LDG Methoden mit DUNE für das Stokes System

1. Stationäre Stokes Gleichung für Geschw. u und Druck p

(1.1)
$$\nabla p - \mu \Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$
$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = g_D \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$
$g_D : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, und $\mu \in \mathbb{R}^{>0}$ die Viskosität des Fluids, sei; die Dirichlet daten sollen die Kompatibilitäts-bedingung

(1.2)
$$\int_{\partial\Omega} g_D \cdot n \, ds = 0$$

erfüllen, wobei $n \in \mathbb{R}^d$ die äussere Einheitsnormale auf $\partial\Omega$ sei.

2. Nach Einführung der Hilfsvariable

$$\sigma := \nabla u \qquad \sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$$

können wir System (1.1) als folgendes System von Erhaltungsgleichungen schreiben:

(2.1)
$$\sigma = \nabla u \quad \text{in } \Omega,$$
$$\nabla p - \mu \nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega,$$
$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = g_D \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

3. Notation

Für $v \in \mathbb{R}^d$, $\nabla v \in \mathbb{R}^{d \times d}$
$$\begin{pmatrix} \text{—} & \nabla v_1 & \text{—} \\ & \vdots & \\ \text{—} & \nabla v_d & \text{—} \end{pmatrix}$$

(3.1)
$$(\nabla v)_{ij} = \partial_j v_i$$

Für $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$: $\nabla \cdot \sigma \in \mathbb{R}^d$
$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \sigma_1 \\ \vdots \\ \nabla \cdot \sigma_d \end{pmatrix}$$

(3.2)
$$(\nabla \cdot \sigma)_i = \sum_{j=1}^{d} \partial_j \sigma_{ij}$$

Für $v, n \in \mathbb{R}^d$: $v \otimes n \in \mathbb{R}^{d \times d}$

(3.3) $$(v \otimes n)_{ij} = v_i n_j$$

Für $\sigma, \tau \in \mathbb{R}^{d \times d}$: $\sigma : \tau \in \mathbb{R}$

(3.4) $$\sigma : \tau = \sum_{ij=1}^{d} \sigma_{ij} \tau_{ij}$$

Für $v, n \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$: $v \cdot \sigma \cdot n \in \mathbb{R}$

(3.5) $$v \cdot \sigma \cdot n = \sigma : (v \otimes n) = \sum_{ij=1}^{d} v_i \sigma_{ij} n_j$$

4 Schwache Formulierung kontinuierlich

Sei $\omega \in \Omega$ beliebig, $\tau \in \mathcal{D}(\omega)^{d \times d}$, $v \in \mathcal{D}(\omega)^d$, $q \in \mathcal{D}(\omega)$

(4.1) $$\int_\omega \sigma : \tau \, dx = \int_\omega \nabla u : \tau \, dx \qquad \text{aus (2.1.1)}$$
$$\overset{P.I}{=} \int_{\partial\omega} u \cdot \tau \cdot n_\omega \, ds - \int_\omega u \cdot (\nabla \cdot \tau) \, dx$$

$$\underbrace{\int_\omega \nabla p \cdot v \, dx}_{\overset{P.I}{=} \int_{\partial\omega} p \cdot v \cdot n_\omega ds - \int_\omega p \cdot (\nabla \cdot v) dx} - \mu \underbrace{\int_\omega v \cdot (\nabla \cdot \sigma) \, dx}_{\overset{P.I}{=} \int_{\partial\omega} v \cdot \sigma \cdot n_\omega ds - \int_\omega \sigma : \nabla v \, dx} = \int_\omega f \cdot v \, dx \qquad \text{aus (2.1.2)}$$

$\Leftrightarrow$

(4.2) $$\mu \int_\omega \sigma : \nabla v \, dx - \mu \int_{\partial\omega} v \cdot \sigma \cdot n_\omega \, ds - \int_\omega p \cdot (\nabla \cdot v) \, dx + \int_{\partial\omega} p \cdot v \cdot n_\omega \, ds = \int_\omega f \cdot v \, dx$$

(4.3) $$0 = \int_\omega (\nabla \cdot u) \, q \, dx \qquad \text{aus (2.1.3)}$$
$$\overset{P.I}{=} \int_{\partial\omega} u \cdot n_\omega q \, ds - \int_\omega u \cdot \nabla q \, dx$$

(4.1) - (4.3) gilt insbes. für alle $\underbrace{(\sigma, u, p)}_{\text{exakte schw. Lsg.}} \in \Sigma \times V \times Q$, mit

(4.4)
$$\begin{aligned}
\Sigma &:= \{ \sigma \in L^2(\Omega)^{d \times d} \mid \forall T \in \mathcal{T}: \ \sigma_{ij}|_T \in H^1(T) \ \forall ij \}, \\
V &:= \{ v \in L^2(\Omega)^d \mid \forall T \in \mathcal{T}: \ v_i|_T \in H^1(T) \ \forall i \}, \\
Q &:= \{ q \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}: \ q|_T \in H^1(T), \ \int_\Omega q \, dx = 0 \},
\end{aligned}$$

wobei

$\mathcal{T}$ eine Triangulisierung von Ω,
↳ hängende Knoten, versch. Elte.

dh

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T,$$

$$T_i \cap T_j \neq \emptyset \quad \forall \, i \neq j$$

5 Schwache Formulierung approximativ

Gesucht ist appr. schw. Lsg $(\sigma_N, u_N, p_N) \in \Sigma_N \times V_N \times Q_N$ aus den Fin. Elem. Räumen

(5.1)
$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_N &:= \text{———} \quad S(T) \\
V_N &:= \text{———} \quad \mathcal{V}(T) \\
Q_N &:= \text{———} \quad \mathcal{Q}(T)
\end{aligned}\right\} \text{lokale fin. elem. Räume}$$

$\forall T \in \mathcal{T}, \quad \forall \ \tau \in \Sigma_N, \ v \in V_N, \ q \in Q_N$:

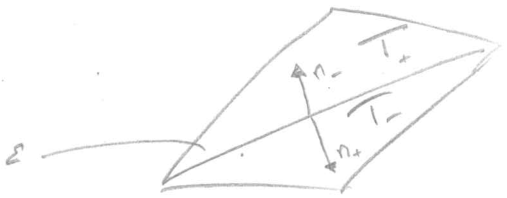
(5.2)
$$\begin{aligned}
&\int_T \sigma_N : \tau \, dx = \int_{\partial T} \hat{u}_{N_\sigma} \cdot \tau \cdot n_T \, ds - \int_T u_N \cdot (\nabla \cdot \tau) \, dx \\
&\mu \int_T \sigma_N : \nabla v \, dx - \mu \int_{\partial T} v \cdot \hat{\sigma}_N \cdot n_T \, ds - \int_T p_N \cdot (\nabla \cdot v) \, dx \\
&\qquad + \int_{\partial T} \hat{\hat{p}}_N \cdot v \cdot n_T \, ds = \int_T f \cdot v \, dx \\
&\int_{\partial T} \hat{u}_{u_p} \cdot n_T \, q \, ds - \int_T u_N \cdot \nabla q \, dx = 0
\end{aligned}$$

(6.7) hierhin

6 analytische Flüsse

Menge d. Kanten

(6.1) $\mathcal{E} = \underbrace{\mathcal{E}_I}_{\text{innere Kante}} \cup \underbrace{\mathcal{E}_D}_{\text{äussere Kanten}} \qquad (\mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}_D)$



Mittelwerte

(6.2)

$p \in \mathbb{R}: \quad \{\{p\}\} := \frac{1}{2}(p^+ + p^-) \quad \in \mathbb{R}$

$u \in \mathbb{R}^d: \quad \{\{u\}\} := \frac{1}{2}(u^+ + u^-) \quad \in \mathbb{R}^d$

$\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}: \quad \{\{\sigma\}\} := \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$

Sprünge

(6.2)

$[\![p]\!] := p^+ n^+ + p^- n^- \quad \in \mathbb{R}^d$

$[\![u]\!] := u^+ \cdot n^+ + u^- \cdot n^- \quad \in \mathbb{R}$

$\underline{[\![u]\!]} := u^+ \otimes n^+ + u^- \otimes n^- \quad \in \mathbb{R}^{d\times d}$

$[\![\sigma]\!] := \sigma^+ \cdot n^+ + \sigma^- \cdot n^- \quad \in \mathbb{R}^d$

$\underline{[\![u]\!]}^2 \leq [\![u]\!]^2$

Flüsse

$\hat{\sigma}^{(u,\sigma)} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$

(6.3) $\hat{\sigma}(x) := \begin{cases} \{\{\sigma\}\} - C_{11}\underline{[\![u]\!]} + [\![\sigma]\!] \otimes C_{12} & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ \sigma^+ - C_{11}(u^+ - g_D) \otimes n^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{u}_\sigma^{(u)} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

(6.4) $\hat{u} := \begin{cases} \{\{u\}\} + \underline{[\![u]\!]} \cdot C_{12} & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ g_D & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

(6.5)
$$\hat{u}_p^{(u,p)}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\hat{u}_p := \begin{cases} \{\{u\}\} + D_{11} [\![p]\!] + D_{12} [\![u]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ g_D & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$$

(6.6)
$$\hat{p}^{(p)}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\hat{p} := \begin{cases} \{\{p\}\} - D_{12} [\![p]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ p^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D, \end{cases}$$

wobei $C_{11}, E_{11}, D_{11} \in \mathbb{R}$ Stabilisierungskoeffizienten und $C_{12}, D_{12} \in \mathbb{R}^d$ Gewichtskoeffizienten sind.

Annahme: Die Flüsse lassen sich schreiben als

(6.7)
$$\hat{\sigma}^{(u,\sigma)}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$$
$$\hat{\hat{\sigma}}(u,\sigma) = \hat{\sigma}(\sigma) + \hat{\sigma}(u) + \hat{\sigma}() \qquad : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

$$\hat{u}_\sigma(u): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\hat{u}_\sigma(u) = \hat{u}_\sigma(u) + \hat{u}_\sigma() \qquad : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

$$\hat{u}_p(u,p): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\hat{\hat{u}}_p(u,p) = \hat{u}_p(u) + \hat{u}_p(p) + \hat{u}_p() \qquad : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

$$\hat{\hat{p}}^{(p)}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\hat{\hat{p}}(p) = \hat{p}(p) + \hat{p}()$$

Beispiel für Thiele zu 6.2

$\hat{\tilde{\sigma}}(u,\sigma)$

$\hat{\sigma}(\sigma) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\hat{\sigma}(\sigma) := \begin{cases} \{\{\sigma\}\} + [\![\sigma]\!] \times C_{12} & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ \sigma^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$$

$\hat{\sigma}(u) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\hat{\sigma}(u) := \begin{cases} -C_{11} [\![u]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ -C_{11}\, u^+ \otimes n^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$$

$\hat{\sigma}() : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\hat{\sigma}() := \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ C_{11}\, g_D \otimes n^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$$

$\hat{u}_\sigma(u) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\hat{u}_\sigma(u) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad \hat{u}_\sigma(u) := \begin{cases} \{\{u\}\} + [\![u]\!] \cdot C_{12} & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ 0 & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{u}_\sigma() : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad \hat{u}_\sigma() := \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ g_D & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{u}_p(u,p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\hat{u}_p(u) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad \hat{u}_p(u) := \begin{cases} \{\{u\}\} + D_{12} [\![u]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ 0 & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{u}_p(p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad \hat{u}_p(p) := \begin{cases} D_{11} [\![p]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ 0 & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{u}_p() : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\quad \hat{u}_p() := \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ g_D & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{\tilde{p}}(p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\hat{p}(p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \hat{p}(p) := \begin{cases} \{\{p\}\} - D_{12} [\![p]\!] & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ p^+ & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

$\hat{p}() := \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathcal{E}_I \\ 0 & \text{auf } \mathcal{E}_D \end{cases}$

7 Diskrete schwache Formulierung

Sei $\mathcal{T} = \{T_i \mid i = 0, \dots, I-1\}$ eine Triangulierung, die diskr. Fkt.räume haben Basen

$$(7.1)\quad \begin{cases} \Sigma_h = \langle \{\tau_m \mid m = 0, \dots, M-1\} \rangle \\ V_h = \langle v_l \mid l = 0, \dots, L-1\} \rangle \\ Q_h = \langle \{q_k \mid k = 0, \dots, K-1\} \rangle \end{cases}$$

Damit lassen sich die ges. Fkt. darstellen als

$$(7.2)\quad \begin{cases} \sigma_h = \sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \tau_m \\ u_h = \sum_{l=0}^{L-1} u_l v_l \\ p_h = \sum_{k=0}^{K-1} p_k q_k \end{cases}$$

Durch Summation über alle $T \in \mathcal{T}$ und Einsetzen von (7.2) ergibt sich aus (5.2).

$⑧$

<u>aus (5.2.1)</u>

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \left(\sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \tau_m \right) : \tau_{m'} \, dx = - \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \left(\sum_{l=0}^{L-1} u_l v_l \right) \cdot (\nabla \cdot \tau_{m'}) \, dx \\ &\qquad + \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \left[\hat{u}_\sigma \left(\sum_{l=0}^{L-1} u_l v_l \right) + \hat{u}_r() \right] \cdot \tau_{m'} \cdot n_T \, ds \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\underset{(j)}{m=0}}^{M-1} \sigma_m \left[\sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \tau_m : \tau_{m'} \, dx \right] \\ &+ \sum_{\underset{(j)}{l=0}}^{L-1} u_l \left[- \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T v_l \cdot (\nabla \cdot \tau_{m'}) \, dx + \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \hat{u}_\sigma(v_l) \cdot \tau_{m'} \cdot n_T \, ds \right] \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \hat{u}_\sigma() \cdot \tau_{m'} \cdot n_T \, ds \end{aligned} \right| \quad (7.3)$$

$$\forall \; 0 \le \underset{(i)}{m'} \le M-1$$

aus 5.2.2

$$\mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \left(\sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \tau_m\right) : D v_{l'} \, dx - \mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} v_{l'} \cdot \left(\hat{\sigma}\left(\sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \tau_m\right) + \hat{\sigma}\left(\sum_{l=0}^{L-1} u_l v_l\right) + \hat{\sigma}()\right) \cdot n_T \, ds$$

$$- \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \left(\sum_{k=0}^{K-1} p_k q_k\right) \cdot (\nabla \cdot v_{l'}) \, dx$$

$$+ \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \left(\hat{p}\left(\sum_{k=0}^{K-1} p_k q_k\right) + \hat{p}()\right) \cdot v_{l'} \cdot n_T \, ds = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T f \cdot v_{l'} \, dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sigma_m \left[\mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T \tau_m : D v_{l'} \, dx - \mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} v_{l'} \cdot \hat{\sigma}(\tau_m) \cdot n_T \, ds \right]$$

$$+ \sum_{l=0}^{L-1} u_l \left[- \mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} v_{l'} \cdot \hat{\sigma}(v_l) \cdot n_T \, ds \right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{K-1} p_k \left[- \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T q_k \cdot (\nabla \cdot v_{l'}) \, dx + \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \hat{p}(q_k) \cdot v_{l'} \cdot n_T \, ds \right]$$

$$= \mu \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} v_{l'} \cdot \hat{\sigma}() \cdot n_T \, ds - \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T} \hat{p}() \cdot v_{l'} \cdot n_T \, ds + \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T f \cdot v_{l'} \, dx \qquad (7.1)$$

$\forall\, 0 \le l' \le L-1$

(i)

aus S. 2.3

$$\sum_{T\in\mathcal{T}}\int_{\partial T}\left(\hat{u}_p\Big(\sum_{l=0}^{L-1}u_l v_l\Big)+\hat{u}_p\Big(\sum_{k=0}^{K-1}p_k q_k\Big)+\hat{u}_p()\right)\cdot n_T\, q_{k'}\,ds - \sum_{T\in\mathcal{T}}\int_T\Big(\sum_{l=0}^{L-1}u_l v_l\Big)\cdot\nabla q_{k'}\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{L-1}u_l\left[\sum_{T\in\mathcal{T}}\int_{\partial T}\hat{u}_p(v_l)\cdot n_T\, q_{k'}\,ds - \sum_{T\in\mathcal{T}}\int_T v_l\cdot\nabla q_{k'}\,dx\right]\\ &+\sum_{k=0}^{K-1}p_k\left[\sum_{T\in\mathcal{T}}\int_{\partial T}\hat{u}_p(q_k)\cdot n_T\, q_{k'}\,ds\right]\\ &= -\sum_{T\in\mathcal{T}}\int_{\partial T}\hat{u}_p()\cdot n_T\cdot q_{k'}\,ds\end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

$$\forall\, 0\le k'\le K-1$$

(i)

8 Matrizen Schreibweise

aus (7.3):

$$\begin{pmatrix} M' & W' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ u \end{pmatrix} = \cancel{F}'_{H_1}$$

wobei

7.6

$$(M')_{ij} := \sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\int_T \tau_j : \tau_i \, dx \right]$$

$$(W')_{ij} := \sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\int_{\partial T} \hat{u}_\sigma(v_j) \cdot \tau_i \cdot n_T \, ds - \int_T v_j \cdot (\nabla \cdot \tau_i) \, dx \right]$$

$$(\cancel{F}'_{H_1})_j := \sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\int_{\partial T} \hat{u}_\sigma() \cdot \tau_j \cdot n_T \, ds \right]$$

$M' \in \mathbb{R}^{M\times M}$

$W' \in \mathbb{R}^{M\times L}$

$F' \in \mathbb{R}^{M}$

aus 7.4

$$\begin{pmatrix} \mu X' & \mu Y' & Z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = G' \quad , \quad H_2$$

wobei

7.2

$$(X')_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\int_T \tau_j : D v_i \, dx - \int_{\partial T} v_i \cdot \hat{\sigma}(\tau_j) \cdot n_T \, ds \right]$$

$$(Y')_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[- \int_{\partial T} v_i \cdot \hat{\sigma}(v_j) \cdot n_T \, ds \right]$$

$$(Z')_{ij} := \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\int_{\partial T} \hat{p}(q_j) \cdot v_i \cdot n_T \, ds - \int_T q_j \cdot (D \cdot v_i) \, dx \right]$$

$$\underset{H_2}{(G')_j} := \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\mu \left(\int_{\partial T} v_j \cdot \hat{\sigma}() \cdot n_T \, ds \right) - \int_{\partial T} \hat{p}() \cdot v_j \cdot n_T \, ds \; , \; \int_T f \cdot v_j \, dx \right]$$

$X' \in \mathbb{R}^{L \times M}$

$Y' \in \mathbb{R}^{L \times L}$

$Z' \in \mathbb{R}^{L \times K}$

$G' \in \mathbb{R}^{L}$

aus 7.5

$$\begin{pmatrix} E' & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = H_3',$$

wobei

$$(E')_{ij} := \sum_{T \in \tau} \left[\int_{\partial T} \hat{u}_p(v_j) \cdot n_T \, q_i \, ds - \int_T v_j \cdot D q_i \, dx \right]$$

7.8

$$(R')_{ij} := \sum_{T \in \tau} \left[\int_{\partial T} \hat{u}_p(q_j) \cdot n_T \, q_i \, ds \right]$$

$$(H_3')_j := \sum_{T \in \tau} \left[- \int_{\partial T} \hat{u}_p() \cdot n_T \, q_i \, ds \right]$$

$E' \in \mathbb{R}^{K \times L}$

$R' \in \mathbb{R}^{K \times K}$

$H' \in \mathbb{R}^{K}$

insgesamt

$$\Omega^{\Omega} \quad \begin{pmatrix} \Pi' & W' & \emptyset \\ \mu X' & \mu Y' & Z' \\ \emptyset & E' & R' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{u} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}' \\ \hat{G}' \\ \hat{H}' \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_2 \end{matrix}$$

angenommen: $W' = -X^T$, $Z' = -E^T$

$$\begin{pmatrix} \Pi' & W' & 0 \\ -\mu W'^T & \mu Y' & Z' \\ 0 & -Z'^T & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F' \\ G' \\ H' \end{pmatrix}$$

also zz $\quad W' = -X'^T$

$$(W')_{ij} = \sum_{T \in \tau} \left[\int_{\partial T} \hat{u}_S(v_j) \cdot \tau_i \cdot n_T \, ds - \int_T v_j \cdot (\nabla \cdot \tau_i) \, dx \right]$$

$$= \int_{\partial T} (\tau_i \cdot n_T) \, v_j \, ds - \int_T \tau_i : D v_j$$

Kondensation der Matrizen

Annahme muß zu den Flüssen B

Angenommen, $W' = -X'^T$, $Z' = -E'^T$,
dann sieht (7.9) so aus:

$$(7.10)\quad \begin{pmatrix} M' & W' & 0 \\ -\mu W'^T & \mu Y' & Z' \\ 0 & -Z'^T & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3' \end{pmatrix}$$

Da Z_i ONB $\Rightarrow$ M invertierbar.

aus (7.10.1) $\qquad M'\sigma + W'u = F'$

$$(7.11)\quad \Rightarrow \sigma = M'^{-1}(\overset{H_1}{\cancel{F'}} - W'u)$$

aus (7.10.2)

$$-\mu W'^T\sigma + \mu Y'u + Z'p = H_2$$

$$\overset{(7.11)}{\Rightarrow} -\mu W'^T\left(M'^{-1}(\overset{H_1}{\cancel{F'}} - W'u)\right) + \mu Y'u + Z'p = H_2$$

$$(7.12)\quad \Leftrightarrow \mu\left(W'^T M'^{-1} W' + Y'\right)u + Z'p = H_2 + \mu W'^T M'^{-1} H_1$$

aus (7.10.3)

$$-Z'^T u + R'p = H_3'$$

$$(7.13)\quad \Leftrightarrow Z'^T u - R'p = -H_3'$$

insgesamt:

$$(7.14)\quad \begin{pmatrix} \overset{\mu A}{\overbrace{\mu\left(W'^T M'^{-1} W' + Y'\right)}} & \overset{B}{Z'} \\ Z'^T & \underset{-C}{-R'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \overset{=:F}{\overbrace{\begin{pmatrix} H_2 + \mu W'^T M'^{-1} H_1 \\ \underset{G}{-H_3} \end{pmatrix}}}$$

(7.14) lässt sich also schreiben als

$$(7.15)\quad \begin{pmatrix} \mu A & B \\ B^T & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

wobei

$$A = W^T M^{-1} W + Y$$

$$B = Z$$

$$C = R$$

$$F = H_2 + \mu W^T M^{-1} H_1$$

$$G = -H_3 .$$

wenn A invertierbar wäre:

aus (7.15.1):

$$\mu A u + B p = F$$

$$(7.16)\quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\mu} A^{-1}(F - Bp)$$

aus (7.15.2):

$$B^T u - Cp = G$$

$$\overset{(7.16)}{\Rightarrow} \quad B^T\left(\frac{1}{\mu} A^{-1}(F - Bp)\right) - Cp = G$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} B^T A^{-1} F - \frac{1}{\mu} B^T A^{-1} B p - Cp = G \qquad | \cdot \mu$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(B^T A^{-1} B + C)}_{=: S} \, p = \underbrace{B^T A^{-1} F - \mu G}_{=: \mathcal{F}}$$

Schurkomplementoperator

$$S p = \mathcal{F},$$

mit $S = B^T A^{-1} B + C$

$\mathcal{F} = B^T A^{-1} F - \mu G$

Zur Berechnung von p muss S invertiert werden (CG),

zur Berechnung von S muss A invertiert werden (CG)