Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Institutt for teknisk kybernetikk

Faglig kontakt / *contact person*:

Navn: Esten Ingar Grøtli
Tlf.: 920 99 036

Eksamen - TTK 4115 Lineær systemteori
Exam - TTK 4115 Linear system theory

21. desember 2010, 15:00 – 19:00

Hjelpemidler: D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Supporting materials: D - No printed or handwritten material allowed. Specific, simple calculator allowed.

Oppgave 1 (30 %)

Gitt det andre-ordens systemet:
Given the second-order system:

$$\begin{aligned}\ddot{q} + \omega_0^2 q &= u \\ y &= q,\end{aligned}$$

hvor q er posisjonen til en masse i bevegelse, og ω_0 er en konstant.
where q is the position of a mass in motion, and ω_0 is a constant.
a)
Bruk $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top = (q, \dot{q}/\omega_0)^\top$, og skriv systemet på tilstandsromform:
Use $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top = (q, \dot{q}/\omega_0)^\top$, and write the system on state space form:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \\ y &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Hva er $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$?
What is $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$?

b)
Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer til $\boldsymbol{A}$.
Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of $\boldsymbol{A}$*.*
c)
Forklar hvilke metoder du har lært for å finne matrise eksponentialfunksjonen $e^{\boldsymbol{A}}$.
Explain what methods you have learned in order to find the matrix exponential function $e^{\boldsymbol{A}}$*.*
d)
Bruk *en* av metodene til å finne $e^{\boldsymbol{A}t}$. Avhengig av hvilken metode du velger, kan det hende du finner følgende formler nyttig:
Use one *of the methods* $e^{\boldsymbol{A}t}$*. Depending on the method you choose, you might find the following formulas useful:*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

e)
Bruk
Use

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \ldots,$$

til å vise at:
to show that:

$$\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}. \tag{1}$$

f)
Vis at svaret ditt for $e^{\boldsymbol{A}t}$ i oppgave d) er riktig ved bruke uttrykket i (1).
Show that your answer for $e^{\boldsymbol{A}t}$ *in exercise d) is correct by using the expression in (1).*
g)
Anta at $\omega_0 = 1$, $x(0) = (1,1)^\top$, og at $u(t) = 1$ for alle $t \geq 0$. Hva er $y(t = 1)$?
Assume that $\omega_0 = 1$, $x(0) = (1,1)^\top$*, and that* $u(t) = 1$ *for all* $t \geq 0$*. What is* $y(t = 1)$*?*
h)
Anta at $u(t) = 0$ for alle t. Er $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ustabilt, marginalt stabilt eller asymptotisk stabilt? Forklar!
Assume that $u(t) = 0$ *for all* t*. Is* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *unstable, marginally stable or asymptotically stable? Explain!*

Oppgave 2 (20 %)

a)
Gitt overføringsfunksjonen:
Given the transferfunction:

$$\hat{g}(s) = \frac{s-1}{(s^2-1)(s+2)}$$

Finn en tre-dimensjonal styrbar realisering ved å bruke likningene i vedlegget.
Find a three-dimensional controllable realization by using the equations in the appendix.

b)
Hva karakteriserer en minimal realisering? Er realiseringen du fant i a) minimal? Hvorfor/ Hvorfor ikke?
What characterizes a minimal realization? Is the realization you found i a) minimal? Why/ Why not?

c)
Gitt en overføringsfunksjon:
Given a transferfunction:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Vi ønsker en realisering på standardform: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$, $y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$. Under hvilken/hvilke betingelse/betingelser kan vi velge $y(t)$ og dens deriverte som tilstandsvariable?
We seek a realization on standard form: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$, $y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$. Under what condition/conditions can we choose $y(t)$ and its derivatives as the state variables?

Oppgave 3 (25 %)

Ta i betrakning et eksperiment der et legeme med masse $m = 1$ kg slippes fra en viss høyde. Ta kun i betrakning gravitasjonskreftene, og anta at gravitasjonskonstanten g er nøyaktig kjent. Anta at initiell posisjonen og hastighet er tilfeldige variable beskrevet ved $\mathcal{N}(0, \rho_p^2)$, og $\mathcal{N}(0, \rho_v^2)$. La tilstandsvariablene x_1 og x_2 være posisjon og hastigheten i retning nedover, og la målingene av legemets posisjon finne sted med jevne intervaller Δt med start fra $t = 0$. Standardavviket til målefeilen er ξ.

Consider an experiment where an object with mass $m = 1$ kg is released from a certain height. Consider only the gravitational force, and assume that the gravitational constant g is perfectly known. Assume that the initial position and velocity are random variables described by $\mathcal{N}(0, \rho_p^2)$, and $\mathcal{N}(0, \rho_v^2)$. Let the state variables x_1 and x_2 be position and velocity in the downward direction, and let the measurements of the position of the object take place at uniform intervals Δt beginning at $t = 0$. The standard deviation of the measurement error is ξ.

a)
Hva er tilstandslikningene (i kontinuerlig tid) som beskriver det fallende legemet?
What are the (continuous time) state equations describing the falling object?
b)
Diskretiser tilstandslikningen fra a) ved å bruke nullte ordens holdeelement på inngangen (eksakt diskretisering).
Discretize the state equations from a) using zero-order hold element on the input (exact discretization).
c)
Finn nøkkelparameterene for Kalman filteret (i diskret tid) i vedlegget, det vil si, finn $\boldsymbol{\Phi}_k$, $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{H}_k$, $\boldsymbol{R}_k$ og de initielle $\hat{\boldsymbol{x}}_0^-$ and $\boldsymbol{P}_0^-$. Rettferdiggjør alle antakelser!
Find the key parameters for the (discrete time) Kalman filter in the appendix, that is, find $\boldsymbol{\Phi}_k$, $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{H}_k$, $\boldsymbol{R}_k$ and the initial $\hat{\boldsymbol{x}}_0^-$ and $\boldsymbol{P}_0^-$. Justify any assumptions!

Oppgave 4 (15 %)

Effektspektraltettheten (og tilsvarende autokorrelasjonen) av en Gauss-Markov prosess er gitt av:
The power spectral density (and corresponding autocorrelation) of a Gauss-Markov process is given by:

$$S_x(s) = \frac{6}{-s^2 + 1}, \quad (R_x(\tau) = 3e^{-|\tau|}). \tag{2}$$

a)
Finn filteret ("shaping filter") $S_x^+(s)$ for prosessen, og basert på filteret, finn en realisering på formen $\dot{x} = Fx + Gu$, hvor u er enhets hvit støy.
Find the filter (shaping filter) $S_x^+(s)$ for the process, and based on the filter, find a realization on the form $\dot{x} = Fx + Gu$, where u is unity white noise.

b)
Hva er middelverdien og variansen til prosessen?
What is the mean and the variance of the process?

Oppgave 5 (10 %)

Kostfunksjonen til en lineær kvadratisk regulator er gitt av
The cost function of a linear quadratic regulator is given by

$$J(u) = \int_0^\infty z^\top(t)Qz(t) + u^\top(t)Ru(t)dt,$$

hvor $z = Mx$.
where $z = Mx$.
a)
Forklar kort hva Q og R gjør, hvilke egenskaper de må ha, og hvordan vi kan undersøke disse egenskapene.
Explain briefly what Q *and* R *do, what properties they must have, and how we can inverstigate these properties.*
b)
Diskuter kort eventuelle fordeler og ulemper med regulatordesign basert på kostfunksjonen over og regulatordesign basert på polplasering.
Discuss briefly possible pros and cons for controller design based on the cost function above and controller design based on pole placement.

Vedlegg til eksamen (noen nyttige formler og uttrykk):
Appendix to the exam (some useful formulas and expressions):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
x(k) &= A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m}Bu(m) \\
A^{-1} &= \frac{adj(A)}{det(A)} \\
det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\
adj(A) &= \{c_{ij}\}^T \\
c_{ij} &= (-1)^{i+j}det(A_{ij}) \quad \text{(kofaktor)},\ A_{ij} = \text{submatrix to } A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= (B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B) \\
\mathcal{O} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \\
G(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\
G(z) &= C(zI-A)^{-1}B + D \\
\mathbf{G(s)} &= \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{G_{sp}(s)} \\
d(s) &= s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r \\
\mathbf{G_{sp}}(s) &= \frac{1}{d(s)}[\mathbf{N_1}s^{r-1} + \mathbf{N_2}s^{r-2} + \cdots + \mathbf{N_{r-1}}s + \mathbf{N_r}] \\
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1\mathbf{I_p} & -\alpha_2\mathbf{I_p} & \cdots & -\alpha_{r-1}\mathbf{I_p} & -\alpha_r\mathbf{I_p} \\ \mathbf{I_p} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_p} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I_p} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{I_p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= [\ \mathbf{N_1}\quad \mathbf{N_2}\quad \cdots\quad \mathbf{N_{r-1}}\quad \mathbf{N_r}\ ]\mathbf{x} + \mathbf{G}(\infty)\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Discrete-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
\mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] &= \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \\
E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] &= 0, \forall i, k \\
\mathbf{P}_k^- &= E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \\
\mathbf{P}_k &= E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k
\end{aligned}
$$

Continuous-time Kalman filter:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\
\mathbf{z} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}(\tau)^T] &= \mathbf{Q}\delta(t - \tau) \\
E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= \mathbf{R}\delta(t - \tau) \\
E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] &= 0 \\
\mathbf{K} &= \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \\
\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0
\end{aligned}
$$

Auto-correlation:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \text{ (Stationary process)} \\
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \text{ (Non-stationary process)} \\
Y(s) &= G(s)U(s) \Rightarrow \\
R_y(t_1, t_2) &= E[y(t_1)y(t_2)] \\
&= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} g(\xi)g(\eta)E\left[u(t_1 - \xi)u(t_2 - \eta)\right] d\xi d\eta \text{ (Transient analysis)}
\end{aligned}
$$

Laplace transform pairs:

$f(t)$	$\Longleftrightarrow$	$F(s)$
1	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s+a}$
t	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2}{s^3}$
te^{-at}	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$