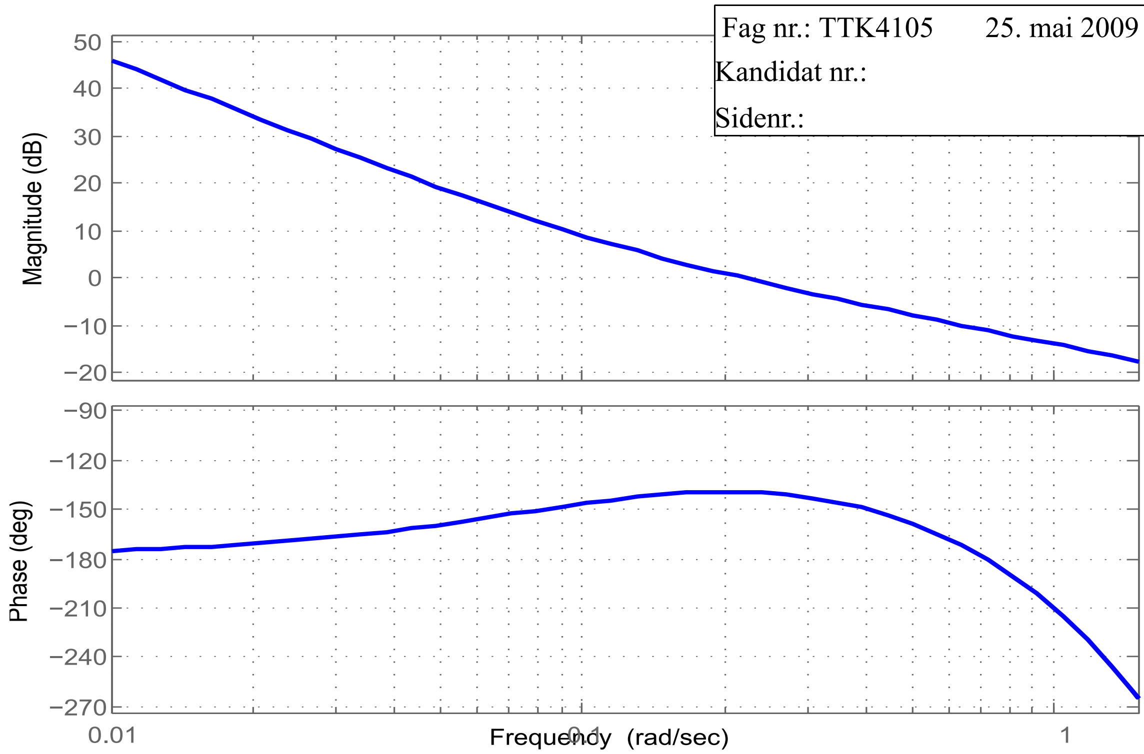
a) (5 %) Vi krever at det ikke skal være noe stasjonært hastighetsavvik for bil "0". Trengs det en integrator i $h_{r0}(s)$? Svaret må begrunnes, verbalt eller ved hjelp av sluttverditeoremet!

b) (7 %) Figur 1.2 viser Bodediagram for $h_0 = h_r/(ms^2)$ for et sett parameterverdier: $K_p/m = 0.02$, $\tau = 2$, $T_d = 10$. Du skal tegne inn asymptoter i figuren og levere det påtegnede arket. Det skal framgå hvordan du har fastlagt asymptotene, det er ikke nok å "smyge dem" inntil grafen på øyemål. Asymptotene for $\angle h_0$ har i dette tilfelle gyldighet bare for en del av h_0 . Forklar!

Fag nr.: TTK4105	25. mai 2009
Kandidat nr.:	
Sidenr.:	



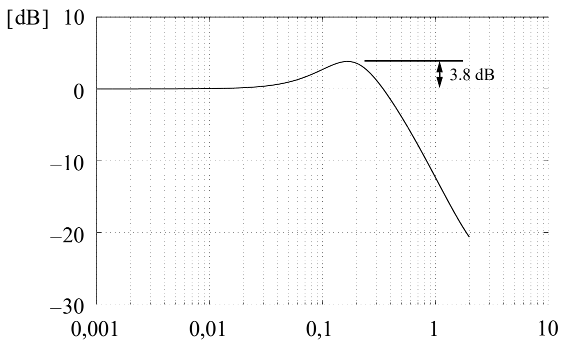
figur 1.2

c) (5 %) Bil "1" (og de øvrige etter denne) må ha derivatvirkning i regulatoren, slik det er vist i (1.1). Hvorfor? (1.1) er en enkel, men litt for optimistisk regulatormodell. Hvorfor?

d) (3 %) Les av fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK i diagrammet. Er disse akseptable?

e) (4 %) Finn følgeforholdet fra *hastighet* inn til *hastighet* ut: $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s)$.

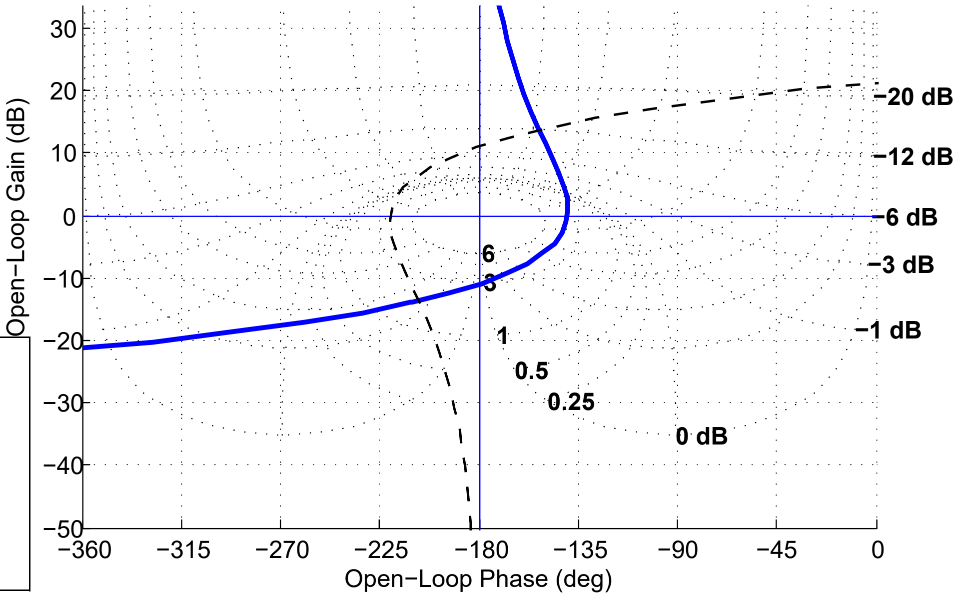
f) (4 %) Figuren til høyre viser $|M(j\omega)|$. Anta at bil nr. "0" kjører i 8 $[\mathrm{m/s}]$, men varierer sin hastighet sinusformet rundt denne med amplitude $0.5[\mathrm{m/s}]$ og frekvens 0.17 $[\mathrm{rad/s}]$. Dette fører til forsterkede svingninger for bilene bak. Vis at amplituden på hastighetsvariasjonen til bil nr. 5 blir $4.45[\mathrm{m/s}]$.



g) (4 %) Figur 1.3 viser et Nichols-diagram, hvor man med utgangspunkt i grafen for h_0 kan lese av både $|N|$ og $|M|$. Sjekk fasemargin ψ og forsterkningsmargin ΔK, og sammenlign med resultatet fra d). Markér det punkt hvor du kan avlese resonanstoppen til $|M|$ (NB: ikke $|N|$!). Levér det påtegnede arket som del av besvarelsen.

Fag nr.:
TTK4105,
25. mai 2009
Kandidat nr.:

Sidenr.:



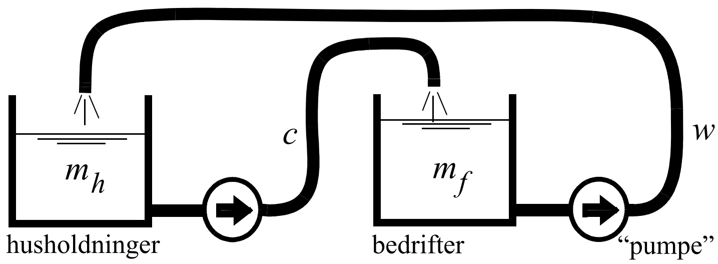
figur 1.3

h) (4 %) Vi skal nå ta med den stiplede foroverkoplinga i figur 1.1. (Den realiseres reint praktisk ved at hver bil måler egen akselerasjon og sender målinga trådløst til etterfølgende bil.) Med litt manipulering ser man at dette svarer til en foroverkopling fra referanse. Finn hva som skal stå i blokka h_f (tips: i dette tilfelle blir det en konstant!).

i) (4 %) Med denne foroverkoplinga: Hva blir nå $M(s) = \frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s)$? (Tips: svaret er veldig enkelt.) Hva kan vi si om oppførselen til en bilkø med slik foroverkopling mellom bilene?

Oppgave 2 (27 %)

Gitt en meget enkel samfunnsøkonomisk modell (*du trenger ikke kunne noe økonomi for å løse denne oppgaven*). Modellen består av to "kar" som det sirkulerer "væske" imellom, se figur til høyre. "Væsken" i dette systemet er *penger*. Vi har:



m_h, m_f = pengebeholdning hos henholdsvis husholdninger og bedrifter (="firms"=f) [kr.]

w = pengestrøm fra bedriftene til husholdningene, dvs. lønn (w = "wages") [kr./ år]

c = pengestrøm fra husholdningene til bedriftene, dvs. privat kjøp av varer og tjenester (c = "consumption"= forbruk) [kr./ år]

Alle disse størrelser er variable i tida *t*. Det forutsettes at strømmene *c* og *w* fra hver sektor "pumpes ut" proporsjonalt med pengebeholdningene der, slik at vi har

$c = m_h/T_h$ og $w = m_f/T_f$, der T_h og T_f er konstanter [år] (2.1)

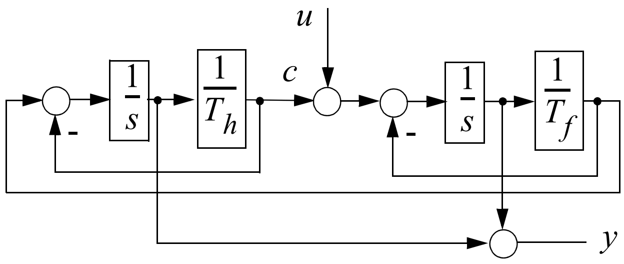
a) (6 %) Finn en tilstandsrommodell for systemet, med $x_1 = m_f$ og $x_2 = m_h$.
Er dette et *autonomt* system? (Begrunnet svar!)

b) (12 %) Ved tida $t = 0$ har vi startverdier m_{f0} og m_{h0}. Vis at tidsforløpet $m_f(t)$ er

$$m_f(t) = m_{f0}e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h}(1 - e^{-\alpha t}) \quad , \text{ der } \alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h} \text{ og } \quad m = m_{f0} + m_{h0}$$

Finn $\dfrac{m_f}{m_h}(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{m_f(t)}{m_h(t)}$. Kommentér resultatet: Er det rimelig? (2.2)

c) (4 %) Vi innfører nå en pengestrøm *u* som representerer det offentliges kjøp av varer og tjenester. Den er et pådrag i vår modell, som adderes til privat forbruk *c*. Den samlede pengemengde i systemet er $y = m_f + m_h$. Se blokkdiagram til høyre.



Finn A, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}^T$ i tilstandsrommodellen $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}u$, $y = \underset{\sim}{c}^T\underset{\sim}{x}$ (2.3)

d) (5 %) Finn transferfunksjonen $h(s) = \dfrac{y}{u}(s)$, v.h.a. (2.3) eller blokkdiagrammet over.

Det viser seg at transferfunksjonen kan forenkles til $h(s) = 1/s$. Dette kunne du ha funnet ut ved en verbal betraktning på systemet uten å måtte regne deg fram. Forklar!

Oppgave 3 (16 %)

a) (4 %) En prosess $h_u = \dfrac{1}{s+a}$, $a > 0$ skal reguleres med PI-regulator $h_r = K_p\dfrac{1 + T_is}{T_is}$.

Forklar hvorfor det lukkede system er stabilt for *alle* $K_p, T_i > 0$.

b) (6 %) Samme prosess skal nå reguleres med *diskret* PI-regulator. Vi velger $T_i = 1/a$. Tastetida er T. Tilnærm virkninga av holdeelementet med en transportforsinkelse, betrakt systemet som kontinuerlig, og vis ved *utregning* (ikke grafisk) at reguleringssystemet blir ustabilt for $K_p > \pi/T$ (Tips: Finn først ω_{180}, som er uavhengig av K_p!).

c) (6 %) Ved å bruke et 1.ordens rasjonalt uttrykk som en tilnærmelse til $e^{-\frac{Ts}{2}}$, kan du gjøre ustabilitets-sjekken fra b) ved hjelp av Rouths kriterium. Vis at svaret blir $K_p > 4/T$. Hvorfor tillates en større K_p med denne metoden, sammenlignet med svaret fra b)?

Oppgave 4 (4 %)

Når trengs anti-overlading (anti wind-up) og hvordan virker denne? Kort, verbal forklaring!

Oppgave 5 (5 %)

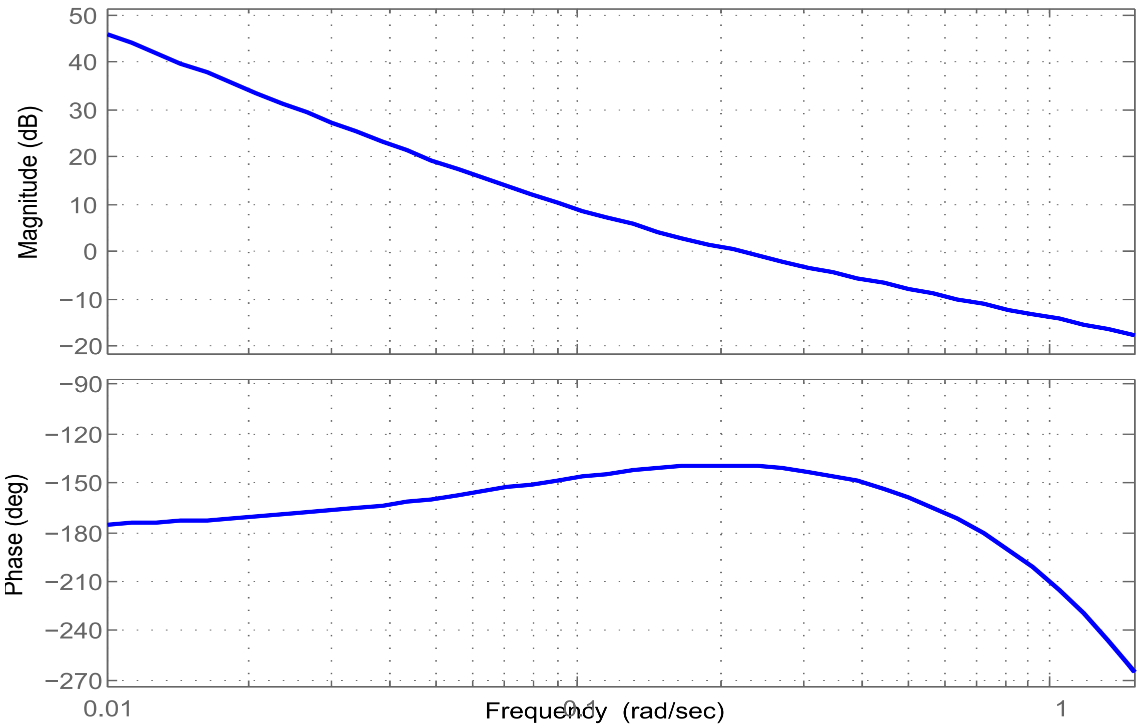
Når er en Otto Smith-regulator nyttig? Hva er dens største fordel? Kort, verbal forklaring!

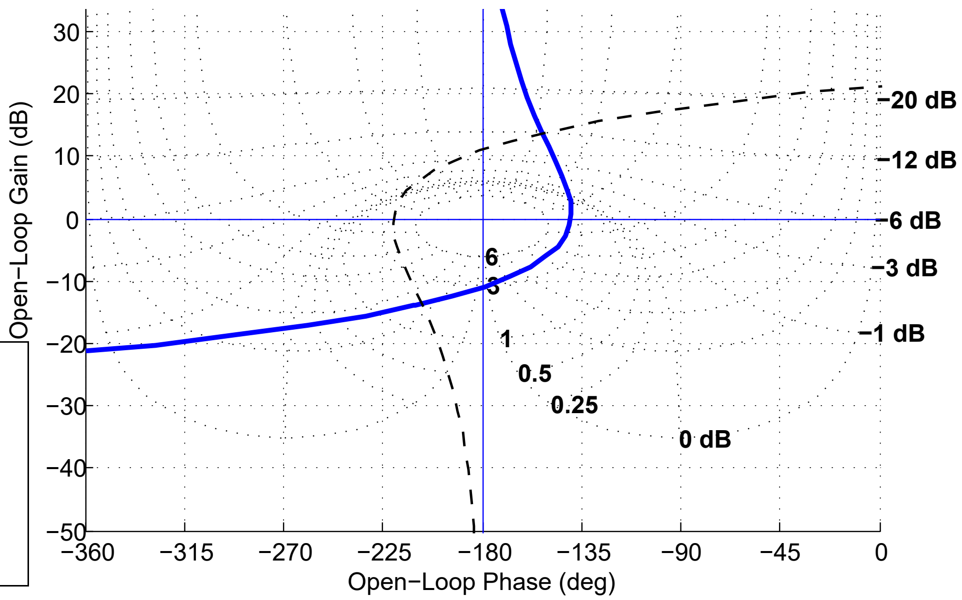
Oppgave 6 (8 %)

Finn ny verdi for K_p/m i oppgave 1b) og figur 1.2, i følge Ziegler-Nichols regler (for alternativet proporsjonalregulering). (Denne oppgaven kan løses uavhengig av resten av oppgave 1.)

****

(Under er to av figurene i oppgavesettet gjentatt, så du kan bruke dem om nødvendig:)





Fag nr.:
TTK4105,
25. mai 2009
Kandidat nr.:

Sidenr.:

Løsningsforslag TTK4105 reguleringsteknikk 25/5-09

1a) Når r = konstant og det allerede er en integrator i prosessen, trengs det ingen i h_r. Se tabell 9.1 i læreboka med $q=0, p=1$. Sluttverditeoremet, se regning side 307.

1b) Grafer neste side.

1c) Uten derivatvirkning vil $\angle h_0 < -180° \; \forall \omega$.
Derfor ustabilt uansett verdi av K_p.
Modellen burde egentlig inneholdt et ekstra ledd i h_r: $\frac{1}{1+T_i s}$ fordi pådragsorganet har en viss treghet, og dessuten kan ikke h_r ha ∞ forsterkning når $\omega \to \infty$.

1d) Se neste side. $\Delta K = 11\,dB > 6\,dB$ er bra. $\psi = 40° < 45°$ er litt under grensa. Men "akseptabelt" godtas også.

1e)
$$\frac{x_2^n}{x_2^{n-1}}(s) = \frac{s\,x_1^n}{s\,x_1^{n-1}}(s) = \frac{x_1^n}{x_1^{n-1}}(s) = \frac{h_0}{1+h_0}$$
$$= \frac{t_0}{n_0+t_0} \left(\text{der } h_0 = \frac{t_0}{n_0}\right) = \frac{K_p e^{-\tau s}(1+T_d s)}{m s^2 + K_p e^{-\tau s}(1+T_d s)}$$

1f) Forsterkninga gjennom fem ledd ved $\omega = 0.17$:
$\omega = 0.17$ er ved resonanstoppen til $|M(j\omega)|$ som er 3.8 dB. Fem ledds forsterkning $= 5 \cdot 3.8\,[dB]$ $= 19\,[dB]$. I absolutt verdi er dette $10^{\frac{19}{20}} = 8.91$.
Amplituden på sinussvingning bil "5" blir da
$0.5 \cdot 8.91 = \underline{\underline{4.45}}$

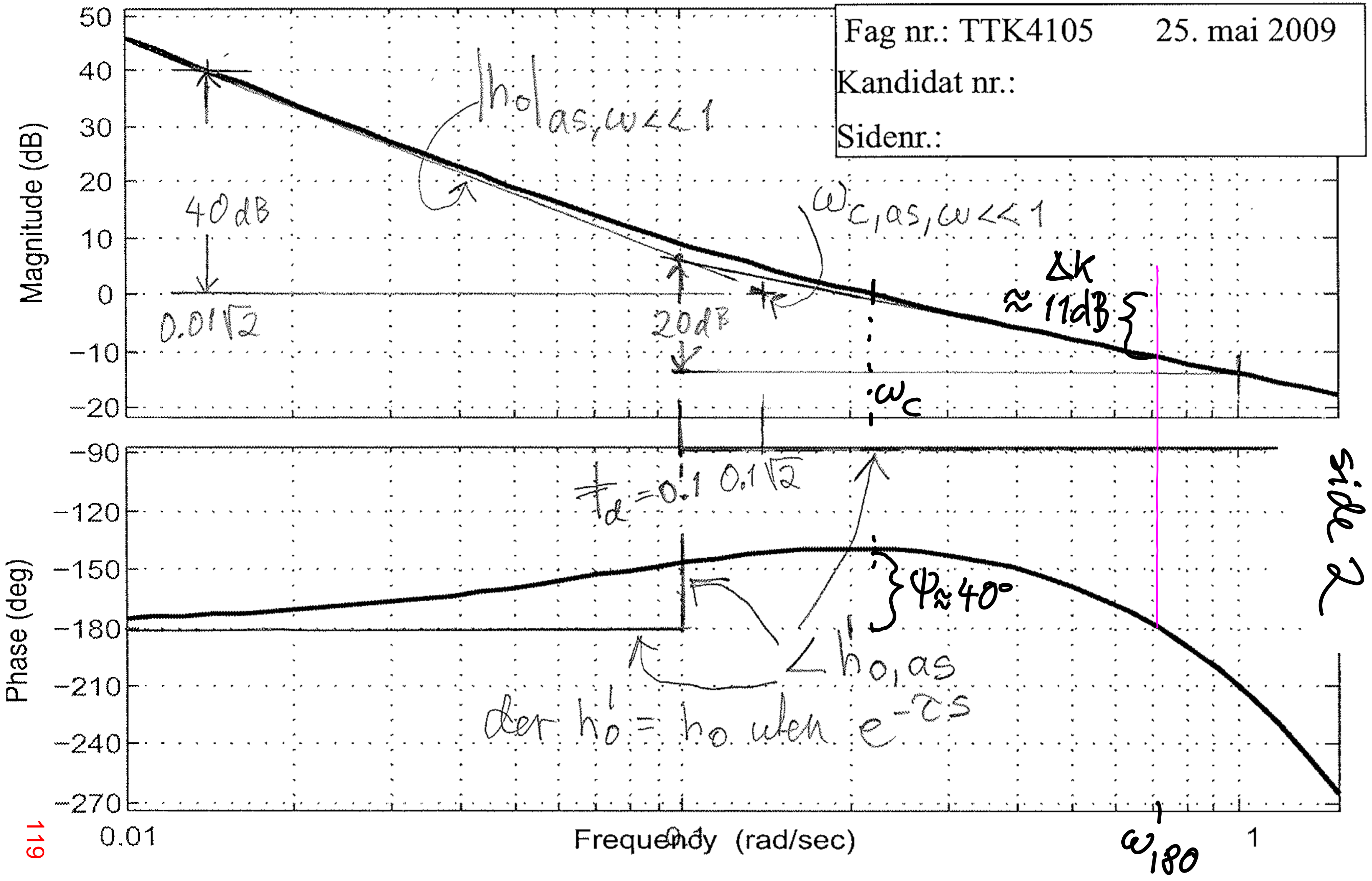
1g) Se side 3

Fag nr.: TTK4105 25. mai 2009

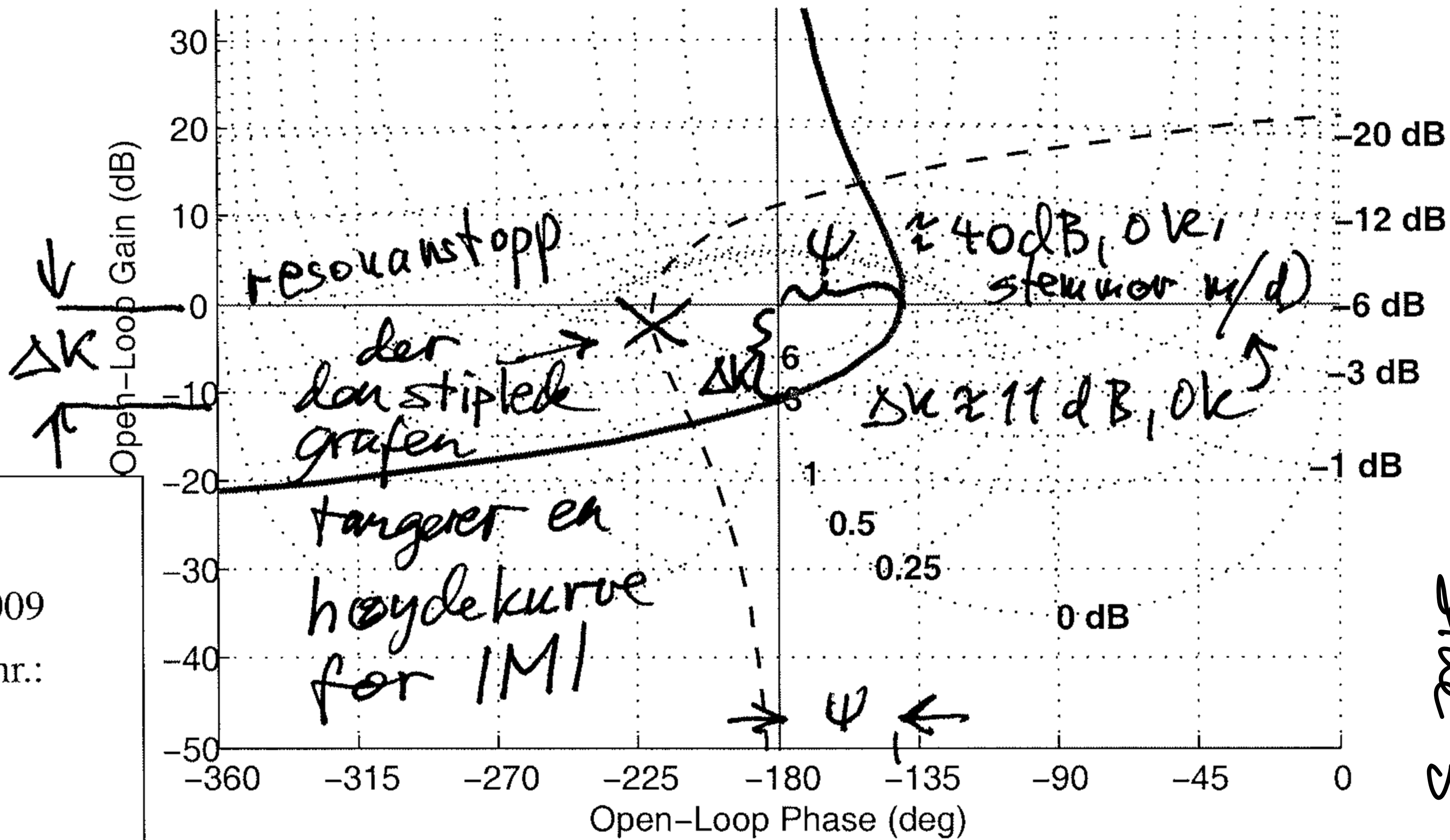
Kandidat nr.:

Sidenr.:

side 2



Side 3

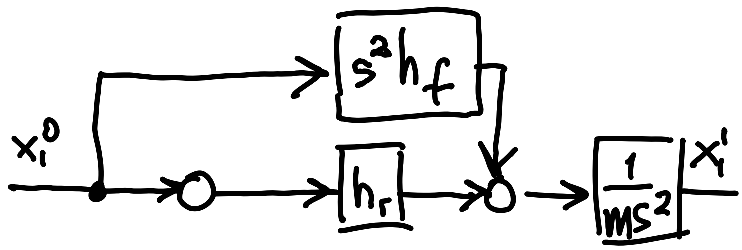


Fag nr.:
TTK4105,
25. mai 2009
Kandidat nr.:

Sidenr.:

side 4

1h) Figur 1.1 $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$ foroverkopling fra referansen. Da må

$$s^2 h_f \cdot \frac{1}{ms^2} = 1 \Rightarrow h_f = \underline{\underline{m}}$$

1i) $M(s) = 1$. Alle biler følger på perfekt.

2 a) "Væske" (penge)balanse bedriften: $\dot{m}_f = c - w$ (1)

" " husholdn.: $\dot{m}_h = w - c$ (2)

Med $x_1 = m_f$, $x_2 = m_h$, $w = \frac{m_f}{T_f}$, $c = \frac{m_h}{T_h}$ blir dette

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_f} x_1 - \frac{1}{T_h} x_2 \quad (4),$$

eller $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$, med $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_f} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_h} \end{bmatrix}$

Systemet er autonomt, fordi det ikke påvirkes utenfra, verken av pådrag eller forstyrrelser.

2 b) Dette kan gjøres på flere måter. Jeg bruker 2. linje i formelsamling, side 10: $\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1} \underline{x}(t=0)$

Vi har $\underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix}$. $(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_f} & -\frac{1}{T_h} \\ -\frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_h} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}\right)s} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{x}(s) = \frac{1}{s\left(s + \left(\frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}\right)\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_h} & \frac{1}{T_h} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{f0} \\ m_{h0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Jeg innfører $\alpha = \frac{1}{T_f} + \frac{1}{T_h}$, og får

$$x_1(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s(s+\alpha)}$$

Residuregning: $x_1(t) = \sum_i \text{res}\, x_1(s)$

$$= \left.\frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s+\alpha} e^{ts}\right|_{s=0} + \left.\frac{\left(s + \frac{1}{T_h}\right) m_{f0} + \frac{1}{T_h} m_{h0}}{s} e^{ts}\right|_{s=-\alpha}$$

Benytter $m = m_{f0} + m_{h0}$ og får

$$x(t) = \frac{m}{T_h \alpha} + \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\left(-\frac{1}{T_f} m_{f0} + \frac{1}{T_h}(m - m_{f0})\right) =$$

$$x_1(t) = \frac{m}{\alpha T_h} + e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\alpha m_{f0} - \frac{m}{T_h}\right) = \underline{\underline{m_{f0} e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha T_h}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}}$$

$m_f(\infty) = x_1(\infty) = \frac{m}{\alpha T_h}$. P.g.a symmetri må $m_h(\infty)$ da være

$m_h(\infty) = \frac{m}{\alpha T_f} \Rightarrow \frac{m_f}{m_h}(\infty) = \underline{\underline{\frac{T_f}{T_h}}}$

Dette kunne også finnes slik: Systemet er marginalt stabilt og uten ytre påvirkninger. Da vil $\underline{x}(\infty) = \underline{\text{konst.}}$ Av f. eks. (3) følger da at $-\frac{1}{T_f} x_1 + \frac{1}{T_h} x_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{m_f(\infty)}{T_f} = \frac{m_h}{T_h}(\infty) \Rightarrow \underline{\underline{\frac{m_f}{m_h}(\infty) = \frac{T_f}{T_h}}}$$

Resultatet er rimelig. Siden pengestrømmene ut av begge "kar" nå er like, vil "væskemengden" i karet bli proporsjonal med T for samme "kar".

2c) (3) får nå et ledd i tillegg: $\mathring{x}_1 = \ldots + u$,

$\Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. A er som før. $\underline{c}^T = [1 \quad 1]$

fordi $y = m_f + m_h = x_1 + x_2 = \underline{c}^T \underline{x}$. Fra

formelsamling s. 8, linje 7, har vi:

$h(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}$. Vi har allerede regnet ut $(sI - A)^{-1}$;

2d)

$$\Rightarrow h(s) = [1 \quad 1] \cdot \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_n} & \frac{1}{T_n} \\ \frac{1}{T_f} & s + \frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left[\left(s + \frac{1}{T_n}\right) + \frac{1}{T_f} \quad \frac{1}{T_n} + \left(s + \frac{1}{T_f}\right) \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)} \left(s + \frac{1}{T_n}\right) + \frac{1}{T_f} = \frac{s+\alpha}{s(s+\alpha)} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

Dette kunne vi innsett straks, fordi den eneste strøm inn i systemet er u, og alt akkumuleres i "karene". Siden m er total pengemengde, må m være integralet av u, $\Rightarrow h(s) = \frac{m}{u}(s) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

side 8

3a) $$h_0 = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \frac{1}{s+a} \; ; \; \angle h_0 = -\frac{\pi}{2} + \underbrace{\angle(1+T_i j\omega)}_{>0 \,\forall \omega} - \underbrace{\angle(j\omega + a)}_{> -\frac{\pi}{2} \forall \omega}$$

$\Rightarrow \angle h_0$ vil aldri bli så negativ som som $-\pi \Rightarrow$ grafen til h_0 kan aldri omslutte $-1 \Rightarrow$ alltid stabilt.

3b) $$h_0 \approx K_p \frac{1+\frac{s}{a}}{\frac{s}{a}} \frac{1}{s+a} e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{K_p}{s} e^{-\frac{T}{2}s} = h_0'$$

$$\angle h_0' = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega \Rightarrow -\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\omega_{180}$$

$$\Rightarrow \omega_{180} = \frac{\pi}{T}$$

$$|h_0| = \frac{K_p}{\omega} \Rightarrow 1 = \frac{K_p}{\omega_c} \Rightarrow K_p = \omega_c$$

Vi har ustabilt system når $\omega_c > \omega_{180} \Leftrightarrow \underline{\underline{K_p > \frac{\pi}{T}}}$

3c) Bruker $e^{-\frac{T s}{2}} \approx \dfrac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$ merk: 4!

$$\Rightarrow h_0 = \frac{t_0}{n_0} = \frac{K_p\left(1-\frac{T}{4}s\right)}{s\left(1+\frac{T}{4}s\right)}$$

Sjekker det karakteristiske polynom for det lukkede system:

$$h_0 + t_0 = s\left(1+\frac{T}{4}s\right) + K_p\left(1-\frac{T}{4}s\right)$$

$= \frac{T}{4}s^2 + \left(1 - K_p\frac{T}{4}\right)s + K_p$. For et 2. ordens polynom forenkles Routh til bare å kreve samme fortegn for alle koeffisienter (for stabilitet), $\Rightarrow$ systemet er ustabilt for $1-K_p\frac{T}{4} < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K_p > \frac{4}{T}}}$

K_p tillates å være større fordi approksimasjonen $\dfrac{1-\frac{T}{4}s}{1+\frac{T}{4}s}$ har mindre negativ fasegang enn $e^{-\frac{T}{2}s}$. Dette gir et for optimistisk bilde.

4) Integraldelen av regulatoren kobles ut når pådraget når en metning.

5) Når det er en tidsforsinkelse i prosessen. Vi kan da velge regulator som om tidsforsinkelsen ikke inngikk i den lukkede sløyfa.

6) Vi har med utgangspunkt i $\Delta K = 11$ dB som vi fant i 1d) at

K_{pk} = (kritisk K_p) = $K_p + 11$ [dB]

Så skal man i følge Z.-N. redusere K_{pk} med 6 dB $\Rightarrow$ endelig K_p blir

$K_p = K_{pk} - 6$ [dB] = opprinnelig $K_p + 5$ dB

$$\Rightarrow \frac{K_p}{m} [dB] = 20 \log_{10}(0.02) + 5$$

eller $\frac{K_p}{m} = 0.02 \cdot 10^{\frac{5}{20}} = \underline{\underline{0.0356}}$