NTNU
Det skapende universitet

Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Eksamensoppgave i TTT4120 Digital signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen: Torbjørn Svendsen
Tlf.: 930 80 477

Eksamensdato: Torsdag 18. desember 2014

Eksamenstid (fra - til): 09.00 - 13.00

Hjelpemiddelkode/tillatte hjelpemidler: D – Ingen trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Eksamen består av 4 oppgaver der
  - oppgave 1 omhandler LTI-systemer
  - oppgave 2 omhandler digitale filtre
  - oppgave 3 omhandler filterrealisering
  - oppgave 4 omhandler signalgenerering
- Vekting av deloppgavene er angitt i parentes ved starten av hver oppgave .
- Alle oppgavene skal besvares
- Sensurfrist er 3 uker etter eksamensdato.

Målform/språk: Norsk - bokmål

Totalt antall sider: 9

Herav, antall vedleggsider: 3

Kontrollert av:

Dato Signatur

Oppgave 1 (3+3+4+2+3+4=19)

1a) Hvilke egenskaper må være oppfylt for at et tidsdiskret system skal kunne beskrives ved hjelp av enhetspulsresponsen $h(n)$?
Definér egenskapene *stabilitet* og *kausalitet* ved hjelp av $h(n)$.

1b) Et tidsdiskret signal $y(n)$ er dannet ved prosessering av et annet tidsdiskret signal $x(n)$. Sammenhengen mellom signalene er uttrykt ved

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

Finn overføringsfunksjonen, $H(z)$ av et LTI-system som gjenvinner $x(n)$ fra $y(n)$.

1c) Finn den kausale enhetsspulsresponsen, $h(n)$, til systemet i oppgave 1b.

1d) Gitt et stabilt og kausalt LTI-system med reelle koeffisienter og overføringsfunksjon

$$H(z) = \frac{1 - \beta z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Angi lovlig område for poler og nullpunkt i z-planet.
Skissér konvergensområdet (ROC) til systemet.

1e) Vis at den tidsdiskrete Fouriertransformen (DTFT) $X(f)$ til en sekvens $x(n)$ har følgende egenskaper

i) $X(-f) = X^*(f)$ når $x(n)$ er reell
ii) $X(f) = -X(-f)$ når $x(n) = -x(-n)$

1f) Anta at du har et FIR-filter med reelle koeffisienter, $h(n)$, og en endelig reell sekvens, $x(n)$. Vi skal benytte dette filteret til å skape en filtrert versjon av $x(n)$ som har samme fase som det opprinnelige signalet med denne prosedyren:

1. Vi filtrerer først $x(n)$ med $h(n)$ for å danne $s(n) = x(n) * h(n)$.
2. Deretter filtrerer vi den tidsreverserte sekvensen med det samme filteret, dvs. $v(n) = s(N-1-n) * h(n)$, der N er lengden til $s(n)$.
3. Til slutt tidsreverseres $v(n)$, $y(n) = v(K-1-n)$. K er lengden til $v(n)$.

Vis at DTFT av $y(n)$, $Y(f)$, har samme fase som $X(f)$.

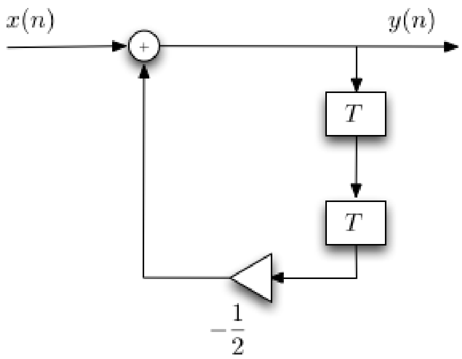
Oppgave 2 (2+4+2+2+3=13)

Vi har et lineært, tidsinvariant tidsdiskret system gitt av differanselikninga:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^k \; x(n-2k); \quad n \geq 0$$

2a) Beregn de 8 første verdiene av enhetsspulsresponsen til dette systemet

2b) Vis at systemet kan implementeres med filteret i figur 1.
(Hint: Start med å finne $y(n)$ for de første verdiene av n)



Figur 1: Filterimplementasjon

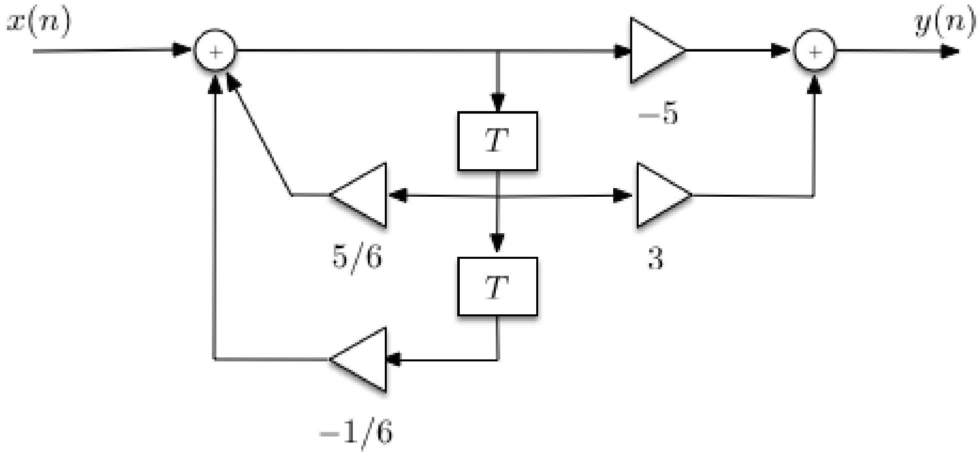
2c) Hva blir z-transformasjonen, $H(z)$ for dette filteret?

2d) Hvor ligger polene og nullpunktene til $H(z)$?

2e) Anta at vi påtrykker filteret et signal $x(n) = cos(2\pi f n)$.
For hvilken frekvens vil amplituden til utgangssignalet $y(n)$ bli størst?
Hvor stor blir den maksimale amplituden?

Oppgave 3 (3+2+4+4+4=17)

3a) Et kausalt digitalt filter er gitt av blokkskjemaet i figur 2.

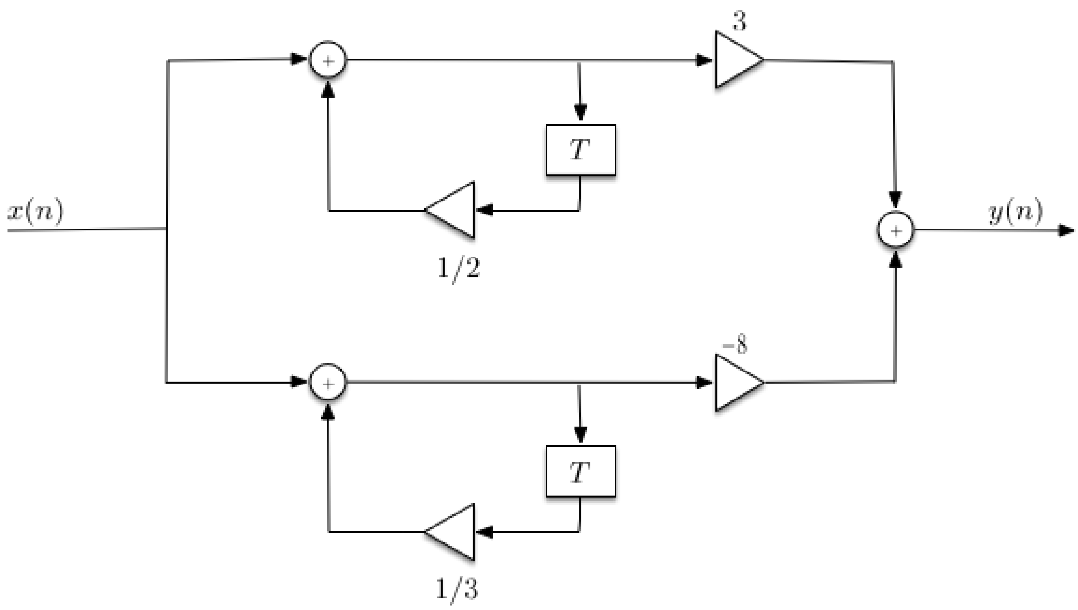


Figur 2: Digitalt filter

Finn filterets overføringsfunksjon, $H(z)$.
Skissér plasseringen av poler og nullpunkt i z-planet.

3b) Filteret i figur 2 kan realiseres med andre strukturer.
Tegn en realisering av filteret med direkteform I (DF I).

3c) Vis at filteret i figur 3 er ekvivalent med filteret i figur 2. Ta utgangspunkt i filterstrukturen i figur 3 og finn enhetsspulsresponsen, $h(n)$, til filteret.



Figur 3: Alternativ filterstruktur

Filteret vårt skal implementeres i fastkomma-aritmetikk, og vi ønsker å sikre oss mot overflyt i summasjoner, og ha kontroll på avrundingsfeil fra multiplikasjonene.

3d) Finn ut hvordan vi må skalere inngangssignalet for å unngå overflyt i summasjonene i de to filterstrukturene i Figur 2 og 3.
Hint: Hvis en sekvens, $x(n)$, er monotont økende, slik at $x(n) < 0$ for $n < K$ og $x(n) \geq 0$ for $n \geq K$, så er $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) - 2\sum_{n=0}^{K-1} x(n)$

3e) Anta at avrundingen etter hver multiplikasjon kan modelleres som en additiv støykilde med null middelverdi og varians σ_q^2.
Finn effekten til den totale avrundingsstøyen på utgangen av de to filtrene uttrykt ved σ_q^2.

Oppgave 4 (2+4+2+2=10)

Vi skal lage et kausalt 2.ordens IIR-filter som har en enhetspulsrespons som er en ren sinusoide. For enkelhets skyld lar vi enhetsspulsresponsen være en cosinusfunksjon med null fase. Filteret opererer på punktprøvingsraten $F_s = 48kHz$, og sinusoiden skal ha frekvens $8kHz$.

4a) Finn et uttrykk for enhetsspulsresponsen, $h(n)$, til filterets enhetspulsrespons uttrykt som en sum av eksponensialfunksjoner. (Husk at $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$)

4b) Vis at z-transformasjonen til filteret blir

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

Tegn plasseringen av poler og nullpunkt i z-planet.

4c) Hva blir differanselikninga som beskriver systemet?

4d) Forklar hvordan et slikt filter kan benyttes som en beregningseffektiv signalgenerator for en digital sinusoide med normalisert frekvens $f = \frac{1}{6}$.

Vedlegg: Noen grunnleggende likninger og formler.

A. Sekvenser:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

$$|\alpha| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{og} \quad -\sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{(1-\alpha)^2} - \frac{N\alpha^N}{1-\alpha} \;;\quad \alpha \neq 1$$

$$|\alpha| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha^n = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

B. Lineær foldning:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \Rightarrow$$

$$Y(f_k) = H(f_k)X(f_k) \quad f_k = k/N \;\; \text{for} \;\; k = 0, \ldots, N-1 \;\; \text{der vi skriver} \;\; Y(k) = Y(f_k)$$

C. Transformer:

Z: $H(z) = \sum_n h(n) z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_n h(n)\; e^{-j2\pi n f}$

DFT: $H(k) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)\; e^{-j2\pi nk/N} \qquad k = 0, ..., N-1$

IDFT: $h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\; e^{j2\pi nk/N} \qquad n = 0, ..., L-1$

D. Punktprøvingsteoremet (Nyquist):

Gitt et analogt signal $x_a(t)$ med båndbredde $\pm B$ som er punktprøvd med $F_s = 1/T_s$:

$$x(n) = x(nT_s) = x_a(t)|_{t=nT_s} \qquad n = -\infty, ..., \infty$$

$$X(f) = X(F/F_s) = F_s \sum_k X_a[(f-k)F_s]$$

$x_a(t)$ kan gjenvinnes fra c $x(n) \quad \Leftrightarrow \quad F_s \geq 2B$

E. Autokorrelasjon, energispektrum og Parsevals teorem:

Gitt en sekvens $h(n)$ med endelig energi E_h :

Autokorrelasjon: $r_{hh}(m) = \sum_n h(n)h(n+m) \quad m = -\infty, ..., \infty$

Energispektrum: $S_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \Rightarrow S_{hh}(f) = |H(f)|^2$

Parsevals teeorem: $E_h = r_{hh}(0) = \sum_n h^2(n) = \int_0^{2\pi} |H(f)|^2 df$

F. Multirateformler:

Desimering, der $T_{sy} = DT_{sx}$:

$$v(mT_{sy}) = \sum_k h[(mD-k)T_{sx}]\ x(kT_{sx}) \quad m = -\infty, ..., \infty$$

Oppsampling, der $T_{sx} = UT_{sy}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_n h[(l-nU)T_{sy}]\ x(nT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

Interpolasjon, der $T_{sy} = DT_{sv} = \frac{D}{U} T_{sx}$:

$$y(lT_{sy}) = \sum_m h[(lD-mU)T_{sv}]\ x(mT_{sx}) \quad l = -\infty, ..., \infty$$

G. Autokorrelasjon, effektspektrum og Wiener-Khintchins teorem:

Gitt en stasjonær, ergodisk sekvens $x(n)$ med uendelig energi:

Autokorrelasjon: $\gamma_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] \; m = -\infty, ..., \infty$

Effektspektrum: $\Gamma_{xx}(z) = Z[\gamma_{xx}(m)] \quad \Rightarrow$

Wiener-Khintchin: $\Gamma_{xx}(f) = DTFT[\gamma_{xx}(m)] = \sum_m \gamma_{xx}(m) \; e^{-j2\pi mf}$

H. Yule-Walker og Normallikningene, der $a_0 = 1$:

Yule-Walker likningene: $$\sum_{k=0}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) = \sigma_f^2 \; \delta(m) \quad m = 0, ..., p$$

Normallikningene: $$\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{xx}(m-k) = -\gamma_{xx}(m) \quad m = 1, ..., p$$

I. Noen vanlige z-transformpar

	Signal, $x(n)$	$X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Alle z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$