Mathematik für Data Science 1 - Übungsblatt 1

Lerngruppe: ci40tapi, si40tapi, vi62tyqy

H1

a) $A = \{1, 4, 9\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

b) $\overline{A} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
$\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$
$A \cap B = \{4\}$
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{3, 5, 7, 11\}$
$A \setminus B = \{1, 9\}$
$B \setminus A = \{2, 6, 8, 10\}$
$\overline{A \cup B} = \{3, 5, 7, 11\}$
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 6, 8, 9, 10\}$

H2

Aufgabe	reflexiv	symmetrisch	antisymmetrisch	transitiv
a)	nein	ja	nein	nein
b)	nein	ja	nein	ja
c)	ja	nein	ja	ja
d)	ja	ja	nein	ja
e)	nein	nein	ja	nein
f)	nein	nein	ja	ja

a) reflexiv: $x \in M \Rightarrow x \neq x$
falsch

symmetrisch:
$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in M$
$x \neq y \Rightarrow y \neq x$
"$\neq$" ist kommutativ, deswegen ist die Implikation oben ist wahr.

antisymmetrisch:
$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
$x \neq y \wedge y \neq x \Rightarrow x = y$
falsch, Gegenbeispiel x=1, y=2

transitiv:
$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
$x \neq y \wedge y \neq z \Rightarrow x \neq z$
falsch, Gegenbeispiel x=1, y=2, z=1

d) $(x < 0 \land y < 0) \lor (x \geq 0 \land y \geq 0)$
reflexiv:
$(x < 0 \land x < 0) \lor (x \geq 0 \land x \geq 0)$
Eine Zahl kann nur negativ oder nicht negativ sein, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Also ist die Aussage oben wahr.

symmetrisch:
$(x < 0 \land y < 0) \lor (x \geq 0 \land y \geq 0) \Rightarrow (y < 0 \land x < 0) \lor (y \geq 0 \land x \geq 0)$
"$\land$" ist kommutativ, daher stehen auf der linken und der rechten Seite der Implikation identische Aussagen; die Implikation ist also wahr.

antisymmetrisch:
$((x < 0 \land y < 0) \lor (x \geq 0 \land y \geq 0)) \land ((y < 0 \land x < 0) \lor (y \geq 0 \land x \geq 0)) \Rightarrow x = y$
Falsch, Gegenbeispiel x=1, y=2

transitiv:
$((x < 0 \land y < 0) \lor (x \geq 0 \land y \geq 0)) \land ((y < 0 \land z < 0) \lor (y \geq 0 \land z \geq 0)) \Rightarrow (x < 0 \land z < 0) \lor (x \geq 0 \land z \geq 0)$
$((x < 0 \land y < 0) \land (y < 0 \land z < 0)) \lor ((x \geq 0 \land y \geq 0) \land ((y \geq 0) \land z \geq 0)) \Rightarrow (x < 0 \land z < 0) \lor (x \geq 0 \land z \geq 0)$
$(x < 0 \land y < 0 \land z < 0) \lor (x \geq 0 \land y \geq 0 \land z \geq 0) \Rightarrow (x < 0 \land z < 0) \lor (x \geq 0 \land z \geq 0)$
Fall I: $x < 0 \land y < 0 \land z < 0 \Rightarrow x < 0 \land z < 0$ ist wahr.
Fall II: $x \geq 0 \land y \geq 0 \land z \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \land z \geq 0$ ist wahr.
Die Relation ist also transitiv.

H3

Seien $n, m, k \in \mathbb{Z}$
Laut Aufgabe gilt $x \sim y$ falls $x + y = 2n$
a)
R ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Reflexivität:
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x) \in R$
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + x = 2 * n$
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 * x = 2 * n$
$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n$
Mit n=x ist die Implikation oben erfüllt. Daher liegt Reflexivität vor.

Symmetrie: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
$x + y = 2 * n \Rightarrow y + x = 2 * m$
Dies trifft zu mit n=m, daher ist R symmetrisch.

Transitivität:
$(x, y) \in R \land (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
$x + y = 2n \land y + z = 2m \Rightarrow x + z = 2k$
$x + y - (y + z) = 2n - 2m \land y + z = 2m \Rightarrow x + z = 2k$
$x - z = 2n - 2m \land y + z = 2m \Rightarrow x + z = 2k$
$x = 2n - 2m + z \land y + z = 2m \Rightarrow x + z = 2k$

$x = 2n - 2m + z \wedge y + z = 2m \Rightarrow 2n - 2m + z + z = 2k$
$x = 2n - 2m + z \wedge y + z = 2m \Rightarrow n - m + z = k$
Die rechte Seite der Implikation ist erfüllt mit k=n-m+z, also ist die Relation transitiv.

Da R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist R eine Äquivalenzrelation.

b) Die Beweisführung oben bleibt im Wesentlichen gleich (an manchen Stellen ändert sich $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{N}$), wenn R auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eingeschränkt wird. R bleibt eine Äquivalenzrelation.

c) Es liegen 2 Äquivalenzklassen vor:
$[1] = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$
$[2] = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$

-4	-3
-2	-1
0	1
2	3
4	5

d) Ja, denn dann ist R nicht transitiv und damit keine Äquivalenzrelation.
Zum Beispiel sind die 3 Elemente $x = 1, y = 2, z = 3$ nicht transitiv:
$x + y$ ist ungerade $\wedge$ $y + z$ ist ungerade $\Rightarrow$ $x + z$ ist ungerade
$1 + 2$ ist ungerade $\wedge$ $2 + 3$ ist ungerade $\Rightarrow$ $1 + 3$ ist ungerade
Diese Implikation ist falsch. Also ist R keine Äquivalenzrelation.