Local Discontinuous Galerkin Methoden für elliptische Differentialgleichungen und das Stokes System

Diplomarbeit am Mathematischen Institut
bei Prof. Dr. D. Kröner
Fakultät für Mathematik und Physik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau

von

Mirko Kränkel

Tag der Anmeldung:	1. August 2007
Tag der Abgabe:	3. März 2008

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **i**

2. Notation **1**

2.0.1. Funktionenräume . . . 1
2.0.2. Triangulierung . . . 1

3. LDG-Verfahren für elliptische Randwertprobleme **3**

3.1. Das elliptische Randwertproblem . . . 3
3.2. Das Discontinuous Galerkin Verfahren . . . 5
3.2.1. Motivation der numerischen Flüsse . . . 10
3.2.2. Gemischte Formulierung . . . 12
3.3. Primale Formulierung . . . 16
3.3.1. Übersicht über verschiedene DG-Verfahren . . . 18
3.4. A priori Analysis . . . 19
3.4.1. Vorraussetzungen . . . 19
3.4.2. Das Hauptresultat . . . 20
3.4.3. Die Beweisidee . . . 21
3.4.4. Die Beweise . . . 24

4. LDG-Verfahren für das Stokes System **39**

4.1. Das Stokes System . . . 39
4.2. Das LDG-Verfahren . . . 41
4.3. A priori Abschätzungen . . . 47
4.3.1. Vorraussetzungen . . . 47
4.3.2. Die Hauptresultate . . . 48
4.3.3. Die Beweisidee . . . 49
4.3.4. Beweise . . . 52

5. Implementierung der Verfahren **57**

5.1. **DUNE** . . . 57
5.2. Das Gleichungssystem . . . 57
5.2.1. Kondensation der Matrizen . . . 59
5.3. Die Discontinuous-Galerkin Räume . . . 60
5.4. Assemblierung der Systemmatrizen . . . 61
5.5. Systemmatrizen und Gleichungssystem für das Stokes-Problem . . . 64
5.5.1. Die Systemmatrizen . . . 64

5.5.2. Kondensation der Matrizen 66
5.5.3. Lösung des Sattelpunktproblems 67

6. Numerische Resultate **70**
6.1. Die elliptische Gleichung 70
6.1.1. Testbeispiel mit glatter Lösung 70
6.1.2. Lösung für ein L-förmiges Gebiet 71
6.1.3. Modell mit Diffusionsmatrix 76
6.2. Das Stokessystem 76

A. CD-ROM **79**

1. Einleitung

In dieser Diplomarbeit sollen Discontinuous-Galerkinverfahren für elliptische Randwertprobleme und das Stokes-System vorgestellt werden. Die Grundlage hierzu sind die Arbeiten von Castillo, Cockburn, Prugia und Schötzau [13], Arnold, Brezzi, Cockburn und Marini [4] für die elliptischen Probleme sowie die Arbeit von Cockburn, Kanschat, Schötzau und Schwab [19] für das Stokes-System. Die vorgestellten Verfahren wurden unter Verwendung der Softwarebibliothek **DUNE** [1] implementiert und getestet. Dabei wurde insbesondere das in Freiburg entwickelte **DUNE-FEM** [2] Modul benutzt, das ergänzend zu den Gitterschnittstellen von **DUNE-GRID** allgemeine Methoden zur Diskretisierung partieller Differntialgleichungen zur Verfügung stellt.

Das Local-Discontinuous-Galerkin Verfahren für Konvektions-Diffusions Probleme wurde von Cockburn und Shu in [23] als Erweiterung der in [6] von Bassi und Rebay behandelten Methode für die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen eingeführt. Die Arbeit von Bassi und Rebay stellt wiederum eine Erweiterung der sogenannten Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methdoden für nichtlineare hyperbolische System dar, die von Cockburn und Shu in [15], [20], [21], [22], [24] entwickelt wurden.
In [11] wurde gezeigt, wie verschiedene numerische Methoden zur Diskretisierung elliptischer PDEs, die unstetige Ansatzfunktionen verwenden, in einer einheitliche Formulierung in Verbindung gebracht werden können. Dazu geören neben dem in diese Arbeit behandelten LDG-Verfahren die Methoden aus den Arbeiten von Bassi und Rebay [6], Bassi et. al[7], Brezzi et. al [10], Baumann und Oden [8], das Interior-Penalty Verfahren von Douglas und Dupont aus [25] sowie die Methode von Babuška und Zlámal aus [5]. Diese Arbeit wurde in [4] fortgesetzt und ein gemeinsames Framework für die Fehler-Analysis dieser Methoden entwickelt. Weiterführende Ergebnissen zu DG-Methoden für elliptische Probleme sind in den nachfolgend aufgezählten Arbeiten zu finden. Cockburn et.al zeigen in [16] ein Superkonvergenz-Resultat für kathesiche Gitter und Tensorprodukt-Polynone. In der Arbeit [12] von Castillo werden verschiedene DG-Verfahren unter Effizienzgesichtspunkten betrachtet. Eine genaue Analyse des LDG-Verfahrens im 2D Fall findet sich in der Arbeit von Sherwin et. al [27].
Das LDG-Verfahren für das Stokes-System aus [19] ist eine direkte Erweiterung der Methode aus [13] und stellt die Grundlage für LDG-Methoden zur Diskrtetsierung der Oseen-Gleichungen und schließlich der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen dar. Dies wurde in den Arbeiten [17] und [18] von Cockburn, Kanschat und Schötzau behandlt.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im ersten Kapitel wird das Discontinuous Galerkin

Verfahren aus [13] für elliptische Differentialgleichen zweiter Ordnung vorgestellt. Dabei wird darauf eingegangen wie man durch Umschreiben der Gleichung als System von Gleichungen erster Ordnung und einer lokalen schwachen Formulierung das DG-Verfahren herleitet. Desweitern werden die Ansatzräume und die für die Eigenschaften des Verfahrens entscheidenden numerischen Füsse angegeben und motiviert. Abschliessend werden die theoretischen Resultate aus [13] angegeben.
Das folgende Kapitel behandelt das LDG-Verfahren für das Stokes System und folgt im wesentlichen dem Vorgehen in Kapitel 1.
Kapitel 3 erläutert einige Details zur Implementierung der Verfahren. Insbesondere wird die Assemblierung der Systemmatrizen behandelt und die Lösung der resultierenden linearen Gleichungssysteme behandelt. Im letzten Kapitel werden einige numerische Resultate vorgestellt, die mit der im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Implementierung gewonnen wurden. Die im Rahmen der Diplomarbeit entstandene Software, liegt der Arbeit auf CD-Rom bei.

Danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Dietmar Kröner und Herrn Prof. Dr. Mario Ohlberger für die Vergabe dieser Diplomarbeit und die sehr gute Betreuung. Weiterer Dank geht an Dr. Andreas Dedner und Dipl. Math. Robert Klöfkorn für die wertvolle Hilfestellung bei Implementierungsfragen. Ebenfalls bedanke ich mich bei Christoph Gersbacher,Johannes Daube und Katharina Hermsdoerfer für Korrekturen. Besonders möchte ich Katrin Lehmann danken, die mich trotz Allem in unglaublicher Art und Weise während der Anfertigung der Diplomarbeit unterstützt hat. Zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir das Mathematikstudium in Freiburg ermöglicht haben.

2. Notation

Vorausgehend sind hier einige der häufig verwendeten Definitionen und Schreibweisen zusammengestellt.

2.0.1. Funktionenräume

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet dann bezeichne

- $L^2(D)$ den üblichen Raum der quadratintegriebaren Funktionen mit der Norm $||\cdot||_{0,D}$.
- $H^k(D) := H^{k,2}(D)$ die üblichen Sobolev-Räume und $||\cdot||_{k,D}$,$|\cdot|_{k,D}$ die zugehörigen Normen und Halbnormen, siehe z.B. [3],

Falls D das gesamte betrachtete Gebiet ist wird $||\cdot||_k$ geschrieben.

2.0.2. Triangulierung

Definition 2.0.1 (Triangulierung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d \quad d \in \mathbb{N}$ ein polygonal berandetes Gebiet. In dieser Arbeit bezeichnet eine Triangulierung $\mathcal{T}$ eine Zerlegung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in endlich viele Teilmengen K mit den folgenden Eigenschaften*

- $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{T}} K$
- *Jedes $K \in \mathcal{T}$ ist abgeschlossen und $int(K) \neq \emptyset$.*
- *Für $K \neq K'$ gilt $int(K) \cap int(K')$.*
- *Es gibt eine endliche Menge konvexer, polygonal berandeter Referenzelemente $R := \{\hat{K}_0 \dots \hat{K}_n\}$, so dass für jedes $K \in \mathcal{T}$ eine affin lineare bijektive Abbildung $\hat{F} : \hat{K} \to K$ für ein $\hat{K} \in R$ existiert.*

Mit **h** *bezeichnet man den maximalen Durchmesser aller $K \in \mathcal{T}$ und damit die Feinheit der Triangulierung.*

$$h := \sup_{K \in \mathcal{T}} diam(K)$$

Definition 2.0.2. *Die Menge der inneren Kannten von $\mathcal{T}$ bezeichnet man mit:*

$$\mathcal{E}_I := \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bigcup_{\substack{e \subset \partial K \\ e \not\subseteq \partial\Omega}} e$$

Die Menge der Dirichlet/Neumann-Randkannten mit.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}/\mathcal{N}} := \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bigcup_{\substack{e \subset \partial K \\ e \subset \Gamma_{\mathcal{D}/\mathcal{N}}}} e,$$

3. LDG-Verfahren für elliptische Randwertprobleme

Dieses Kapitel behandelt elliptische Randwertprobleme mit gemischten Neumann und Dirichlet-Randbedingungen. Zuerst wird dargestellt, wie sich die elliptische Gleichung durch Einführen einer Hilfsvariable in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführen lässt. Aus diesem System erhält man dann eine geeignete schwache Formulierung, die auf die Local-Discontinuous-Galerkin Diskretisierung führt. Dies geschieht, indem man die schwache Formulierung lokal auf jedem Element einer gegebenen Triangulierung fordert. Da die Ansatzräume im Gegensatz zu den Standard-FEM Methoden unstetig über die Elementgrenzen hinweg sind, muss die Kopplung der lokalen Freiheitsgrade, durch sogenannte numerische Flüsse erfolgen. Diese stellen im wesentlichen diskrete Spuroperatoren dar und sind entscheidend für die Eigenschaften des numerischen Verfahrens.

3.1. Das elliptische Randwertproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet $\Omega = \Gamma_\mathcal{D} \cup \Gamma_\mathcal{N}$, so dass $meas_{d-1}(\Gamma_\mathcal{D} \cap \Gamma_\mathcal{N}) = 0$ Wir betrachten das gemischte Drichichlet-/Neumann-Randwertproblem.
Gesucht ist eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ so dass:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{A}\nabla u &= f && \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g_\mathcal{D} && \text{auf} \quad \Gamma_\mathcal{D}, && (3.1) \\ \mathbf{A}\nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_\mathcal{N} && \text{auf} \quad \Gamma_\mathcal{N}, && (3.2) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{A} \in [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$ symmetrisch und positiv definit.

Um das DG-Verfahren definieren zu können, führen wir die Hilfsvariable $\boldsymbol{\sigma}$ ein und schreiben (3.1) als ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \nabla u \quad in \quad \Omega, && (3.3)\\
-\nabla \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} &= f \quad in \quad \Omega, && (3.4)\\
u &= g_{\mathcal{D}} \quad auf \quad \Gamma_{\mathcal{D}}, && (3.5)\\
\mathbf{A}\nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_{\mathcal{N}} \quad auf \quad \Gamma_{\mathcal{N}}, && (3.6)
\end{aligned}$$

Multipliziert man (3.4) und (3.5) mit Testfunktionen $(\boldsymbol{\tau}, \varphi) \in H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^d$ und integriert über eine hinreichend glatte Teilmenge $K \subset \Omega$, so erhält man nach Anwendung des Satzes von Gauss folgende schwache Formulierung, die als Grundlage des LDG-Verfahrens dienen wird.

Definition 3.1.1. *Ein Tupel* $(u, \boldsymbol{\sigma}) \in H^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^d$ *heißt* ***schwache Lösung*** *von (3.1) falls für alle Teilmengen* $K \subset \Omega, K$ *offen, beschränkt und mit Lipschitzrand, gilt:*

$$\int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_K u \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{\mathcal{D}}} u \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K\, ds = \int_{\partial K \cap \Gamma_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds, \tag{3.7}$$

$$\int_K (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla \varphi\, dx - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{\mathcal{N}}} (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_K \varphi\, ds = \int_K f\varphi + \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} g_{\mathcal{N}} \varphi\, dx, \tag{3.8}$$

für alle $(\varphi, \boldsymbol{\tau}) \in H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^d$.

Für homogene Dirichlet-Randbedingungen und hinreichend glattes u ist diese Formulierung äquivalent zu der schwachen Formulierung:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega f \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Genauer gilt:

Proposition 3.1.1. *Sei* $\Gamma_{\mathcal{N}} = \emptyset$ *dann ist* $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *schwache Lösung von (3.1) mit* $g_{\mathcal{D}} = 0$*,genau dann wenn* $(v, \nabla v)$ *schwache Lösung im Sinne von Definition (3.1.1).*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung im Sinne von (3.9). Dann gilt nach partieller Intergration:

$$-\int_\Omega \Delta v \varphi\, dx = \int_\Omega f \varphi\, dx.$$

Sei $K \subset \Omega$ eine beliebige Teilmenge mit Lipschitzrand.Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_K f\varphi\,dx &= -\int_K \Delta v\varphi\,dx \\ &= \int_K \nabla v \cdot \nabla\varphi\,dx - \int_{\partial K} \nabla v \cdot \mathbf{n}_K \varphi\,ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Damit is (3.8) mit $\boldsymbol{\sigma} = \nabla v$ erfüllt. Weiter gilt:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau}\,dx = -\int_K v\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\,dx + \int_{\partial K} v\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \varphi\,ds, \tag{3.11}$$

und damit (3.7) für $\boldsymbol{\sigma} = \nabla v, v = u$.

" $\Leftarrow$ " Wähle in (3.8) $K = \Omega$. Da $v \in H_0^1(\Omega)$ verschwindet das Randintegral und man erhält:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{3.12}$$

□

3.2. Das Discontinuous Galerkin Verfahren

Um ausgehend von der oben angegebenen schwachen Formulierung das DG-Verfahren zu erhalten, fordert man zuerst (3.7) und (3.8) auf jedem Element einer gegebenen Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω. Dazu ist es nötig *lokale Sobolevräume* einzuführen. Diese Räume enthalten Funktionen, deren Einschränkung auf ein Element der Triangulierung in H^1 liegen.

Definition 3.2.1 (Lokale Sobolevräume)**.** *Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω dann ist der lokale Sobolevraum $H^k(\mathcal{T})$ definiert durch*

$$H^k(\mathcal{T}) := \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in H^1(K) \forall K \in \mathcal{T}\}.$$

Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller Kanten von $\mathcal{T}$ dann bezeichnet

$$T(\mathcal{E}) := \prod_{K \in \mathcal{T}} L^2(\partial K),$$

den Raum der Spuren bzgl. $\mathcal{T}$.

In den Räumen $\mathbf{\Sigma} := [H^1(\mathcal{T})]^d$ und $V = H^1(\mathcal{T})$ lautet die schwache Formilierung bzgl. $\mathcal{T}$:

Finde $(u, \boldsymbol{\sigma}) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$, so dass für alle $K \in \mathcal{T}$ gilt

$$\int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_K u \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{\mathcal{D}}} u \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \, ds = \int_{\partial K \cap \Gamma_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}} \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds, \tag{3.13}$$

$$\int_K (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial K \setminus \Gamma_{\mathcal{N}}} (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_K \varphi \, ds = \int_K f \varphi + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{\mathcal{N}}} g_{\mathcal{N}} \varphi \, dx, \tag{3.14}$$

für alle $(\varphi, \boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$.

Bemerkung 3.2.1. *Die Wahl der Räume $\boldsymbol{\Sigma} := [H^1(\mathcal{T})]^d$ und $V = H^1(\mathcal{T})$ stellt sicher, dass für jedes Element $K \in \mathcal{T}$ die Spur von $\boldsymbol{\sigma}$ und u auf ∂K existiert und die Gleichungen (3.7) und (3.8) wohldefiniert sind.*

Die kontinuierliche Lösung $(u, \boldsymbol{\sigma})$ soll nun in endlich dimensionalen Teilräumen $\boldsymbol{\Sigma}_h \subset \boldsymbol{\Sigma}$ und $V_h \subset V$ approximiert werden. Diese Teilräume werden elementweise definiert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_h &= \prod_{K \in \mathcal{T}_h} [\mathcal{S}(K)]^d, \\ V_h &= \prod_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{V}(K). \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich bei $\mathcal{S}(K), \mathcal{V}(K)$ um lokale Polynomräume. Die diskreten Räume haben demnach folgende Gestalt:

Definition 3.2.2 (Diskrete Ansatzräume)**.**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_h : &= \{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d : \boldsymbol{\sigma}_i|_K \in \mathcal{S}(K) \; \forall K \in \mathcal{T}, 1 \leq i \leq d\}, \\ V_h : &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{V}(K) \; \forall K \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

Dieser lokale Charakter der Ansatzräume erlaubt den einfachen Einsatz von Triangulierungen mit verschiedenen Geometrietypen und hängenden Knoten, wie auch die Wahl unterschiedlicher Ansatzräume auf den jeweiligen Elementen. Dadurch sind LDG-Verfahren besonders gut für sogenanten hp-Verfahren geeignet, bei denen basierend auf a-posteriori Fehlerschätzern die Gitterweite **und** der Polynomgrad der Ansatzfunktionen lokal angepasst werden.

Um später Existenz und Eindeutig einer Lösung des DG-Verfahrens zeigen zu können, fordert man von den lokalen Räumen die folgende Eigenschaft

$$\varphi \in \mathcal{V}(K) : \int_K \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{S}(K)]^d \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi \equiv 0 \text{ auf } K. \tag{3.15}$$

Diese Bedingung ist erfüllt falls

$$\nabla \mathcal{V}(K) \subset [\mathcal{S}(K)]^d.$$

Denn mit dieser Inklusion gilt folgt aus $\varphi \in \mathcal{V}(K) : \int_K \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [\mathcal{S}(K)]^d$, dass $\int_K |\nabla\varphi|^2 \, ds = 0$. Diese Inklusionseigenschaft ist damit insbesonder für $\mathcal{V}(K) = \mathcal{S}(K) = \mathbb{P}^l(K)$,wobei $\mathbb{P}^l(K)$ der Raum der Polynome von Grad höchstens l auf dem Element K ist. Insbesondere sind Funktionen aus V_h und $\boldsymbol{\Sigma}_h$ im Allgemeinen unstetig an den Elementgrenzen. Man erhält also eine schwache Formulierung auf jedem Element aus $\mathcal{T}$, allerdings besteht vorerst keine Beziehung zwischen den Freiheitsgraden auf den einzelnen Elementen. Um die kontinuierliche Lösung zu approximieren, müssen diese mittels diskreter numerischer Flüsse gekoppelt werden. Bei den numerischen Flüssen handelt es sich um Approximationen an die Spur der kontinuierlichen Lösung auf den Kanten der Triangulierung. In der Literatur werden Flüsse betrachtet deren Werte auf einer Kante linear von den Werten auf beiden Seiten der Kante abhängen.

Allgemein sind die numerischen Flüsse wie folgt definiert.

Definition 3.2.3 (Numerische Flüsse)**.** *Der skalare numerische Fluss $\hat{u}$ und der vektorwertige numerische Fluss $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sind lineare Funktionen*

$$\hat{u} : H^1(\mathcal{T}) \times [H^1(\mathcal{T})]^d \to T(\mathcal{T}), \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}} : H^1(\mathcal{T}) \times [H^1(\mathcal{T})]^d \to [T(\mathcal{T})]^d. \tag{3.16}$$

Die numerischen Flüsse heißen ***konsistent*** *falls:*

$$\begin{aligned} \hat{u}(u)|_e &= u|_e \qquad \forall u \in H^2(\Omega), \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u, \nabla u)|_e &= \nabla u|_e \qquad \forall u \in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

Die Flüsse heißen ***konservativ****, falls sie einwertig sind, d.h.*

$$\begin{aligned} \hat{u}(u) &\in L^2(\mathcal{E}), \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u, \boldsymbol{\tau}) &\in L^2(\mathcal{E})^d. \end{aligned}$$

Dass DG-Verfahren erhält man nun, indem man die schwache Formulierung in $V_h \times \boldsymbol{\Sigma}_h$ fordert und die Randterme durch numerische Füsse ersetzt.

Definition 3.2.4 (DG-Verfahren)**.** *Ein Tupel $(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) \in V_h \times \boldsymbol{\Sigma}_h$ heißt Lösung des DG-Verfahrens mit den numerischen Flüssen $\hat{u}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ falls*

$$\int_K \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_K u_N \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx - \int_{\partial K} \hat{u}(u_N) \boldsymbol{\tau} \cdot n_K \, ds = 0, \tag{3.17}$$

$$\int_K (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N) \cdot \nabla\varphi \, dx - \int_{\partial K} \varphi \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N, u_N) \cdot n_K \, ds = \int_K f\varphi \, dx, \tag{3.18}$$

für alle $K \in \mathcal{T}$ und für alle $(\varphi, \boldsymbol{\tau}) \in V_h \times \boldsymbol{\Sigma}_h$.

Zur Definition der numerischen Flüsse benötigt man folgende Notation:

Definition 3.2.5. *Die Menge der inneren Kanten von $\mathcal{T}$ bezeichnet man mit:*

$$\mathcal{E}_I := \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bigcup_{\substack{e \subset \partial K \\ e \not\subseteq \partial \Omega}} e,$$

die Menge der Dirichlet/Neumann-Randkanten mit

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}/\mathcal{N}} := \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bigcup_{\substack{e \subset \partial K \\ e \subset \Gamma_{\mathcal{D}/\mathcal{N}}}} e.$$

Definition 3.2.6 (Innere und äußere Spuren)**.** *Seien $K, K' \in \mathcal{T}$ zwei benachbarte Elemente mit gemeinsamer Kante $e \in \mathcal{E}_I$.*
Sei φ eine Funktion, die stückweise glatt im Inneren von K und K' ist. Dann definiere die innere und äußere Spur bzgl K durch:

$$\varphi_K^+(x) := lim_{\epsilon \searrow 0} \varphi(x - \epsilon n_K),$$
$$\varphi_K^-(x) := lim_{\epsilon \searrow 0} \varphi(x + \epsilon n_K).$$

Es gilt:

$$\varphi_K^+(x) = \varphi_{K'}^-(x),$$
$$\varphi_K^-(x) = \varphi_{K'}^+(x).$$

Definition 3.2.7 (Mittel und Sprungoperatoren)**.** *Das Mittel einer stückweise glatten Funktion $\phi :\rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n = 1$ oder $n = d$ auf der Kante e ist definiert durch:*

$$\{\!\{\phi\}\!\} = \frac{1}{2}(\phi^+ + \phi^-).$$

Die Sprünge auf e sind definiert durch:

$$[\![\boldsymbol{\tau}]\!] = \boldsymbol{\tau}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\tau}^- \cdot \mathbf{n}^-,$$

$$[\![u]\!] = u^+ \mathbf{n}^+ + u^- \mathbf{n}^-,$$

für vektorwertige Funktionen $\boldsymbol{\tau}$ und skalare Funktionen u.

Das nächste Lemma gibt nützliche Umformungen von Integralausdrücken, die Sprünge und Mittel von Funktionen aus V und $\boldsymbol{\Sigma}$ beinhalten, an.

Lemma 3.2.1. *Sei $\varphi \in V$ und $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}$, dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_{\partial K} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_K\,ds &= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\varphi\boldsymbol{\sigma}]\!]\,ds + \int_{\partial\Omega} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds \\
&= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\varphi]\!]\{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} + [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]\{\!\{\varphi\}\!\}\,ds + \int_{\partial\Omega} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_{\partial K} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_K\,ds &= \int_{\partial\Omega} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds + \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{e\subset\partial K\partial\Omega} \int_e \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_K\,ds, \\
&= \int_{\partial\Omega} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\cdot\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\cdot\mathbf{n}^-\,ds, \\
&= \int_{\partial\Omega} \varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\varphi\boldsymbol{\sigma}]\!]\,ds.
\end{aligned}
$$

Der letzte Integrand lässt sich schreiben als:

$$
\begin{aligned}
\varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\cdot\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\cdot\mathbf{n}^- &= \frac{1}{2}(\varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-) + \frac{1}{2}(\varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ - \varphi^+\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^+ + \varphi^+\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varphi^+\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ - \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi^+(\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^+) + \boldsymbol{\sigma}^-(\varphi^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\mathbf{n}^-)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^+(\varphi^+\mathbf{n}^+ - \varphi^-\mathbf{n}^+) + \varphi^-(\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-)) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-)(\varphi^+\mathbf{n}^+ + \varphi^-\mathbf{n}^-) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-)(\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-\mathbf{n}^-) \\
&= [\![\varphi]\!]\{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} + [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]\{\!\{\varphi\}\!\}.
\end{aligned}
$$

□

Die numerischen Flüsse für das hier betrachtete DG-Verfahren werden in der nächsten Definition angegeben.

Definition 3.2.8 (Numerische Flüsse des LDG-Verfahrens)**.** *Die numerischen Flüsse auf einer Kante e sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad &:= \quad \begin{cases} \{\{\boldsymbol{\sigma}\}\} - C_{11}[\![u]\!] - \mathbf{C_{12}}[\![\boldsymbol{\sigma}]\!] & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}, \\ \boldsymbol{\sigma}^+ - C_{11}(u^+ - g_{\mathcal{D}})n^+ & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \\ g_{\mathcal{N}} & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}. \end{cases} \\
\hat{u} \quad &:= \quad \begin{cases} \{\{u\}\} + [\![u]\!] \cdot \mathbf{C_{12}} - C_{22}[\![\boldsymbol{\sigma}]\!] & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}, \\ g_{\mathcal{D}} & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \\ u^+ - C_{22}(q^+ \cdot n^+ + g_{\mathcal{N}} \cdot n^-) & \textit{falls } e \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Damit für den numerischen Flüsse $\widehat{u}(u, \boldsymbol{\sigma}) = \widehat{u}(u)$ gilt, der Fluss also nicht mehr von $\boldsymbol{\sigma}$ abhängt, kann man $C_{22} \equiv 0$ wählen und erhält somit das **Local**-DG-Verfahren.In diesem Fall ist es möglich die Variable $\boldsymbol{\sigma}$ elementweise aus der Gleichung zu eleminieren.Dies wird ausführlich in dem Absatz über die Primale Formulierung des DG-Verfahrens behandelt. Weiter ist hinzuzufügen, dass die Wahl von $C_{22} \equiv 0$ keine Auswirkung auf die Konvergezordnung des Verfahrens hat.

3.2.1. Motivation der numerischen Flüsse

In diesem Abschnitt soll die obige Wahl der numerischen Flüsse für den Fall homogener Dirichlet-Randdaten heuristisch hergeleitet werden. Man geht von einem kontinuierlichen Stabilitätsresultat für die Variable $\boldsymbol{\sigma}$ aus. Sei dazu $\Gamma_{\mathcal{N}} = \emptyset$, $g_{\mathcal{D}} = 0$ und $(u, \boldsymbol{\sigma})$ Lösungen von (3.4)-(3.6).

Zuerst multipliziert man (3.4) mit $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$ und integriert über Ω wodurch man

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dx = 0. \tag{3.21}$$

erhält.
Nun multipliziert man (3.5) mit u und integriet wiederum über Ω

$$-\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} u\, dx = \int_\Omega f u\, dx$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dx = \int_\Omega f u\, dx.$$

Nun addiert man die letzte Gleichung zu (3.21) und erhält das gewünschte Resultat:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dx = \int_\Omega f u\, dx. \tag{3.22}$$

Da $\mathbf{A}$ positiv definit ist gilt:

$$C \int_\Omega |\boldsymbol{\sigma}|^2\, dx \leq \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dx = \int_\Omega f u\, dx. \tag{3.23}$$

Dieses Vorgehen soll nun mit den Gleichungen (3.17) und (3.18) nachvollzogen werden:

Zuerst setzt man in (3.17) $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N$.
Nach Summieren über alle $K \in \mathcal{T}$ ergibt sich

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N)\, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_N \nabla \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N)\, dx - \int_{\partial K} \hat{u}_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds = 0,$$

und durch Einsetzen von $\varphi = u_N$ in (3.18) erhält man

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\int_K (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N) \cdot \nabla u_N\, dx - \int_{\partial K} u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_K\, ds \right) = \int_\Omega f u_N\, dx,$$

wobei $\widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}} := hat\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N, u_N)$ gesetzt wird. Addieren der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N)\, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \cdot (u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N)\, dx - \int_{\partial K} u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N} \cdot \mathbf{n}_K\, ds - \int_{\partial K} \hat{u}_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds \\ = \int_\Omega f u_N\, ds.\end{aligned}$$

Das Ziel ist, es die Flüsse so zu wählen, dass folgender Term positiv ist:

$$\Theta = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \cdot (u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N)\, dx - \int_{\partial K} u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N} \cdot \mathbf{n}_K - \int_{\partial K} \hat{u}_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds;$$

Mit dem Integralsatz von Gauss und der ersten Gleichung aus Lemma 3.2.1 erhält man:

$$\begin{aligned}\Theta &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K - u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N} \cdot \mathbf{n}_K - \widehat{u_N} \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds \\ &= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!] - [\![u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N}]\!] - [\![\hat{u}_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!]\, ds \\ &+ \int_{\partial\Omega} u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K - u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N} \cdot \mathbf{n}_K - \widehat{u_N} \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds\end{aligned}$$

Man fordert, dass die Flüsse einwertig sind, insbesondere $[\![\hat{u}]\!] = 0, \{\!\{\hat{u}\}\!\} = \hat{u}$ und $[\![\hat{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = 0, \{\!\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}\!\} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Wendet man nun die zweite Identität aus Lemma 3.2.1 an gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} [\![u_N]\!]\{\!\{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N\}\!\} + \{\!\{u_h\}\!\}[\![\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!] - \hat{u}_N[\![\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!] - [\![u_N]\!] \cdot \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N}\, ds \\
&+ \int_{\partial\Omega} u_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K - u_N \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N} \cdot \mathbf{n}_K - \widehat{u_N}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds \\
&= \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} (\{\!\{u_h\}\!\} - \hat{u})[\![\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!] + [\![u_N]\!] \cdot (\{\!\{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N\}\!\} - \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_n}) \\
&+ \int_{\partial\Omega} u_N(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N - \widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N}) \cdot \mathbf{n}_K - \widehat{u_N}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_K\, ds
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Im Inneren von Ω wählt man die Flüsse wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) &:= \{\!\{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N\}\!\} - C_{11}[\![u_N]\!] - \mathbf{C}_{12}[\![\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N]\!], \\
\widehat{u}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) &:= \{\!\{u_N\}\!\} - C_{22}[\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!] + \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u_N]\!].
\end{aligned}
$$

Auf $\partial\Omega$ setze:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) &:= \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N - C_{11}u_N, \\
\widehat{u}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) &:= 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man nun diese Flüsse in (3.24) ein erhält man

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} (C_{22}[\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!]^2 + C_{11}[\![u_N]\!]^2)\, ds \\
&+ \int_{\partial\Omega} C_{11}u_N^2\, ds
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhält man:

$$
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_N \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_N\, dx + \Theta = \int_{\Omega} f u_N\, dx, \tag{3.25}
$$

mit $\Theta > 0$ falls die Koeffizienten C_{11}, C_{22} nicht negativ sind.

3.2.2. Gemischte Formulierung

Das LDG Verfahren gegeben durch (3.17) und (3.18) soll nun in geeigneter Form geschrieben werden, um Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung zu zeigen. Die hier angegebene Formulierung ist auch Grundlage der a priori Fehlerabschätzungen.

Zuerst summiert man in beiden Gleichungen über alle $K \in \mathcal{T}$ und erhält:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K u_N \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \hat{u}_N [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\partial\Omega} \hat{u}_N \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K\, ds = 0$$

und

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla\varphi\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_N \cdot [\![\varphi]\!]\, ds - \int_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_N \cdot \mathbf{n}_K \varphi\, ds. = \int_K f\varphi\, dx$$

Nach Einsetzen der numerischen Flüsse aus (3.20) ergibt sich für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22} [\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!][\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right)\\
&+\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K u_N \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} ([\![u_N]\!] + \mathbf{C}_{12}\cdot[\![u_N]\!])[\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} \hat{u}_N \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}_K\, ds\right)\\
&= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} g_\mathcal{D} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\mathbf{g}_\mathcal{N}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})\, ds.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}
&-\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\, dx \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} ([\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!] - \mathbf{C}_{12}[\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!])\cdot[\![\varphi]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{D}} \varphi\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\mathbf{n}\, ds\right)\\
&\quad+\left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![u_N]\!]\cdot[\![\varphi]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11} u_N \varphi\, ds\right)\\
&\quad= \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11} g_\mathcal{D}\varphi\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} v\mathbf{g}_\mathcal{N}\cdot\mathbf{n}\, ds.
\end{aligned}$$

Damit lassen sich folgende Bilinearformen definieren:

$$a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\sigma}]\!]\cdot[\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_K)(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}_K)\, ds, \tag{3.26}$$

$$b(u,\boldsymbol{\tau}) := \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K u\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{u\}\!\} - \mathbf{C}_{12}\cdot[\![u]\!])[\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} u\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\, ds, \tag{3.27}$$

$$c(u,\varphi) := \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![u]\!]\cdot[\![\varphi]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11} u\varphi\, ds. \tag{3.28}$$

$$\tag{3.29}$$

Nach partieller Integration lässt sich die Form b wie folgt umschreiben:

$$b(u,\boldsymbol{\tau}) = -\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \nabla u\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\} - \mathbf{C}_{12}[\![\boldsymbol{\tau}]\!])\cdot[\![u]\!]\,ds. + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} u\boldsymbol{\tau}\cdot n\,ds \tag{3.30}$$

Mit den Linearformen:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\tau}) &:= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} g_\mathcal{D}\tau\cdot\mathbf{n}\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\mathbf{g}_\mathcal{N}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds \\ G(\varphi) &:= \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}g_\mathcal{D}\varphi\,ds \; + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} v\mathbf{g}_\mathcal{N}\cdot\mathbf{n}\,ds \end{aligned}$$

kann die LDG-Approximation duch das folgende Variationsproblem charakterisiert werden: Gesucht sind $(\boldsymbol{\sigma}_N, u_N) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$, so dass:

$$a(\boldsymbol{\sigma}_N,\boldsymbol{\tau}) + b(u_N,\boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}), \tag{3.31}$$

$$-b(\varphi,\boldsymbol{\sigma}_N) + c(u_N,\varphi) = G(\varphi), \tag{3.32}$$

für alle $(\boldsymbol{\tau},\varphi) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$.

In kompakterer Form lässt sich dies mit der Bilinearform:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}_N, u_N, \boldsymbol{\tau}, \varphi) = a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + b(u,\boldsymbol{\tau}) - b(\varphi,\boldsymbol{\sigma}) + c(u,\varphi) \tag{3.33}$$

schreiben. Gleichung (3.26) lautet dann:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}_N, u_N, \boldsymbol{\tau}, \varphi) = F(\boldsymbol{\tau}) + G(\varphi). \tag{3.34}$$

Mit (3.25) lässt sich folgendes Existenz und Eindeutigkeitsresultat zeigen:

Satz 3.2.1 (Existenz und Eindeutigkeit der DG-Approximation)**.** *Falls der Koeffizient C_{11} strikt positiv ist und C_{22} nicht negativ, dann definiert das LDG-Verfahren mit den numerischen Flüssen aus (3.20) eine eindeutige Approximation $(\boldsymbol{\sigma}_N, u_N) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$.*

Beweis. Da die Räume $\boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ endlichdimensional sind und das Gleichungssystem linear ist, reicht es aus, zu zeigen, dass das homogene Probleme mit $f = 0$, $g_\mathcal{D} = 0 = \mathbf{g}_\mathcal{N}$ nur die Lösung $u_N = 0$ und $\boldsymbol{\sigma}_N = 0$ besitzt. Damit ist die Injektivität des Operators $\mathcal{A}$ gezeigt und damit auch die Surjektivität.
Setzt man $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_N, \varphi = u_N$ dann wird (3.34) zu:

$$a(\boldsymbol{\sigma}_N,\boldsymbol{\sigma}_N) + c(u_N,u_N) = 0. \tag{3.35}$$

Da $C_{22} \geq 0$ folgt dass $\boldsymbol{\sigma}_N \equiv 0$ und da $C_{11} > 0$ gilt $[\![u_N]\!] = 0$ auf $\mathcal{E}_\mathcal{I}$ und $u = 0$ auf $\Gamma_\mathcal{D}$. Daraus ergibt sich für (3.32):

$$b(u_N,\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h. \tag{3.36}$$

Aus (3.30) erhält man

$$b(u_N, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla u_N \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h. \tag{3.37}$$

Wegen (3.49) gilt $\nabla u_N = 0$ auf jedem Element $K \in \mathcal{T}$, das heißt u_N ist stückweise konstant.Da aber $[\![u_N]\!] = 0$ auf $\mathcal{E}_\mathcal{I}$ und $u_N = 0$ auf $\Gamma_\mathcal{D}$ folgt, dass $u \equiv 0$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

3.3. Primale Formulierung

Die Tatsache, dass der Fluss $\hat{u}$ nicht von $\boldsymbol{\sigma}$ abhängt, ermöglicht es, die Hilfsvariable aus den Gleichungen (3.17) und (3.18) zu eliminieren und das DG-Verfahren als Gleichung in einer Unbekannten zu schreiben. Anstatt die DG-Methode also als gemischte FE-Methode aufzufassen, wird die Diskretisierung durch eine einzige Bilinearform, der sogenannten **primalen Form** beschrieben. Dies hat sowohl theoretische als auch praktische Vorteile. In der Literatur treten DG-Verfahren sowohl in der Flussformulierung als auch in der primalen Formulierung auf.
Wie in [11] und ausführlicher in [4] gezeigt, lassen sich verschiedene DG-Verfahren in einem einheitlichen Rahmen behandeln und vergleichen. Insbesondere lassen sich die Verfahren in Flussformulierung als primale Formulierung schreiben. Umgekehrt werden zu den Verfahren in primaler Fromulierung die numerischen Flüsse angegeben, die es erlauben diese Verfahren wiederum in Flussformulierung zu schreiben. Desweiteren wurde in [4] ein einheitlicher Rahmen für eine a-priori Analysis der Verfahren angegeben. Aus praktischer Sicht ist bei Verwendung der primalen Formulierung lediglich eine Matrix aufzustellen und zu speichern,was bei der Flussformulierung nicht der Fall ist. Allerdings ist die Implentierung basierend auf der Flussformulierung im Kontext von den in **DUNE** vorhandenen Modulen leichter umzusetzten.
Im Folgenden soll gezeigt werden, wie aus der Flussformulierung die primale Formulierung gewonnen werden kann.

Um aus der Flussformulierung (3.17),(3.18) die primale Formulierung zu erhalten, benötigt man folgende Definitionen.

Definition 3.3.1 (Liftoperatoren)**.** *Die Liftoperatoren* $r : [T(\mathcal{E})]^d \to \boldsymbol{\Sigma}_h$ *und* $l : T(\mathcal{E}_\mathcal{I}) \to \boldsymbol{\Sigma}_h$ *sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega r(\varphi) \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx &= -\int_\mathcal{E} \varphi \{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\}\, ds - \int_{\partial\Omega} \varphi \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, ds, \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \\
\int_\Omega l(\varphi) \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx &= -\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \varphi [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds, \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h.
\end{aligned}$$

Satz 3.3.1. *Sei* $(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) \in \mathbf{V_h} \times \boldsymbol{\Sigma}_h$ *Lösung des DG-Verfahrens mit den numerischen Flüssen* $\hat{u}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$*.Dann erfüllt* u_N *folgendes Variationsproblem:*

$$B(u, \varphi) = F(\varphi) \qquad \forall \varphi \in V_h, \tag{3.38}$$

wobei $B_{\hat{u},\hat{\boldsymbol{\sigma}}} : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *gegeben ist durch:*

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) := \int_\Omega \nabla_h u \cdot \nabla_h \varphi \, dx &+ \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\hat{u}(u) - u]\!] \{\!\{\nabla_h \varphi\}\!\} - \{\!\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}(u, s(u))\}\!\} [\![\varphi]\!] \, ds \\ &+ \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \{\!\{\hat{u}(u) - u\}\!\} [\![\nabla_h \varphi]\!] - [\![\hat{\boldsymbol{\sigma}}(u, s(u))]\!] \{\!\{\varphi\}\!\} \, ds \\ &+ \int_{\partial\Omega} (\hat{u}(u) - u) \nabla_h \varphi \cdot \mathbf{n} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u, s(u)) \cdot \mathbf{n} \varphi. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Der Operator $s(u)$ *ist gegeben durch:*

$$s(u) := \nabla_h - r([\![\hat{u} - u]\!]) - l(\{\!\{\hat{u} - u\}\!\}). \tag{3.40}$$

Dabei bezeichnet ∇_h *den lokalen Gradienten auf einem Element.*

Beweis: Zuerst summiert man (3.17) und (3.18) über alle $K \in \mathcal{T}$ und erhält:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_h \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_n) \cdot \mathbf{n}_K \varphi \, ds,$$
$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = - \int_\Omega u_N \nabla_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} \hat{u}(u_N) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \, ds.$$

Wendet man nun Lemma (3.2.1) auf die Summe der Randterme an, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \nabla_h \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx &+ \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \{\!\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_n)\}\!\} [\![\varphi]\!] + [\![\hat{\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_n)]\!] \{\!\{\varphi\}\!\} \, ds \\ &+ \int_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(u_N, \boldsymbol{\sigma}_n) \cdot \mathbf{n}_K \varphi \, ds, \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx = - \int_\Omega u_N \nabla_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx &+ \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\hat{u}(u_N)]\!] \cdot \{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\} + \{\!\{\hat{u}(u_N)\}\!\} [\![\boldsymbol{\tau}]\!] \, ds \\ &+ \int_{\partial\Omega} \hat{u}(u_N) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \, ds. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nun ist zu zeigen, dass $\boldsymbol{\sigma}_n = s(u_N)$. Es gilt mit dem Integralsatz von Gauss:

$$- \int_\Omega \nabla_h \cdot \boldsymbol{\tau} \varphi \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_h \varphi \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \varphi \, ds,$$

und mit Lemma 3.2.1 gilt weiter

$$- \int_\Omega \nabla_h \cdot \boldsymbol{\tau} \varphi \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_h \varphi \, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\} \cdot [\![\varphi]\!] + [\![\boldsymbol{\tau}]\!] \{\!\{\varphi\}\!\}) \, ds - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_K \varphi \, ds$$

Benutzt man diese Identität und wählt nun in (3.42) $\varphi = u_h$, erhält man

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \nabla_h u_N \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket \cdot \{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\} + \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \{\!\{\hat{u} - u_h\}\!\})\, dx + \int_{\partial\Omega} (\hat{u} - u_h)\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, ds \quad (3.43)$$

Mit der Definition der Liftoperatoren r, l gilt dann $\boldsymbol{\sigma}_h = s(u_h)$.
Wähle nun in (3.43) $\boldsymbol{\tau} = \nabla_h u_N$. Mit (3.41) folgt:

$$B(u_N, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in V_h. \quad (3.44)$$

3.3.1. Übersicht über verschiedene DG-Verfahren

Hier soll eine Zusammenfassung der aus der Literatur bekannten DG-Verfahren gegeben werden. Die Tabelle zeigt die verschiedenen Flüsse der einzelnen Verfahren. Die zugehörigen Primalen Formulierungen finden sich in [4] oder in der angegebenen Originalliteratur.

Verfahren	$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_K$	$\hat{u}_K$
Bassi-Rebay [6]	$\{\!\{\boldsymbol{\sigma}_h\}\!\}$	$\{\!\{u_H\}\!\}$
LDG [23]	$\{\!\{\boldsymbol{\sigma}_h\}\!\} + C_{11}\llbracket u_h \rrbracket - \mathbf{C}_{12}\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket$	$\{\!\{u_h\}\!\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket u_h \rrbracket$
DG [13]	$\{\!\{\boldsymbol{\sigma}_h\}\!\} + C_{11}\llbracket u_h \rrbracket - \mathbf{C}_{12}\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket$	$\{\!\{u_h\}\!\} + \mathbf{C}_{12} \cdot \llbracket u_h \rrbracket + C_{22}\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket$
Brezzi et. al [10]	$\{\!\{\boldsymbol{\sigma}_h\}\!\} - \alpha^r(\llbracket u_H \rrbracket)$	$\{\!\{u_h\}\!\}$
IP [25]	$\{\!\{\nabla u_h\}\!\} + C_{11}\llbracket u_h \rrbracket$	$\{\!\{u_h\}\!\}$
Baumann-Oden [8]	$\{\!\{\nabla u_h\}\!\}$	$\{\!\{u_h\}\!\} - \mathbf{n}_K \cdot \llbracket u_h \rrbracket$
Babuška-Zlámal [5]	$C_{11}\llbracket u_h \rrbracket$	$u_h\|_K$
Bassi et. a [7]	$\{\!\{\nabla u_h\}\!\} - \alpha^r(\llbracket u_H \rrbracket)$	$\{\!\{u_h\}\!\}$

Der Term α^r ist dabei wie folgt definiert:
Zuerst definiere den Liftoperator $r_e : [L^1(e)]^2 \to \boldsymbol{\Sigma}_h$ durch

$$\int_\Omega r_e(\varphi) \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = -\int_e \varphi \cdot \{\!\{\boldsymbol{\tau}\}\!\}\, ds \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \varphi \in [L^1(e)]^2. \quad (3.45)$$

Dann ist α^r auf einer Kante e gegeben durch $\alpha^r(\varphi) = -\eta_e \{\!\{r_e(\phi)\}\!\}$.

3.4. A priori Analysis

Die hier vorgestellten theoretischen Resultate sind der Arbeit [13] entnommen und stellen eine detaillierte a priori Analysis des LDG-Verfahrens dar. Interessant hierbei ist vor allem, dass die Auswirkungen des Parameters C_{11} auf das Konvergenzverhalten besser nachzuvollziehen sind, als in der allgemeineren Analysis in [4], die auf Energie-Abschätzungen bezüglich der primalen Formulierung basiert.

In diesem Abschnitt werden solche Gebiete Ω betarchtet, dass die Lösung des Randwertproblems (3.1) für hinreichend glatte Daten in $H^2(\Omega)$ liegt. Desweiteren wird von homogenen Randdaten ausgegangen und folgendes Regularitäts-Resultat angenommen: $||u||_2 \leq C||f||_0$ für $f \in L^2(\Omega)$.
Die Triangulierung $\mathcal{T}$ kann wie in Defintion 2.0.1 sowohl verschiedene polygonale Elementtypen als auch eventuell hängende Knoten besitzen.

3.4.1. Vorraussetzungen

In folgender Definition werden einige Notationen eingeführt, um die für die Fehlerabschätzungen wichtigen Eigenschaften der Triangulierung zu charakterisieren.

Definition 3.4.1.
- *Sei $K \in \mathcal{T}$ dann bezeichnet h_K den Durchmesser von K und ρ_K den Durchmesser des größten in K enthaltenen Balles.*
- *Die Menge $\langle K, K' \rangle$ ist definiert als:*

$$\langle K, K' \rangle := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } meas_{(d-1)}(\partial K \cap \partial K') = 0, \\ int(\partial K \cap \partial K') & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.46}$$

Für die Trinagulierung fordert man folgende Eigenschaften:
Es gibt eine positive Konstante σ, so dass

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}. \tag{3.47}$$

Desweiteren, soll das Verhältnis der Größe benachbarter Elemente beschränkt werden. Dies geschieht duch die Forderung, dass eine positive Konstante $\delta < 1$ existiert,so dass für jedes Element $K \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\delta \leq \frac{h_{K'}}{h_K} \leq \delta^{-1} \quad \forall K' \in \langle K, K' \rangle \neq \emptyset. \tag{3.48}$$

Dies verhindert, dass die Triangulierung in nur einer von zwei benachbarten Teilmengen beliebig verfeinert wird.
Für die lokalen Räume $\mathcal{S}(K)$ sollen folgende Inklusionen gelten:

$$\nabla\mathcal{S}(K) \subseteq \mathcal{S}(K)^d, \quad \mathcal{S}(K) \supset \mathcal{P}^k(K). \tag{3.49}$$

Als nächstes definiert man folgende Seminorm

$$|(\boldsymbol{\sigma}, u)|_{\mathcal{A}} = \sqrt{\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u)} \tag{3.50}$$

Dies lässt sich schreiben als

$$|(\boldsymbol{\sigma}, u)|^2_{\mathcal{A}} = ||\boldsymbol{\sigma}||^2_0 + \Theta^2(\boldsymbol{\sigma}, u). \tag{3.51}$$

mit

$$\Theta^2(\boldsymbol{\sigma}, u) := \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\sigma}]\!]^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![u]\!]^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}u^2\, ds. \tag{3.52}$$

Die Stabilisierungs koeffizeienten C_{11} und C_{22} aus den numerischen Flüssen seien wie folgt definiert:

$$C_{11}(x) := \begin{cases} \eta\min\{h^\alpha_{K^+}, h^\alpha_{K^-},\} & \text{falls } x \in \langle K^+, K^-\rangle, \\ \eta h^\alpha_{K^+} & \text{falls } x \in \partial K^+ \cap \Gamma_\mathcal{D}, \end{cases} \tag{3.53}$$

$$C_{22}(x) := \begin{cases} \tau\min\{h^\beta_{K^+}, h^\beta_{K^-},\} & \text{falls } x \in \langle K^+, K^-\rangle, \\ \tau h^\beta_{K^+} & \text{falls } x \in \partial K^+ \cap \Gamma_\mathcal{N} \end{cases} \tag{3.54}$$

mit $\eta > 0$, $\tau \geq 0$, $-1 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq 1$ unabhängig von der Gitterweite h. Setze weiter:

$$\mu^* = max\{-\alpha, \hat{\beta}\}, \quad \mu_* = \min\{-\alpha, \hat{\beta}\}, \tag{3.55}$$

wobei $\hat{\beta} = 1$ falls $\tau = 0$ und $\hat{\beta} = \beta$ sonst.

3.4.2. Das Hauptresultat

Satz 3.4.1 (A priori Fehlerabschätzung für das LDG-Verfahren)**.** *Sei $(u, \boldsymbol{\sigma})$ exakte Lösung von (3.4) -(3.6) und $(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N) \in V_h \times \boldsymbol{\Sigma}_h$ die DG-Approximation definiert in (3.17) und (3.18). Angenommen die Annahmen an die Triangulierung und die Stabilisierungsparamter C_{11} , C_{22}, sowie die Inklusionseigenschaft (3.49) seien erfüllt. Dann gilt für $(u, \boldsymbol{\sigma}) \in H^{s+2}(\Omega) \times [H^{s+1}(\Omega)]^d$:*

$$||u - u_N||_0 + h^D|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N, u - u_N)|_{\mathcal{A}} \leq Ch^{P+D}||u||_{s+2} \tag{3.56}$$

mit $C = C(\Omega, s, \rho, \delta, ...)$ *und*

$$P = \min\left\{s + \frac{1}{2}(1+\mu^*), k + \frac{1}{2}(1-\mu_*)\right\}, \quad D = \frac{1}{2}(1+\mu_*) \quad \textit{fallsk} \geq 1. \tag{3.57}$$

Falls $k = 0$, *gilt* $P = D = \frac{1}{2}(1-\mu^*)$.

Dieses Resultat soll nun genauer diskutiert werden.
Es ist zu bemerken, dass die Konvergenzordnung des Verfahrens von den Parametern C_{11}, C_{22} nur durch Größen $\mu^* = max\{-\alpha, \hat{\beta}\}$und $\mu_* = \min\{-\alpha, \hat{\beta}\}$ abhängt. Dabei ist der Fall $-\alpha, \hat{\beta} \in \{0, 1\}$ der interessanteste, da in diesm Fall μ^* und μ_* ihr Minimum bzw. Maximum annehmen. Sei die exakte Lösung $u \in H^{s+2}(\Omega)$ und der Polynomgrad der Ansatzfunktionen $k \geq 1$, so erhält man , die in der folgenden Tabelle aufgeführten Konvergenzordnungen.

C_{22}	C_{11}	$\lvert(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N, u - u_N)\rvert_{\mathcal{A}}$	$\lvert\lvert u - u_N\rvert\rvert_0$
$0, \mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(1)$	$\min\{s + 1/2, k\}$	$\min\{s + 1/2, k\} + 1/2$
$0, \mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(1/h)$	$\min\{s + 1, k\}$	$\min\{s + 1, k\} + 1$
$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\min\{s, k\} + 1/2$	$\min\{s, k\} + 1$
$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1/h)$	$\min\{s + 1/2, k\}$	$\min\{s + 1/2, k\} + 1/2$

An dieser Tabelle lässt sich ablesen, dass die Wahl $C_{22} = 0$ keinen nachteiligen Einfluss auf die Konvergenzraten hat, sobald C_{11} von Ordnung $1/h$ gewählt wird. Dies ist genau der Fall der des **Local**-DG-Verfahrens, welchens in der Implementierung umgesetzt wurde. Für weitere Bemerkungen zu dem Resultat aus Satz 3.4.1 siehe [13].

3.4.3. Die Beweisidee

Sei $(u, \boldsymbol{\sigma})$ die kontinuierliche Lösung von (3.7) und (3.8) und $(u_N, \boldsymbol{\sigma}_N)$ die DG-Approximation definiert durch (3.17) und (3.18). Dann setzt man

$$e_u := u - u_N \quad \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N$$

Der Fehler $(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u) := (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N, u - u_N)$ wird wie folgt aufgeteilt:

$$(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u) = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u) + (\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u),$$

wobei $\boldsymbol{\Pi}$ und Π Projektionen von $\boldsymbol{\Sigma}$ und V auf die Finite-Element-Räume $\boldsymbol{\Sigma}_h$ und V_h sind. Dabei handelt es sich typischerweise um die L^2-Projektion.
Es gilt

$$\mathcal{A}(e_u, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \varphi, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall(\varphi, \boldsymbol{\tau}) \in V \times \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.58}$$

Der Beweis basiert auf Abschätzungen, welche die Approximationseigenschaften der Projektionen $\boldsymbol{\Pi}$ und Π wiederspiegeln. Diese werden mittels zweier Funktionale $K_{\mathcal{A}}$ und $K_{\mathcal{B}}$

formuliert. Diese Funktional werden später so bestimmt, dass die beiden folgenden Ungleichen gelten.

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, u - \Pi u; \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Pi\tau}, \varphi - \Pi\varphi)| \le K_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\tau}, \varphi) \tag{3.59}$$

für beliebige $(\boldsymbol{\tau}, \varphi), (\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$,
sowie

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}, \varphi; \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, u - \Pi u)| \le |(\boldsymbol{\tau}, \varphi)|_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u) \tag{3.60}$$

für beliebige $(\boldsymbol{\tau}, \varphi) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ und $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$.

Abschätzung der $\mathcal{A}$-seminorm

Mit den Ungleichungen (3.59),(3.60) lassen sich die gewünschten Abschätzungen in der $\mathcal{A}$-Seminorm durch die Funktionale $K_{\mathcal{A}}$ und $K_{\mathcal{B}}$ ausdrücken.

Lemma 3.4.1. *Es gilt*

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \le K_{\mathcal{A}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) + K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u). \tag{3.61}$$

Beweis: Da $|(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{A}}$ eine Seminorm ist, gilt

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \le |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, u - \Pi u)|_{\mathcal{A}} + |(\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u)|_{\mathcal{A}}$$

und da

$$\begin{aligned}
|(\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u)|_{\mathcal{A}}^2 &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u; \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u) \\
&= \mathcal{A}(\boldsymbol{\Pi\sigma} - \boldsymbol{\sigma}, \Pi u - u; \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u) && \text{wegen (3.58)} \\
&= \mathcal{A}(-\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u; \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, \Pi u - u) && \text{Definition von } \mathcal{A}(3.33) \\
&\le |(\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u)|_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u) && \text{wegen (3.60)}
\end{aligned}$$

hat man

$$|(\boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u)|_{\mathcal{A}} \le K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u). \tag{3.62}$$

Daraus folt,dass

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \le |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, u - \Pi u)|_{\mathcal{A}} + K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u). \tag{3.63}$$

Die Behauptung folgt nun, wenn man die Ungleichung (3.59) auf den ersten Summanden der rechten Seite anwendet. □

L^2 Fehlerabschätzung

Um den Fehler in der L^2-Norm abzuschätzen zeigt man Abschätzungen in sogenannten *Negative-Order*-Normen. Diese sind für $t \in \mathbb{N}$ und ein Teilgebiet D von Ω gegenen durch.

$$||u||_{-t,D} = \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(D)} \frac{\int_D u\lambda \, dx}{||\lambda||_{t,D}}. \tag{3.64}$$

Man benötigt also eine Abschätzung für das lineare Funktional $\Lambda(u) := \int_D u\lambda \, dx$. Dafür definiert man die Lösung φ des *adjungierte* Problems.

Definition 3.4.2. *φ heißt Lösung des* ***adjungierten*** *Problems, falls gilt*

$$-\triangle\varphi = \lambda \quad \in \Omega, \tag{3.65}$$

$$\varphi = 0 \quad auf\, \Gamma_{\mathcal{D}}, \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad auf\, \Gamma_{\mathcal{N}}. \tag{3.67}$$

Lemma 3.4.2. *Sei t eine natürliche Zahl, φ die Lösung des adjungierten Problems sowie $\mathbf{\Phi} = -\nabla\varphi$,dann gilt folgende Ungleichung:*

$$||e_u||_{-t,D} = \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(D)} \frac{K_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \mathbf{\Phi}, \varphi)}{||\lambda||_{t,D}} + K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u) \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(D)} \frac{K_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Phi}, \varphi)}{||\lambda||_{t,D}}. \tag{3.68}$$

Beweis: Da φ die Lösung des adjungierten Problems, gilt mit $\mathbf{\Phi} = -\nabla\varphi$

$$\mathcal{A}(-\mathbf{\Phi}, \varphi; \boldsymbol{s}, w) = \Lambda(w) \tag{3.69}$$

für alle $(\boldsymbol{s}, w) \in \mathbf{\Sigma} \times V$.
Setzt man nun $(\boldsymbol{s}, w) = (\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)$, erhält man mit der Definition von $\mathcal{A}$ in (3.33) und der Galerkin Orthogonalität:

$$\begin{aligned}
\Lambda(e_u) &= \mathcal{A}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u; \mathbf{\Phi}, \varphi) \\
&= \mathcal{A}(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{\Phi}, \varphi - \Pi\varphi) \\
&= \mathcal{A}(\mathbf{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{\Phi}, \varphi - \Pi\varphi) + \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{\Phi}, \varphi - \Pi\varphi)
\end{aligned}$$

Da $(\mathbf{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u) \in \mathbf{\Sigma}_h \times V_h$, erhält man mit (3.60) und (3.62):

$$\mathcal{A}(\mathbf{\Pi}\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \Pi e_u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{\Phi}, \varphi - \Pi\varphi) \le K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u) K_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Phi}, \varphi) \tag{3.70}$$

und damit

$$|\Lambda(e_u)| \le K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u) K_{\mathcal{B}}(\mathbf{\Phi}, \varphi) + \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u; \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Pi}\mathbf{\Phi}, \varphi - \Pi\varphi) \tag{3.71}$$

Der letzte Summand kann wegen (3.59) durh $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ abgescháetzt werden und die Behauptung folgt aus der Definition der *Negative-Order*-Normen. □

3.4.4. Die Beweise

Galerkin Orthogonalität

Lemma 3.4.3 (Galerkin Orthogonalität). *Es gilt*

$$\mathcal{A}(e_u, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \varphi, \boldsymbol{\tau}) = 0 \tag{3.72}$$

$\forall(\varphi, \boldsymbol{\tau}) \in V \times \boldsymbol{\Sigma}$

Beweis: Zuerst stell man fest dass gilt:

$$\{\!\{e_u\}\!\} = \{\!\{u\}\!\} - \{\!\{u_n\}\!\} = u - \{\!\{u_N\}\!\}, \qquad [\![e_u]\!] = [\![u]\!] - [\![u_N]\!] = -[\![u_N]\!], \tag{3.73}$$

$$\{\!\{\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}\}\!\} = \boldsymbol{\sigma} - \{\!\{\boldsymbol{\sigma}_N\}\!\}, \qquad [\![\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = [\![\boldsymbol{\sigma}]\!] - [\![\boldsymbol{\sigma}_n]\!]. = -[\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!] \tag{3.74}$$

Dann betrachte die Bilinearform a:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n) \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22} [\![\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N]\!] [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds \int_{\Gamma_\mathcal{N}} C_{22}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_N) \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})\, ds \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\Gamma_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})\, ds \\
&- \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_N \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22} [\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!] [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}_N \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})\, ds \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\Gamma_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})\, ds - a(\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\tau}).
\end{aligned}$$

Weiter erhält man für b:

$$\begin{aligned}
b(e_u, \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (u - u_N) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{u - u_N\}\!\} - \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u - u_N]\!]) [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} (u - u_N) \boldsymbol{\tau} \cdot n\, ds \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} u [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} u \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&- \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u_N \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{u_N\}\!\} - \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u_N]\!]) [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds + \int_{\Gamma_\mathcal{N}} u_N \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, ds \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} u [\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} u \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, ds - b(u_N, \boldsymbol{\tau}).
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
b(\varphi,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma})\,dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(\{\!\{\varphi\}\!\}-\mathbf{C}_{12}\cdot[\![\varphi]\!])[\![\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_N]\!]\,ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}}\varphi(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_N)\cdot n\,ds\\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\Gamma_\mathcal{N}}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_N\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(\{\!\{\varphi\}\!\}-\mathbf{C}_{12}\cdot[\![\varphi]\!])[\![\boldsymbol{\sigma}_N]\!]\,ds + \int_{\Gamma_\mathcal{N}}\varphi\boldsymbol{\sigma}_N\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\Gamma_\mathcal{N}}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds - b(\varphi,\boldsymbol{\sigma}_N).
\end{aligned}
$$

Für die Bilinearform c gilt:

$$
\begin{aligned}
c(e_u,\varphi) &= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![u-u_N]\!][\![\varphi]\!] + \int_{\Gamma_\mathcal{D}} C_11(u-u_N)\varphi\,ds\\
&= \int_{\Gamma_\mathcal{D}} C_11u\varphi\,ds - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![u_N]\!][\![\varphi]\!] + \int_{\Gamma_\mathcal{D}} C_11(u_N)\varphi\,ds\\
&= \int_{\Gamma_\mathcal{D}} C_{11}u\varphi\,ds - c(u_N,\varphi).
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_u,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}},\varphi,\boldsymbol{\tau}) &= a(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\tau}) + b(e_u,\boldsymbol{\tau}) - b(\varphi,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}) + c(e_u,\varphi)\\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_{\Gamma_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds - a(\boldsymbol{\sigma}_N,\boldsymbol{\tau})\\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K u\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} u[\![\boldsymbol{\tau}]\!]\,ds - \int_{\Gamma_\mathcal{N}} u\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\,ds - b(u_N,\boldsymbol{\tau})\\
&- \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx + \int_{\Gamma_\mathcal{N}}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds + b(\varphi,\boldsymbol{\sigma}_N)\\
&+ \int_{\Gamma_\mathcal{D}} C_{11}u\varphi\,ds - c(u_N,\varphi).
\end{aligned}
$$

Mit partieller Integration gilt:

$$-\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx = \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\partial K}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

Und somit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_u,\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}},\varphi,\boldsymbol{\tau}) &= -\mathcal{A}(u_N,\boldsymbol{\sigma}_N,\varphi,\boldsymbol{\tau})\\
&+\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_K \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\partial K}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&+\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K u\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx - \int_{\partial K\setminus\Gamma_{\mathcal{D}}} u\boldsymbol{\tau}\cdot n\,ds\\
&+\int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} C_{11}u\varphi\,ds\\
&= -\int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}}\tau\cdot\mathbf{n}\,ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} C_{22}(\mathbf{g}_{\mathcal{N}}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds\\
&-\int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} C_{11}g_{\mathcal{D}}\varphi\,ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} v\mathbf{g}_{\mathcal{N}}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&+\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx + \int_K \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dx - \int_{\partial K\setminus\Gamma_{\mathcal{N}}}\varphi\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&+\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K u\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\,dx - \int_{\partial K\setminus\Gamma_{\mathcal{D}}} u\boldsymbol{\tau}\cdot n\,ds\\
&+\int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} C_{22}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} C_{11}u\varphi\,ds.
\end{aligned}$$

Da $(\boldsymbol{\sigma}_N, u_N)$ diskrete Lösung des DG-Verfahrens (3.17),(3.18) ist hat man

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}(u_N,\boldsymbol{\sigma}_N,\varphi,\boldsymbol{\tau}) &= -F(\boldsymbol{\tau}) - G(\varphi)\\
&= -\int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}}\tau\cdot\mathbf{n}\,ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} C_{22}(\mathbf{g}_{\mathcal{N}}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})\,ds\\
&-\int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} C_{11}g_{\mathcal{D}}\varphi\,ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} v\mathbf{g}_{\mathcal{N}}\cdot\mathbf{n}\,ds
\end{aligned}$$

Indem man (3.7) und (3.8) benutzt folgt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_u, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \varphi, \boldsymbol{\tau}) = &- \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}} \tau \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} C_{22} (\mathbf{g}_{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, ds \\
&- \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} C_{11} g_{\mathcal{D}} \varphi \, ds - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{N}}} v \mathbf{g}_{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{n} \, ds \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \\
&+ \int_{\Omega} f \varphi \, dx \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \varphi \mathbf{g}_{\mathcal{N}} \, ds \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} C_{22} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} C_{11} u \varphi \, ds
\end{aligned}
$$

Da $(u, \boldsymbol{\sigma})$ exakte Lösung in $H^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^d$ ist, gilt: $u = g_{\mathcal{D}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{\mathcal{D}}$ sowie $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = g_{\mathcal{N}} \quad \text{auf} \Gamma_{\mathcal{N}}$. Daraus folgt

$$\mathcal{A}(e_u, \mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, \varphi, \boldsymbol{\tau}) = 0.$$

□

Hilfsresultate

Die folgenden Resultate aus [14] liefern die benötigten Approximationseigenschaften der Finite-Elemente Räume.

Lemma 3.4.4. *Sei $w \in H^{r+1}(K), r > 0$. Sei Π ein stetiger, linearer Operator von $H^{r+1}(K)$ in den endlich dimensionalen Raum $\mathcal{N}(K) \supset \mathbb{P}^k(K)$ so dass $\Pi w = w$ für alle $w \in \mathbb{P}^k(K)$.Dann gilt für $m = 0, 1$:*

$$
\begin{aligned}
|w - \Pi w|_{m,K} &\leq C h_K^{\min\{r,k\}+1-m} ||w||_{r+1,K}, &(3.75)\\
||w - \Pi w||_{0,\partial K} &\leq C h_K^{\min\{r,k\}+\frac{1}{2}} ||w||_{r+1,K}. &(3.76)
\end{aligned}
$$

Lemma 3.4.5. *Es gibt eine Konstante C_{inv}, die nur von σ in (3.47), r und d abhängt, so dass für alle $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}(K)^d$ und alle $K \in \mathcal{T}$ gilt:*

$$||\boldsymbol{\tau}||_{0,\partial K} \leq C_{inv} h_K^{-\frac{1}{2}} ||\boldsymbol{\tau}||_{0,K}. \tag{3.77}$$

In den nun folgenden beiden Abschnitten werden die Funktionale KA,KB so bestimmt, dass (3.59) und (3.60) gelten. Seien $\Pi : V \to V_h, \mathbf{\Pi\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}_h$ Projektionsoperatoren, die (komponentenweise) die Annahamen von Lemma 3.4.4 mit der Approximationsordnung k erfüllen. Die Parameter C_{11}, C_{22} seien wie in (3.53) und (3.54) definiert.

Das Funktional $K_{\mathcal{A}}$

Die gewünschte Abschätzung in (3.59) aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.4.6. *Sei* $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$ *und* $(\boldsymbol{\Phi}, \varphi) \in H^{t+1}(\Omega)^2 \times H^{t+2}(\Omega)$, $s, t \geq 0$. *Dann gilt (3.59) mit:*

$$K_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi) = \sum_{i=1}^{5} S_i(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi) \tag{3.78}$$

wobei

$$\begin{aligned}
S_1 &:= C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{s,k\}+2} ||\boldsymbol{\sigma}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{t,k\}+2} ||\boldsymbol{\Phi}||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
S_2 &:= C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{22}^{\partial K} h_K^{2\min\{s,k\}+1} ||\boldsymbol{\sigma}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{22}^{\partial K} h_K^{2\min\{t,k\}+1} ||\boldsymbol{\Phi}||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
S_3 &:= C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{s+1,k\}} ||u||^2_{s+2,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \hat{h}_K^{2\min\{t,k\}+2} ||\boldsymbol{\Phi}||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
S_4 &:= C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \hat{h}_K^{2\min\{s,k\}+2} ||\boldsymbol{\sigma}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{t+1,k\}} ||\varphi||^2_{t+2,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
S_5 &:= C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{s+1,k\}+1} ||\boldsymbol{\sigma}||^2_{s+2,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{t+1,k\}+1} ||\varphi||^2_{t+2,K}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

und $\hat{h}_K := sup\{h_{K'} : \langle K, K'\rangle =\neq \emptyset\}, C_{ii}^{\partial K} := sup\{C_{ii}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \partial K\}, i = 1, 2.$*Die postive Konstante* C *ist unabhängig von der Gittweite, hängt aber von der Konstante in (3.4.4) und dem Koeffizienten* $\mathbf{C}_{12}$ *ab. Weiter gilt falls* $(\boldsymbol{\Phi}, \varphi) = (\boldsymbol{\sigma}, u)$*:*

$$K_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) = S_1(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) + S_3(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) + S_5(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) \tag{3.79}$$

Beweis. Zur Abkürzung definiere die Größen $\boldsymbol{\xi_\sigma} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, \xi_u := u - \Pi u, \boldsymbol{\xi_\Phi} := \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}, \xi_\varphi := \varphi - \Pi\varphi$. Zu zeigen ist, dass

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \xi_u : \boldsymbol{\xi_\Phi}, \xi_\varphi) \leq \sum_{i=1}^{5} S_i(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi). \tag{3.80}$$

Dazu schreibt man

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \xi_u : \boldsymbol{\xi_\Phi}, \xi_\varphi) = a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi}) + b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi}) - b(\xi_\varphi, \boldsymbol{\xi_\sigma}) + c(\xi_u, \xi_\varphi)$$

und schätzt die Summanden einzeln ab. In den folgenden Abschätzungen kommen Sprünge und Mittelwerte unstetiger Funktionen vor. Man erhält also zu einer Funktion $\phi \in V_N$ bzw $\mathbf{\Sigma}_N$ auf dem Rand eines Elementes $K \in \mathcal{T}$ die Grössen ϕ^+ und ϕ^-, die innere bzw äußere Spur von ϕ bezüglich K. Im Folgenden sei mit ϕ^{out} die äußere Spur gemeint, für die inner Spur wird ϕ geschrieben.

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi}) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \Bigg(\int_K \boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi}\, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K)(\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K)\, ds \\ + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} C_{22}(\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K)(\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K)\, ds - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} C_{22}(\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K)(\boldsymbol{\xi}^{out}_{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathbf{n}_K) \Bigg)\end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhält man für $a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi})$

$$\begin{aligned}|a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \le \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(&||\boldsymbol{\xi_\sigma}||_{0,K} ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||_{0,K} + ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K||_{\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||_{\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} \\ &+ (||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K||_{\partial K\setminus\partial\Omega} + ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi}^{out}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_K||_{\partial K\setminus\partial\Omega}) ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||_{\partial K\setminus\partial\Omega} \Big) \\ &\le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||\boldsymbol{\xi_\sigma}||^2_{0,K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||^2_{0,K} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} + ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{\partial K\setminus\partial\Omega} + ||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi}^{out}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{\partial K\setminus\partial\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||^n_{\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} + 2||C_{22}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{\partial K\setminus\partial\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||\boldsymbol{\xi_\sigma}||^2_{0,K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||^2_{0,K} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 4 \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{22}^{\partial K} ||\boldsymbol{\xi_\sigma} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{0,\partial K} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{22}^{\partial K} ||\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{0,\partial K} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Wendet man nun auf die Terme für K und ∂K die Interpolationsabschätzungen aus Lemma 3.4.4 an, erhält man

$$|a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \le S_1 + S_2. \tag{3.81}$$

An dieser Stelle geht die Annahme (3.47) ein.
Als nächstes soll $b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})$ abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi}) = -\sum_{K\in\mathcal{T}} \Bigg(\int_K \nabla\xi_u \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi}\, dx + \int_{\partial K\cap\Gamma_\mathcal{D}} \xi_u (\boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K)\, ds \\ + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \xi_u (\{\!\{\boldsymbol{\xi_\Phi}\}\!\} - \mathbf{C}_{12}[\![\boldsymbol{\xi_\Phi}]\!]) \cdot \mathbf{n}_K\, ds \Bigg).\end{aligned}$$

Es gilt mit wiederholter Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung mit geeigneten Gewichten:

$$
\begin{aligned}
|b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \Big(& |\xi_u|_{1,K} ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||_{0,K} + ||h_K^{-\frac{1}{2}} \xi_u||_{0,\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} ||h_K^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||_{0,\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} \\
& + ||h_K^{-\frac{1}{2}} \xi_u||_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} ||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})||_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} \Big) \\
& \leq \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} |\xi_u|^2_{1,K} + ||h_K^{-\frac{1}{2}} \xi_u||^2_{0,\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} + ||h_K^{-\frac{1}{2}} \xi_u||^2_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} + \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||^2_{0,K} + ||h_K^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\xi_\Phi} \cdot \mathbf{n}_K||^2_{0,\partial K\cap\Gamma_\mathcal{N}} + \\
& ||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})||^2_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} \Bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Der letzte Term lässt sich wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{K\in\mathcal{T}} ||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})||^2_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} \\
& \leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi})||_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} + ||h_K^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})|| \right)^2 \\
& = \sum_{K\in\mathcal{T}} ||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi})||^2_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} + ||h_K^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})||^2_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} \\
& + 2||h_K^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi_\Phi} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi})||_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} ||h_K^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})||_{0,\partial K\setminus\partial\Omega} \\
& = \sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\subset\partial K\setminus\partial\Omega} \int_e h_K((\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K)\boldsymbol{\xi_\Phi})^2\, ds + \int_e h_K((\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K)\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})^2\, ds \\
& + 2 \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\subset\partial K\setminus\partial\Omega} \int_e h_K((\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K)\boldsymbol{\xi_\Phi})^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\subset\partial K\setminus\partial\Omega} \int_e h_K((\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K)\boldsymbol{\xi_\Phi^{out}})^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\subset\partial K\setminus\partial\Omega} 4 \int_e h_K((\frac{1}{2} - \mathbf{C}_{12}\cdot\mathbf{n}_K)\boldsymbol{\xi_\Phi})^2.
\end{aligned}
$$

Für die letzte Umformung wurde benutzt, dass für $e \in \mathcal{E}_\mathcal{I}$ gilt $n_k \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi} = -n_k \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi^{out}}$. Damit folgt, dass

$$
|b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \left(|\xi_u|^2_{1,K} + \frac{1}{h_K} ||\xi_u||^2_{0,\partial K} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \left(||\boldsymbol{\xi_\Phi}|||^2_{0,K} + \hat{h}_K ||\boldsymbol{\xi_\Phi}||^2_{0,\partial K} \right) \right)^{\frac{1}{2}}
$$

Durch elementweise Anwendung der Interpolationsabschätzungen aus Lemma 3.4.4 gilt

$$|b(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leq S_3. \tag{3.82}$$

Analog erhält man:

$$|b(\xi_\varphi, \boldsymbol{\xi_\sigma})| \leq S_4, \tag{3.83}$$

und mit dem gleichen Vorgehen wie bei der Abschätzung für $a(\boldsymbol{\xi_\sigma}, \boldsymbol{\xi_\Phi})$

$$\begin{aligned} |c(\xi_u, \xi_\varphi)| &\leq 2\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{11}^{\partial K} ||\xi_u||^2_{0,\partial K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} C_{11}^{\partial K} ||\xi_\varphi||^2_{0,\partial K}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq S_5 \end{aligned}$$

□

Diese Resultate lassen sich zu folgenden Abschätzungen für $\mathcal{K}_\mathcal{A}$ zusammenfassen.

Folgerung 3.4.1. *Sei $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^d \times H^{s+2}(\Omega), s \geq 0$ die exakte Lösung von (3.4)-(3.6); sei $\varphi \in H^{t+2}(\Omega), t \geq 0$ die Lösung des adjungierten Problems (3.66)-(3.67) und $\boldsymbol{\Phi} = -\varphi$. Falls die Koeffizienten C_{11} und C_{22} wie in (3.53) und (3.54) gegeben sind, dann existiert eine Konstante $C = C(s, t, \boldsymbol{\sigma}, \zeta, \tau, k, d)$ so dass*

$$\mathcal{K}_\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi) = Ch^{\mathcal{Q}_\mathcal{A}} ||u||_{s+2} ||\varphi||_{t+2}, \tag{3.84}$$

wobei $\mathcal{Q}_\mathcal{A} = \min\{s + 1 + \min\{t + \hat{\beta}, k\}, k + 1 + \min\{t, k + \alpha\}\}$ ist. Dies ergibt für $k = 0$ $\mathcal{Q}_\mathcal{A} = 1 + \alpha$.
Weiter gilt

$$\mathcal{K}_\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) = Ch^{\mathcal{P}_\mathcal{A}} ||u||^2_{s+2}, \tag{3.85}$$

mit $\mathcal{P}_\mathcal{A} = \min\{s + \frac{1}{2}(1 + \hat{\beta}), k + \frac{1}{2}(k + \alpha)\}$ falls $k \geq 1$ und $\mathcal{P}_\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$ für $k = 0$.

Beweis. Da $||\boldsymbol{\sigma}||_{s+1,K} \leq ||u||_{s+2,K}$ und $||\boldsymbol{\Phi}||_{s+1,K} \leq ||\varphi||_{s+2,K}$ lassen sich die Terme aus Lemma 3.4.6 zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi) &= C\left[h^{\min\{s,k\}+1}(h^{\min\{t,k\}+1} + \tau h^{\min\{t,k\}+\beta} + h^{\min\{t+1,k\}})\right. \\ &+ \left. h^{\min\{s+1,k\}+1}(h^{\min\{t,k\}} + \zeta h^{\min\{t+1,k\}+\alpha})\right] ||u||_{s+2} ||\varphi||_{t+2}, \end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{K}_\mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) = C\left[h^{2\min\{s,k\}+1}(h + \tau h^\beta) + h^{2\min\{s+1,k\}+1}\zeta h^\alpha\right] ||u||^2_{s+2},$$

Für $-1 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq 1$ wie in Satz 3.4.1 gefordert erält man die Behauptung durch Fallunterscheidung. □

Das Funktional $K_{\mathcal{B}}$

In diesem Abschnitt soll das Funktional $K_{\mathcal{B}}$ bis auf eine von der Gitterfeinheit unabhängigen multiplikativen Konstante so bestimmt werden, dass (3.60) erfüllt ist. Im Folgenden handelt es sich bei den Projektionsoperatoren $\Pi, \boldsymbol{\Pi}$ jeweils um die (komponentenweise) L^2-Projektionen von V bzw $\boldsymbol{\Sigma}$ auf die entsprechenden diskreten Teilräume V_h und $\boldsymbol{\Sigma_h}$ Um die Abschätzung in (3.60) zu erhalten, wird zuerst eine Form $|(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{B}}$ definiert, so dass für alle $(\boldsymbol{\tau}, \varphi) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ und alle $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$ gilt

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}, \varphi, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u)| \le |(\boldsymbol{\tau}, \varphi)|_{\mathcal{A}} |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u)|_{\mathcal{B}}. \tag{3.86}$$

Damit reicht es aus, $K_{\mathcal{B}}$ so zu bestimmen, dass

$$|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u)|_{\mathcal{B}} \le K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u). \tag{3.87}$$

für alle $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V$ erfüllt ist.

Den ersten Schritt hierzu beinhaltet folgendes Lemma.

Lemma 3.4.7. *Seien Π und $\boldsymbol{\Pi}$ die (komponentenweisen) L^2-Projektionen auf V_h bzw $\boldsymbol{\Sigma}_h$. Definiere:*

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{\sigma}, u)|^2_{\mathcal{B}} :=& \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \left(\frac{1}{C_{11}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 + C_{11} u^2 \right) ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \left(C_{22} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{u^2}{\chi} \right) ds \\ &+ \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} \left(C_{22} [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]^2 + \frac{1}{C_{11}} |\{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} - \mathbf{C}_{12} [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]|^2 + \frac{1}{\chi} (\{\!\{u\}\!\} + \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u]\!])^2 + C_{11} [\![u]\!]^2 \right) ds, \end{aligned} \tag{3.88}$$

wobei für jede innere bzw Neumann-Kante e gilt

$$\chi(x) := \begin{cases} \min\{h_K, h_{K'}\} \text{ für } x \in \langle K, K' \rangle, h_K \text{ für } x \in \Gamma_{\mathcal{N}} & \text{falls } C_{22}(x) = 0, \\ C_{22}(x) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.89}$$

Dann gilt für alle $(\boldsymbol{\tau}, \varphi) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}, \varphi; \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u)| \le C |(\boldsymbol{\tau}, \varphi)|_{\mathcal{A}} |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}, u - \Pi u)|_{\mathcal{B}}. \tag{3.90}$$

mit einer Konstanten C, die nur von ρ, k und d abhängt.

Beweis: Setze $\boldsymbol{\xi_\sigma} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\sigma}$ und $\xi_u = u - \Pi u$, dann erhält man aus der Definition von $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}, \varphi; \boldsymbol{\xi_\sigma}, \xi_u) &\le |a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi_\sigma})| + |b(\varphi, \boldsymbol{\xi_\sigma})| + |b(\xi_u, \boldsymbol{\tau})| + |c(\varphi, \xi_u)| \\ &=: T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden werden wie folgt abgeschätzt:

$$T_1 \leq |\int_\Omega \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}\, dx| + |\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\tau}]\!][\![\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})\, ds|$$

Der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet, da $\mathbf{\Pi}$ die komponentenweise L^2-Projektion ist. Mit der Cauch-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}]\!]^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |(\boldsymbol{\tau}, \varphi)|_\mathcal{A} |(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}, \xi_u)|_\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{\Pi}$ die L^2 Projektion ist und auf Grund der Inklusionseigenschaft (3.49) $\int_K \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}\, dx = \int_K \nabla\varphi \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\sigma})\, dx = 0$ gilt, hat man

$$T_2 = |\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\varphi]\!] \cdot (\{\!\{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}\}\!\} - \mathbf{C}_{12}[\![\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}]\!])\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} \varphi \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\, ds|.$$

Durch multiplizieren und dividieren durch $C_{11}^{\frac{1}{2}}$ und Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhält man weiter

$$\begin{aligned} T_2 &\leq \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![\varphi]\!]^2 + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}\varphi^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \frac{1}{C_{11}} |\{\!\{\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}\}\!\} - \mathbf{C}_{12}[\![\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}]\!]|^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} \frac{1}{C_{11}} (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})^2\, ds\right) \\ &\leq |(\boldsymbol{\tau}, \varphi)|_\mathcal{A} |(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}, \xi_u)|_\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Analog lässt sich, da nach (3.49) $\int_K \nabla \cdot \tau \xi_u\, dx = 0$ ist, T_3 abschätzen.

$$\begin{aligned} T_3 &= \left|\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} ([\![\xi_u]\!] + \mathbf{C}_{12} \cdot [\![\xi_u]\!])[\![\boldsymbol{\tau}]\!]\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \xi_u \boldsymbol{\tau} \cdot n\right| \\ &= \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \chi[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\, ds \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \chi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \frac{1}{\chi} (\{\!\{\xi_u\}\!\} + \mathbf{C}_{12}[\![\xi_u]\!])^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \frac{\xi_u^2}{\chi}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \chi[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\, ds \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \chi(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}, \xi_u)|_\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Für den ersten Faktor ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \chi[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\,ds \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \chi(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{22}[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\,ds \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} C_{22}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\,ds \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \overline{\chi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |(\boldsymbol{\tau},u)|_\mathcal{A} + \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \overline{\chi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

wobei $\overline{\chi}(x) = \min\{h_K, h_{K'}\}$, falls $x \in \langle K, K'\rangle$ und $\overline{\chi}(x) = h_k$, falls $x \in \Gamma_\mathcal{N}$.

Mit der Inversen Ungleichung aus Lemma 3.4.5 erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}[\![\boldsymbol{\tau}]\!]^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{N}} \overline{\chi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds &= \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \int_e \overline{\chi}(\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\tau}^-\cdot\mathbf{n}^-)^2\,ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{N}} \int_e \overline{\chi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2\,ds \\
&\leq \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}(|\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+| + |\boldsymbol{\tau}^-\cdot\mathbf{n}^|)^2\,ds + \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{N}} \int_e \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}^-|^2\,ds \\
&= \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \int_e (\overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+|^2 + 2|\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+||\boldsymbol{\tau}^-\cdot\mathbf{n}^-| + |\boldsymbol{\tau}^-\cdot\mathbf{n}^-|^2)\,ds \\
&\quad + \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{N}} \int_e \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}|^2\,ds \\
&\leq 2\sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+|^2\,ds \\
&\quad +2\left(\sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}^+\cdot\mathbf{n}^+|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}} \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}^-\cdot\mathbf{n}^-|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{N}} \int_e \overline{\chi}|\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}|^2\,ds \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\in\partial K} \int_e \overline{\chi}4|\boldsymbol{\tau}|_K\cdot\mathbf{n}_K|^2\,ds \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} 4\overline{\chi}^{\partial K}||\boldsymbol{\tau}|_K\cdot\mathbf{n}_K||^2_{0,\partial K} \\
&\leq 4C_{inv}\sup_{K\in\mathcal{T}} \frac{\overline{\chi}^{\partial K}}{h_k}||\boldsymbol{\tau}||_0^2 \\
&\leq 4C_{inv}||\boldsymbol{\tau}||_0^2 \leq 4C_{inv}|(\boldsymbol{\tau},\varphi)|^2_\mathcal{A}
\end{aligned}$$

und damit zusammen mit den vorangegangenen Abschätzungen

$$T_4 \leq C|(\boldsymbol{\tau},\varphi)|_\mathcal{A}|(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}},\xi_u)|_\mathcal{B}.$$

Schließlich gilt für den vierten Term:

$$
\begin{aligned}
T_4 &= \left|\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}[\![\varphi]\!]\cdot[\![\xi_u]\!]\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}\varphi\xi_u\,ds\right| \\
&\le \left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}|[\![\varphi]\!]|^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}\varphi^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} C_{11}|[\![\xi_u]\!]|^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}\xi_u^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le |(\boldsymbol{\tau},\varphi)|_\mathcal{A}|(\boldsymbol{\xi_\sigma},\xi_u)|_\mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Fasst man nun diese Abschätzungen für die Terme T_1-T_4 zusammen, erhält man das gewünschte Resultat:

$$
|\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau},\varphi;\boldsymbol{\xi_\sigma},\xi_u)| \le |(\boldsymbol{\tau},\varphi)|_\mathcal{A}|(\boldsymbol{\xi_\sigma},\xi_u)|_\mathcal{B}.
$$

□

Damit lässt sich $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ wie folgt bestimmen.

Lemma 3.4.8. *Seien* Π *und* $\boldsymbol{\Pi}$ *die* $L^2(\Omega)$ *und* $L^2(\Omega)^d$ *Projektionen auf* $\boldsymbol{\Sigma}_N$ *bzw* V_N *und sei* $K_\mathcal{B}$ *definiert durch:*

$$
K_\mathcal{B}^2(\boldsymbol{\sigma},u) = C\sum_{K\in\mathcal{T}}\left(h_K^{2\min\{s,k\}+1}\left(\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial K}} + C_{22}^{\partial K}\right)||\boldsymbol{\sigma}||_{s+1,K}^2\right) \tag{3.91}
$$

$$
+C\sum_{K\in\mathcal{T}}\left(h_K^{2\min\{s+1,k\}+1}\left(C_{11}^{\partial K} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial K}}\right)||u||_{s+2,K}^2\right), \tag{3.92}
$$

wobei $\tilde{C}_{11}^{\partial K} = \inf\{C_{11}(x) : x\in\partial K\}$ *und* $\tilde{\chi}^{\partial K} = \inf\{\chi(x) : x\in\partial K\}$*. Dann gilt (3.87) für alle* $(\boldsymbol{\sigma},u)\in H^{s+1}(\Omega)^d\times H^{s+2}(\Omega), s\ge 0$ *mit einer Konstanten* C *die nur von den Konstanten in Lemma 3.4.4 und Lemma 3.4.5 .*

Beweis: Sei $u\in\boldsymbol{V}$ dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}[\![u]\!]^2\,ds &= \int_{\partial\Omega} u^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^+\mathbf{n}^+ + u^-\mathbf{n}^-)\cdot(u^+\mathbf{n}^+ + u^-\mathbf{n}^-)\,ds \\
&= \int_{\partial\Omega} u^2 + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^+)^2 - 2u^+u^- + (u^-)^2\,ds \\
&\le \int_{\partial\Omega} u^2 + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^+)^2\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^-)^2\,ds + 2\left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^+)^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^-)^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_{\partial\Omega} u^2\,ds + 4\int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}}(u^+)^2\,ds \\
&\le C\sum_{K\in\mathcal{T}}\int_{\partial K} u^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Für die Terme der Form $|\{\!\{u\}\!\} + \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u]\!]|$ gilt

$$\begin{aligned}
|\{\!\{u\}\!\} - \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u]\!]| &= |(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+)u^+ + (\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^-)u^-| \\
&\leq |(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^+)u^+| + |(\frac{1}{2} + \mathbf{C}_{12} \cdot \mathbf{n}^-)u^-| \\
&\leq C(|u^+| + |u^-|).
\end{aligned}$$

und damit analog zu obiger Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{u\}\!\} + \mathbf{C}_{12} \cdot [\![u]\!])^2\, ds &\leq \int_{\partial\Omega} u^2\, ds + C \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (|u^+| + |u^-|)^2\, ds \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} u^2\, ds.
\end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]^2\, ds \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} |\boldsymbol{\sigma}|^2\, ds, \tag{3.93}$$

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2\, ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{\boldsymbol{\sigma}\}\!\} - \mathbf{C}_{12} \cdot [\![\boldsymbol{\sigma}]\!])^2\, ds \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} |\boldsymbol{\sigma}|^2\, ds. \tag{3.94}$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}
|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma}, u - \Pi u)|^2_\mathcal{B} &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} \left(\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial K}} + C_{22}^{\partial K} \right) (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi\sigma})^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial K}} + C_{11}^{\partial K} \right) (u - \Pi u)^2\, ds \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(h_K^{2\min\{s,k\}+1} \left(\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial K}} + C_{22}^{\partial K} \right) ||\boldsymbol{\sigma}||^2_{s+1,K} \right) \\
&\quad + C \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(h_K^{2\min\{s+1,k\}+1} \left(C_{11}^{\partial K} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial K}} \right) ||u||^2_{s+2,K} \right)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Interpolationsabschätzung am Rand aus Lemma 3.4.4. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Daraus ergibt sich

Folgerung 3.4.2. *Sei $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^d \times H^{s+2}(\Omega)$, $s \geq 0$. Unter der Annahme, dass die Koeffizienten C_{11} und C_{22} wie in (3.53) und (3.54) gewählt sind und die Triangulierung die Bedingungen (3.47) sowie (3.48) erfüllt, existiert eine Konstante C, die nur von $s, \sigma, \delta, \zeta, \tau, k,$ und d abhängt, so dass*

$$K^2_\mathcal{B}(\boldsymbol{\sigma}, u) = Ch^{2P} ||u||^2_{s+2}, \tag{3.95}$$

wobei $P = \frac{1}{2}(1 - \mu^*)$ falls $k = 0$ und $P = \min\{s + \frac{1}{2}(1 + \mu_*), k + \frac{1}{2}(1 - \mu^*)\}$, falls $k \geq 1$.

Beweis. Auf Grund von (3.48) gilt:

$$\delta^{-1} h_K \geq h_{K'} \geq \delta h_k$$

und somit für $\alpha \leq 0$:

$$(\delta^{-1} h_K)^\alpha \leq h_{K'}^\alpha \leq (\delta h_k)^\alpha$$

für alle Nachbarn K' von K Da $\tilde{C}_{11}^{\partial K} = \inf\{C_{11}(x) : x \in \partial K\}$ hat man:

$$\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial K}} \leq \zeta^{-1} h_K^{-\alpha} \delta^\alpha$$

und somit

$$\left(\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial K}} + C_{22}^{\partial K} \right) \leq \zeta^{-1} h_K^{-\alpha} \delta^\alpha + \tau h_K^{\hat{\beta}}$$

Analog gilt:

$$h_K \left(C_{11}^{\partial K} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial k}} \right) \leq \zeta h_K^{1+\alpha} + \hat{\tau}^{-1} h_K^{1-\hat{\beta}} \delta^\beta$$

Mit $\boldsymbol{\sigma} = \nabla u$ hat man $||\boldsymbol{\sigma}||_{s+1,K} \leq ||u||_{s+2,K}$ und aus Lemma 3.4.8 ergibt sich:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^2(\boldsymbol{\sigma}, u) = C[h^{2\min\{s,k\}+1}(\zeta^{-1} h^{-\alpha} + \hat{\tau}^{-1} h^\beta) + h^{2\min\{s+1,k\}+1}(\zeta h^\alpha + \hat{\tau}^{-1} h^{-\hat{\beta}})]||u||_{s+2}^2.$$

Mit der Definition von μ^* und μ_* in (3.55) lässt sich dies schreiben als

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^2(\boldsymbol{\sigma}, u) = C[h^{2\min\{s,k\}+1+\mu_*} + h^{2\min\{s+1,k\}+1-\mu^*}]||u||_{s+2}^2.$$

Durch Fallunterscheidung folgt die Behautung.

□

Beweis von Satz 3.4.1

Mit den gewonnenen Abschätzungen für dies Funktionale $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}, \mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ kann die a priori Abschätzung aus Satz 3.4.1 bewiesen werdn.

Beweis von Satz 3.4.1: Lemma 3.4.1 liefert

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\sigma}, u) + \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u)$$

Mit den Abschätzungen aus Folgerung 3.4.1 und 3.4.2 für $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ gilt demnach

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \leq C h^{\min\{P_{\mathcal{A}}, P\}} ||u||_{s+2}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
P &= \min\{s + \frac{1}{2}(1+\mu_*), k + \frac{1}{2}(1-\mu^*)\}, \\
P_{\mathcal{A}} &= \min\{s + \frac{1}{2}(1+\hat{\beta}), k + \frac{1}{2}(k+\alpha)\},
\end{aligned}
$$

und da $\mu_* \leq \hat{\beta}, -\mu^* \leq \alpha$ gilt $P \leq P_{\mathcal{A}}$ und somit:

$$|(\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}}, e_u)|_{\mathcal{A}} \leq Ch^P ||u||_{s+2}$$

Um die Abšchatzung für $||u - u_h||_0$ zu erhalten, wählt man in Lemma (3.4.2) $t = 0$ und $D = \Omega$. Schätzt man nun in (3.68) $K_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\sigma}, u; \boldsymbol{\Phi}, \varphi), K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\sigma}, u)$ und $K_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\Phi}, \varphi)$ wie in Folgerung 3.4.1 und 3.4.2 nach oben ab, hat man

$$||u - u_h||_{0,\Omega} \;=\; \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \frac{Ch^{Q_{\mathcal{A}}|_{t=0}} ||u||_{s+2} ||\varphi||_2}{||\lambda||_{0,\Omega}} + Ch^P ||u||_{s+2} \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \frac{Ch^{P|_{s=0}} ||\varphi||_2}{||\lambda||_{0,\Omega}}.$$

Aufgrund der elliptischen Regularität des adjungierten Problems gilt $||\varphi||_2 \leq C||\lambda||_0$ und $||\boldsymbol{\Phi}||_1 \leq C||\lambda||_0$ und man erhält:

$$||u - u_N||_0 \leq Ch^{\min\{Q_{\mathcal{A}}|_{t=0}, P + P|_{s=0}\}} ||u||_{s+2}.$$

$$
Q_{\mathcal{A}}|_{t=0} \;=\; \begin{cases} \min\{s + 1 + \min\{\hat{\beta}, k\}, k+1\}, & \text{für } k \geq 1, \\ 1 + \alpha, & \text{für } k = 0. \end{cases}
$$

$$
P + P|_{s=0} \;=\; \begin{cases} \min\{s + \frac{1}{2}(1+\mu_*), k + \frac{1}{2}(1-\mu^*)\} + \frac{1}{2}(1+\mu_*), & \text{für } k \geq 1, \\ 1 - \mu^* & \text{für } k = 0. \end{cases}
$$

Durch Fallunterscheidung erhält man $Q_{\mathcal{A}}|_{t=0} \geq P + P|_{s=0}$, woraus folgt, dass

$$||u - u_N||_0 \leq Ch^{P+D} ||u||_{s+2}, \tag{3.96}$$

mit $D = P|_{s=0}$, und damit die behauptete Abschätzung. □

4. LDG-Verfahren für das Stokes System

Bei der Diskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen stellt die Behandlung der Nebenbedingung $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ eine besondere Schwierigkeit dar. Das in [19] beschriebene LDG-Verfahren für die stationären Stokes-Gleichung ist eine Möglichkeit, dieses Schwierigkeit zu behandeln. . Die Diskretisierung ist eine direkte Erweiterung des LDG-Verfahrens für elliptische Randwertprobleme, welches in Kapitel 1 behandelt wurde. Der wesentliche Unterschied besteht in der Struktur des diskreten Gleichungssytems. Es handelt sich hierbei um ein Sattelpunktproblem, das die Implementierung eines entsprechenden iterativen Lösungs Algorithmus erfordert.

4.1. Das Stokes System

Das Dirichlet Randwertproblem fúr das Stokes System lautet: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ ein Gebiet. Gesucht sind Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (Geschwindigkeit) und $p : \Omega \to \mathbb{R}$ (Druck), so dass

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= f \quad &in \quad \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0 \quad &in \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= g_{\mathcal{D}} \quad &auf \quad \Gamma_{\mathcal{D}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei die Dirichlet Randdddaten der Kompatibilitätsbendingung

$$\int_{\partial\Omega} g_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.2}$$

genügt.

Für Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsaussagen siehe z.B. [29]
In den folgenden Betrachtungen soll davon ausgegangen werden, dass die exakte Lösung $(\boldsymbol{u}, p)$ von (4.1) mindestens in $[H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ liegt.

Wie im elliptischen Fall lässt sich nach Einführung einer Hilfsfunktion $\underline{\sigma} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ das System (4.1) als System erster Ordnung schreiben.

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \nabla \boldsymbol{u} \quad in \quad \Omega && (4.3)\\ -\nabla\cdot\underline{\sigma} + \nabla p &= f \quad in \quad \Omega && (4.4)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \quad in \quad \Omega && (4.5)\\ \boldsymbol{u} &= g_{\mathcal{D}} \quad auf \quad \Gamma_{\mathcal{D}} && (4.6) \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung erhält man durch Multiplikation mit glatten matrix-,vektor-, bzw. skalarwertigen Testfunktionen $\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q$ und partieller Integration über eine hinreichend glatte Teilmenge $K \subset \Omega$. Dazu werden folgende Notationen benötigt:

- $(\nabla\boldsymbol{\varphi})_{ij} = \partial_j \boldsymbol{\varphi}_i$,
- $(\nabla\cdot\underline{\tau})_i = \sum_j \partial_j \underline{\tau}_{ij}$,
- $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\varphi})_{ij} = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{\varphi}_j$,
- $\underline{\sigma} : \underline{\tau} = \sum_{i,j} \underline{\sigma}_{ij}\underline{\tau}_{ij}$,
- $\boldsymbol{\varphi}\cdot\underline{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \sum_{i,j}\boldsymbol{\varphi}_i\underline{\sigma}_{ij}n_j = \underline{\sigma} : (\boldsymbol{\varphi}\otimes n)$,

für matrixwertig Funktionen $\underline{\sigma}, \underline{\tau}$ und vektorwertige Funktionen $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{u}, \mathbf{n}$.

Die schwache Lösung wird nun analog zum elliptischen Fall definiert.

Definition 4.1.1 (Schwache Lösung)**.** *Ein Tupel* $(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^{d\times d} \times [H^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ *heißt* ***schwache Lösung*** *von (4.3)-(4.6), falls für beliebige offene, beschränkte Teilmengen* $K \subset \Omega$ *mit Lipschitz-Rand gilt*

$$\begin{aligned} \int_K \underline{\sigma} : \underline{\tau}\,dx + \int_K \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\underline{\tau})\,dx - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\underline{\tau}\cdot\mathbf{n}_K\,ds &= \int_{\partial K\cap\partial\Omega} g_{\mathcal{D}}\cdot\underline{\tau}\cdot\mathbf{n}_K\,ds, && (4.7)\\ \int_K \underline{\sigma} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx - \int_{\partial K} \sigma : (\boldsymbol{\varphi}\otimes\mathbf{n}_K)\,dx - \int_K p\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx + \int_{\partial K} p\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}_K\,ds &= \int_K f\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx, && (4.8)\\ -\int_K \boldsymbol{u}\cdot\nabla q\,dx + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n}_K q\,ds &= -\int_{\partial K\cap\partial\Omega} g_{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n}_K q\,ds, && (4.9) \end{aligned}$$

für alle $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in [H^1(\Omega)]^{d\times d} \times [H^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \cap L^2_0$.
Dabei ist $L^2_0(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u\,dx = 0\}$.

4.2. Das LDG-Verfahren

Um nun das LDG-Verfahren zu definieren, fordert man diese schwache Formulierung auf jedem Element K einer gegebenen Triangulierung $\mathcal{T}$. Dies geschieht wiederum in den lokalen Sobolevräumen$\underline{\Sigma}$, $\mathbf{V}$ und Q, definiert durch

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma} : \quad &= \{\underline{\sigma} \in L^2(\Omega)^{d\times d} : \underline{\sigma}_{ij}|_K \in H^1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}, 1 \leq i,j \leq d\},\\
\mathbf{V} : \quad &= \{v \in L^2(\Omega)^d : v_i|_K \in H^1(K)\ \forall K \in \mathcal{T} :, 1 \leq i \leq d\},\\
Q : \quad &= \{q \in L^2(\Omega) : \textstyle\int_\Omega q\,dx = 0, q|_K \in H^1(K) \forall K \in \mathcal{T}\}.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.7)-(4.9) sind damit für alle $K \in \mathcal{T}$ wohldefiniert, da in diesen Räumen die Spuren auf die Ränder der Elemente existieren.

Die LDG-Approximation soll wiederum in Funktionenräumen erfolgen, deren Funktionen eingeschränkt auf ein Element K in einem endlich dimensionalen Raum liegen. Setze dazu

$$\underline{\Sigma}_N : \quad = \{\sigma \in [L^2(\Omega)]^{d\times d} : \sigma_{ij}|_K \in \mathcal{S}(K)\ \forall K \in \mathcal{T}, 1 \leq i,j \leq d\}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{V}_N : \quad = \{v \in [L^2(\Omega)]^d : v_i|_K \in \mathcal{V}(K)\ \forall K \in \mathcal{T}, 1 \leq i \leq d\}, \tag{4.11}$$

$$Q_N : \quad = \{q \in L^2(\Omega) : \textstyle\int_\Omega q\,dx = 0, q|_K \in \mathcal{Q}(K) \forall K \in \mathcal{T}\}, \tag{4.12}$$

dabei sind $\mathcal{S}(K)$, $\mathcal{V}(K)$ und $\mathcal{Q}(K)$ endlichdimensionale Funktionenräume auf K.

Wie im vorangegangenen Kapitel müssen die einzelnen Freiheitsgrade auf den Elementen durch numerische Flüsse gekoppelt werden. Die benötigten numerischen Füsse sind:

- $$\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}} : \mathbf{V} \to [T(\mathcal{T})]^d, \tag{4.13}$$
- $$\hat{\sigma} : \underline{\Sigma} \times \mathbf{V} \to [T(\mathcal{T})]^{d\times d}, \tag{4.14}$$
- $$\hat{\boldsymbol{u}}_p : \mathbf{V} \times Q \to [T(\mathcal{T})]^d, \tag{4.15}$$
- $$\hat{p}_{\underline{\sigma}} : Q \to [T(\mathcal{T})], \tag{4.16}$$

Ersetzt man oben die auftretenden Randterme in der schwachen Formulierung durch die numerischen Flüsse $\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}$,$\hat{\sigma}$, $\hat{\boldsymbol{u}}_p$, $\hat{p}$, so kann man die diskrete Lösung der LDG-Verfahrens definieren.

Definition 4.2.1 (LDG-Lösung). *Ein Tupel* $(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ *heisst Lösung des LDG-Verfahrens, falls*

$$\int_K \underline{\sigma} : \underline{\tau}\, dx + \int_K u \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau})\, dx - \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{u}) \cdot \underline{\tau} \cdot \mathbf{n}_k\, ds = 0, \tag{4.17}$$

$$\int_K \underline{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx - \int_{\partial K} \hat{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{n}_K)\, dx \tag{4.18}$$

$$- \int_K p \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_{\partial K} \hat{p}(p) \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_k\, ds = \int_K f \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx, \tag{4.19}$$

$$- \int_K \boldsymbol{u} \cdot \nabla q\, dx + \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_p(\boldsymbol{u}, p) \cdot \mathbf{n}_K q\, ds = 0, \tag{4.20}$$

für alle $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ *und alle* $K \in \mathcal{T}$ *erfüllt ist.*

Bemerkung 4.2.1. *Wie im elliptischen Fall gehen die Dirichlet-Randdaten durch die numerischen Füsse in die diskrete Formulierung ein.*

Zur Definition der numerischen Füsse werden folgende Sprungoperatoren für vektor- ,skalar- und matrixwertige Funktionen $\boldsymbol{u}, p, \underline{\sigma}$ benötigt. Die Sprünge auf der Kante e sind definiert durch:

$$\begin{aligned}
[\![\boldsymbol{u}]\!] &= \boldsymbol{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \boldsymbol{u}^- \cdot \mathbf{n}^- \\
\underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} &= \boldsymbol{u}^+ \otimes \mathbf{n}^+ + \boldsymbol{u}^- \otimes \mathbf{n}^- \\
[\![p]\!] &= p^+ \mathbf{n}^+ + p^- \mathbf{n}^- \\
[\![\underline{\sigma}]\!] &= \underline{\sigma}^+ n^+ + \underline{\sigma}^- n^-
\end{aligned}$$

Die numerische Füsse des LDG-Verfahrens in [19] sind eine direkte Erweiterung der numerischen Füsse die das LDG-Verfahren für elliptische Differentialgleichungen aus Kapitel 1 definieren.

Definition 4.2.2 (Numerische Flüsse). *Die numerische Flüesse auf einer Kante* e *sind gegeben durch:*

$$\hat{\sigma} := \begin{cases} \{\{\sigma\}\} - C_{11} \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} - [\![\sigma]\!] \otimes \mathbf{C}_{12}, & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}} \\ \sigma^+ - C_{11}(\boldsymbol{u}^+ - g_{\mathcal{D}}) \otimes \mathbf{n}^+, & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\sigma := \begin{cases} \{\{\boldsymbol{u}\}\} + \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} \cdot \mathbf{C}_{12} & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}, \\ g_{\mathcal{D}} & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_p := \begin{cases} \{\{\boldsymbol{u}\}\} + D_{11} [\![p]\!] + \mathbf{D_{12}} [\![u]\!] & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}, \\ g_{\mathcal{D}} & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \end{cases}$$

$$\hat{p} := \begin{cases} \{\{p\}\} - \mathbf{D_{12}} \cdot [\![p]\!] & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}, \\ p^+ & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \end{cases}$$

Dabei sind C_{11} und D_{11} skalare, $\mathbf{C}_{12}, \mathbf{D}_{12}$ vektorwertige Funktionen auf den Kanten der Triangulierung.

Motivation der numerischen Flüsse

Analog zum elliptischen Fall soll die Wahl der numerische Flüsse motiviert werden. Sei $g = 0$ auf $\partial\Omega$. Zuerst multipliziert man (4.3) mit $\underline{\sigma}$ und erhält

$$\int_\Omega |\underline{\sigma}|^2 \, dx = \int_\Omega \underline{\sigma} : \nabla \boldsymbol{u} \, dx. \tag{4.21}$$

Durch multiplizieren von (4.4) mit $\boldsymbol{u}$ we erhält man

$$-\int_\Omega \nabla \cdot \underline{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} + \nabla p \cdot \boldsymbol{u} \, dx = \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{u} \, dx. \tag{4.22}$$

Nach partieller Integration hat man

$$\int_\Omega \underline{\sigma} : \nabla \boldsymbol{u} \, dx - \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) p \, dx = \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{u} \, dx. \tag{4.23}$$

Addiert man (4.21) und (4.23) ergibt sich

$$\int_\Omega |\underline{\sigma}|^2 \, dx - \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) p \, dx = \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{u} \, dx, \tag{4.24}$$

und mit der Divergenzfreiheit von u hat man

$$\int_\Omega |\underline{\sigma}|^2 \, dx = \int_\Omega f \boldsymbol{u} \, dx. \tag{4.25}$$

Dieses Vorgehen soll nun analog für die diskreten Gleichungen durchgeführt werden. Dazu setzt man in (4.17) $\underline{\tau} = \underline{\sigma}_N$ und erhält

$$\int_\Omega |\underline{\sigma}_N|^2 \, dx = -\int_K \boldsymbol{u}_N \cdot (\nabla \cdot \underline{\sigma}_N) \, dx + \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{u}_N) \cdot \underline{\sigma}_N \cdot \mathbf{n}_k \, ds = 0. \tag{4.26}$$

In (4.17) und (4.19) setzt man jeweil $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}_N$ und $q = p_N$. Dies ergibt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \underline{\sigma}_N : \nabla \boldsymbol{u} \, dx - \int_{\partial K} \hat{\underline{\sigma}} : (\boldsymbol{u}_N \otimes \mathbf{n}_K) \, dx - \int_K p \nabla \cdot \boldsymbol{u}_N \, dx + \int_{\partial K} \hat{p} \boldsymbol{u}_N \cdot \mathbf{n}_k \, ds = \int_K f \cdot \boldsymbol{u}_N \, dx, \tag{4.27}$$

sowie

$$-\int_K \boldsymbol{u} \cdot \nabla p_N \, dx + \int_{\partial K} \hat{\mathbf{u}}_p \cdot \mathbf{n}_K p_N \, ds = 0. \tag{4.28}$$

addiert man nun die Gleichungen (4.26),(4.27),(4.28), so erhält man

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\underline{\sigma}_N|^2 &+ \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \nabla\cdot(\boldsymbol{u}_N\underline{\sigma}_N) - \nabla\cdot(\boldsymbol{u}_N p_N)\,dx \\ &+ \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_{\partial K} -\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\sigma}_N\cdot\mathbf{n}_k - \hat{\underline{\sigma}} : (\boldsymbol{u}_N\otimes\mathbf{n}_K) + \hat{p}\boldsymbol{u}_N\cdot\mathbf{n}_K + \hat{\boldsymbol{u}}_p\cdot\mathbf{n}_K p_N\,ds \\ &= \int_K f\cdot\boldsymbol{u}_N\,dx.\end{aligned}$$

Dies kann man schreiben als

$$\int_\Omega |\underline{\sigma}|^2 + \boldsymbol{\Theta}_N = \int_K f\cdot\boldsymbol{u}_N,$$

wobei

$$\boldsymbol{\Theta}_N = \boldsymbol{\Theta}_N^1 + \boldsymbol{\Theta}_N^2,$$

mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}_N^1 &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_K \nabla\cdot(\boldsymbol{u}_N\underline{\sigma}_N - p_N\boldsymbol{u}_N)\,dx \\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}}\int_e [\![\boldsymbol{u}_N\underline{\sigma}_N - p_N\boldsymbol{u}_N]\!]\,ds.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}_N^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\int_{\partial K}(-\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\sigma}\cdot\mathbf{n}_k - \hat{\underline{\sigma}} : (\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{n}_K) + \hat{p}\boldsymbol{u}_N\cdot\mathbf{n}_K + \hat{\boldsymbol{u}}_p\cdot\mathbf{n}_K p) \\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}}\int_e [\![-\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\sigma} - \hat{\underline{\sigma}}\boldsymbol{u} + \hat{p}\boldsymbol{u}_N + \hat{\boldsymbol{u}}_p p_N]\!]\,ds.\end{aligned}$$

Addiert man diese Terme und fordert, dass die Füsse einwertig sind erhält man mit Anwendung von Lemma 3.2.1 den folgenden Ausdruck fur $\boldsymbol{\Theta}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta} &= \sum_{e\in\mathcal{E}_\mathcal{I}}((\{\!\{\boldsymbol{u}\}\!\} - \hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}})[\![\underline{\sigma}_N]\!] + (\{\!\{\underline{\sigma}_N\}\!\} - \hat{\underline{\sigma}})[\![\boldsymbol{u}]\!] \\ &- (\{\!\{p_N\}\!\} - \hat{p})[\![\boldsymbol{u}]\!] - (\{\!\{\boldsymbol{u}\}\!\} - \hat{\boldsymbol{u}}_p)[\![p_N]\!])\;ds \\ &+ \int_{\partial\Omega}(-\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\sigma}_N\cdot\mathbf{n}_k - \hat{\underline{\sigma}} : (\boldsymbol{u}_N\otimes\mathbf{n}_K) + \hat{p}\boldsymbol{u}_N\cdot\mathbf{n}_K + \hat{\boldsymbol{u}}_p\cdot\mathbf{n}_K p)\;ds\end{aligned}$$

Wählt man die numerischen Füsse nun wie in (4.2.2) mit $g_{\mathcal{D}} = 0$ erhält man $\mathbf{\Theta} \geq 0$

$$\hat{\sigma} \quad := \quad \begin{cases} \{\{\sigma\}\} - C_{11}\underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} - [\![\sigma]\!] \otimes \mathbf{C_{12}}, & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}} \\ \sigma^{+} - C_{11}\boldsymbol{u}^{+} \otimes n^{+}, & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\sigma} \quad := \quad \begin{cases} \{\{\boldsymbol{u}\}\} + \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} \cdot \mathbf{C_{12}} & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}} \\ 0 & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{p} \quad := \quad \begin{cases} \{\{\boldsymbol{u}\}\} + D_{11}[\![p]\!] + \mathbf{D_{12}}[\![u]\!] & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}} \\ 0 & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

$$\hat{p} \quad := \quad \begin{cases} \{\{p\}\} - \mathbf{D_{12}} \cdot [\![p]\!] & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}} \\ p^{+} & e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

Die gemischte Formulierung

Die Formulierung in (4.17)-(4.20) soll nun in eine Form gebracht werden, in der sich Existenz und Eindeutigkeit beweisen lassen und die als Grundlage der a priori Analysis dienen soll.

Man geht analog wie im Fall des elliptischen Problems vor. Nach Einsetzen der Flüsse, Summation über alle Elemente $K \in \mathcal{T}$ und partieller Integration lässt sich das LDG-Verfahren wie folgt schreiben:
Finde $(\underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$, so dass

$$\begin{array}{rrrl} a(\underline{\sigma}_N, \underline{\tau}) & +b(\boldsymbol{u}_N, \underline{\tau}) & & = f(\underline{\tau}), \\ -b(\boldsymbol{\varphi}, \underline{\sigma}_N) & +c(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\varphi}) & +d(\boldsymbol{\varphi}, p_N) & = g(\boldsymbol{\varphi}), \\ & -d(\boldsymbol{u}_N, q) & +e(p_N, q) & = h(q), \end{array} \tag{4.29}$$

für alle $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$

Dabei sind die Bilinearformen a, b, c, d, e gegeben durch

$$\begin{aligned} a(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) &:= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\tau}\, dx, \\ b(\boldsymbol{u}, \underline{\tau}) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau})\, dx - \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} (\{\{\boldsymbol{u}\}\} + \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} \cdot \mathbf{D}_{12}) \cdot [\![\underline{\tau}]\!]\, ds, \\ c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) &:= \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} C_{11}\underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]} : \underline{[\![\boldsymbol{\varphi}]\!]}\, ds + \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} C_{11}(\boldsymbol{u} \otimes \mathbf{n}) : (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{n})\, ds, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{\varphi}, p) &:= -\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K p\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\{p\}\} - \mathbf{C}_{12}\cdot[\![p]\!])[\![\boldsymbol{\varphi}]\!]\,ds \\
&\quad + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} p\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\,ds, \\
e(p,q) &:= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} D_{11}[\![p]\!]\cdot[\![q]\!]\,ds.
\end{aligned}
$$

Die Linearformen f, g, h sind definiert als

$$
\begin{aligned}
f(\underline{\tau}) &:= \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} g_\mathcal{D}\cdot\underline{\tau}\cdot\mathbf{n}\,ds, \\
g(\boldsymbol{\varphi}) &:= \int_\Omega f\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} C_{11}(g_\mathcal{D}\otimes\mathbf{n}) : (\boldsymbol{\varphi}\otimes\mathbf{n})\,ds, \\
h(q) &:= -\int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} g_\mathcal{D}\cdot\mathbf{n}q\,ds.
\end{aligned}
$$

Durch partielle Integration auf jedem Element und Umordnung der Terme lassen sich die Bilinearformen b und d auch schreiben als

$$
\begin{aligned}
b(\boldsymbol{u}, \underline{\tau}) &= -\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \nabla\boldsymbol{u} : \underline{\tau}\,dx + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{\underline{\tau}\}\!\} - [\![\underline{\tau}]\!]\otimes\mathbf{C}_{12}) : \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]}\,ds + \int_{\mathcal{E}_\mathcal{D}} \underline{\tau} : (\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{n})\,ds, \\
d(\boldsymbol{\varphi}, p) &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla p\,dx - \int_{\mathcal{E}_\mathcal{I}} (\{\!\{\boldsymbol{\varphi}\}\!\} + \mathbf{D}_{12}[\![\boldsymbol{\varphi}]\!])\cdot[\![p]\!]\,ds.
\end{aligned}
$$

Für die weitere Untersuchung des Verfahrens schreibt man das gemischte System (4.29) in der Form:
Finde $(\underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$

$$
\mathcal{A}(\underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N; \underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) = \mathcal{F}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \tag{4.30}
$$

für alle $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$. Mit

$$
\mathcal{A}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) := a(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) + b(\boldsymbol{u}, \underline{\sigma}) - b(\boldsymbol{\varphi}, \underline{\tau}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) + d(\boldsymbol{\varphi}, p) - d(\boldsymbol{u}, q) + e(p,q) \tag{4.31}
$$

$$
\mathcal{F}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) := f(\underline{\tau}) + g(\boldsymbol{\varphi}) + h(q). \tag{4.32}
$$

Exitenz und Eindeutigkeit

Die folgenden Eigenschaften der lokalen Räume garantieren wie im elliptischen Fall die Existenz und Eindeutigkeit einer LDG-Lösung.Es gilt:

$$
u \in \mathcal{V}^d(K) : \int_K \nabla u : \mathbf{v}\,dx = 0 \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{S}^{d\times d}(K) \Rightarrow \quad \nabla u \equiv 0 \text{ auf } \quad K, \tag{4.33}
$$

$$
q \in \mathcal{Q}(K) : \int_K \mathbf{v}\cdot\nabla q\,dx = 0 \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{V}^d(K) \Rightarrow \quad \nabla q \equiv 0 \text{ auf } \quad K. \tag{4.34}
$$

Satz 4.2.1. *Betrachte das LDG-Verfahren definiert durch (4.17)-(4.20) und den numerischen Flüssen aus Definition 4.2.2. Seien C_{11}, C_{22} positiv und die Eigenschaften (4.33), (4.34) seien erfüllt. Dann definiert das LDG-Verfahren eine eindeutige Lösung $(\underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$.*

Beweis: Da es sich bei (4.29) um ein endlich dimensionales lineares Gleichungssystem handelt reicht es aus zu zeigen, dass $(\underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N) = (0,0,0)$ die einzige Lösung von (4.29) mit $f = 0$ und $g_{\mathcal{D}} = 0$ ist. Dazu wählt man $\underline{\tau} = \underline{\sigma}_N, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}_N$ und $q = p + N$ und addiert die drei Gleichungen in (4.29) und erhält damit:

$$a(\underline{\sigma}_N, \underline{\sigma}_N) + c(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N) + e(p_N, p_N) = 0$$

Aus den Definitionen der Bilinearformen und da C_{11}, C_{22} größer vorausgesetz wird folgt , dass $\underline{\sigma} = 0, \underline{[\![\boldsymbol{u}_N]\!]} = 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$, $\boldsymbol{u}_N = 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ und $jmpp_N = 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$. Damit lautet die erste Gleichung in (4.29)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla \boldsymbol{u}_N : \underline{\tau} \, dx = 0 \quad \forall \underline{\tau} \in \underline{\Sigma}_N.$$

Dies impliziert auf Grund der Annahme (4.33) an die diskreten Räume, dass $\nabla \boldsymbol{u}_N = 0$ auf jedem Element $K \in \mathcal{T}$. Also ist $\boldsymbol{u}_N$ stückweise konstant und da die Sprünge $\underline{[\![\boldsymbol{u}_N]\!]} = 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$ und $\boldsymbol{u}_N = 0$ auf den Randkanten $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ muss $\boldsymbol{u}_N = 0$ gelten.
Mit $\underline{\sigma}_N = 0$ und $\boldsymbol{u}_N = 0$ lautet die zweite Gleichung in (4.29)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla p_N \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_N.$$

Analog zu oben impliziert dies mit (4.34), dass $\nabla p_N = 0$ auf jedem Element $K \in \mathcal{T}$ ist. Mit $[\![p_N]\!] = 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$ ist p_N eine Konstante. Da auf Grund der Definition des Raumes Q_N gilt, dass $\int_\Omega p_N = 0$ ist, muss $p_N = 0$ gelten. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

4.3. A priori Abschätzungen

Die a priori Abschätzungen für das LDG-Verfahren im Fall des Stokes System verwenden im wesentlichen die gleichen Ideen und Techniken wie im elliptischen Fall. Im wesentlich sollen im nächsten Abschnitt die Ergebnisse diskutiert werden.Wo weiterführende Aussagen benötigt werden, werden die Beweise angegeben.

4.3.1. Vorraussetzungen

Die Vorraussetzungen an die Triangulierung $\mathcal{T}$, die diskreten Räume sowie die Regularitätsforderungen an die exakte Lösung entsprechen weitestgehend denen im elliptischen Fall, sollen hier aber noch einmal angegeben werden.

An die Triangulierung definiert wie in Definition 2.0.1 werden zusätzlich folgende Forderungen gestellt. Seien ρ_K und $\langle K, K' \rangle$ definiert wie in Definition 3.4.1

- Es gibt eine positive Konstante σ, so dass

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T} \tag{4.35}$$

  Es existiert eine positive Konstante $\delta < 1$,so dass für jedes Element$K \in \mathcal{T}$ gilt:

-

$$\delta \leq \frac{h_{K'}}{h_K} \leq \delta^{-1} \quad \forall K' \in \langle K, K' \rangle \neq \emptyset \tag{4.36}$$

Für die lokalen Räume $\mathcal{S}(K), \mathcal{V}(K), \mathcal{Q}(K)$ sollen folgende Inklusionen gelten:

-

$$\partial_i \mathcal{V}(K) \subseteq \mathcal{S}(K), \qquad \partial_i \mathcal{S}(K) \supset \mathcal{V}^k(K), \tag{4.37}$$

$$\partial_i \mathcal{V}(K) \subseteq \mathcal{Q}(K), \qquad \partial_i \mathcal{Q}(K) \supset \mathcal{V}^k(K) \tag{4.38}$$

  Diese Forderung garantiert, dass die diskreten Räume die Eigenschaften (4.33) bzw. (4.34) erfüllen.

-

$$\mathbb{P}^k \subseteq \mathcal{V}(K), \quad \mathbb{P}^l \subseteq \mathcal{S}(K), \quad \mathbb{P}^m \subseteq \mathcal{Q}(K) \tag{4.39}$$

Die Stabilitäts Koeffizienten C_{11} und D_{11} aus den numerischen Flüssen haben folgende Gestalt.

$$C_{11}(x) := \begin{cases} c_{11} \max\{h_{K^+}^{-1}, h_{K^-}^{-1}\} & \text{falls } x \in \langle K^+, K^- \rangle, \\ c_{11} h_{K^+}^{-1} & \text{falls } x \in \partial K^+ \cap \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.40}$$

$$C_{22}(x) := \left\{ \tau \max\{h_{K^+}, h_{K^-}\} \quad \text{falls } x \in \langle K^+, K^- \rangle, \right. \tag{4.41}$$

4.3.2. Die Hauptresultate

Die Abschätzungen werden analog zum elliptischen Fall in der folgenden Semi-Norm formuliert.

$$|(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p)|_{\mathcal{A}}^2 := \mathcal{A}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \sigma, \boldsymbol{u}, p) = ||\sigma||_0^2 + \Theta(\boldsymbol{u}, p)^2, \tag{4.42}$$

wobei:

$$\Theta(\boldsymbol{u}, p)^2 = \int_{\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} \left(C_{11} \underline{[\![\boldsymbol{u}]\!]}^2 + D_{11} [\![p]\!]^2 \right) ds. \tag{4.43}$$

Satz 4.3.1. *Sei $(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p)$ die exakte Lösung von (4.3)-(4.5) und $(\underline{\sigma}_N, u_N, p_N)$ die diskrete Lösung des LDG-Verfahrens (4.17)-(4.20) mit den numerische Flüssen aus (4.2.2). Seien die obigen Annahmen an die Triangulierung, die diskreten Räume und die Stabilisierungsparamter erfüllt. Für $\underline{\sigma} \in [H^{l+1}(\Omega)]^{d\times d}, u \in [H^{k+1}(\Omega)]^d, p \in H^{m+1}(\Omega)$ gilt für die Fehler $\underline{e}_\sigma := \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_N$, $\mathbf{e}_u := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N$, und $ep := p - p_N$ die folgende Abschätzung:*

$$|(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p)|_{\mathcal{A}} + ||e_p||_0 \leq C\left[h^{l+1}||\underline{\sigma}||_{l+1} + h^k||u||_{k+1} + h^{m+1}||p||_0\right], \tag{4.44}$$

mit einer positiven Konstanten C , die nur von $\Omega, \sigma, \delta, c_{11}, d_{11}$, der Dimension der lokalen Räume und d abhängt, nicht aber von der Gitterweite h.

L^2-Abschätzung der Geschwindigkeit

Um eine a-priori Abschätzung der L^2-Norm von u zu erhalten, benötigen wir folgende Regularitätsanforderung. Wir nehmen an das falls $(\mathbf{z}, q)$ Lösung des homogenen Stokes-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{z} + \nabla q &= \lambda \quad in \quad \Omega, &(4.45)\\ \nabla\cdot\mathbf{z} &= 0 \quad in \quad \Omega, &(4.46)\\ \mathbf{z} &= 0 \quad auf \quad \Gamma_{\mathcal{D}}, &(4.47)\end{aligned}$$

mit rechter Seite $\lambda \in L^2(\Omega)^d$ ist, so gilt folgende Abätzung

$$||\mathbf{z}||_2 + ||q||_1 \leq C||\lambda||_0 \tag{4.48}$$

Satz 4.3.2. *Unter den Vorraussetzunge von Satz (4.3.1) und der elliptischen Regularität (4.48) gilt für die L^2-Norm der Geschwindigkeit folgende Abschätzung:*

$$||\mathbf{e}_u||_0 \leq C\left[h^{l+2}||\underline{\sigma}||_{l+2} + h^{k+1}||u||_{k+1} + h^{m+2}||p||_0\right] \tag{4.49}$$

Mit einer positiven Konstanten C , die nur von $\Omega, \sigma, \delta, c_{11}, d_{11}$, der Dimension der lokalen Räume und d abhängt, nicht aber von der Gitterweite h.

4.3.3. Die Beweisidee

Um die angebenen Resultate zu beweisen, geht man analog wie im Fall der elliptischen Gleichung vor. Der Fehler $(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p) = (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_N, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, p - p_n)$ wird in folgende Summe aufgeteilt

$$(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p) = (\underline{\sigma} - \underline{\Pi}\underline{\sigma}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{u}, p - \Pi p) + (\underline{\Pi}\underline{e}_\sigma, \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_u, \Pi e_p) \tag{4.50}$$

Dabei seien $\underline{\Pi} : \underline{\Sigma} \to \Sigma_h$,$\boldsymbol{\Pi} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}_h$ und $\Pi : Q \to Q_h$ Projektionsoperatoren auf die diskreten Räume.

Die zu Grunde liegenden Aussagen sind hier ebenfalls die Galerkin Orthogonalität:

$$\mathcal{A}(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p, \underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) = 0 \quad \forall(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h \tag{4.51}$$

Dies lässt sich analog zur Galerkin Orhogonalität in Kapitel 1 zeigen.

Desweiteren werden Abschätzungen benötigt, welche die Approximationseigenschaften der Projektionsoperatoren wiederspiegeln. Diese werden ebenfalls mittels zweier Funktionale $\mathcal{K}_\mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ formuliert.

$$|\mathcal{A}(\underline{\sigma} - \mathbf{\Pi}\underline{\sigma}, \boldsymbol{u} - \Pi\boldsymbol{u}, \underline{\sigma}, p - \Pi p; \underline{\tau} - \mathbf{\Pi}\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi} - \Pi\boldsymbol{\varphi}, \underline{\sigma}, q - \Pi q)| \leq K_\mathcal{A}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \tag{4.52}$$

für beliebige $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q), (\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \in \underline{\Sigma} \times \boldsymbol{V} \times Q$,

sowie

$$|\mathcal{A}(\underline{\sigma} - \mathbf{\Pi}\underline{\sigma}, \pm(u - \Pi u), p - \Pi p; \underline{\tau}, \pm\boldsymbol{\varphi}, q)| \leq |(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q)|_\mathcal{A} K_\mathcal{B}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \tag{4.53}$$

für beliebige $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ und $(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p)\underline{\Sigma} \times \boldsymbol{V} \times Q$. Sämtliche Fehlerabschätzungen, die im Folgenden betrachtet werden, können nun mit $\mathcal{K}_\mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_\mathcal{B}$ ausgedrückt werden.

Abschätzung der $\mathcal{A}$-Seminorm

Analog zu Lemma 3.4.1 zeigt man die Abschätzung:

Lemma 4.3.1. *Es gilt*

$$|(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p)|_\mathcal{A} \leq C\mathcal{K}_\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) + C\mathcal{K}_\mathcal{B}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \tag{4.54}$$

Beweis: Da $|(\cdot,\cdot,\cdot)|_\mathcal{A}$ eine Seminorm ist, hat man

$$|(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p)|_\mathcal{A} \leq |(\underline{\sigma} - \underline{\Pi\sigma}, \boldsymbol{u} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{u}, p - \Pi p)|_\mathcal{A} + |(\underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p)|_\mathcal{A}$$

Aus der Definition von $\mathcal{A}$, der Galerkin Orthogonalität (4.51) und der Abschätzung (4.53) folgt,

$$\begin{aligned} |(\underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p)|_\mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}(\underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p; \underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p) && (4.55)\\ &= \mathcal{A}(\underline{\Pi\sigma} - \underline{\sigma}, \mathbf{\Pi}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \Pi p - p; \underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p) && (4.56)\\ &\leq C|(\underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p)|_\mathcal{A}\mathcal{K}_\mathcal{B}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p). && (4.57) \end{aligned}$$

Also hat man

$$|(\underline{\Pi e}_\sigma, \mathbf{\Pi e}_u, \Pi e_p)|_\mathcal{A} \leq C\mathcal{K}_\mathcal{B}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p), \tag{4.58}$$

und damit

$$|(\underline{e}_\sigma, \mathbf{e}_u, e_p)|_\mathcal{A} \leq |\underline{\sigma} - \underline{\Pi\sigma}, \boldsymbol{u} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{u}, p - \Pi p)|_\mathcal{A} + C\mathcal{K}_\mathcal{B}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p).$$

Die behauptete Abschätzung folgt nun durch Anwendung von Ungleichung (4.52). □

Abschätzung des Drucks

Die nächste Aussage liefert ein Stabilitätsresultat, das eine Abschätzung des Drucks p in der L^2-Norm ermöglicht.

Proposition 4.3.1. *Es existieren positive,von der Gitterweite unabhängige Konstanten κ_1 und κ_2, so dass für alle $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ ein $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_N$ gibt mit:*

$$\mathcal{A}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q; 0, \mathbf{w}, 0) \geq \kappa_1 ||q||_0^2 - \kappa_2 |(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q)|_{\mathcal{A}}^2, \quad |(0, \mathbf{w}, 0)|_{\mathcal{A}} = \Theta(\mathbf{w}, 0) \leq ||q||_0 \tag{4.59}$$

Aus dieser $inf - sup$ Bedingung erhält man für den Fehler e_p folgende Abätzung:

Lemma 4.3.2. *Es gilt*

$$||e_p||_0 \leq ||p - \Pi p||_0 + CK_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p), \tag{4.60}$$

mit einer von der Gitterweite unabhängigen Konstanten C.

Beweis: Da $||p - p_N||_0 \leq ||p - \Pi p||_0 + ||\Pi e_p||_0$ reicht es aus eine Abschätzung für $||\Pi e_p||_0$ zu finden. Aus Proposition 4.3.1 folgt, dass ein $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_N$ exitiert, so dass (4.59) für $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) = (\underline{\Pi e}_\sigma, \boldsymbol{\Pi u}, \Pi e_p)$ gilt. Mit (4.59), der Galerkin Orthogonalität aus (4.51), der Ungleichung (4.58), der Cauchy-Schwarz Ungleichung und den Eigenschaften von $\mathbf{w}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\kappa_1 ||\Pi e_p||_0^2 &\leq \mathcal{A}(\underline{\Pi e}_\sigma, \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_u, \Pi e_p; 0, \mathbf{w}, 0) + \kappa_2 |\underline{\Pi e}_\sigma, \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_u, \Pi e_p|_{\mathcal{A}}^2 \\
&= \mathcal{A}(\underline{\Pi \sigma} - \underline{\sigma}, \boldsymbol{\Pi u} - \boldsymbol{u}, \Pi p - p; 0, \mathbf{w}, 0) + \kappa_2 |\underline{\Pi e}_\sigma, \boldsymbol{\Pi}\mathbf{e}_u, \Pi e_p|_{\mathcal{A}}^2 \\
&\leq C_1 |(0, \mathbf{w}, 0)|_{\mathcal{A}} \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) + C_2 \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p)^2 \\
&\leq \frac{C_1}{2\epsilon} ||\Pi e_p||_0^2 + (C_1 \frac{\epsilon}{2} + C_2) \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p),
\end{aligned}$$

für alle $\epsilon \geq 0$. Nun kann ϵ so gewählt werden, dass

$$||\Pi p||_0 \leq C \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p). \tag{4.61}$$

Mit einer Konstanten C die von C_1 und C_2 abhängt. Damit folgt die Behauptung. □

Fehler in der Geschwindigkeit

Lemma 4.3.3. *Unter der Annahme, dass die Abschätzungen (4.52) und (4.53) sowie die elliptische Regularität aus(4.48) erfüllt seien gilt für den L^2-Fehler in $\boldsymbol{u}$*

$$||\mathbf{e}_u||_0 \leq C \sup_{\lambda \in L^2(\Omega)^d} \frac{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\zeta}, \mathbf{z}, \tilde{q})}{||\boldsymbol{\lambda}||_0} + C\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \sup_{\lambda \in L^2(\Omega)^d} \frac{\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\zeta}, \mathbf{z}, q)}{||\boldsymbol{\lambda}||_0}, \tag{4.62}$$

wobei $(\mathbf{z}, q)$ die Lösung von (4.45)-(4.47) mit rechter Seite $\boldsymbol{\lambda}$ und $\underline{\zeta} = -\nabla \mathbf{z}, \tilde{q} = -q$ ist.

Beweis. Analog zu Lemma 3.4.2 □

4.3.4. Beweise

Seien $\underline{\Pi} : \underline{\Sigma} \to \underline{\Sigma}_N$, $\mathbf{\Pi} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}_N$, und $\Pi : Q \to Q_N$ Projektionsoperatoren auf die jeweiligen diskreten Räume , die komponentenweise die Vorraussetzungen von Lemmma 3.4.4 erfüllen. Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\underline{\xi}_\sigma = \underline{\sigma} - \underline{\Pi\sigma} \quad \boldsymbol{\xi}_u = \boldsymbol{u} - \mathbf{\Pi u}, \quad \xi_p = p - \Pi p$$

für $(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \in \underline{\Sigma} \times \boldsymbol{V} \times Q$ verwendet. Desweiteren werden die Größen

$$\underline{C}_{11}^{\partial K} := \inf\{C_{11}(x) : x \in \partial K\}, \qquad \overline{C}_{11}^{\partial K} := \sup\{C_{11}(x) : x \in \partial K\}, \tag{4.63}$$

$$\underline{D}_{11}^{\partial K} := \inf\{D_{11}(x) : x \in \partial K\}, \qquad \overline{D}_{11}^{\partial K} := \sup\{D_{11}(x) : x \in \partial K\}, \tag{4.64}$$

definiert.

Das Funktional $\mathcal{K}_\mathcal{A}$

Unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und den Interpolationsabschätzungen aus (3.4.4), koennen wie im elliptsichen Fall folgende Approximationseigenschaften der Bilinearformen des LDG-Verfahrens aus (4.17)-(4.20) gezeigt werden.

Lemma 4.3.4. *Seien (4.35),(4.36) und (4.39) erfüllt und $\underline{\Pi}, \mathbf{\Pi}, \Pi$ Projektionsoperatoren, die komponentenweise (mit den Approximationsordnungen k,l bzw m) die Voraussetzungen in Lemma 3.4.4 erfüllen. Seien $\underline{\sigma} \in [H^{r+1}(\Omega)]^{d\times d}, \underline{\tau} \in [H^{\overline{r}+1}(\Omega)]^{d\times d}, \boldsymbol{u} \in [H^{s+1}(\Omega)]^d, \boldsymbol{\varphi} \in [H^{\overline{s}+1}(\Omega)]^d, p \in H^{t+1}(\Omega)$ und $q \in H^{\overline{t}+1}(\Omega)$ mit $r, \overline{r}, s, \overline{s}, t, \overline{t} \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|a(\underline{\xi}_\sigma, \underline{\xi}_\tau)| &\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{r,l\}+2} ||\underline{\sigma}||^2_{r+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{\overline{r},l\}+2} ||\underline{\tau}||^2_{\overline{r}+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|b(\boldsymbol{\xi}_u, \underline{\xi}_\tau)| &\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{\overline{r},l\}+2} ||\underline{\tau}||^2_{\overline{r}+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|c(\boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_\varphi)| &\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{C}_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{s,k\}+1} ||\boldsymbol{u}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{C}_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{\overline{s},k\}+1} ||\boldsymbol{\varphi}||^2_{\overline{s}+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|d(\boldsymbol{\xi}_u, \xi_q)| &\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h_K^{2\min\{\overline{t},m\}+2} ||q||^2_{\overline{t}+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|e(\xi_p, \xi_q)| &\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{D}_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{t,m\}+1} ||p||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{D}_{11}^{\partial K} h_K^{2\min\{\overline{t},m\}+1} ||q||^2_{\overline{t}+1,K}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

mit Konstanten C unabhängig von der Gitterweite.

Beweis. Analog zu Lemma 3.4.6 □

Folgerung 4.3.1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3.4 den Annahmen aus Lemma 3.4.4 und Koeffizienten C_{11}, C_{22} wie in (4.40) bzw. (4.41) gelten folgen Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
|a(\underline{\xi}_\sigma, \underline{\xi}_\tau)| &\leq Ch^{\min\{r,l\}+\min\{\bar{r},l\}+2}||\underline{\sigma}||_{r+1}||\underline{\tau}||_{\bar{r}+1}, \\
|b(\boldsymbol{\xi}_u, \underline{\xi}_\tau)| &\leq Ch^{\min\{s,k\}+\min\{\bar{r},l\}+1}||\boldsymbol{u}||_{s+1}||\underline{\tau}||_{\bar{r}+1}, \\
|c(\boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_\varphi)| &\leq c_{11}Ch^{\min\{s,k\}+\min\{\bar{s},k\}}||\boldsymbol{u}||_{s+1}||\boldsymbol{\varphi}||_{\bar{s}+1}, \\
|d(\boldsymbol{\xi}_u, \xi_q)| &\leq Ch^{\min\{s,k\}+\min\{\bar{t},m\}+1}||\boldsymbol{u}||_{s+1}||q||_{\bar{t}+1}, \\
|d(\xi_p, \xi_q)| &\leq d_{11}Ch^{\min\{t,m\}+\min\{\bar{t},m\}+2}||p||_{t+1}||q||_{\bar{t}+1},
\end{aligned}$$

mit Konstanten unabhängig vom der Gitterweite.

Folgerung 4.3.2. *Seien die Voraussetzungen (4.35),(4.36) an die Triangulierung erfüllt und gelte (4.39) mit den Polynomgraden $l \geq 1, l, m \geq 0$ und die Koeffizienten C_{11}, D_{11} wie in (4.40) bzw. (4.41) gegeben. Dann gilt Lemma 4.3.1 für $\underline{\sigma} \in [H^{l+1}(\Omega)]^{d\times d}$, $\boldsymbol{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^d$, und $p \in H^{m+1}(\Omega)$ mit*

$$\mathcal{K}_\mathcal{A}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \leq C\left[h^{2l+2}||\underline{\sigma}||^2_{l+1} + h^{2k}||\boldsymbol{u}||^2_{k+1} + h^{2m+2}||p||^2_{m+1}\right]. \tag{4.65}$$

Sei weiter die Regularitätsforderung in (4.48) erfüllt und $(\mathbf{z}, q)$ die Lösung von (4.45)-(4.47) mit rechter Seite $\boldsymbol{\lambda} \in [L^2(\Omega)]^d, \underline{\zeta} = -\nabla\mathbf{z}, \tilde{q} = -q$. Dann hat man in Lemma 4.3.3

$$\mathcal{K}_\mathcal{A}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p; \underline{\zeta}, \mathbf{z}, q) \leq C\left[h^{2+l}||\underline{\sigma}||^2_{l+1} + h^{2k}||\boldsymbol{u}||^2_{1+k} + h^{2+m}||p||^2_{m+1}\right]||\boldsymbol{\lambda}||_0. \tag{4.66}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Folgerung 4.3.1 der Definition von $\mathcal{A}$ in (4.31) und der Regularitätsabschätzung $||\mathbf{z}||_2 + ||q||_1 \leq C||\lambda||_0$ aus (4.48). □

Das Funktional $\mathcal{K}_\mathcal{B}$

Folgerung 4.3.3. *Seien (4.35),(4.36) und (4.39) erfüllt und $\underline{\Pi}, \boldsymbol{\Pi}, \Pi$ Prokektionsoperatoren, die komponentenweise die Voraussetzungen in Lemma 3.4.4 erfüllen. Seien $\underline{\sigma} \in [H^{r+1}(\Omega)]^{d\times d}$, $\boldsymbol{u} \in [H^{s+1}(\Omega)]^d$, und $p \in H^{t+1}(\Omega)$ mit $r, s, t \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|a(\underline{\xi}_\sigma, \underline{\tau})| &\leq C\left(\textstyle\sum_{K\in\mathcal{T}} h^{2\min\{r,l\}+2}||\underline{\sigma}||^2_{r+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}||\underline{\tau}||_0 && \forall\underline{\tau} \in \underline{\Sigma}, \\
|c(\boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\varphi})| &\leq C\left(\textstyle\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{C}^{\partial K}_{11} h^{2\min\{s,k\}+1}||\boldsymbol{u}||^2_{r+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}\Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}, \\
|e(\xi_p, q)| &\leq C\left(\textstyle\sum_{K\in\mathcal{T}} \overline{D}^{\partial K}_{11} h^{2\min\{t,m\}+1}||p||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}}\Theta(0, q) && \forall q \in Q,
\end{aligned}$$

mit Konstanten C unabhängig von der Gitterweite.

Folgerung 4.3.4. *Seien (4.35),(4.36) und (4.37),(4.39) erfüllt und* $\underline{\Pi}, \mathbf{\Pi}, \Pi$ *die* L^2*-Projektionen auf die entsprechenden diskreten Räume. Seien* $\underline{\sigma} \in [H^{r+1}(\Omega)]^{d\times d}$, $\boldsymbol{u} \in [H^{s+1}(\Omega)]^d$, *und* $p \in H^{t+1}(\Omega)$ *mit* $r, s, t \geq 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{\xi}_u, \underline{\tau})| &\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} h^{2\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} ||\underline{\tau}||_0 && \forall \underline{\tau} \in \underline{\Sigma}_N,\\
|b(\boldsymbol{\varphi}, \underline{\xi}_\sigma)| &\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{1}{\underline{C}_{11}^{\partial K}} h^{2\min\{r,l\}+1} ||\underline{\sigma}||^2_{r+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall \varphi \in \mathbf{V}_N,\\
|d(\boldsymbol{\xi}_u, q)| &\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{1}{\underline{D}_{11}^{\partial K}} h^{2\min\{s,k\}+1} ||\boldsymbol{u}||^2_{s+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(0, q) && \forall q \in Q_N,\\
|d(\boldsymbol{\varphi}, \xi_p)| &\leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} \frac{1}{\underline{D}_{11}^{\partial K}} h^{2\min\{t,m\}+1} ||p||^2_{t+1,K}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_N,
\end{aligned}$$

mit Konstanten C unabhängig von der Gitterweite.

Folgerung 4.3.5. *Seien (4.35),(4.36) und (4.37),(4.39) erfüllt und* $\underline{\Pi}, \mathbf{\Pi}, \Pi$ *die* L^2*-Projektionen auf die entsprechenden diskreten Räume. Seien* $\underline{\sigma} \in [H^{r+1}(\Omega)]^{d\times d}$, $\boldsymbol{u} \in [H^{s+1}(\Omega)]^d$, *und* $p \in H^{t+1}(\Omega)$ *mit* $r, s, t \geq 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|a(\underline{\xi}_\sigma, \underline{\tau})| &\leq C h^{\min\{r,l\}+1} ||\underline{\sigma}||_{r+1} ||\underline{\tau}||_0 && \forall \underline{\tau} \in \underline{\Sigma},\\
|b(\boldsymbol{\xi}_u, \underline{\tau})| &\leq C h^{\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||_{s+1} ||\underline{\tau}||_0 && \forall \underline{\tau} \in \underline{\Sigma}_N,\\
|b(\boldsymbol{\varphi}, \underline{\xi}_\sigma)| &\leq c_{11}^{-\frac{1}{2}} C h^{\min\{r,l\}+1} ||\underline{\sigma}||_{r+1} \Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_N,\\
|c(\boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\varphi})| &\leq c_{11}^{\frac{1}{2}} C h^{\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||_{r+1} \Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V},\\
|d(\boldsymbol{\xi}_u, q)| &\leq d_{11}^{\frac{1}{2}} C h^{\min\{s,k\}} ||\boldsymbol{u}||_{s+1} \Theta(0, q) && \forall q \in Q_N,\\
|d(\boldsymbol{\varphi}, \xi_p) &\leq c_{11}^{-\frac{1}{2}} C h^{\min\{t,m\}+1} ||p||_{t+1} \Theta(\boldsymbol{\varphi}, 0) && \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_N,\\
|e(\xi_p, q)| &\leq d_{11}^{\frac{1}{2}} C h^{\min\{t,m\}+1} ||p||_{t+1} \Theta(0, q) && \forall q \in Q,
\end{aligned}$$

mit Konstanten C unabhängig von der Gitterweite.

Folgerung 4.3.6. *Unter den Voraussetzungen (4.35),(4.36) und (4.37),(4.39) mit den Polynomgraden* $l \geq 1, l, m \geq 0$, *den Koeffizienten* C_{11}, D_{11} *gegeben durch (4.40) bzw. (4.41) gilt für* $\underline{\sigma} \in [H^{l+1}(\Omega)]^{d\times d}$, $\boldsymbol{u} \in H^{k+1}(\Omega)^d$, *und* $p \in H^{m+1}(\Omega)$ *die Abschätzung (4.53) mit*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\sigma}, \boldsymbol{u}, p) \leq C \left[h^{l+1}||\underline{\sigma}||_{l+1} + h^k ||\boldsymbol{u}||_{k+1} + h^{m+1}||p||_{m+1}\right]. \tag{4.67}$$

Sei weiter die Regularitätsforderung in (4.48) erfüllt und $(\mathbf{z}, q)$ *die Lösung von (4.45)-(4.47) mit rechter Seite* $\boldsymbol{\lambda} \in [L^2(\Omega)]^d, \underline{\zeta} = -\nabla \mathbf{z}, \tilde{q} = -q$. *Dann hat man in Lemma ()*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\underline{\zeta}, \mathbf{z}, q) \leq C||\boldsymbol{\lambda}||_0. \tag{4.68}$$

Beweis von Proposition 4.3.1

Beweis. Sei $(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q) \in \underline{\Sigma}_h \times \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ fest gewählt. Dann folgt aus der kontinuierlichen inf-sup Bedingung für die Stokesgleichung (siehe [26]), dass ein Geschwindigkeitsfeld

$u \in [H_0^1(\Omega)]^d = \{u \in H^1(\Omega)^d : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ existiert mit:

$$-\int_\Omega q\nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dx \geq \kappa ||q||_0^2, \tag{4.69}$$

$$||u||_1 \leq ||q||_0 \tag{4.70}$$

mit einer Konstante $\kappa > 0$ die nur von Ω abängt. Sei nun $\mathbf{\Pi u}$ die L^2 Projektion von $\boldsymbol{u}$ auf den diskreten Raum $\mathbf{V}_N$.Dann gilt:

$$\mathcal{A}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q; 0, \Pi u, 0) = -b(\mathbf{\Pi u}, \underline{\tau}) + c(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{\Pi u}) + d(\mathbf{\Pi u}, q) =: T_1 + T_2 + T_3$$

Setze $\boldsymbol{\xi}_u := \boldsymbol{u} - \mathbf{\Pi u}$. Die Terme $T_1 - T_3$ lassen sich nun wie folgt abschätzen:

$$|T_1| \leq |b(\boldsymbol{\xi}_u, \underline{\tau})| + |b(\boldsymbol{u}, \underline{\tau})| \leq C||\boldsymbol{u}||_1||\underline{\tau}||_0 + \left|\int_\Omega \nabla u : \underline{\tau} dy\right| \leq C||u||_1||\underline{\tau}||_0$$

und mit (4.70) und der Youngschen Ungleichung mit $\epsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} T_1 &\geq -||\boldsymbol{u}||_1||\underline{\tau}||_0 \\ &\geq -||q||_0||\underline{\tau}||_0 \\ &\geq -\frac{C_1}{\epsilon_1}||q||_0^2 - C_1\epsilon_1||\underline{\tau}||_0^2 \end{aligned}$$

Für T_2 gilt analog:

$$T_2 = c(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{\Pi}\boldsymbol{u}) = c(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}_u) \leq c_{11}^{\frac{1}{2}} C||u||_1 \Theta(\boldsymbol{\varphi}, u)$$

und somit

$$T_2 \geq -\frac{C_2 c_{11}}{\epsilon_2}||q||_0^2 - C_2\epsilon_2\Theta(\boldsymbol{\varphi}, u)^2$$

Für en dritten Term schreibt man:

$$T_3 = d(\mathbf{\Pi}\boldsymbol{u}, q) = d(\boldsymbol{u}, q) + d(\boldsymbol{\xi}_u, q)$$

Da nach Folgerung4.3.5 und (4.69)

$$|d(\boldsymbol{\xi}_u, q)| \leq d_{11}^{-\frac{1}{2}} C||u||_1\Theta(0, q) \leq \frac{Cd_{11}^{-1}}{\epsilon_3}||q||_0^2 + C\epsilon_3\Theta^2(\boldsymbol{\varphi}, q)$$

und $d(u, q) = -\int_\Omega q\nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dx$ folgt

$$T_3 \geq \kappa||q||_0^2 - \frac{C_3 d_{11}^{-1}}{\epsilon_3}||q||_0^2 - C_3\epsilon_3\Theta^2(\boldsymbol{\varphi}, q)$$

Aus diesen Abschätzungen schliesst man, dass

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q; 0, \Pi u, 0) \\ \leq &\left(\kappa - \frac{C_1}{\epsilon_1} - \frac{C_2 c_{11}}{\epsilon_2} - \frac{C_3 d_{11}^{-1}}{\epsilon_3}\right) ||q||_0^2 - C_1\epsilon_1||\underline{\tau}||_0^2 - (C_2\epsilon_2 + C_3\epsilon_3)\Theta^2(\boldsymbol{\varphi}, q) \end{aligned}$$

Die Parameter $\{\epsilon_i\}_{i=1}^3$ lassen sich so wählen, dass

$$\mathcal{A}(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q; 0, \Pi u, 0) \geq K_1||q||_0^2 - K_2|(\underline{\tau}, \boldsymbol{\varphi}, q)|_{\mathcal{A}} \tag{4.71}$$

mit $K_{1,2}$ unabhängig von der Gitterweite. Aus Folgerung 4.3.1 ergibt sich weiter

$$|(0, \boldsymbol{\Pi u}, 0)|_{\mathcal{A}}^2 = c(\boldsymbol{\Pi u}, \boldsymbol{\Pi u}) = c(\boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_u) \leq c_{11}C||\boldsymbol{u}||_1^2 \leq K_3^2||q||_0^2$$

Somit erfüllt $\mathbf{w} = \boldsymbol{\Pi u}/K_3$ die Behauptung der Proposition mit $\kappa_1 = K_1/K_3$ und $\kappa_2 = K_2/K_3$

□

Beweise der Hauptresultate

Satz 4.3.1 und Satz 4.3.1 folgen nun in dem man für $\underline{\Pi}, \boldsymbol{\Pi}, \Pi$ jeweils die (komponentenweise) L^2 Projektion verwendet und die Abschätzungen für $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ aus den Folgerungen 4.3.2 und 4.3.6 auf die Ungleichungen in den Lemmata 4.3.1,4.3.2 und 4.3.3 anwedet und dabei die Form von C_{11}, C_{22} aus (4.40),(4.41) beachtet.

5. Implementierung der Verfahren

In diesem Kapitel werden einige Details zur Implementierung der LDG-Verfahren für elliptische Randwertprobleme und für das Stokessystem besprochen.

5.1. DUNE

Zur Implementierung wurde die Software **DUNE**[1] benutzt.**DUNE** stellt in erster Linie eine Bibliothek von Schnittstellendefinitionen dar, die es ermöglicht verschiedene Vorhandene Numeriksoftware z.B. Gittergeneratoren oder Löser für linerare Gleichungssysteme in einem einheitlichen Rahmen zu benutzen. Dies ermöglicht es in innerhalb einer Implementierung beispielsweise verschiedene Gittergeneratoren zu verwenden und zu vergleichen.
Zur Umsetzung der Verfahern wurde in großem Maße Gebrauch von dem in Freiburg entwickelten Modul **dune-fem** [2] gemacht. Dieses Teilmodul stellt Implementierungen verschiedener Konzepte, die zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen unterschiedlichen Typs zur Verfügung.

5.2. Das Gleichungssystem

Wie bei der Standard-FE-Methode entwickelt man die unbekannten $\underline{\sigma}_h \in \Sigma_h, u_h \in \mathbf{V}_h$ in einer Basis um ein diskretes lineares Gleichungssytem zu erhalten.

$$\Sigma_h = span\{\underline{\tau}_i, i = 0...M-1\}$$
$$\mathbf{V}_h = span\{\varphi_i, i = 0...L-1\}$$

Mit $dim(\Sigma_h) = M, dim(\mathbf{V}_H) = L$ lassen sich die Funktionen $\underline{\sigma}_N$ und u_N schreiben als:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_h &= \textstyle\sum_{i=0}^{M-1} \underline{\sigma}_i \underline{\tau}_i \\ u_h &= \textstyle\sum_{i=0}^{L-1} u_i \varphi_i \end{aligned}$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass der Parameter $C_{22} = 0$ ist und damit der Fluss $\hat{u}$ nicht mehr von $\underline{\sigma}$ abhängt. Da der numerische Fluss $\hat{\underline{\sigma}}$ von u_N **und** $\underline{\sigma}_N$

abhängt, bietet es sich für die Beschreibung der Systemmatrizen an, $\hat{\underline{\sigma}}$ in die jeweiligen Summanden für $\underline{\sigma}_n$ und u_N aufzuteilen

$$\hat{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_N, u_N) = \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_N) + \check{\underline{\sigma}}(u_N).$$

Um die System Matrizen zu erhalten, setzt man zuerst $\underline{\sigma}_N$ und u_N in die Flussformulierung aus (3.17) und (3.18) ein und wählt die Basisfunktionen $\underline{\tau}_i$ und φ_l als Testfunktionen:

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K (\sum_{j=0}^{M-1} \underline{\sigma}_j \underline{\tau}_j) \cdot \underline{\tau}_i dx + \int_K (\sum_{k=0}^{L-1} u_k \varphi_k) \nabla \cdot \underline{\tau}_i dx - \int_{\partial K} \hat{u}(\sum_{k=0}^{L-1} u_k \varphi_k) \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds &= 0,\\
\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K (\sum_{k=0}^{M-1} \underline{\sigma}_j \underline{\tau}_j) \cdot \nabla \varphi_l dx - \int_{\partial K} \varphi_l \tilde{\underline{\sigma}}(\sum_{j=0}^{M-1} \underline{\sigma}_j \underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds - \int_{\partial K} \varphi_l \check{\underline{\sigma}}(\sum_{k=0}^{L-1} u_l \varphi_l) \cdot \mathbf{n}_K ds &= \int_K f \varphi_l dx.
\end{aligned}$$

Mit der Lineratät der numerischen Füsse lässt sich dies schreiben als

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{M-1} (\sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \underline{\tau}_j \cdot \underline{\tau}_i dx) \underline{\sigma}_j + \sum_{k=0}^{L-1} (\sum_{K\in\mathcal{T}} (\int_K u_k \varphi_k \nabla \cdot \underline{\tau}_i dx - \int_{\partial K} \hat{u}(\varphi_k) \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds)) u_k &= 0,\\
\sum_{k=0}^{M-1} (\sum_{K\in\mathcal{T}} (\int_K \underline{\tau}_j \cdot \nabla \varphi_l dx - \int_{\partial K} \varphi_l \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds)) \underline{\sigma}_j - \sum_{k=0}^{L-1} (\sum_{K\in\mathcal{T}} (\int_{\partial K} \varphi_l \check{\underline{\sigma}}(\varphi_k) \cdot \mathbf{n}_K ds)) u_k &= \int_K f \varphi_l dx.
\end{aligned}$$

Da die numerischen Füsse zusätzlich die Randdaten des Problems enthalten sind die Ausdrücke $\int_e \hat{u}(\varphi_k)\underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds$, $\int_e \varphi_l \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds$ und $\int_e \varphi_l \check{\underline{\sigma}}(\varphi_k) \cdot \mathbf{n}_K ds$ für $e \subset \Gamma_\mathcal{N}/\Gamma_\mathcal{D}$ gesondert zu behandeln. Nach der Definition der Flüsse in(3.20) erhält man im Einzelnen.

$$\begin{aligned}
\hat{u} &:= \begin{cases} g_\mathcal{D}, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D},\\ u^+, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N}. \end{cases}\\
\tilde{\underline{\sigma}} &:= \begin{cases} \underline{\sigma}^+, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D},\\ g_\mathcal{N}, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N}. \end{cases}\\
\check{\underline{\sigma}} &:= \begin{cases} -C_{11}(u^+ - g_\mathcal{D}) n^+, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D},\\ 0, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Damit gilt für die Randintergrale:

$$\begin{aligned}
\int_e \hat{u}(\varphi_k)\underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds &= \begin{cases} \int_e g_\mathcal{D} \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D},\\ \int_e \varphi_k^+ \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N}. \end{cases}\\
\int_e \varphi_l \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds &= \begin{cases} \int_e \varphi_l \underline{\tau}_j^+ \cdot \mathbf{n}_K ds, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D}\\ \int_e \varphi_l g_\mathcal{N} \cdot \mathbf{n}_K ds, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N} \end{cases}\\
\int_e \varphi_l \check{\underline{\sigma}}(\varphi_k) \cdot \mathbf{n}_K ds &:= \begin{cases} -\int_e C_{11} \varphi_l \varphi_k^+ ds + \int_e C_{11} \varphi_l g_\mathcal{D}), & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{D}\\ 0, & \text{für } e \in \mathcal{E}_\mathcal{N} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Also lässt sich das LDG-Verfahren als lineares Gleichungssytem mit der Struktur

$$\begin{pmatrix} M & G \\ D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_N \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

schreiben. Dabei sind:

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \underline{\tau}_j \cdot \underline{\tau}_i dx, \\
G_{ik} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} (\int_K \varphi_k \nabla \cdot \underline{\tau}_i dx - \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \hat{u}(\varphi_k) \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds) - \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \varphi_k^+ \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds, \\
D_{lj} &= \sum_{K \in \mathcal{T}} (\int_K \underline{\tau}_j \cdot \nabla \varphi_l dx - \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \varphi_l \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds) - \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \varphi_l \underline{\tau}_j^+ \cdot \mathbf{n}_K ds, \\
C_{lk} &= -\sum_{K \in \mathcal{T}} (\int_{\partial K} \varphi_l \underline{\check{\sigma}}(\varphi_k) \cdot \mathbf{n}_K ds) + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} C_{11} \varphi_l \varphi_k^+ ds,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
F_i &= \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} g_{\mathcal{D}} \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds, \\
G_l &= \int_\Omega f \varphi_l dx + \int_{\Gamma_{\mathcal{D}}} C_{11} \varphi_l g_{\mathcal{D}} ds + \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \varphi_l g_{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{n}_K ds.
\end{aligned}$$

Die Matrizen lassen sich in den Bilinearformen aus (3.26) wie folgt ausdrücken:

$$M_{ij} = a(\underline{\tau}_i, \underline{\tau}_j), \tag{5.4}$$
$$G_{ik} = b(\varphi_k, \underline{\tau}_i), \tag{5.5}$$
$$D_{lj} = - b(\varphi_l, \underline{\tau}_j), \tag{5.6}$$
$$C_{lk} = c(\varphi_l, \varphi_k). \tag{5.7}$$

5.2.1. Kondensation der Matrizen

Ziel ist es aus dem Gleichungssystem (5.3) die Variable $\underline{\sigma}$ zu eliminieren und damit ein Gleichunssystem nur für u zu erhalten. Dazu geht man wie folgt vor:
Zuerst löst man die erste Zeile des GLS nach $\underline{\sigma}$ auf

$$\underline{\sigma}_N = M^{-1}(F - G u_N), \tag{5.8}$$

und eliminiert somit $\underline{\sigma}$ aus der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned}
&D(M^{-1}(F - G u_N)) + C u_N = H \\
\Leftrightarrow\ &(-DM^{-1}G + C) u_N = H + DM^{-1}F.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Da die Massenmatrix M_{ij} Block-Diagonalgestalt hat, kann diese elementweise invertiert werden.

Die Variable $\underline{\sigma}_N$ lässt sich dann durch (5.8) rekonstruieren.
Der Vorteil dieses Vorgehens liegt darin nicht wie in (5.3) ein System der Größe

$(M+L) \times (M+L)$ zu lösen sondern dass System

$$(-DM^{-1}G + C)u_N = H + DM^{-1}F \tag{5.10}$$

mit der Dimension $L \times L$. Der Operator $S := (-DM^{-1}G + C)$ ist symmetrisch, da $-D^T = G$ und C symmetrisch ist, und mit $C_{11} > 0$ positiv semidefinit. Da wie in Satz 3.2.1 gezeigt das System (5.3) eine eindeutig lösbar ist, besitzt auch (5.9) eine eindeutige Lösung. Zusammen mit S positiv semindefinit ist dies äquivalent zu S positiv definit. Das System (5.9) lässt sich also mit einem CG-Verfahren lösen.

5.3. Die Discontinuous-Galerkin Räume

Im Folgenden werden die in der Implementierung verwendeten Ansatzräume vorgestellt.

Die diskreten Räume $\mathbf{V}_h(\Omega)$ und $\Sigma_h(\Omega)$ setzen sich aus lokalen Räumen auf jedem Elemet $K \in \mathcal{T}$ zusammen und lassen sich somit als

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h(\Omega) &= \textstyle\prod_{K\in\mathcal{T}} \mathbf{V}_h(K), && (5.11)\\ \Sigma_h(\Omega) &= \textstyle\prod_{K\in\mathcal{T}} \Sigma_h(K), && (5.12)\\ & && (5.13) \end{aligned}$$

darstellen. Die lokalen Räume sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h(K) &:= \{\varphi : K \to \mathbb{R} \ : \ \varphi|_K \in \mathbb{P}(K)^l, \ \varphi|_{K'} \equiv 0 \text{ für alle } K' \neq K\} && (5.14)\\ \Sigma_h(K) &:= \{\underline{\tau} : K \to \mathbb{R}^d \ : \ \underline{\tau}_K \in [\mathbb{P}(K)^k]^d, \ \underline{\tau}|_{K'} \equiv 0 \text{ für alle } K' \neq K\} && (5.15) \end{aligned}$$

gegeben.

Die Basisfunktionen der lokalen Räume werden definiert durch Zurückführung auf die Basis des Polynomraums auf einem Referenzelement.
Sei $\hat{K}$ das Referenzelement zu dem Element K und $F_K : \hat{K} \to K$ die zugehörige affinlineare Referenzabbildung. Ferner sei $\mathbb{P}^l(\hat{K})$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich l mit der Basis $\{\hat{\varphi}_{\hat{i}} : \hat{K} \to \mathbb{R} \mid \hat{i} = 0 \dots dim(\mathbb{P}^l(\hat{K}))\}$.
Dann sind die lokalen Basisfunktionen $\varphi_{\hat{i}}^K$ gegeben durch

$$\varphi_{\hat{i}}^K(x) \ := \ \begin{cases} \hat{\varphi}_{\hat{i}}(F_K^{-1}(x)), & \text{falls } x \in K \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.16}$$

für $\hat{i} = 0 \dots dim(\mathbb{P}^l(\hat{K}))$.

- In der hier betrachteten Diskretisierung wird davon ausgegangen, dass die Triangulierung genau ein Referenzelement besitzt und der Polynomgrad auf den einzelnen Elementen identisch ist. Das LDG-Verfahren lässt aber gemischte Gitter mit mehreren Referenzelementen und verschiedene Ansatzräume auf einzelnen Elementen zu.

- Die Basisfunktion der diskreten Räume haben die Eigenschaft, dass die äußere Spur bezüglich des zugehörigen Elements verschwindet.
  Sei $\varphi \in \mathbf{V}_N^K$ dann gilt

$$\varphi^{+,K} = \varphi|_{\partial K} \tag{5.17}$$
$$\varphi^{-,K} = 0 \tag{5.18}$$

  Diese Eigenschaft wird bei der Implementierung der Flussauswertung ausgenutzt.

- Wählt man für den Referenzraum $\mathbb{P}^l(\hat{K})$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$(\varphi_i, \varphi_j) := \int_{\hat{K}} \varphi_i \varphi_j \, dx$$

  so gilt gilt für die lokale Massenmatrix auf dem Element K

$$M_{i,j}^K = \int_K \underline{\tau}_i \cdot \underline{\tau}_j dx = vol(K)\delta_j^i. \tag{5.19}$$

  Die Massenmatrix hat also Diagonalform.

- Sei $I = \{0 \dots N\}$ eine Nummerierung der Elemente aus $\mathcal{T}$, d.h. heißt es gilt

$$\mathcal{T} = \bigcup_{0=1}^{N} K_l.$$

  Der globale Index i einer lokalen Basisfunktion $\varphi_{\hat{i}} \in \mathbf{V}_h(K_l)$ ist demnach durch.

$$i = l \cdot n + \hat{i}, \tag{5.20}$$

  gegeben, wobei l die Nummer des Elementes K_l, n die Dimension der lokalen Räume und $\hat{i}$ der lokale Index der Basisfunktion ist.

5.4. Assemblierung der Systemmatrizen

In diesem Abschnitt wird beschrieben wie die Struktur der Ansatzräume zu einer Blockstruktur des Systemmatrizen führt und wie diese beim Assemblieren der Matrizen berücksichtig wird.

Die Nummerierung der Basisfunktionen aus (5.20) führt zu einer Blockstruktur der Systemmatrizen.

$$G = G^{m,n}, \quad 0 \leq m, n, \leq N, \tag{5.21}$$
$$D = D^{m,n}, \quad 0 \leq m, n, \leq N, \tag{5.22}$$
$$C = C^{m,n}, \quad 0 \leq m, n, \leq N, \tag{5.23}$$

wobei N die Anzahl der Elmente in der Triangulierung ist. Die Blöcke haben jeweils folgende Gestalt

$$\begin{aligned}
G^{m,n} &= (G^{m,n}_{i,j}), \quad 0 < i \leq dim(\Sigma_h(K_m)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K_n)),\\
D^{m,n} &= (D^{m,n}_{i,j}), \quad 0 < i \leq dim(\mathbf{V}_h(K_m)), 0 < j \leq dim(\Sigma_h(K_n)),\\
C^{m,n} &= (C^{m,n}_{i,j}), \quad 0 < i \leq dim(\mathbf{V}_h(K_m)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K_n)).
\end{aligned}$$

Die einzelnen Einträge berechnen sich wie folgt:

$$G^{m,n}_{i,j} = \int_K \varphi_j \nabla \cdot \underline{\tau}_i dx - \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \hat{u}(\varphi_j)\underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds - \int_{\partial K \cap \Gamma_\mathcal{N}} \varphi_j^+ \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_K ds$$

für alle $\underline{\tau}_i \in \Sigma_h(K_m), \varphi_j \in \mathbf{V}_h(K_n)$.

$$D^{m,n}_{i,j} = \int_K \underline{\tau}_j \cdot \nabla \varphi_l dx - \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \varphi_l \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) \cdot \mathbf{n}_K ds - \int_{\partial K \cap \Gamma_\mathcal{D}} \varphi_i \underline{\tau}_j^+ \cdot \mathbf{n}_K ds$$

für alle $\varphi_i \in \mathbf{V}_h(K_m), \underline{\tau}_j \in \Sigma_h(K_n)$.

$$C^{m,n}_{i,j} = \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \varphi_l \check{\underline{\sigma}}(\varphi_k) \cdot \mathbf{n}_K ds - \int_{\partial K \cap \Gamma_\mathcal{D}} C_{11} \varphi_l \varphi_k^+ ds$$

$\varphi_i \in \mathbf{V}_h(K_m), \varphi_j \in \mathbf{V}_h(K_n)$.
Da die Basisfunktionen der lokalen Räume außerhalb des jeweiligen Elementes verschwinden, sind lediglich die Blöcke auf der Diagonale und Blöcke zu benachbarten Elementen besetzt.Die Kopplung aus der Nachbarelemente resultiert aus den numerischen Füssen.

Die Grafiken 5.1 und zeigen ein Beispiel einer Triangulierung und die daraus resultierende Besetzungsstruktur der Matrizen.

Bei der Assemblierung der Systemmatrizen werden in einem Gitterdurchlauf die Beiträge elementweise berechnet. Zuerst werden auf jedem Element die Volumenintegrale berechnet. Anschliessend werde die Kanten des aktuellen Elementes durchlaufen und dort die Randbeiträge berechnet, d.h für jedes Element K^m werden die Blöcke der Diagonale $G^{m,m}, D^{m,m}, C^{m,m}$ sowie die Blöcke $G^{m,n}, D^{m,n}, C^{m,n}$ für alle Nachbarn K_n von K_m berechnet.Die Blockmatrix wird hierdurch zeilenweise Aufgebaut.

Für alle $K \in \mathcal{T}$

- Berechne die Volumenanteile von

$$G_{i,j}^{K,K},$$
$$D_{j,i}^{K,K},$$

  $0 < i \leq dim(\Sigma_h(K)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K))$

- Für jede Kante $e \subset \partial K \setminus \partial\Omega$ mit Nachbarn K' berechne die Kantenanteile von

  –
$$G_{i,j}^{K,K},$$
$$D_{j,i}^{K,K},$$
$$C_{j,l}^{K,K},$$

    $0 < i \leq dim(\Sigma_h(K)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K)), 0 < l \leq dim(\mathbf{V}_h(K))$

  –
$$G_{i,j}^{K,K'},$$

    $0 < i \leq dim(\Sigma_h(K)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K'))$

  –
$$D_{j,i}^{K,K'},$$

    $0 < i \leq dim(\Sigma_h(K')), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K))$

  –
$$C_{j,l}^{K,K'},$$

    $0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K)), 0 < l \leq dim(\mathbf{V}_h(K')$

- Für jede Kante $e \subset \partial K \cap \partial\Omega$:

– Falls $e \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ berechene die Kantenanteile von

$$D_{j,i}^{K,K},$$
$$C_{j,l}^{K,K}$$

$0 < i \leq dim(\Sigma_h(K)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K)), 0 < l \leq dim(\mathbf{V}_h(K))$

– Falls $e \in \Gamma_{\mathcal{N}}$ berechene die Kantenanteile von

$$G_{i,j}^{K,K},$$

$0 < i \leq dim(\Sigma_h(K)), 0 < j \leq dim(\mathbf{V}_h(K))$

5.5. Systemmatrizen und Gleichungssystem für das Stokes-Problem

5.5.1. Die Systemmatrizen

In diesem Abschnitt werden die Systemmatrizen des Stokes-Problems angegeben. Die diskreten Räume werde analog zu elliptischen Fall definiert.

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma}_h(\Omega) &= \prod_{K\in\mathcal{T}} \underline{\Sigma}_h(K), \\
\mathbf{V}_h(\Omega) &= \prod_{K\in\mathcal{T}} \mathbf{V}_h(K), \\
Q_h(\Omega) &= \prod_{K\in\mathcal{T}} Q_h(K)
\end{aligned}$$

Mit den lokalen Räumen

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma}_h(K) &:= \{\underline{\tau} : K \to \mathbb{R}^{d\times d} \ : \ \underline{\tau}_K \in [\mathbb{P}(K)^l]^{d\times d}, \ \underline{\tau}|_{K'} \equiv 0 \text{ für alle } K' \neq K\}, \\
\mathbf{V}_h(K) &:= \{\boldsymbol{\varphi} : K \to \mathbb{R}^d \ : \ \boldsymbol{\varphi}|_K \in [\mathbb{P}(K)^k]^d, \ \boldsymbol{\varphi}|_{K'} \equiv 0 \text{ für alle } K' \neq K\}, \\
Q_h(K) &:= \{q : K \to \mathbb{R} \ : \ q|_K \in \mathbb{P}(K)^m, \ q|_{K'} \equiv 0 \text{ für alle } K' \neq K\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma}_h &= span\{\underline{\tau}_i, i = 0 \ldots M-1\}, \\
\mathbf{V}_h &= span\{\boldsymbol{\varphi}_i, i = 0 \ldots L-1\}, \\
Q_h &= span\{q_i : i = 0 \ldots K-1\}
\end{aligned}$$

Man etwickelt nun $\underline{\sigma}_h$, $\boldsymbol{u}_h$ und p_h in den Basen der diskreten Räume und testet in (4.17)-(4.20) mit den Basisfunktionen $\underline{\tau}_i, \boldsymbol{\varphi}_k$ und q_m. Schreibt man die numerischen Flüssse aus

Definition 4.2.2 als

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}} &= \hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{u}),\\
\hat{\underline{\sigma}} &= \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) + \check{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{u}),\\
\hat{\boldsymbol{u}}_p &= \tilde{\boldsymbol{u}}_p(\boldsymbol{u}) + \check{\boldsymbol{u}}_p(p),\\
\hat{p} &= \hat{p}(p)
\end{aligned}$$

erhält das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} M & G & 0 \\ D & C & PG \\ 0 & PD & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

mit

$$\begin{aligned}
M_{i,j} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K \underline{\tau}_i : \underline{\tau}_j \, dx,\\
G_{i,l} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K \boldsymbol{\varphi}_l \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}_i) dx - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{\varphi}_j) \cdot \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_k \, ds \right),\\
D_{k,j} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_K \underline{\tau}_j : \nabla \boldsymbol{\varphi}_k dx - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) : (\boldsymbol{\varphi}_k \otimes \mathbf{n}_K) \, ds \right) - \int_{\partial\Omega} \underline{\tau}_j : (\boldsymbol{\varphi}_k \otimes \mathbf{n}) \, ds,\\
C_{k,l} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(- \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \check{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{\varphi}_l) : (\boldsymbol{\varphi}_k \otimes \mathbf{n}_K) \, ds \right) + \int_{\partial\Omega} C_{11} \boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{n} : (\boldsymbol{\varphi}_k \otimes n_K) \, ds,\\
PG_{k,n} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(- \int_K q_n \nabla \boldsymbol{\varphi}_K dx + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \hat{p}(q_n) \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \mathbf{n}_K \, ds \right) + \int_{\partial\Omega} q_n \boldsymbol{\varphi}_k \cdot \mathbf{n} \, ds\\
PD_{m,l} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(- \int_K \boldsymbol{\varphi}_l \cdot \nabla q_m dx + \int_{\partial K} \tilde{\boldsymbol{u}}_p(\boldsymbol{\varphi}_l) \cdot \mathbf{n}_K q_m \, ds \right),\\
E_{m,n} &= \sum_{K\in\mathcal{T}} \left(\int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \tilde{\boldsymbol{u}}_p(q_n) \cdot n_K q_m \, ds \right).
\end{aligned}$$

Analog zum elliptischen Problem haben die lokalen Blöcke der Systemmatrizen die Gestalt

$$G_{i,j}^{m,n} = \int_K \boldsymbol{\varphi}_j \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}_i) dx - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{u}}_{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{\varphi}_j) \cdot \underline{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_k \, ds,$$

für alle $\underline{\tau}_i \in \underline{\Sigma}_h(K_m), \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}_h(K_n)$.

$$D_{i,j}^{m,n} = \int_K \underline{\tau}_j : \nabla \boldsymbol{\varphi}_i dx - \int_{\partial K\setminus\partial\Omega} \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{\tau}_j) : (\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \mathbf{n}_K) \, ds \; - \int_{\partial\Omega} \underline{\tau}_j : (\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \mathbf{n}) \, ds,$$

für alle $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbf{V}_h(K_m), \underline{\tau}_j \in \underline{\Sigma}_h(K_n)$.

$$C^{m,n}_{i,j} = -\int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \check{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{\varphi}_j) : (\boldsymbol{\varphi}_i \otimes n_K)\, ds + \int_{\partial\partial K \cap \Omega} C_{11} \boldsymbol{\varphi}_j \otimes \mathbf{n} : (\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \mathbf{n}_K)\, ds,$$

für alle $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbf{V}_h(K_m), \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}_h(K_n)$

$$PG^{m,n}_{i,j} = -\int_K q_j \nabla \boldsymbol{\varphi}_i dx + \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \hat{p}(q_j) \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \mathbf{n}_K\, ds + \int_{\partial K \cap \partial\Omega} q_j \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \mathbf{n}\, ds$$

für alle $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbf{V}_h(K_m), q_j \in Q_h(K_n)$

$$PD^{m,n}_{i,j} = -\int_K \boldsymbol{\varphi}_j \cdot \nabla q_i dx + \int_{\partial K} \tilde{\boldsymbol{u}}_p(\boldsymbol{\varphi}_j) \cdot n_K q_i\, ds,$$

für alle $q_i \in Q_h(K_m), \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{V}_h(K_n)$

$$E^{m,n}_{i,j} = \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \tilde{\boldsymbol{u}}_p(q_j) \cdot \mathbf{n}_K q_i\, ds$$

für alle $q_i \in Q_h(K_m), q_j \in Q_h(K_n)$

Die Assemblierung der Matrizen erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie für das elliptische Problem.

5.5.2. Kondensation der Matrizen

Die LDG-Diskretisierung des Stokessystems führt auf ein LGS der folgenden Form

$$\begin{pmatrix} M & B & 0 \\ -B^T & C & D \\ 0 & -D^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Durch Wahl von orthonormalen Basisfunktionen ist M eine Diagonalmatrix.

$$M_{ij} = a(\tau_i, \tau_j) = \int_\Omega \tau_i : \tau_j\, dx$$

Wir können die erste Gleichung nach σ auflösen:

$$\sigma = M^{-1}(F - Bu)$$

Durch einsetzen und Multiplikation der letzten Zeile mit -1 erhalten wir das neue Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} B^T M^{-1} B + C & D \\ D^T & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G + B^T M^{-1} F \\ -H \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

5.5.3. Lösung des Sattelpunktproblems

Das aus der LDG-Diskretisierung resultierende Gleichungssystem, besitzt die Struktur eines doppelten Sattelpunktproblems. Das erste Sattelpunktproblem resultiert aus der LDG-Diskretisierung des Laplaceoperators und kann daher wie oben durch invertieren der blockdiagonalen Massematrix zu einem Gleichungssystem mit positiv definiter Systemmatrix umgeschrieben werden. Das zweite Sattelpunktproblem, das aus der Divergenz-Nebenbedingung stellt die größere Schwierigkeit dar.
Mit den neuen Größen

$$\begin{aligned} A &:= B^T M^{-1} B + C \\ \tilde{F} &:= G + B^T M^{-1} F \\ \tilde{G} &:= -H \end{aligned}$$

lässt sich dies schreiben als

$$\begin{pmatrix} A & D \\ D^T & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Da A invertierbar ist kann nach p aufgelöst werden und man erhält

$$(D^T A^{-1} D + E)p = D^T A^{-1} \tilde{F} - \tilde{G}$$

Der Operator $S := D^T A^{-1} D + E$ heisst Schurkomplementoperator.
Falls E symmetrisch sowie positiv semidefinit ist,so ist der Schurkomplementoperator symmetrisch und positiv semidefinit und mit der Eindeutigkeit der LDG-Lösung positiv definit. Damit lässt sich ein CG-Verfahren zur Invertierung des Schurkomplementoperators benutzen. Dabei ist bei jeder Iteration des CG-Verfahrens der Operator A zu invertieren, dies geschieht wiederum mit einem CG-Verfahren, was dieses Verfahren äusserst aufwendig macht. Dieses Verfahren heißt Uzawa-Algorithmus, siehe etwa [9]. Der verwendete Algorithmus wurde aus der Vorlesungsausarbeitung zur Vorlesung Ëinführung in die numerische Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen"K.Siebert [28] entnommen.

Der Algorithmus

- Löse

$$Su^0 = f - Dp^0$$

- Setze

$$\begin{aligned} r^0 &= -D^T u^0 + Ep^0 + g \\ d^0 &= r^0 \\ \delta_0 &= (r^0, r^0) \end{aligned}$$

Ist $\delta^0 = 0$ dann ist $(u^0, p^0) = (u, p) \Rightarrow$ stop.
Ansonsten berechne füer $m \geq 0 (u^m, p^m), \chi^m, r^{m+1}, d^{m+1}$ wie folgt

- Löse
$$S\chi^m = Dd^m$$

- Setze
$$\begin{aligned}
h^m &= D^T\chi^m + Ep^m, \\
\rho_m &= \frac{\delta^m}{(h^m, d^m)}, \\
p^{m+1} &= p^m - \rho_m d^m, \\
u^{m+1} &= u^m + \rho_m \chi^m, \\
r^{m+1} &= r^m - \rho_m h^m, \\
\delta_{m+1} &= (r^{m+1}, r^{m+1})
\end{aligned}$$

  Falls $\delta_{m+1} = 0$ so ist $p^{m+1} = p \Rightarrow$ stop.

- Ansonsten setze
$$\begin{aligned}
\gamma_m &= \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m} \\
d^{m+1} &= r^m - \gamma_m d^m,
\end{aligned}$$

Abbildung 5.1.: Beispieltriangulierung

Abbildung 5.2.: zugehörige Besetzungsstruktur

6. Numerische Resultate

In diesem Kapitel werden abschliessend einige numerische Ergebnisse präsentiert, die mit der in **DUNE**umgesetzten Implementierung der vorgestellten Verfahren, gewonnen wurden. Die experimentelle Konvergenzrate (**E**xperimental **O**rder of **C**onvergence) wurde wie folgt ermittelt. Sei $\{\mathcal{T}_i\}$ $i = 1, 2 \ldots$ eine Folge von Triangulierungen, so dass die Gitterweite von $\mathcal{T}_{i+1}$ halb so groß wie die Gitterweite von $\mathcal{T}_i$ ist. Sei $e(\mathcal{T}_i)$ der Fehler (in einer bestimmten Norm) auf der Triangulierung $\mathcal{T}_i$ dann ist die experimentelle Konvergenzrate definiert als:

$$EOC = \frac{\log\left(\frac{e(\mathcal{T}_{i+1})}{e(\mathcal{T}_i)}\right)}{\log(0.5)} \tag{6.1}$$

6.1. Die elliptische Gleichung

6.1.1. Testbeispiel mit glatter Lösung

Bei der folgenden Testrechnung soll die Abhängig des L^2-Fehlers von u_h und $\boldsymbol{\sigma}_h$ vom Polynomgrad der Ansatzfunktionen untersucht werden. Sei $\Omega = (-1, -1)^2$. Die rechte Seite f und die Dirichlet Randwerte $g_{\mathcal{D}}$ wurden so gewählt dass:

$$u(x) = 4(1-x^2)(1-y^2)e^{0.75(x+y)}$$

Die exakte Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g_{\mathcal{D}} \quad \text{auf} \quad \Omega, \end{aligned}$$

ist. Die Folge von Rechengittern die hierfür verwendet wurde enstand durch Verfeinerung einer unregelmäßige Macrotriangulierung. Das Abbruchkriterium des CG-Verfahrens lag bei 10^{-12}.

- Die Tabellen 6.1-6.3 zeigen, dass die für die jeweiligen Polynomgrade zu erwartenden Konvergenzordnungen erreicht werden.

- In weiteren Testrechnungen wurde untersucht inwiefern sich die Wahl des Paramters $\mathbf{C}_{12}$ auf den Fehler und die Konvergenzrate auswirkt. Verglichen wurden $|\mathbf{C}_{12}| = C \cdot h$, $|\mathbf{C}_{12}| = 0$ und$|\mathbf{C}_{12}| = \mathit{const} > 0$. Die Tabellen 6.4, 6.5 und 6.6 zeigen, dass für dieses Testproblem keine signifikanten Unterschiede für die verschiedenen Wahlen von $\mathbf{C}_{12}$ zu beobachten sind. Dabei wurden jeweils lineare Ansatzfunktionen verwendet.

6.1.2. Lösung für ein L-förmiges Gebiet

Die Auswirkunge den Parameter C_{11} und $\mathbf{C}_{12}$ sollen an einem Beispiel untersucht werden, dessen exakte Lösung nicht die volle Regularität besitzt. Dazu betrachtet das L-förmige Gebiet $\Omega = (-1,1)^2 \setminus [(0,1) \times (-1,0)]$ und die in Polarkoordinaten gegebene Funktion

$$u(r,\theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta)$$

Diese Funktion löst, wählt man als Randdaten die exakte Lösung, das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g_{\mathcal{D}} \quad \text{auf} \quad \Omega. \end{aligned}$$

Die lokalen Ansatzfunktionen waren wurden für die folgenden Tests linear gewählt.

- Vergleicht man in diesem Fall das Verhalten für $|\mathbf{C}_{12}| = C \cdot h$, $|\mathbf{C}_{12}| = 0$ und $|\mathbf{C}_{12}| = \mathit{const} > 0$, lässt sich an den Tabellen 6.7, 6.8 und 6.9 ablesen, dass für die Wahl $|\mathbf{C}_{12}| = \mathit{const} > 0$ das Verfahren einen etwa um den Faktor 1.3 schlechteren L^2-Fehler liefert.
- Weitere Tests sollten die Auswirkung der Konstante C bei der Wahl von $|\mathbf{C}_{12}| = C \cdot h$ untersuchen. Die Ergenisse dieser Rechnungen finden sich in den Tabellen 6.1.2-6.1.2. Es zeigte sich, dass mit feiner werdender Triangulierung, der Wert für C, der den kleinsten Fehler lieferte, sich jeweils verdoppelt. Dies legt nahe, dass die Wahl $|\mathbf{C}_{12}| = \mathit{const} > 0$ mit einer geschickt gewählten Konstante die optimale Wahl ist.
- Die a priori Analysis hat gezeigt, dass der Koeffizient C_{11} von Ordnung $1/h$ gewählt werden muss, um die optimale Konvergenzrate zu erreichen. Verglichen wurden wachsende Konstanten β wenn $C_{11} = \frac{\beta}{h}$ gewählt wurde. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 6.1.2-6.1.2 zu sehen. Der geringste Fehler tritt dabei jeweils für $\beta = 1$ auf. Auch zeigt sich, dass sich eine wachsende Konstante negativ auf die Genauigkeit des Verfahrens auswirkt.

Elemete	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
32463	0.000863795	1.98683	0.103386	0.979972	0.107966	0.983555
65104	0.000428286	1.99497	0.0787562	0.994247	0.0742464	0.995614
130449	0.000216906	1.99362	0.0520566	0.989888	0.0542872	0.991893
261266	0.000107255	1.99753	0.0394562	0.997142	0.0371777	0.997884
523027	$5.4345e-05$	1.99685	0.0261202	0.994917	0.0272194	0.995975

Tabelle 6.1.: Polynomgrad 1

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
8045	$2.72309e-05$	2.99461	0.00138931	2.0575	0.00179646	2.04182
16174	$7.82981e-06$	3.00181	0.000551992	2.02593	0.000669282	2.02796
32463	$3.41284e-06$	2.9962	0.000343675	2.01525	0.000445607	2.01131
65104	$9.78208e-07$	3.00076	0.000137093	2.00949	0.000165872	2.01254
130449	$4.27257e-07$	2.9978	$8.57278e-05$	2.00321	0.000111198	2.00264

Tabelle 6.2.: Polynomgrad 2

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
1979	$3.60486e-06$	3.98852	0.000259961	2.85662	0.000277063	2.87504
3996	$6.37147e-07$	4.00378	$7.89067e-05$	2.92286	$7.6938e-05$	2.93137
8045	$2.27334e-07$	3.98706	$3.43241e-05$	2.921	$3.63443e-05$	2.93041
16174	$3.97335e-08$	4.0032	$1.01674e-05$	2.95619	$9.87954e-06$	2.96118
32463	$1.42917e-08$	3.99157	$4.4136e-06$	2.95919	$4.65849e-06$	2.96379

Tabelle 6.3.: Polynomgrad 3

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
512	0.0310902	1.97836	0.362543	0.748706	0.398682	0.635079
2048	0.00787726	1.9807	0.197549	0.875941	0.258711	0.623898
8192	0.00204837	1.94322	0.126062	0.648078	0.157735	0.713841
32768	0.000524252	1.96614	0.075196	0.745406	0.0827178	0.931232
131072	0.000132317	1.98626	0.0406068	0.888934	0.0418084	0.984406

Tabelle 6.4.: $\mathbf{C}_{12} = \mathcal{O}(h)$

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
512	0.0321382	1.90185	0.621374	0.883023	0.621374	0.883023
2048	0.0082783	1.95688	0.323371	0.942272	0.323371	0.942272
8192	0.0020995	1.97929	0.164964	0.971039	0.164964	0.971039
32768	0.00052859	1.98982	0.0833169	0.985469	0.0833169	0.985469
131072	0.000132611	1.99495	0.0418693	0.992717	0.0418693	0.992717

Tabelle 6.5.: $\mathbf{C}_{12} = 0$

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
512	0.0300533	1.86938	0.384959	0.761434	0.505176	0.692866
2048	0.00789568	1.92839	0.213933	0.847542	0.282882	0.836583
8192	0.00202576	1.9626	0.113067	0.919983	0.149476	0.920291
32768	0.000513167	1.98097	0.0581388	0.959606	0.0767818	0.961075
131072	0.000129147	1.99041	0.0294798	0.979773	0.0389049	0.980812

Tabelle 6.6.: $\mathbf{C}_{12} = \mathcal{O}(1)$

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
12288	$6.79453e - 05$	1.93067
49152	$2.26021e - 05$	1.58792
196608	$7.68053e - 06$	1.55718
786432	$2.62095e - 06$	1.55112

Tabelle 6.7.: $\mathbf{C}_{12} = \mathcal{O}(h)$

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
12288	$7.31252e - 05$	1.62617
49152	$2.3865e - 05$	1.61547
196608	$7.88786e - 06$	1.59719
786432	$2.65435e - 06$	1.57128

Tabelle 6.8.: $\mathbf{C}_{12} = 0$

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
12288	$9.03523e - 05$	1.58498
49152	$3.05527e - 05$	1.56426
196608	$1.05422e - 05$	1.53513
786432	$3.72571e - 06$	1.50059

Tabelle 6.9.: $\mathbf{C}_{12} = \mathcal{O}(1)$

C	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0	$7.31252e-05$	1.62617
0.25	$7.30072e-05$	1.62392
0.5	$7.28845e-05$	1.62158
1	$7.26248e-05$	1.61662
2	$7.20497e-05$	1.60618
4	$7.07203e-05$	1.59635
8	$6.82637e-05$	1.76052
16	$7.47591e-05$	2.27745
32	0.000123675	1.97553
64	0.00139934	8.71916

Tabelle 6.10.: 3072 Elemente

C	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0	$2.3865e-05$	1.61547
0.25	$2.38451e-05$	1.61434
0.5	$2.38245e-05$	1.61316
1	$2.37813e-05$	1.61063
2	$2.36868e-05$	1.60491
4	$2.34653e-05$	1.59159
8	$2.29121e-05$	1.57501
16	$2.17694e-05$	1.77995
32	$2.42357e-05$	2.35134
64	$4.30692e-05$	5.02194

Tabelle 6.11.: 12288 Elemente

C	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0.25	$7.8844e-06$	1.59662
0.5	$7.88085e-06$	1.59603
1	$7.87349e-06$	1.59475
2	$7.85771e-06$	1.5919
4	$7.82185e-06$	1.58495
8	$7.73309e-06$	1.56699
16	$7.49499e-06$	1.53831
32	$6.95417e-06$	1.80118
64	$7.91911e-06$	2.44325

Tabelle 6.12.: 49152 Elemente

β	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0.25	0.00010851	1.49302
0.5	$9.33029e - 05$	1.53578
1	$7.31252e - 05$	1.62617
2	$7.57507e - 05$	1.5905
4	0.000143297	1.40596
8	0.000256546	1.35511
16	0.000387934	1.34489
32	0.000510977	1.34353

Tabelle 6.13.: 3072 Elemente

β	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0.25	$3.94641e - 05$	1.45921
0.5	$3.2924e - 05$	1.50278
1	$2.3865e - 05$	1.61547
2	$2.55492e - 05$	1.56798
4	$5.48614e - 05$	1.38515
8	0.000100768	1.34818
16	0.000153122	1.34113
32	0.000201835	1.34008

Tabelle 6.14.: 12288 Elemente

β	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC
0.25	$1.46749e - 05$	1.42719
0.5	$1.19077e - 05$	1.46725
1	$7.88786e - 06$	1.59719
2	$8.80133e - 06$	1.53748
4	$2.12426e - 05$	1.36883
8	$3.97184e - 05$	1.34316
16	$6.05511e - 05$	1.33846
32	0.0303199	0.0250925

Tabelle 6.15.: 49152 Elemente

6.1.3. Modell mit Diffusionsmatrix

Der folgende Test betrachtet die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A}\nabla u = f \text{ auf } \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{6.2}$$

Dabei ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.Die Dirichlet-Randdaten und die rechte Seite sind so gewählt das $u = xy + x$ die exakte Lösung ist. Die Tabelle 6.16 zeigt die zu erwartenden Konvergenzraten. Dies verifiziert, dass das Verfahren auch für konstanten nichttrivialen Diffusionsmatrizen richtige Ergebnisse liefert. Der Polynomgrad war bei diesem Test $p = 1$.

Elemente	$\|\|u - u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h,1}\|\|_2$	EOC	$\|\|\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}\|\|_2$	EOC
1979	$6.60943e-05$	2.02165	0.00330554	1.03024	0.00295063	1.01787
8045	$1.63881e-05$	2.01188	0.00163351	1.01691	0.00146654	1.0086
32463	$4.07941e-06$	2.00621	0.000811529	1.00926	0.000731171	1.00414
130449	$1.0176e-06$	2.00319	0.000404395	1.00488	0.000365045	1.00213

Tabelle 6.16.: Ergebnisse mit Diffusionsmatix

6.2. Das Stokessystem

Wir betrachten das Stokes-Systen (1) mit $\Omega = (-1,1)^2$, rechter Seite f und Dirichlet-Randbedingungen g_D so gewählt dass die exakte Lösung (u, p) gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2) &= -e^{x_1}(x_2 \cos x_2 + \sin x_2) \\ u_2(x_1,x_2) &= e^{x_1} x_2 \sin x_2 \\ p(x_1,x_2) &= 2e^{x_1} \sin x_2 \end{aligned}$$

Die Berechnungen wurden auf einem regelmässigen Dreieckssgitter durchgeführt.

Dabei wurden die Parameter $C_{11} = h^{-1}, D_{11} = h, \mathbf{C}_{12} = \mathbf{D}_{12} = 0$ verwendet. Die Tabellen 6.2-6.2 zeigen die erwarteten Konvergenzraten für den Fall, dass die Variablen $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}$ und p mit der gleichen Ordnung approximiert werden. Falls für $\boldsymbol{\sigma}$ und p Ansatzfunktionen mit einer Ordnung niedriger als für u verwendet werden, treten die gleichen Konvergenzraten auf wie die Tabellen 6.2-6.2 zeigen. Diese Daten stammen allerdings aus einer anderen Testreihe als die, die in den Tabellen 6.2-6.2 zu finden sind und wurden auf einem anderen Gitter entstanden und daher nicht vergleichbar.

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
128	0.0187634	2.00709	0.0678007	1.47992
256	0.00931558	1.99936	0.0565933	1.70686
512	0.00471119	1.99376	0.0231655	1.54933
1024	0.00233593	1.99565	0.016817	1.75071

Tabelle 6.17.: $m = k = l = 1$

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
128	0.000754574	2.96726	0.00437894	1.97871
256	0.000284265	3.00056	0.00229571	1.97403
512	$9.54679e-05$	2.98258	0.00108481	2.01313
1024	$3.55921e-05$	2.99761	0.000577122	1.99199

Tabelle 6.18.: $m = k = l = 2$

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
8	0.00499968	3.5479	0.0100211	2.96883
16	0.00130259	4.00046	0.00984287	2.95988
32	0.000319837	3.96643	0.00167876	2.57757
128	$2.13322e-05$	3.90711	0.000287614	2.53815
512	$1.42176e-06$	3.83153	$3.56855e-05$	2.7806

Tabelle 6.19.: $m = k = l = 3$

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
128	0.0187553	2.00732	0.0682666	1.46832
512	0.00470965	1.99361	0.0233577	1.54728
2048	0.00118519	1.9905	0.00767552	1.60556
8192	0.000297817	1.99262	0.00246051	1.64131

Tabelle 6.20.: m=1,k=l=0

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
32	0.00590335	2.91083	0.017294	1.89555
128	0.00075489	2.9672	0.00438246	1.98046
512	$9.54952e-05$	2.98277	0.00108608	2.01261
2048	$1.20088e-05$	2.99134	0.000269499	2.01077

Tabelle 6.21.: $m = 2, k = l = 1$

Elemente	$\|\|u-u_h\|\|_2$	EOC	$\|\|p-p_h\|\|_2$	EOC
8	0.00499939	3.547	0.0100043	2.96753
32	0.000319905	3.96603	0.00168083	2.57338
128	$2.02083e-05$	3.98463	0.000244927	2.77876
512	$1.3888e-06$	3.86303	$3.47981e-05$	2.81527

Tabelle 6.22.: $m = 3, k = l = 2$

A. CD-ROM

Literaturverzeichnis

[1] DUNE. `http://dune-project.org/`.

[2] DUNE-FEM. `http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Research/projectskr/dune/`.

[3] H.W Alt. *Lineare Funktionalanalysis.*

[4] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, Bernardo Cockburn, and L.Donatella Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2002.

[5] Ivo Babuska and Milos Zlamal. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10:863–875, 1973.

[6] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131(2):267–279, 1997.

[7] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, and M. Pedinotti, S.and Savini. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows. In R. Decuypere and G. Dibelius, editors, *2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pages 99–108, Technologisch Instituut,Antwerpen,Belgium, March 5-7 1997.

[8] Carlos Erik Baumann and J.Tinsley Oden. A discontinuous *hp* finite element method for convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 175(3-4):311–341, 1999.

[9] D. Braess. *Finite Elemente.*

[10] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 16(4):365–378, 2000.

[11] P. Castillo, B. Cockburn, I. Perugia, and D. Schotzau. Local discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 18(1):69–75, 2002.

[12] Paul Castillo. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic PDEs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2):524–547, 2002.

[13] Paul Castillo, Bernardo Cockburn, Ilaria Perugia, and Dominik Schotzau. An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5):1676–1706, 2000.

[14] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North Holland, 1987.

[15] Bernardo Cockburn, Suchung Hou, and Chi-Wang Shu. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV: The multidimensional case. *Math. Comput.*, 54(190):545–581, 1990.

[16] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat, Ilaria Perugia, and Dominik Schotzau. Superconvergence of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems on Cartesian grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(1):264–285, 2001.

[17] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat, and Dominik Schotzau. The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. *Math. Comput.*, 73(246):569–593, 2004.

[18] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat, and Dominik Schotzau. A locally conservative LDG method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 74(251):1067–1095, 2005.

[19] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat, Dominik Schotzau, and Christoph Schwab. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):319–343, 2002.

[20] Bernardo Cockburn, San-Yih Lin, and Chi-Wang Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. III: One-dimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 84(1):90–113, 1989.

[21] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II: General framework. *Math. Comput.*, 52(186):411–435, 1989.

[22] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The Runge-Kutta local projection P^1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws. 1991.

[23] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6):2440–2463, 1998.

[24] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws. V: Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 141(2):199–224, 1998.

[25] J.and Dupont T Douglas, Jr. *Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin Methods.* Springer Verlag, 1976.

[26] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations.* Springer, 1979.

[27] S.J. Sherwin, R.M. Kirby, J. Peiró, R.L. Taylor, and O.C. Zienkiewicz. On 2D elliptic discontinuous Galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 65(5):752–784, 2006.

[28] K. Siebert. Einführung in die numerische Behandlung der Navier-Stokes - Gleichungen, 1997.

[29] Roger Temann. *Navier-Stokes Equations.* North Holland, 1985.

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Freiburg, den 03.März 2007