Fysikk, Øving 1

til retting

Rendell Cale, gruppe 2

GODKJENT
Bra!
CBKS

Oppgave 1

Bruk gjerne to streker under alle svar (med linjal)

Vi har $V_0 = 40\ m/s$, $V = 0$ og $a = -50\ g$.
Strekningen S er ukjent men siden akselerasjonen er konstant kan vi bruke at

$$V^2 - V_0^2 = 2as$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}$$

Du har forresten levert øvingen i feil boks (gruppe 3)

Som gir $S = \frac{-40^2}{2\cdot(-50\cdot 9{,}81)} \approx 1{,}63\ m$ R

Hun vil bevege seg 1,63 m ned i snøfonnen.

Siden akselerasjonen er (antatt) konstant vil bevegelsen tilfredstille:

$$V = V_0 + at \Leftrightarrow t = \frac{V - V_0}{a}$$

$$= \frac{-40}{-50\cdot 9{,}81} \approx 0{,}08\ s$$

Retardasjonen tar 80 ms R

Oppgave 2

a) Generelt sett kan vi uttrykke akselerasjonen som

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\,dt = dv \qquad (1)$$

Siden vi har $a = -bv^2$, $v > 0$ blir (1)

$$-bv^2 dt = dv$$

Pass på grensene ved integrasjonen $\Leftrightarrow$

Tiden integreres fra 0 til t,

mens farten fra $v(t=0) = V_0$ til $v(t)$

$$\Leftrightarrow \quad -b\,dt = v^{-2} dv \qquad -b\int_0^t dt' = \int_{V_0}^{v} \frac{dv'}{v'^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -bt = \frac{1}{-2+1}\left[V^{-1}\right]_{v(t_0=0)=V_0}^{v(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -bt = \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}$$

$$\Leftrightarrow \quad V(t) = \frac{1}{bt + \frac{1}{V_0}} = \frac{V_0}{1 + V_0 \cdot b \cdot t}$$

R

b) $b = 4{,}0\ m^{-1}$ og $v_0 = 1{,}5\ m/s$ gir

$$v(t) = \frac{1{,}5}{1+6 \cdot t}$$

Når farten er redusert til halve vil

$$v(t) = \frac{v_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5}{1+6t} = 0{,}75$$

$$\Rightarrow 1+6t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6} \approx 0.17\ s$$ R

Siden akselerasjonen ikke er konst må vi bruke

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$= 1{,}5 \cdot \int_0^t \frac{1}{1+6t}\,dt$$

(Det kan være lurt å vente med å sette inn verdier til slutten av utregningen.)

$$u = 1+6t \Rightarrow du = 6dt$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{4} \int_1^{1+6t} \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln|u|\Big]_1^{1+6t}$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1+6t)$$

Vi sjekker da $s(0{,}17)$ og får

$$s(0{,}17) = \frac{1}{4}\ln(1+6\cdot 0{,}17)$$
$$= \frac{\ln(2)}{4}$$
$$\approx 0{,}17 \text{ m}$$

R

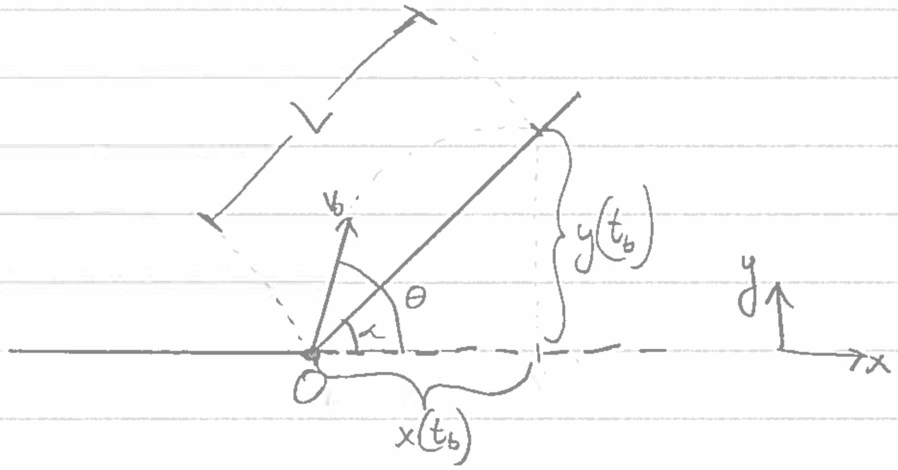
Kula har da beveget seg 0,17 m i væsken.

Sjekk av dimensjon på b?

$$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0\cdot b\cdot t}$$

Siden $v(t)$ og v_0 har dimensjon m/s, må $v_0\cdot b\cdot t$ dimensjonsløs. Har $[v_0] = $ m/s og $[t] = $ s, så $[b] = m^{-1}$, som stemmer med oppgitt!

Oppgave 3



b) t_b: tiden pilen treffer bakken

Vi ser at $x(t) = V_0 \cdot \cos\theta \, t$

og $y(t) = V_0 \sin\theta \, t - \frac{g}{2} t^2$

og $x(t_b) \cdot \tan\alpha = y(t_b)$

Løser for t_b:

$$V_0 \cos\theta \, \cancel{t_b} \cdot \tan\alpha = V_0 \sin\theta \, \cancel{t_b} - \frac{g}{2} t_b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{g}{2V_0} t_b = \sin\theta - \cos\theta \tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad t_b = \frac{2V_0}{g}(\sin\theta - \cos\theta \tan\alpha) \quad R$$

Siden $L = \dfrac{x(t_b)}{\cos\alpha}$ får vi

$$L = \frac{V_0 \cos\theta \cdot \dfrac{2V_0}{g}(\sin\theta - \cos\theta \tan\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{2V_0^2 \cos^2\theta}{g\cos\alpha}(\tan\theta - \tan\alpha) \quad R$$

c) Deriverer L mhp. θ og setter lik 0.

$$\frac{dL}{d\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta\left(\tan\theta - \tan\alpha\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cos\theta) = \tan\alpha \cdot \frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = -\tan\alpha \, 2\cos\theta\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\theta = -\tan\alpha \sin 2\theta$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{\tan(2\theta)} = \tan\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Det gir $\alpha = 2\theta + \frac{\pi}{2} + n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$.

Siden vi krever $\theta > \alpha$ velger vi $n = -1$ og får

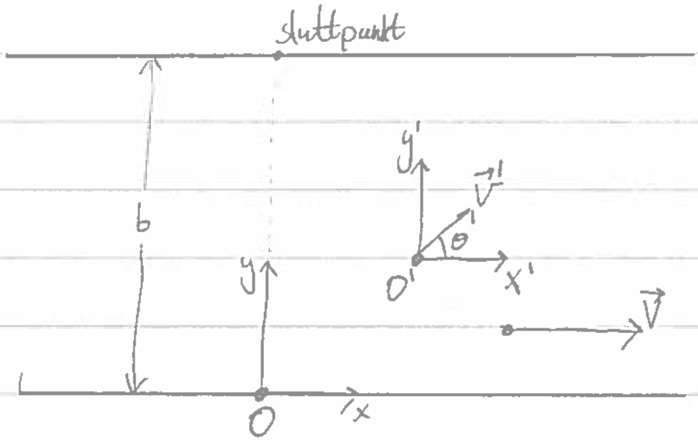
$$\alpha = 2\theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}}} \quad R$$

$\alpha = 0$ gir $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Oppgave 4

a)



Vannets vektor $\vec{V}$ har kun $\hat{x}$-komponent. Altså

$$\vec{V} = V\hat{x}$$

Båten beveger seg ift. elven med en fart v_x' og v_y'.
Vi kan se av figuren at $v_x' = v'\cos\theta$ og $v_y' = v'\sin\theta$

R

For å gå til det landfaste systemet må vi legge til vannfarten til båtens relative fart.

$$v_x = V + v_x' = V + v'\cos\theta$$

$$v_y = v'\sin\theta$$

R

b) La t_r være tiden som må roes, t_g tiden som må vandres, og s_g avstanden som må vandres.

Det er klart at $t_r = \dfrac{b}{v_y} = \dfrac{b}{v'\sin\theta}$

Avstanden s_g blir da

$$s_g = v_x \cdot t_r$$
$$= (V + v'\cos\theta)\frac{b}{v'\sin\theta}$$
$$= \frac{Vb}{v'\sin\theta} + \frac{b}{\tan\theta}$$

og $t_g = \frac{s_g}{v_g} = \frac{Vb}{v'v_g\sin\theta} + \frac{b}{v_g\tan\theta}$

Den totale tiden blir da

$$t = t_r + t_g$$
$$= \frac{b}{v'\sin\theta} + \frac{Vb}{v'v_g\sin\theta} + \frac{b}{v_g\tan\theta}$$
$$t(\theta) = \frac{b}{v'\sin\theta}\cdot\left(1 + \frac{V}{v_g}\right) + \frac{b}{v_g\tan\theta}$$ R

Kan også samle alt i en parentes:
$$= \frac{b}{v'\sin\theta}\left(1 + \frac{V}{v_g} + \frac{v'}{v_g}\cos\theta\right)$$

c) Vi løser $t'(\theta) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{b}}{v'}\left(1 + \frac{V}{v_g}\right)\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) - \frac{\cancel{b}}{v_g}\csc^2\theta = 0$$

gange opp med v_g for å få neste steg

$$\left(v_g + V\right)\left(\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) = + \frac{v'}{\sin^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_g + V = \frac{+v'}{-\cos\theta}$$ beholder kun et minustegn

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{-v'}{v_g + V}$$ R

For $b = 150\,m$, $|\vec{v}| = v' = 3{,}0\ km/h$, $|\vec{V}| = 2{,}00\ km/h$, $v_g = 5{,}0\ km/h$

Vinkelen er gitt ved

$$\cos(\theta_{min}) = -\frac{3{,}0}{2+5} = -\frac{3}{7}$$

R

$$\Rightarrow \theta_{min} = 2{,}01 \quad (\approx 115^\circ) \text{ siden } 0 < \theta < \pi$$

d) $V = 0$ gir $\cos(\theta_{min}) = -\dfrac{v'}{v_g}$

Dersom $V=0$ vil det raskeste være å ro tvers over, altså $\theta_{min} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta_{min}) = 0 \neq -\dfrac{v'}{v_g}$ R

Uttrykket $t(\theta)$ er kun gyldig hvis $v'^2 < V(V+v_g)$
Se LF for en utdypende forklaring :)