Norwegian university of science and technology
Department of engineering cybernetics

Kontaktperson under eksamen:
Navn: Professor Bjarne Foss
Tlf: 92422004

Norsk/nynorsk utgave/utgåve

Eksamen i TTK4135

Optimalisering og regulering

Optimization and Control

Torsdag 10. juni 2010

Kl: 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler / Tilletne hjelpemiddel:

D - Ingen trykte eller skrevne hjelpemidler / Inga trykte eller skrevne hjelpemiddel.

Godkjent kalkulator med tomt minne / Godkjend kalkulator med tomt minne

---

Nyttig informasjon finnes i vedlegg / Nyttig informasjon finns i vedlegg

(Denne informasjonen er gitt på engelsk for å samsvare med pensumlitteraturen som den er hentet ifra).

Sensur faller 1.7 / Sensur fell 1.7.

1 Nelder-Mead metoden (30%)

a Hva menes med en derivasjonfri optimaliseringsalgoritme (derivative-free optimization algorithm)?

b Anta at du leter etter det dypeste punktet i en innsjø og at du kan måle dypden med et ekkolodd plassert i en båt. Du velger å bruke Nelder-Mead algoritmen (N-M) for dette formål. Gyldighetsområdet (feasible set) er en delmengde av $x \in \mathbb{R}^n$ gitt av kvadratet $X = \{x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1\}$. N-M trenger tre punkter som et utgangspunkt. Vanndypden er gitt av $f(x)$. Anta følgende ordnede punkter.

$$
\begin{aligned}
x^1 &= (0.7, 0.8)^T, \quad f(x^1) = 15 \\
x^2 &= (0.5, 0.8)^T, \quad f(x^2) = 20 \\
x^3 &= (0.7, 0.5)^T, \quad f(x^3) = 30
\end{aligned}
$$

Refleksjonspunktet (reflection point) for $x \in R^n$ er gitt av

$$
\begin{aligned}
& x^{refl} \stackrel{def}{=} g(1) \\
& \text{hvor} \\
g(t) &= \overline{x} + t(x^{n+1} - \overline{x}) \\
\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^i
\end{aligned}
$$

Beregn refleksjonspunktet for vårt problem og vis det grafisk sammen med de andre punktene (x^1, x^2, x^3) og gyldighetsområdet.

Punktene x^1, x^2, x^3 er ordnet på en spesiell måte. Forklar denne ordningen.

c Vis hvordan N-M beregner neste iterasjonspunkt når vanndypden i refleksjonspunktet er $f(x^{refl}) = 35$.

Vis hvordan N-M beregner neste iterasjonspunkt når vanndypden i refleksjonspunktet er $f(x^{refl}) = 25$.

Vis hvordan N-M beregner neste iterasjonspunkt når vanndypden i refleksjonspunktet er $f(x^{refl}) = 10$.

Vis løsningen i de tre tilfellene over som tre uavhengige makro-koder.

d I siste tilfelle hvor $f(x^{refl}) = 10$ anvender vi "inside contraction" som betyr at den opprinnelige trekanten gitt av x^1, x^2, x^3 reduseres i størrelse. Anta videre at $f(g(t = \frac{1}{2})) = 18$. Hvilke punkter definerer den (nye) trekanten i dette tilfellet?

e Gitt et stort ulineært optimaliseringsproblem. Gi to grunner for å velge N-M sammenliknet med SQP, og to andre grunner for *ikke* å velge N-M.

2 Optimalitetsbetingelser og ulineære probl. (40%)

a Gitt minimaliseringsproblemet (1).

Hva er den generelle formen på f og c_i dersom vi har et QP-problem?

Spesifiser et konkret eksempel på et *konvekst* QP-problem når

$$n = 2, \quad \mathcal{E} = \{1\}, \quad \mathcal{I} = \{2, 3\}$$

Spesifiser et konkret eksempel på et *ikke-konvekst* QP-problem når

$$n = 2, \quad \mathcal{E} = \{1\}, \quad \mathcal{I} = \{2, 3\}$$

b Angi to betingelser, relatert til objektfunksjonen og den gyldige mengden (feasible set), som garanterer at (1) er et konvekst problem.

c Følgende teorem gjelder for problem uten bibetingelser (unconstrained problems), dvs. $\mathcal{E} = \varnothing, \quad \mathcal{I} = \varnothing$, (Lærebok teorem 2.5)

Når f er konveks, vil enhvert lokalt minimum også være et globalt minimum av f .

Bevis dette teoremet.

d Gitt minimeringsproblemet (1). Anta at

$$f = x_1 + \sqrt{3}x_2, \quad c_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad \mathcal{E} = \{1\}, \quad \mathcal{I} = \varnothing$$

Vis at KKT-betingelsene er tilfredstilt i $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ og $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Sjekk 2. ordens betingelser i begge punkter for å avgjøre hvilket punkt som (i hvert fall) er et lokalt minimum.

e Gitt problemet i **d)**. Anta videre at optimaliseringsproblemet løses ved å bruke SQP algoritmen som vist på slutten av appendiks.

Angi en passende merit-funksjon ϕ_1.

Parameteren μ_k skal være med i merit-funksjonen ovenfor. Hva er hensikten med denne parameteren?

Vil merit-funksjonen vanligvis avta fra et itersjonspunkt til det neste? Grunngi svaret.

Vil objekt-funksjonen vanligvis avta fra et itersjonspunkt til det neste? Grunngi svaret.

f Gitt problemet i **d)**. Anta videre at optimaliseringsproblemet løses ved å bruke SQP algoritmen som vist på slutten av appendiks.

Anta at startpunktet x^0 er et ugyldig punkt, $x^0 = (-2, 0)^T$, og at algoritmen konvergerer til et punkt svært nær løsningen $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ på 5 iterasjoner. Iteratene er altså gitt av følgen $\{x^0, x^1, \ldots, x^5\}$. Skisser en mulig sekvens av punkter. Vil følgen umiddelbart konvergere til et punkt nær gyldighetsområdet (feasible set) (x^1) eller vil dette mest sannsynlig skje etter noen iterasjoner?

3 Optimalregulering og MPC (30%)

a Anta følgende problem. Merk at indeksen refererer til tid.

$$\min \quad f_\infty = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\{x_i{}^T Q x_i + u_i{}^T P u_i\}, \quad Q \succeq 0, \quad P \succ 0$$
$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \; 0 \le i \le \infty$$

Løsningen er gitt av regulatoren $u_i = Kx_i$. Hvordan beregnes K? Angi likningene som du vil benytte for dette formålet.

Det regulerte (lukket sløyfe) system bør være stabilt; (det betyr at $x_i \to 0$, $u_i \to 0$ når $i \to \infty$). Angi betingelsene for dette. (To betingelser).

Hva kan sies om egenverdiene til $A + BK$ når det lukkede sløyfe systemet er stabilt?

b Et diskret ulineært dynamisk system er på tilstandsromform gitt av

$$x_{k+1} = g(x_k, u_k), \;\; x_k \in \mathbb{R}^3, \;\; u_k \in \mathbb{R}^1, \;\; u_k \in [0,1]\,, \quad k = \{0, 1, \ldots\}$$

k refererer til tidsindeks, x_k er tilstander og u_k er pådraget (manipulated variable). Anta at systemet skal styres på horisonten $k \in \{0, 1, ..., N\}$, og at initialtilstanden x_0 er kjent. Anta videre at vi ønsker å minimalisere avviket mellom det 3. elementet i tilstandsvektoren (x_{3k}) og en tidvarierende referanseverdi for denne tilstanden (x_{3k}^{ref}).

Formuler et passende optimaliseringsproblem. Angi tydelig hvilke variable som det optimaliseres med hensyn på.

c Anta at det er viktig at pådraget ikke endrer seg for mye fra et tidsskritt til det neste. Hvordan kan du endre objekt-funksjonen for å hensynta dette?

d Vi benytter så optimaliseringsproblemet i **b)** i MPC**.** Forklar prinsippet for MPC ved bruk av figur, og inkluder to viktige grunner for MPCs industrielle suksess.

e Anta at vi inkluderer en nedre og øvre skranke for den 3. tilstanden $\{\underline{x}_3, \overline{x}_3\}$. (For å ikke forvirre antar vi at $\underline{x}_3 < x_{3k}^{ref} < \overline{x}_3$.) Dette kan gi et MPC optimaliseringsproblem som ikke har noen løsning. Beskriv en metode som alltid garanterer at vi finner en løsning og det tilhørende modifiserte optimaliseringsproblemet.

Appendix

Part 1 Optimization problems and optimality conditions

$\mathcal{E}$ and $\mathcal{I}$ given below are two finite sets of indices.

General optimization problem. f and c_i are differentiable functions:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ c_i(x) &= 0, \qquad i\in\mathcal{E} \\ c_i(x) &\geq 0, \qquad i\in\mathcal{I} \end{aligned} \tag{1}$$

The Lagrangian function is given by

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}} \lambda_i c_i(x)$$

The KKT-conditions for (1) are given by:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) &= 0 \\ c_i(x^*) &= 0, \qquad i\in\mathcal{E} \\ c_i(x^*) &\geq 0, \qquad i\in\mathcal{I} \\ \lambda_i^* &\geq 0, \qquad i\in\mathcal{I} \\ \lambda_i^* c_i(x^*) &= 0, \qquad i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I} \end{aligned} \tag{2}$$

2nd order (sufficient) conditions for (1) are given by:

$$w\in F_2(\lambda^*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i\in\mathcal{E} \\ \nabla c_i(x^*)^T w = 0 & \text{for all } i\in\mathcal{A}(x^*)\cap\mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* > 0 \\ \nabla c_i(x^*)^T w \geq 0 & \text{for all } i\in\mathcal{A}(x^*)\cap\mathcal{I} \text{ with } \lambda_i^* = 0 \end{array} \right.$$

Theorem (Second-Order Sufficient Conditions)

Suppose that for some feasible point $x^*\in R^n$ there is a Lagrange multiplier vector λ^* such that the KKT conditions (2) are satisfied. Suppose also that

$$w^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(x^*,\lambda^*) w > 0, \qquad \text{for all } w\in F_2(\lambda^*),\ w\neq 0. \tag{3}$$

Then x^* is a strict local solution for (1).

LP-problem on standard form:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = c^T x \\ s.t. \quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

where $A \in R^{m\times n}$ and $rank(A) = m$.

QP-problem on standard form:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \tfrac{1}{2}x^T Gx + x^T d \\ s.t. \quad &a_i^T x = b_i, \qquad i \in \mathcal{E} \\ &a_i^T x \geq b_i, \qquad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

where $G = G^T$. Alternatively, the equalities can be written $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Iterative method:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$x_0 \ given$$
$$x_k, p_k \in \mathbb{R}^n, \ \alpha_k \in \mathbb{R}$$

p_k is the search direction and α_k is the line search parameter.

Part 2 Linear quadratic control of discrete dynamic systems

A typical optimal control problem on the time horizon 0 to n might take the form

$$\begin{aligned}\min \quad f_0 = & \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{(y_i - y_{ref,i})^T Q_i (y_i - y_{ref,i}) \\ & + (u_i - u_{i-1})^T P_i (u_i - u_{i-1})\} \\ & + \frac{1}{2}(y_n - y_{ref,n})^T S (y_n - y_{ref,n})\end{aligned} \tag{4}$$

subject to equality and inequality constraints

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i,\ 0 \le i \le n-1 \tag{5}$$

$$y_i = H x_i$$

$$x_0 = \text{given (fixed)} \tag{6}$$

$$U_L \le u_i \le U_U,\ 0 \le i \le n-1 \tag{7}$$

$$Y_L \le y_i \le Y_U,\ 1 \le i \le n \tag{8}$$

where system dimensions are given by

$$\begin{aligned} u_i &\in \mathbb{R}^m \\ x_i &\in \mathbb{R}^l \\ y_i &\in \mathbb{R}^j \end{aligned}$$

The subscript i refers to the sampling instants. That is, subscript $i+1$ refers to the sample instant one sample interval after sample i. Note that the sampling time between each successive sampling instant is constant. Further, we assume that the control input u_i is constant between each sample.

Theorem: Assume that $x_{ref,i} = 0$, $u_{ref,i} = 0$, $0 \le i \le n$ and that $H = I$, i.e. $y_i = x_i$. The solution of (4), (5) and (6) is given by $u_i = K_i x_i$, $0 \le i \le n-1$ where the feedback gain matrix is derived by

$$\begin{aligned} K_i &= -P_i^{-1} B_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i,\ 0 \le i \le n-1 \\ R_i &= Q_i + A_i^T R_{i+1} (I + B_i P_i^{-1} B_i^T R_{i+1})^{-1} A_i,\ 0 \le i \le n-1 \\ R_n &= S \end{aligned}$$

18.4 A PRACTICAL LINE SEARCH SQP METHOD

From the discussion in the previous section, we can see that there is a wide variety of line search SQP methods that differ in the way the Hessian approximation is computed, in the step acceptance mechanism, and in other algorithmic features. We now incorporate some of these ideas into a concrete, practical SQP algorithm for solving the nonlinear programming problem (18.10). To keep the description simple, we will not include a mechanism such as (18.12) to ensure the feasibility of the subproblem, or a second-order correction step. Rather, the search direction is obtained simply by solving the subproblem (18.11). We also assume that the quadratic program (18.11) is convex, so that we can solve it by means of the active-set method for quadratic programming (Algorithm 16.3) described in Chapter 16.

Algorithm 18.3 (Line Search SQP Algorithm).

Choose parameters $\eta \in (0, 0.5)$, $\tau \in (0, 1)$, and an initial pair (x_0, λ_0);
Evaluate f_0, ∇f_0, c_0, A_0;
If a quasi-Newton approximation is used, choose an initial $n \times n$ symmetric positive definite Hessian approximation B_0, otherwise compute $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_0$;
repeat until a convergence test is satisfied
  Compute p_k by solving (18.11); let $\hat{\lambda}$ be the corresponding multiplier;
  Set $p_\lambda \leftarrow \hat{\lambda} - \lambda_k$;
  Choose μ_k to satisfy (18.36) with $\sigma = 1$;
  Set $\alpha_k \leftarrow 1$;
  while $\phi_1(x_k + \alpha_k p_k; \mu_k) > \phi_1(x_k; \mu_k) + \eta \alpha_k D_1(\phi(x_k; \mu_k) p_k)$
    Reset $\alpha_k \leftarrow \tau_\alpha \alpha_k$ for some $\tau_\alpha \in (0, \tau]$;
  end (while)
  Set $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$ and $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k + \alpha_k p_\lambda$;
  Evaluate f_{k+1}, ∇f_{k+1}, c_{k+1}, A_{k+1}, (and possibly $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_{k+1}$);
  If a quasi-Newton approximation is used, set
    $s_k \leftarrow \alpha_k p_k$ and $y_k \leftarrow \nabla_x \mathcal{L}(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \nabla_x \mathcal{L}(x_k, \lambda_{k+1})$,
  and obtain B_{k+1} by updating B_k using a quasi-Newton formula;
end (repeat)

We can achieve significant savings in the solution of the quadratic subproblem by warm-start procedures. For example, we can initialize the working set for each QP subproblem to be the final active set from the previous SQP iteration.

We have not given particulars of the quasi-Newton approximation in Algorithm 18.3. We could use, for example, a limited-memory BFGS approach that is suitable for large-scale problems. If we use an exact Hessian $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_k$, we assume that it is modified as necessary to be positive definite on the null space of the equality constraints.

Instead of a merit function, we could employ a filter (see Section 15.4) in the inner "while" loop to determine the steplength α_k. As discussed in Section 15.4, a feasibility restoration phase is invoked if a trial steplength generated by the backtracking line search is