x_s$$
$$x(T) = +x_0 e^{-1} - \left(e^{-1} + 1\right) x_s$$
$$x(T) = 0{,}63 x_s + 0{,}63 x_0$$
$$\underline{x(T) = 0{,}63(x_s + x_0)}$$

Hvis $x_0 = 0$ ser vi at $x(T) = 0{,}63 x_s$ men det vil gjelde for alle x_0.

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10169

Dato/Date: 18.12.2015 Side/Page: 11

Emnekode/Subject: TTK4100 Kyb intro

Antall ark/Number of pages: 11

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

c) $K_p = 0{,}6 \cdot K_{pk}$

$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{K_p}{0{,}5 T_k}$

$K_d = K_p T_d = K_p \cdot 0{,}125 T_k$

$K_p = 0{,}6 \cdot 20 = 12$

$T_k = 2 \Rightarrow K_i = \frac{12}{2 \cdot 0{,}5} = 12$

$K_d = 12 \cdot 0{,}125 \cdot 2 = 3$

$\underline{K_p = 12, \; K_i = 12, \; K_d = 3}$

Oppgave 6

Ser at vi får svingninger som betyr at det verken er kritisk dempet eller overdempet så da må det være underdempet. (i)