

Einführung in die numerische Behandlung der Navier–Stokes–Gleichungen

Kunibert G. Siebert
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Freiburg
Hermann–Herder–Straße 10
79 104 Freiburg

email: `kunibert@mathematik.uni-freiburg.de`

Ausarbeitung einer Vorlesung zum
Praktikum „Numerik Partieller Differentialgleichungen III“
im Wintersemester 1997/98

Inhaltsverzeichnis

1	Formulierung der Navier–Stokes–Gleichungen	1
2	Zeit–Diskretisierung	3
2.1	Abstraktes Operator–Splitting	3
2.2	Konsistenz– und Stabilitätseigenschaften	5
2.3	Operator Splitting für Navier–Stokes	7
3	Lösung des linearen Teilproblems	10
3.1	Sattelpunktprobleme	10
3.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Sattelpunktproblems	13
3.3	Existenz und Eindeutigkeit des Quasi–Stokes Problems	17
3.4	Diskretisierung von Sattelpunktproblemen	21
3.5	Stabile Diskretisierungen für Quasi–Stokes	26
3.6	Gradienten–Verfahren im Hilbertraum	29
3.6.1	Methode des steilsten Abstiegs	30
3.6.2	CG–Verfahren	32
3.7	CG–Verfahren für Sattelpunktprobleme	35
3.8	Vorkonditioniertes CG–Verfahren für Quasi–Stokes	38

1 Formulierung der Navier–Stokes–Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes und beschränktes Gebiet, $T > 0$. Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d): \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ und eine Druckverteilung $p: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$\mathbf{u}_{,t} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (1.1a)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (1.1b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.1c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.1d)$$

Dabei ist

Re: die **Reynoldszahl**; sie ist eine dimensionslose Größe und berechnet sich aus der Viskosität ν der Flüssigkeit, einer charakteristischen Länge L des Gebiets und einer charakteristischen Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\text{Re} = \frac{|\bar{\mathbf{u}}| L}{\nu}.$$

Für kleine Reynoldszahlen ist die Strömung laminar, für sehr große Reynoldszahlen wird die Strömung turbulent.

$\mathbf{f}: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$: eine äußere Kraft, die auf die Strömung wirkt.

$\mathbf{g}: \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$: vorgegebene (Dirichlet-) Randwerte der Geschwindigkeit. Es muß

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

gelten. Denn ist \mathbf{u} eine Lösung von (1.1), so gilt wegen des Gaußschen Integralsatzes, (1.1b) und (1.1c)

$$0 = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}(t) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{\nu}$ die äußere Normale an den Rand $\partial\Omega$.

$\mathbf{u}_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist der Anfangswert des Geschwindigkeitsfeldes.

Der vektorwertige Laplaceoperator ist definiert als

$$(\Delta \mathbf{u})_i = \Delta u_i, \quad i = 1, \dots, d$$

und der Vektor $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ist definiert als

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_i = \mathbf{u} \cdot \nabla u_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Damit lautet (1.1a) komponentenweise

$$u_{i,t} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_i + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i + p_{,x_i} = f_i \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad i = 1, \dots, d.$$

Hieraus folgt, daß diese Gleichungen sowohl durch den nichtlinearen Term $\mathbf{u} \cdot \nabla u_i$ als auch durch die Inkompressibilitätsbedingung (1.1b) gekoppelt sind!

Um eine Variationsformulierung herzuleiten definiere für $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma_D; \mathbb{R}^d)$ den (affinen) Geschwindigkeitsraum $X_{\mathbf{g}} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$:

$$X_{\mathbf{g}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d); \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ auf } \partial\Omega \right\}, \quad (1.2)$$

den Raum der divergenzfreien Funktionen V :

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}. \quad (1.3)$$

und den Druckraum Y :

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q = 0 \right\}. \quad (1.4)$$

Lemma 1.1. Für $\mathbf{v} \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $\boldsymbol{\psi} \in X_0$ gilt

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla \psi_i \, d\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

Die Bilinearform

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad (1.6)$$

ist stetig auf $H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und koerziv auf $X_0 \times X_0$.

Beweis. Partielle Integration, Hölder–Ungleichung und Poincaré mit Nullrandwerten. \square

Lemma 1.2. Für $q \in H^1(\Omega)$ und $\boldsymbol{\psi} \in X_0$ gilt

$$\int_{\Omega} \nabla q \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}. \quad (1.7)$$

Die Bilinearform

$$\mathbf{b}(q, \boldsymbol{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad (1.8)$$

ist stetig auf $L^2(\Omega) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Für $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma} = 0$ gilt $\operatorname{div} \mathbf{v} \in Y$.

Beweis. Partielle Integration, Hölder–Ungleichung und Gaußscher Integralsatz. \square

Lemma 1.3. Für $d \leq 4$, Ω beschränkt mit Lipschitz Rand ist die Trilinearform

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla w_i) \psi_i \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} v_j w_{i,x_j} \psi_i \, d\mathbf{x} \quad (1.9)$$

stetig auf $H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Für $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $\boldsymbol{\psi} \in X_0$ gilt

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = -\mathbf{d}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\psi}, \mathbf{w}). \quad (1.10)$$

Beweis. Für $d \leq 4$ ist die Einbettung $H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\Omega; \mathbb{R}^d)$ stetig. Damit folgt mit der Hölderungleichung für $p_1 = p_3 = 4$, $p_2 = 2$ ($\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} \psi \, d\mathbf{x} \right| &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{L^4(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $\psi \in X_0$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} \psi \, d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_j v_{i,x_j} \psi_i \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^d \underbrace{\int_{\partial\Omega} u_j v_i \psi_i \nu_j \, d\boldsymbol{\sigma}}_{=0} - \int_{\Omega} (u_j \psi_i)_{,x_j} v_i \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \left[\int_{\Omega} u_{j,x_j} \psi_i v_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u_j \psi_{i,x_j} v_i \, d\mathbf{x} \right] \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{u} \psi}_{=0} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi \mathbf{w} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

□

Definition 1.4 (Schwache Lösung). Das Paar (\mathbf{u}, p) heißt **schwache Lösung** von (1.1), falls $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$ und falls für fast alle $t \in (0, T)$ gilt: $(\mathbf{u}(\cdot, t), p(\cdot, t)) \in X_{g(t)} \times Y$ ist Lösung von

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_{,t} \cdot \psi + \frac{1}{\operatorname{Re}} a(\mathbf{u}, \psi) + d(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \psi) + b(p, \psi) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \psi \quad \forall \psi \in X_0, \quad (1.11a)$$

$$b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in Y. \quad (1.11b)$$

Für Existenz- und Eindeutigkeitsresultate siehe z.B. das Buch von Roger Temam: Navier–Stokes–Equations [10].

2 Zeit–Diskretisierung

Folgende Aspekte machen sowohl die theoretische als auch die numerische Behandlung der Navier–Stokes–Gleichungen schwierig:

1. Die Nichtlinearität $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.
2. Die Divergenzbedingung $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ (Nebenbedingung).
3. Kopplung der Gleichungen durch die Nichtlinearität und die Divergenzbedingung.

Die numerischen Schwierigkeiten wollen wir durch ein geeignetes Zeit–Diskretisierung–Schema zum Teil voneinander trennen. Diese Idee stammt von Bristeau, Glowinski, Periaux [2]

2.1 Abstraktes Operator–Splitting

Es sei H ein reeller Hilbertraum, $A: H \rightarrow H$ ein (nichtlinearer) Operator, $f, u_0 \in H$. Betrachte das folgende AWP: Gesucht ist $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow H$, so daß

$$\frac{du}{dt} + A(u) = f \quad \text{für } t > 0, \quad (2.1a)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.1b)$$

gilt.

Für eine geeignete Zeit–Diskretisierung zerlegen wir

$$A = A_1 + A_2,$$

wählen eine Zeitschrittweite $\tau > 0$, setzen $t_n = n\tau$ und für $\theta \in [0, 1]$ definieren wir $f^{n+\theta} \stackrel{\text{def}}{=} f(t_n + \theta\tau)$. Mit $u^n \approx u(t_n)$ bezeichnen wir die Approximation an $u(t_n)$ durch unsere Zeit–Diskretisierung.

Schema 2.1 (Peaceman–Rachford–Schema). Setze

$$u^0 = u_0. \quad (2.2a)$$

Für $n \geq 0$ berechne u^{n+1} aus u^n wie folgt:

$$u^{n+\frac{1}{2}} \in H : \quad \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau/2} + A_1(u^{n+\frac{1}{2}}) + A_2(u^n) = f^{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.2b)$$

$$u^{n+1} \in H : \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + A_1(u^{n+\frac{1}{2}}) + A_2(u^{n+1}) = f^{n+1}. \quad (2.2c)$$

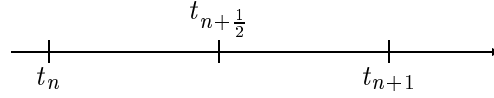


Abbildung 1: Aufteilung des Intervalls (t_n, t_{n+1}) für das Peaceman–Rachford–Schema

Schema 2.2 (θ –Schema). Wähle ein $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Setze

$$u^0 = u_0. \quad (2.3a)$$

Für $n \geq 0$ berechne u^{n+1} aus u^n wie folgt:

$$u^{n+\theta} \in H : \quad \frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta\tau} + A_1(u^{n+\theta}) + A_2(u^n) = f^{n+\theta}, \quad (2.3b)$$

$$u^{n+1-\theta} \in H : \quad \frac{u^{n+1-\theta} - u^{n+\frac{1}{2}}}{(1-2\theta)\tau} + A_1(u^{n+\theta}) + A_2(u^{n+1-\theta}) = f^{n+1-\theta}, \quad (2.3c)$$

$$u^{n+1} \in H : \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1-\theta}}{\theta\tau} + A_1(u^{n+1}) + A_2(u^{n+1-\theta}) = f^{n+1}. \quad (2.3d)$$

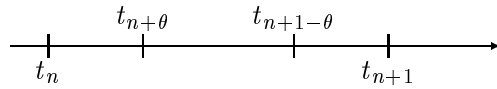


Abbildung 2: Aufteilung des Intervalls (t_n, t_{n+1}) für das θ –Schema

2.2 Konsistenz- und Stabilitätseigenschaften

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Konsistenz und der Stabilität der obigen Verfahren für ein lineares Modellproblem beschäftigen. Sei dazu $H = \mathbb{R}^N$ und A eine symmetrische und positiv definite $N \times N$ -Matrix, $f = 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^N$. Die Lösung von (2.1) ist

$$u(t) = \exp(-tA)u_0. \quad (2.4)$$

Dabei ist der Ausdruck $\exp(-tA)v$ für ein $v \in \mathbb{R}^N$ folgendermaßen zu verstehen: Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ eine Orthonormalbasis zu den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ von A , so definieren wir

$$\exp(-tA)v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \exp(-t\lambda_i)v_i\varphi_i.$$

Dabei ist $v_i = (v, \varphi_i)_2$ der Koeffizient der i -ten Basisfunktion φ_i von v und $(\cdot, \cdot)_2$ das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^N .

In diesem Modellfall zerlegen wir die Matrix A in

$$A_1 = \alpha A, \quad A_2 = \beta A \quad \text{mit } \alpha + \beta = 1, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Dann gilt für die Lösung u^n im Peaceman-Rachford-Schema

$$(id + \frac{\tau}{2}\alpha A)u^{n+\frac{1}{2}} = (id - \frac{\tau}{2}\beta A)u^n$$

und damit

$$u^{n+\frac{1}{2}} = (id + \frac{\tau}{2}\alpha A)^{-1}(id - \frac{\tau}{2}\beta A)u^n.$$

Daraus folgt

$$u^{n+1} = (id + \frac{\beta}{2}\tau A)^{-1}(id - \frac{\alpha}{2}\tau A)(id + \frac{\alpha}{2}\tau A)^{-1}(id - \frac{\beta}{2}\tau A)u^n.$$

Für die Koeffizienten u_i^n bzgl. der Basis aus Eigenvektoren erhalten wir damit:

$$u_i^{n+1} = \frac{(1 - \frac{\beta}{2}\tau\lambda_i)(1 - \frac{\alpha}{2}\tau\lambda_i)}{(1 + \frac{\alpha}{2}\tau\lambda_i)(1 + \frac{\beta}{2}\tau\lambda_i)}u_i^n.$$

Definieren wir

$$R_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - \frac{\alpha}{2}x)(1 - \frac{\beta}{2}x)}{(1 + \frac{\alpha}{2}x)(1 + \frac{\beta}{2}x)},$$

so ist

$$u_i^{n+1} = R_1(\tau\lambda_i)u_i^n$$

und

$$u^{n+1} = \sum_{i=1}^N R_1(\tau\lambda_i)u_i^n\varphi_i = \sum_{i=1}^N R_1(\tau\lambda_i)^{n+1}u_i^0\varphi_i.$$

Dies benutzen wir als Definition und schreiben

$$R_1(\tau A)v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N R_1(\tau\lambda_i)v_i\varphi_i,$$

d.h.

$$u^n = R_1(\tau A)^n u_0. \quad (2.5)$$

Ein solches Verfahren heißt *stabil*, falls die rationale Funktion R_1 betragsmäßig kleiner oder gleich 1 ist, d.h.

$$|R_1(x)| \leq 1 \quad \text{für alle } x \geq 0. \quad (2.6)$$

Dies ist hier erfüllt, da für $z \geq 0$ $|1 - z| \leq |1 + z|$ gilt. Hieraus folgt für unser Verfahren

$$|u^n| = |R_1(\tau A)^n u_0| \leq \|R_1(\tau A)\|^n |u_0| \leq |u_0|.$$

Unter Verwendung der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_1(x) = 1.$$

Daraus resultiert ein schlechtes Dämpfungsverhalten für *steife* Probleme, d.h. Matrizen A für die $\lambda_N \gg \lambda_1$ gilt. Hier werden die Komponenten, welche zum größten und zum kleinsten Eigenwert gehören, sehr unterschiedlich gedämpft.

Ein Verfahren heißt *konsistent von der Ordnung p* , falls

$$\exp(-x) - R_1(x) = O(x^{p+1}) \quad \text{für } x \rightarrow 0+. \quad (2.7)$$

Es ist

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

und für dieses Verfahren gilt

$$R_1(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

Damit ist das Peaceman–Rachford–Schema konsistent von 2. Ordnung und damit konvergent von 2. Ordnung für dieses Modellproblem.

Betrachten wir nun das θ -Schema so erhalten wir mit $\theta' = 1 - 2\theta$

$$u^{n+1} = (id + \alpha\theta\tau A)^{-1}(id - \beta\theta\tau A)(id + \beta\theta'\tau A)^{-1}(id - \alpha\theta'\tau A)(id + \alpha\theta\tau A)^{-1}(id - \beta\theta\tau A)u^n.$$

Daraus folgt

$$u_i^{n+1} = \frac{(1 - \beta\theta\tau\lambda_i)^2(1 - \alpha\theta'\tau\lambda_i)}{(1 + \alpha\theta\tau\lambda_i)^2(1 + \beta\theta'\tau\lambda_i)} u_i^n.$$

Die rationale Funktion, welche das Verfahren beschreibt ist also

$$R_2(x) = \frac{(1 - \beta\theta x)^2(1 - \alpha\theta' x)}{(1 + \alpha\theta x)^2(1 + \beta\theta' x)}$$

und wir erhalten (mit de l'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_2(x) = -\frac{\beta}{\alpha},$$

d.h. für

$$\alpha \geq \beta$$

ist das Verfahren also unbedingt stabil.

Weiter gilt

$$R_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 [1 + (\beta^2 - \alpha^2)(2\theta^2 - 4\theta + 1)] + O(x^3) \quad \text{für } x \rightarrow 0 +.$$

Also ist das Verfahren von 2. Ordnung, falls

$$\alpha = \beta \quad (= \tfrac{1}{2})$$

oder falls

$$\theta = 1 - \sqrt{2}/2$$

ist. Ansonsten ist das Verfahren von 1. Ordnung. Für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ist allerdings

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_2(x) = -\frac{\beta}{\alpha} = -1.$$

Dann gelten die gleichen Bemerkungen bzgl. der Integration steifer Systeme.

Für

$$\alpha\theta = \beta(1 - 2\theta)$$

sind die (zu assemblierenden) Matrizen für alle Teilschritte die gleichen.

2.3 Operator Splitting für Navier–Stokes

Wir wollen nun die oben dargestellten Methoden auf die Navier–Stokes–Gleichungen anwenden. Die wesentliche Idee ist dabei, das Lösen des nichtlinearen Problems und die Divergenzbedingung zu trennen. Der Operator A_1 wird also für ein lineares Problem stehen, bei dem wir die Divergenzbedingung zu beachten haben und der Operator A_2 steht für ein nichtlineares elliptisches Problem (keine Divergenznebenbedingung!). In den folgenden Kapiteln werden wir dann Verfahren zur Lösung dieser Teilprobleme vorstellen. Dabei wird es uns dann auch noch gelingen, die Gleichungen zu entkoppeln.

Für die Formulierung der Verfahren benötigen wir noch eine Bilinearform $m(\cdot, \cdot)$ welche auf $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ definiert ist:

$$m(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Schema 2.3 (Peaceman–Rachford–Schema für Navier–Stokes). Setze

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0. \tag{2.8a}$$

Für $n \geq 0$ sei τ_n die aktuelle Zeitschrittweite und $(\mathbf{u}^n, p^n) \in X_{\mathbf{g}(t^n)} \times Y$ sei die Näherung an $(\mathbf{u}(t_n), p(t_n))$. Setzte

$$\mu = \frac{2}{\tau_n} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{1}{2\text{Re}}. \tag{2.8b}$$

Schritt 1: Definiere $F^{n+\frac{1}{2}} \in X_0^*$ durch

$$\langle F^{n+\frac{1}{2}}, \psi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+\theta} \cdot \psi + \mu \mathbf{m}(\mathbf{u}^n, \psi) - \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}^n, \psi) - \mathbf{d}(\mathbf{u}^n; \mathbf{u}^n, \psi) \quad (2.8c)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Berechne eine Zwischenlösung $(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, p^{n+\frac{1}{2}}) \in X_{\mathbf{g}(t_{n+\frac{1}{2}})} \times Y$ als Lösung des linearen Sattelpunktproblems

$$\mu \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \psi) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \psi) + \mathbf{b}(p^{n+\frac{1}{2}}, \psi) = \langle F^{n+\frac{1}{2}}, \psi \rangle \quad (2.8d)$$

für alle $\psi \in X_0$,

$$\mathbf{b}(q, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 0 \quad (2.8e)$$

für alle $q \in Y$.

Schritt 2: Definiere dann $F^{n+1} \in X_0^*$ durch

$$\langle F^{n+1}, \psi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \psi + \mu \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \psi) - \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}^n, \psi) - \mathbf{b}(p^{n+\frac{1}{2}}, \psi) \quad (2.8f)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Berechne dann die gewünschte Näherung $\mathbf{u}^{n+1} \in X_{\mathbf{g}(t_{n+1})}$ als Lösung der nichtlinearen elliptischen Gleichung

$$\mu \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+1}, \psi) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+1}, \psi) + \mathbf{d}(\mathbf{u}^{n+1}; \mathbf{u}^{n+1}, \psi) = \langle F^{n+1}, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X_0 \quad (2.8g)$$

und setze $p^{n+1} = p^{n+\frac{1}{2}}$ als Näherung an $p(t_{n+1})$.

Schema 2.4 (θ –Schema für Navier–Stokes). Es seien $\theta \in (0, 1/3]$ und $0 < \beta \leq \alpha < 1$, $\alpha + \beta = 1$ gegeben (optimale Ordnung für $\theta = 1 - \sqrt{2}/2$ oder $\alpha = \beta$, für $\beta < \alpha$ robust).

Setze

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0. \quad (2.9a)$$

Für $n \geq 0$ sei τ_n die aktuelle Zeitschrittweite und $(\mathbf{u}^n, p^n) \in X_{\mathbf{g}(t^n)} \times Y$ sei die Näherung an $(\mathbf{u}(t_n), p(t_n))$. Setze

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\theta \tau_n}, & \nu_1 &= \frac{\alpha}{\text{Re}}, \\ \mu_2 &= \frac{1}{(1 - 2\theta) \tau_n}, & \text{und} \quad \nu_2 &= \frac{\beta}{\text{Re}}. \end{aligned} \quad (2.9b)$$

Schritt 1: Definiere $F^{n+\theta} \in X_0^*$ durch

$$\langle F^{n+\theta}, \psi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+\theta} \cdot \psi + \mu_1 \mathbf{m}(\mathbf{u}^n, \psi) - \nu_2 \mathbf{a}(\mathbf{u}^n, \psi) - \mathbf{d}(\mathbf{u}^n; \mathbf{u}^n, \psi) \quad (2.9c)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Berechne eine erste Zwischenlösung $(\mathbf{u}^{n+\theta}, p^{n+\theta}) \in X_{\mathbf{g}(t_{n+\theta})} \times Y$ als Lösung des linearen Sattelpunktproblems

$$\mu_1 \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+\theta}, \psi) + \nu_1 \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+\theta}, \psi) + \mathbf{b}(p^{n+\theta}, \psi) = \langle F^{n+\theta}, \psi \rangle \quad (2.9d)$$

für alle $\psi \in X_0$,

$$\mathbf{b}(q, \mathbf{u}^{n+\theta}) = 0 \quad (2.9e)$$

für alle $q \in Y$.

Schritt 2: Definiere $F^{n+1-\theta} \in X_0^*$ durch

$$\langle F^{n+1-\theta}, \psi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1-\theta} \cdot \psi + \mu_2 \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+\theta}, \psi) - \nu_1 \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+\theta}, \psi) - \mathbf{b}(p^{n+\theta}, \psi) \quad (2.9f)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Berechne eine zweite Zwischenlösung $\mathbf{u}^{n+1-\theta} \in X_{\mathbf{g}(t_{n+1-\theta})}$ als Lösung der nichtlinearen elliptischen Gleichung

$$\mu_2 \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) + \nu_2 \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) + \mathbf{d}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}; \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) = \langle F^{n+1-\theta}, \psi \rangle \quad (2.9g)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Schritt 3: Definiere $F^{n+1} \in X_0^*$ durch

$$\langle F^{n+1}, \psi \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \psi + \mu_1 \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) - \nu_2 \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) - \mathbf{d}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}; \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \psi) \quad (2.9h)$$

für alle $\psi \in X_0$.

Berechne schließlich die gewünschte Näherung $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in X_{\mathbf{g}(t_{n+1})} \times Y$ als Lösung des linearen Sattelpunktproblems

$$\mu_1 \mathbf{m}(\mathbf{u}^{n+1}, \psi) + \nu_1 \mathbf{a}(\mathbf{u}^{n+1}, \psi) + \mathbf{b}(p^{n+1}, \psi) = \langle F^{n+1}, \psi \rangle \quad (2.9i)$$

für alle $\psi \in X_0$,

$$\mathbf{b}(q, \mathbf{u}^{n+1}) = 0 \quad (2.9j)$$

für alle $q \in Y$.

Bemerkung 2.5. In [8] untersucht Müller–Urbaniak die Stabilität und Konsistenz des θ -Verfahrens für die Navier–Stokes Gleichungen. Darin bemerkt er, daß die von Bristeau, Glowinski und Periaux [2] angegebenen Zeitpunkte zur Auswertung der rechten Seite nicht zu einem Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit führt.

Er gibt folgende Vorschläge an, die zu einem Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit für das θ -Verfahren führen:

- Schritt 1:** $\mathbf{f}^{n+\theta}$ ist durch \mathbf{f}^n zu ersetzen,
Schritt 2: $\mathbf{f}^{n+1-\theta}$ ist durch \mathbf{f}^n zu ersetzen,
Schritt 3: \mathbf{f}^{n+1} bleibt,

bzw.

- Schritt 1:** $\mathbf{f}^{n+\theta}$ ist durch $\beta \mathbf{f}^n + \alpha \mathbf{f}^{n+\theta}$ zu ersetzen,
Schritt 2: $\mathbf{f}^{n+1-\theta}$ ist durch $\alpha \mathbf{f}^{n+\theta} + \beta \mathbf{f}^{n+1-\theta}$ zu ersetzen,
Schritt 3: \mathbf{f}^{n+1} ist durch $\beta \mathbf{f}^{n+1-\theta} + \alpha \mathbf{f}^{n+1}$ zu ersetzen.

Allerdings führt dies für die Navier–Stokes Gleichungen nur dann zu einem Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit, wenn das θ -Verfahren nicht als Operator–Splitting Verfahren verwendet wird, wie oben beschrieben, sondern wenn im Schritt 2 ebenfalls die Divergenznebenbedingung beachtet wird.

Die Auswertung der Randdaten \mathbf{g} muß wie oben beschrieben zu den Zeitpunkten $t_{n+\theta}$, $t_{n+1-\theta}$ und t_{n+1} erfolgen!

3 Lösung des linearen Teilproblems

Das lineare Teilproblem, welches im Schritt 1 des Peaceman–Rachford–Schemas und im Schritt 1 und 3 des θ -Schemas zu lösen ist hat die Form: Finde $(\mathbf{u}, p) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$, so daß

$$\mu \mathbf{m}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \mathbf{b}(p, \boldsymbol{\psi}) = \langle F, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{b}(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{für alle } q \in Y \quad (3.1b)$$

gilt.

Eine Möglichkeit ist es, \mathbf{u} als Lösung der elliptischen Gleichung

$$\mathbf{u} \in V \cap X_{\mathbf{g}} : \quad \mu \mathbf{m}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = \langle F, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in V \cap X_0 \quad (3.2)$$

zu bestimmen und dann den Druck über das orthogonale Komplement von V zu bestimmen. Für die Numerik muß dann der Raum V diskretisiert werden, was zu divergenzfreien Elementen führt. Diese sind aber nicht einfach zu konstruieren.

Daher wollen wir (3.1) als Sattelpunktproblem direkt nach (\mathbf{u}, p) auflösen.

3.1 Sattelpunktprobleme

Im folgenden seien X, Y reelle Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_X$ und $(\cdot, \cdot)_Y$. Ferner seien

$$\mathbf{a}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{eine stetige Bilinearform auf } X \times X \quad (3.3a)$$

mit

$$|\mathbf{a}(u, v)| \leq C_a \|u\|_X \|v\|_X \quad \text{für alle } u, v \in X, \quad (3.3b)$$

und es sei

$$\mathbf{b}(\cdot, \cdot) : Y \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{eine stetige Bilinearform auf } Y \times X \quad (3.3c)$$

mit

$$|\mathbf{b}(q, v)| \leq C_b \|q\|_Y \|v\|_X \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X \quad (3.3d)$$

und schließlich seien

$$f \in X, \quad g \in Y \quad (3.3e)$$

gegeben.

Gesucht ist eine Lösung des linearen Problems: Finde $(u, p) \in X \times Y$, so daß

$$a(u, \psi) + b(p, \psi) = (f, \psi)_X \quad \text{für alle } \psi \in X, \quad (3.4a)$$

$$b(q, u) = (g, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y. \quad (3.4b)$$

Um das Problem umzuformulieren definieren wir die Operatoren

$$A \in \mathcal{L}(X, X) : \quad (A v, \psi)_X = a(v, \psi) \quad \text{für alle } v, \psi \in X \quad (3.5a)$$

und

$$B \in \mathcal{L}(Y, X) : \quad (B q, v)_X = b(q, v) \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X. \quad (3.5b)$$

Die Operatoren A, B sind wohldefiniert und eindeutig bestimmt (Riezischer Darstellungssatz). Ferner gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq C_a \quad \text{und} \quad \|B\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq C_b. \quad (3.6)$$

Schließlich sei B^* die Hilbertraumadjungierte zu B , d.h.

$$B^* \in \mathcal{L}(X, Y) : \quad (B q, v)_X = (q, B^* v)_Y \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X. \quad (3.7)$$

Damit läßt sich (3.4) äquivalent umformen zu: Finde $(u, p) \in X \times Y$, so daß

$$A u + B p = f \quad \text{in } X, \quad (3.4a')$$

$$B^* u = g \quad \text{in } Y, \quad (3.4b')$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } X \times Y \quad (3.4'')$$

gilt.

Doch zunächst einige Aussagen über die Zerlegung eines Hilbertraums mit Hilfe eines Operators und des adjungierten Operators:

Lemma 3.1. *Seien X, Y Hilberträume, $T \in \mathcal{L}(Y, X)$ und sei $T^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ die Hilbertraum-Adjungierte zu T , d.h.*

$$(T q, v)_X = (q, T^* v)_Y \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X.$$

Sei $R(T) \subset X$, das Bild von T . $N(T^)$ der Kern von T^* . Ist $R(T)$ abgeschlossen, so läßt sich X wie folgt orthogonal zerlegen:*

$$X = R(T) \oplus N(T^*) \quad \text{und es ist} \quad R(T) \perp N(T^*). \quad (3.9)$$

Beweis. Da $R(T) \subset X$ abgeschlossen und X Hilbertraum ist, gibt es ein $X_\perp \subset X$, so daß $X = R(T) \oplus X_\perp$ gilt und es ist $R(T) \perp X_\perp$. Wir zeigen $X_\perp = N(T^*)$: Es ist

$$\begin{aligned} v \in X_\perp, \quad & \text{gdw.} \quad (v, u)_X = 0 \quad \text{für alle } u \in R(T), \\ & \text{gdw.} \quad (v, T q)_X = 0 \quad \text{für alle } q \in Y, \\ & \text{gdw.} \quad (T^* v, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y, \\ & \text{gdw.} \quad T^* v = 0 \quad \text{gdw. } v \in N(T^*). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2. Sei $T \in \mathcal{L}(Y, X)$ und erfülle

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|Tq\|_X}{\|q\|_Y} > 0. \quad (3.10)$$

Dann ist T einerseits injektiv und andererseits ist $R(T)$ abgeschlossen, denn ist $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset R(T)$ eine Folge in $R(T)$ mit $v_k \rightarrow v \in X$, $k \rightarrow \infty$, so gibt es eine Folge $q_k \in Y$ mit $Tq_k = v_k$. Mit (3.10) folgt

$$\|v_k - v_l\|_X = \|T(q_k - q_l)\|_X \geq \|q_k - q_l\|_Y \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N}$$

und damit ist $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y , damit konvergiert $q_k \rightarrow q \in Y$, $k \rightarrow \infty$, da Y vollständig ist. Aufgrund der Stetigkeit von T konvergiert dann aber auch $Tq_k \rightarrow Tq = v$, $k \rightarrow \infty$, und damit ist $v \in R(T)$, d.h. $R(T)$ ist abgeschlossen.

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich die Invertierbarkeit eines Operators T wie folgt charakterisieren:

Lemma 3.3. *Es seien X, Y Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(Y, X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1) $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- 2) $\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|Tq\|_X}{\|q\|_Y} > 0$ **und** $\inf_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T^*v\|_Y}{\|v\|_X} > 0$.

Beweis. 1) \Rightarrow 2): Sei also $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann folgt aus der Invertierbarkeit von T :

$$\begin{aligned} \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|Tq\|_X}{\|q\|_Y} &= \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|TT^{-1}v\|_X}{\|T^{-1}v\|_Y} = \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_X}{\|T^{-1}v\|_Y} \\ &= \left(\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T^{-1}v\|_Y}{\|v\|_X} \right)^{-1} = \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Da wegen $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ auch $T^{*-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ gilt, folgt genauso $\inf_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T^*v\|_Y}{\|v\|_X} > 0$.

2) \Rightarrow 1): Aus 2) folgt mit Bemerkung 3.2, daß T injektiv und $R(T)$ abgeschlossen ist und auch, daß $N(T^*) = \{0\}$ ist. Da T injektiv ist, ist $T: Y \rightarrow R(T)$ bijektiv. Mit Lemma 3.1 und $N(T^*) = \{0\}$ folgt nun $X = R(T) \oplus N(T^*) = R(T)$ und damit ist $T: Y \rightarrow X$ bijektiv. Dies impliziert sofort $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, da $T \in \mathcal{L}(Y, X)$. \square

Definition 3.4. *Sei X Hilbertraum und $a(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. $a(\cdot, \cdot)$ heißt koerziv auf X , gdw.*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \text{für alle } v \in X \quad (3.11)$$

gilt mit einem $\alpha > 0$.

Im Falle von elliptischen Problemen mit symmetrischer, koerziver Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ war die (eindeutige) Lösung der Variationsgleichung

$$u \in X : \quad a(u, \psi) = (f, \psi)_X \quad \text{für alle } \psi \in X \quad (3.12)$$

das eindeutige Minimum der Minimierungsaufgabe

$$I(u) = \min_{\psi \in X} I(\psi) \quad \text{mit} \quad I(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} a(\psi, \psi) - (f, \psi)_X. \quad (3.13)$$

Für das Problem (3.4) hat das Funktional I die Gestalt

$$I(v, q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}a(v, v) + b(v, v) - (f, v)_X - (g, q)_Y \quad \text{für alle } v \in X, q \in Y. \quad (3.14)$$

Die Lösung $(u, p) \in X \times Y$ von (3.4) minimiert allerdings das Funktional I nicht, da I weder von unten noch nach oben beschränkt ist; unter geeigneten Bedingungen ist (u, p) jedoch ein *Sattelpunkt*:

Lemma 3.5. *Es gelte (3.3) und zusätzlich sei $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch und koerziv auf X . Dann ist $(u, p) \in X \times Y$ genau dann eine Lösung von (3.4), wenn*

$$I(u, q) \leq I(u, p) \leq I(v, p) \quad \text{für alle } v \in X, q \in Y \quad (3.15)$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$I(u, p) = \min_{v \in X} I(v, p) = \max_{q \in Y} \min_{v \in X} I(v, q). \quad (3.16)$$

Beweis. siehe Hackbusch [6]. □

3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Sattelpunktproblems

Um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter geeigneten Voraussetzungen an die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ zu beweisen, werden wir die Formulierung (3.4'') verwenden.

Nehmen wir zunächst an, daß $A \in \mathcal{L}(X, X)$ invertierbar ist, so kann (3.4a') nach u aufgelöst werden:

$$u = A^{-1}(f - Bp).$$

Wir wollen versuchen diese Gleichung in eine Gleichung für p umzuformen:

$$A^{-1}Bp = A^{-1}f - u$$

Wenden wir auf diese Gleichung den Operator B^* an so folgt mit (3.4b')

$$B^*A^{-1}Bp = B^*A^{-1}f - B^*u = B^*A^{-1}f - g.$$

Ist also $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ und $(B^*A^{-1}B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, Y)$, so ist das Sattelpunktproblem (3.4) eindeutig lösbar. Eine notwendige Bedingung für die Invertierbarkeit von $B^*A^{-1}B$ ist die Injektivität von $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ (Da $B: Y \rightarrow X$ i.a. nicht invertierbar ist, kann $(B^*A^{-1}B)^{-1}$ i.a. nicht als $B^{-1}A(B^*)^{-1}$ dargestellt werden!).

Für die eindeutige Lösbarkeit von (3.4) muß der Operator A aber nicht auf ganz X invertierbar sein, wie folgendes Beispiel für $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ zeigt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obwohl A singularär ist, ist die 3×3 Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, also kann (3.4) immer eindeutig gelöst werden.

Da $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} N(B^*) \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X ist, besitzt X_0 ein orthogonales Komplement X_\perp , d.h.

$$X = X_0 \oplus X_\perp, \quad X_0 \perp X_\perp.$$

Bezeichnen wir mit $P: X \rightarrow X_0$ die orthogonale Projektion auf X_0 , so ist $(id - P): X \rightarrow X_\perp$ die orthogonale Projektion auf X_\perp . Für $v \in X$ definieren wir die Zerlegung

$$v = Pv + (id - P)v \stackrel{\text{def}}{=} v_0 + v_\perp \quad (3.17)$$

und es gilt

$$\|v\|_X^2 = \|Pv\|_X^2 + \|(id - P)v\|_X^2 = \|v_0\|_X^2 + \|v_\perp\|_X^2. \quad (3.18)$$

Mit Hilfe der orthogonalen Projektion definieren wir eine Blockzerlegung des Operators A

$$\begin{aligned} A_{00} &\stackrel{\text{def}}{=} PAP & A_{0\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} PA(id - P) \\ A_{\perp 0} &\stackrel{\text{def}}{=} (id - P)AP & A_{\perp\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} (id - P)A(id - P). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für die entsprechende Zerlegung

$$B^* = (B_0^*, B_\perp^*) = (B^*P, B^*(id - P)) \quad (3.20)$$

gilt

$$B^* = (0, B_\perp^*) \stackrel{\text{def}}{=} (0, B^*). \quad (3.20')$$

Desweiteren ist $R(B) \subset X_\perp$ und damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Für die Operatoren gilt nun

$$\begin{aligned} A_{00} &\in \mathcal{L}(X_0, X_0), & A_{0\perp} &\in \mathcal{L}(X_\perp, X_0), & B &\in \mathcal{L}(Y, X_\perp) \\ A_{\perp 0} &\in \mathcal{L}(X_0, X_\perp), & A_{\perp\perp} &\in \mathcal{L}(X_\perp, X_\perp), & B^* &\in \mathcal{L}(X_\perp, Y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Damit schreibt sich das System (3.4'') äquivalent als: Finde $(u_0, u_\perp, p) \in X_0 \times X_\perp \times Y$, so daß

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{0\perp} & 0 \\ A_{\perp 0} & A_{\perp\perp} & B \\ 0 & B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_\perp \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_\perp \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } X_0 \times X_\perp \times Y \quad (3.23)$$

gilt, wobei $f = f_0 + f_\perp$ gemäß (3.17) zerlegt ist.

Satz 3.6. *Es seien X, Y reelle Hilberträume und die Bilinearformen $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot)$ erfüllen (3.3). Ferner seien die Operatoren A, B durch (3.5) und die Zerlegung von A gemäß (3.19) gegeben.*

Dann ist das Sattelpunktproblem (3.4) genau dann eindeutig lösbar für alle $f \in X$ und $g \in Y$, falls die Inversen

$$A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(X_0, X_0), \quad B^{-1} \in \mathcal{L}(X_\perp, Y) \quad (3.24)$$

existieren.

Beweis. Wir schreiben (3.23) komponentenweise:

$$A_{00} u_0 + A_{0\perp} u_\perp = f_0 \quad \text{in } X_0 \quad (3.25a)$$

$$A_{\perp 0} u_0 + A_{\perp\perp} u_\perp + Bp = f_\perp \quad \text{in } X_\perp \quad (3.25b)$$

$$B^* u_\perp = g \quad \text{in } Y. \quad (3.25c)$$

Dieses gestaffelte Gleichungssystem läßt sich genau dann eindeutig auflösen, wenn sich zunächst (3.25c) für ein beliebiges $g \in Y$ eindeutig nach u_\perp auflösen läßt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $B^*: X_\perp \rightarrow Y$ invertierbar ist, gdw. $B: Y \rightarrow X_\perp$ invertierbar, gdw. $B^{-1} \in \mathcal{L}(X_\perp, Y)$, da $B \in \mathcal{L}(Y, X_\perp)$.

Als nächstes lösen wir (3.25a) für beliebiges $f_0 \in X_0$ eindeutig nach u_0 auf, d.h. wir müssen die Gleichung

$$A_{00} u_0 = f_0 - A_{0\perp} u_\perp \quad \text{in } X_0$$

eindeutig lösen. Dies ist genau dann möglich, wenn $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(X_0, X_0)$ ist. Gleichung (3.25a) läßt sich nun in eine Gleichung für p umformen

$$Bp = f_\perp - A_{\perp 0} u_0 - A_{\perp\perp} u_\perp \quad \text{in } X_\perp$$

und ist genau dann für jedes $f_\perp \in X_\perp$ eindeutig nach p auflösbar, wenn $B^{-1} \in \mathcal{L}(X_\perp, Y)$ gilt. Dies ist äquivalent zur Invertierbarkeit von B^* , die wir auch schon im ersten Schritt benötigen. \square

Im folgenden Lemma formulieren wir die Bedingung (3.24) nur mit Hilfe der Bilinearformen $a(.,.)$, $b(.,.)$:

Lemma 3.7. *Es seien X, Y reelle Hilberträume und die Bilinearformen $a(.,.)$, $b(.,.)$ erfüllen (3.3). Es sei*

$$X_0 = \{v \in X; b(q, v) = 0 \text{ für alle } q \in Y\}$$

und X_\perp das orthogonale Komplement von X_0 .

Dann ist das Sattelpunktproblem (3.4) genau dann eindeutig lösbar für alle $f \in X$ und $g \in Y$, falls die Babuška–Brezzi–Bedingungen erfüllt sind:

$$\inf_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|v\|_X \|\psi\|_X} \geq \alpha > 0, \quad (3.26a)$$

$$\inf_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|\psi\|_X \|v\|_X} \geq \alpha^* > 0, \quad (3.26b)$$

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} \geq \beta > 0. \quad (3.26c)$$

Desweiteren gilt für die Operatoren A und B definiert durch (3.5)

$$\|A_{00}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_0)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\perp, Y)} \leq \frac{1}{\beta}. \quad (3.27)$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß wieder $X_0 = N(B^*)$ ist, und daß für (3.26c)

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} = \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_\perp \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X}$$

gilt, da $b(\cdot, v) = 0$ ist für alle $v \in X_0$.

Die Babuška–Brezzi–Bedingungen (3.26) lassen sich für die Operatoren A , B äquivalent umformen in

$$\inf_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|v\|_X \|\psi\|_X} = \inf_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_X}{\|v\|_X} \geq \alpha > 0, \quad (3.26a')$$

$$\inf_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|\psi\|_X \|v\|_X} = \inf_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|A^* \psi\|_X}{\|\psi\|_X} \geq \alpha^* > 0, \quad (3.26b')$$

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_\perp \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} = \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|Bq\|_{X_\perp}}{\|q\|_Y} \geq \beta > 0. \quad (3.26c')$$

Damit sind wegen Lemma 3.3 (3.26a) und (3.26b) äquivalent zu $A_{00}^{-1} \in \mathcal{L}(X_0, X_0)$.

Es ist $X_0 = N(B^*)$ und aus (3.26c) folgt die Injektivität von B und die Abgeschlossenheit von $R(B)$. Damit folgt $X_\perp = R(B)$, da wieder unter Benutzung von Lemma 3.3 $X = R(B) \oplus N(B^*)$ gilt. Damit ist $B: Y \rightarrow X_\perp$ invertierbar.

Die umgekehrte Richtung, d.h. $B^{-1} \in \mathcal{L}(X_\perp, Y)$ impliziert (3.26c), folgt nun wie im 1. Teil des Beweises von Lemma 3.3.

Die Abschätzung für $\|A_{00}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_0)}$ folgt aus

$$\|A_{00}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_0)} = \sup_{v \in X_0} \frac{\|A^{-1}v\|_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X_0} \frac{\|v\|_X}{\|Av\|_X} = \left(\inf_{v \in X_0} \frac{\|Av\|_X}{\|v\|_X} \right)^{-1} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Ebenso folgt die Abschätzung für $\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\perp, Y)}$. \square

Korollar 3.8. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.7 erfüllt und es gelten die Babuška–Brezzi–Bedingungen (3.26). Dann gilt für die eindeutige Lösung $(u, p) \in X \times Y$ von (3.4) folgende a priori Abschätzung mit einer Konstanten $C = C(1/\alpha, 1/\beta, C_a)$:*

$$\|u\|_X + \|p\|_Y \leq C (\|f\|_X + \|g\|_Y). \quad (3.29)$$

Beweis. Mit (3.25) folgt

$$\begin{aligned} u_\perp &= B^{*-1}g, \\ u_0 &= A_{00}^{-1}(f_0 - A_{0\perp}u_\perp), \\ p &= B^{-1}(f_\perp - A_{\perp 0}u_0 - A_{\perp\perp}u_\perp). \end{aligned}$$

Sukzessives Abschätzen mit

$$\|A_{00}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_0)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\perp, Y)}, \|B^{*-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X_\perp)} \leq \frac{1}{\beta}$$

und

$$\|A_{0\perp}\|_{\mathcal{L}(X_\perp, X_0)}, \|A_{\perp 0}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\perp)}, \|A_{\perp\perp}\|_{\mathcal{L}(X_\perp, X_\perp)} \leq C_a$$

liefert die Behauptung unter Benutzung der Identität (3.18). \square

Lemma 3.9. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.7 erfüllt.*

1. *Ist $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch auf $X_0 \times X_0$, so folgt aus (3.26a) direkt (3.26b) mit $\alpha^* = \alpha$.*
2. *Ist $a(\cdot, \cdot): X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ koerziv auf X_0 , so sind (3.26a) und (3.26b) erfüllt. Insbesondere folgt dies, wenn $a(\cdot, \cdot)$ auf ganz X koerziv ist.*

Beweis. 1) Für auf X_0 symmetrisches $a(.,.)$ gilt:

$$\begin{aligned} \inf_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|\psi\|_X \|v\|_X} &= \inf_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(\psi, v)}{\|\psi\|_X \|v\|_X} \\ &= \inf_{v \in X_0 \setminus \{0\}} \sup_{\psi \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{a(v, \psi)}{\|v\|_X \|\psi\|_X} \geq \alpha > 0. \end{aligned}$$

2) Ist $a(.,.)$ X -koerziv, so ist $a(.,.)$ insbesondere X_0 -koerziv. Ferner impliziert (3.11) direkt (3.26a) und (3.26b). \square

Als letztes Resultat in diesem Abschnitt zeigen wir, daß der *Schur-Komplement Operator* $B^*A^{-1}B$ auf Y koerziv ist, falls $a(.,.)$ symmetrisch und koerziv auf X ist und $b(.,.)$ die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.26c) erfüllt:

Lemma 3.10. *Es seien X, Y Hilberträume und $a(.,.)$, $b(.,.)$ seien durch (3.3) und A, B durch (3.5) gegeben. Es sei $a(.,.)$ symmetrisch und X -koerziv und $b(.,.)$ erfülle die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.26c). Dann ist der Schur-Komplement Operator $T = B^*A^{-1}B$ ein beschränkter linearer Operator auf Y mit $\|T\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq C_b^2/\alpha$. Ferner ist T selbstadjungiert und koerziv auf Y , d.h.*

$$(Tp, q)_Y = (Tq, p)_Y \quad \text{für alle } q, p \in Y \quad (3.30)$$

und

$$(Tq, q)_Y \geq \gamma \|q\|_Y^2 \quad \text{für alle } q \in Y \quad (3.31)$$

mit $\gamma = \alpha\beta^2/C_a^2$.

Beweis. Die Stetigkeit von T folgt direkt aus der Stetigkeit von A, B und B^* und mit $\|B^*\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|B\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq C_b$ und $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1/\alpha$ folgt die Abschätzung für $\|T\|_{\mathcal{L}(Y,Y)}$. Für beliebiges $p \in Y$ ist $Bp \in X$. Daher gibt es eine eindeutige Lösung $u_p \in X$ der Gleichung

$$Au_p = Bp.$$

Dann ist $Tp = B^*u_p$. Damit folgt

$$(Tq, p)_Y = (B^*u_q, p)_Y = (u_q, Bp)_X = (u_q, Au_p)_X. \quad (3.32)$$

Aus der Symmetrie von $a(.,.)$ folgt die Selbstadjungiertheit von A und damit ist auch T selbstadjungiert. Weiter folgt aus (3.11), (3.26c) und (3.32)

$$\beta^2 \|q\|_Y^2 \leq \|Bq\|_X^2 = \|Au_q\|_X^2 \leq C_a^2 \|u_q\|_X^2 \leq \frac{C_a^2}{\alpha} (Au_q, u_q)_X = \frac{C_a^2}{\alpha} (Tq, q)_Y.$$

Dies zeigt (3.31). \square

3.3 Existenz und Eindeutigkeit des Quasi-Stokes Problems

Nun wollen wir uns mit der Frage von Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Quasi-Stokes Problems (3.1) beschäftigen.

Sei $\mathbf{g} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ eine Fortsetzung der Randdaten $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)$, so daß $\|\mathbf{g}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)}$ gilt. Wir hatten in Kapitel 1 folgende Räume definiert

$$X_{\mathbf{g}} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d); \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

und

$$Y = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q = 0 \right\} \stackrel{\text{def}}{=} L_0^2(\Omega).$$

Für X_0 schreiben wir auch $\mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Gesucht ist $(\mathbf{u}, p) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$, so daß

$$\mu \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0, \quad (3.33a)$$

$$\int_{\Omega} q \mathbf{u} = 0 \quad \text{für alle } q \in Y \quad (3.33b)$$

gilt. Dabei sind $\mu \geq 0$, $\nu > 0$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ eine gegebene äußere Kraft, und $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)$ vorgegebene Randwerte mit $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma} = 0$.

Dies wollen wir mit den Methoden aus dem letzten Abschnitt lösen: Dazu setze $X = X_0$ (beachte $X_0 \neq X_0$ aus dem letzten Kapitel!) und $Y = Y$ und definiere die Bilinearformen $a(., .) : H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, $b(., .) : L^2(\Omega) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) &= \mu \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \\ b(q, \boldsymbol{\psi}) &= - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } q \in L^2(\Omega), \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Damit können (3.33) äquivalent umformen: Gesucht ist $(\mathbf{u}, p) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$, so daß

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + b(p, \boldsymbol{\psi}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X, \\ b(q, \mathbf{u}) &= 0 \quad \text{für alle } q \in Y. \end{aligned}$$

Um das Problem im Hilbertraum $X = X_0$ zu formulieren, gehen wir nun zu $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{g}$ über, so erhalten wir folgende äquivalente Formulierung: Gesucht ist $(\mathbf{v}, p) \in X \times Y$, so daß

$$a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) + b(p, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} - a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X, \quad (3.33a')$$

$$b(q, \mathbf{v}) = -b(q, \mathbf{g}) \quad \text{für alle } q \in Y. \quad (3.33b')$$

Bezeichnen wir noch mit $\tilde{\mathbf{f}} \in X_0$ und $\tilde{g} \in Y$ die Riesz–Projektion der rechten Seiten von (3.33'), d.h.

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{f}}, \boldsymbol{\psi})_X &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} - a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0, \\ (\tilde{g}, q)_Y &= -b(q, \mathbf{g}) \quad \text{für alle } q \in Y, \end{aligned}$$

so können wir (3.33') schreiben als

$$a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) + b(p, \boldsymbol{\psi}) = (\tilde{\mathbf{f}}, \boldsymbol{\psi})_X \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X, \quad (3.33a'')$$

$$b(q, \mathbf{v}) = (\tilde{g}, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y. \quad (3.33b'')$$

Es gilt: $(\mathbf{u}, p) \in X_0 \times Y$ ist genau dann Lösung von (3.33), wenn $(\mathbf{v}, p) \in X \times Y$ Lösung von (3.33'') ist und es ist $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{g}$. (Wichtig: \mathbf{v} ist i.a. keine divergenzfreie Funktion, sondern es gilt $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\operatorname{div} \mathbf{g}$!!!)

Problem (3.33'') können wir nun mit den Methoden aus dem letzten Kapitel lösen:

Lemma 3.11. Für $\mu \geq 0$, $\nu > 0$ ist die Bilinearform $a(.,.) : H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch und koerziv auf $X = X_0$.

Damit sind die Babuška–Brezzi–Bedingungen (3.26a) und (3.26b) erfüllt mit $\alpha = \alpha(\nu, \mu, \Omega)$.

Beweis. Symmetrie ist klar (\checkmark).

Es ist

$$a(v, v) = \mu \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 + \nu |v|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \geq \min(\mu, \nu) \|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2.$$

Ist $\mu > 0$ so folgt die Koerzivität sofort; ansonsten folgt sie mit Poincaré auf $\mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$\|v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 + |v|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2 \leq (c_p^2 + 1) |v|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2.$$

Damit folgt schließlich

$$a(v, v) \geq \max(\min(\mu, \nu), \frac{\nu}{c_p^2 + 1}) |v|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}^2.$$

Da $c_p = C(\Omega)$ gilt ist $a(.,.)$ koerziv auf X_0 mit $\alpha = \alpha(\nu, \mu, \Omega)$.

Die Babuška–Brezzi–Bedingungen (3.26a) und (3.26b) folgen aus Korollar 3.9. \square

Nun müssen wir noch nachweisen, daß die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.26c) für das oben definierte $b(.,.)$ erfüllt ist, d.h. wir haben zu zeigen, daß ein $\beta > 0$ existiert, so daß

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|q\|_Y \|\mathbf{v}\|_X} = \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{-\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}} \geq \beta \quad (3.37)$$

gilt.

Lemma 3.12. Die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.37) ist genau dann erfüllt, wenn für alle $q \in L_0^2(\Omega)$ ein $\mathbf{v}_q \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ existiert, so daß

$$-\operatorname{div} \mathbf{v}_q = q \quad \text{und} \quad \|\mathbf{v}_q\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq \beta^{-1} \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.38)$$

gilt.

Beweis. Es gelte (3.38). Dann ist

$$\begin{aligned} \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{-\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}} &\geq \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}_q}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_q\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}} \\ &= \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \beta^{-1} \|q\|_{L^2(\Omega)}} = \beta. \end{aligned}$$

Mit $V_0 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}$ ist $X_0 = V_0$ und $X_{\perp} = V_0^{\perp}$. Ist nun (3.37) erfüllt, so ist $B^{*-1} \in \mathcal{L}(Y, X_{\perp})$ invertierbar mit $\|B^{*-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X_{\perp})} \leq \beta^{-1}$. Sei nun $q \in Y$ beliebig. Dann erfüllt $\mathbf{v}_q \stackrel{\text{def}}{=} B^{*-1}q$

$$B^* \mathbf{v}_q = q, \quad \text{gdw.} \quad - \int_{\Omega} r \operatorname{div} \mathbf{v}_q = \int_{\Omega} r q \quad \text{für alle } r \in L_0^2(\Omega), \quad \text{gdw.} \quad - \operatorname{div} \mathbf{v}_q = q$$

und

$$\|\mathbf{v}_q\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \|\mathbf{v}_q\|_X \leq \|B^{*-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X_{\perp})} \|q\|_Y \leq \beta^{-1} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da $q \in Y$ beliebig war folgt die Behauptung. \square

Die Existenz eines solchen \mathbf{v}_q liefert der nächste

Satz 3.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Dann gibt es für alle $q \in L_0^2(\Omega)$ ein $\mathbf{v}_q \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit*

$$-\operatorname{div} \mathbf{v}_q = q \quad \text{in } \Omega. \quad (3.39a)$$

Ferner gibt es eine Konstante $\beta = \beta(\Omega)$, so daß

$$\|\mathbf{v}_q\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq \beta^{-1} \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.39b)$$

gilt.

Dieser Satz wird von Nečas in [3] bewiesen. Damit folgt der

Satz 3.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und mit Lipschitz-Rand. Es sei $\mu \geq 0$ und $\nu > 0$. Dann hat das Quasi–Stokes–Problem*

$$\mu \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.40a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.40b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.40c)$$

für jedes $\mathbf{f} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und jedes $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\boldsymbol{\sigma} = 0$ genau eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ und es gibt eine Konstante $C = C(\nu, \mu, \Omega)$, so daß

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)} \right) \quad (3.41)$$

gilt.

Beweis. Die schwache Form von (3.40) ist (3.33). Diese ist äquivalent zu (3.33'') mit $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{g}$. Lemma 3.11 liefert die Babuška–Brezzi–Bedingungen (3.26a) und (3.26b) mit $\alpha^* = \alpha = \alpha(\nu, \mu, \Omega)$, Satz 3.13 liefert die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.26c) mit $\beta = \beta(\Omega)$. Damit gibt es eine eindeutige Lösung $(\mathbf{v}, p) \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ von (3.33'') und damit eine eindeutige schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ von (3.40).

Mit Korollar 3.8 angewendet auf die Lösung (\mathbf{v}, p) von (3.33'') mit den rechten Seiten $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{g}$ erhalten wir die a priori Abschätzung

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\nu, \mu, \Omega) \left(\|\tilde{\mathbf{f}}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|\tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

für \mathbf{v} und p . Da

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} + C_a \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)}, \\ \|\tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} &= \|\operatorname{div} \mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

gilt folgt mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{g}$ die a priori Abschätzung (3.41) sofort. \square

Bemerkung 3.15. Obige Behauptung gilt auch falls nur $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt. In diesem Falle ist $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}$ durch $\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^d)}$ zu ersetzen.

Wir beenden diese Kapitel mit dem folgenden Regularitätsresultat:

Satz 3.16. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.14 erfüllt. Zusätzlich sei für $k \in \mathbb{N}_0$ $\mathbf{f} \in H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und es gebe eine Fortsetzung $\mathbf{g} \in H^{k+2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ der Randdaten \mathbf{g} . Ist der Rand von Ω genügend glatt, so gilt für die Lösung (\mathbf{u}, p) von (3.40):*

$$(\mathbf{u}, p) \in (H^{k+2}(\Omega; \mathbb{R}^d) \cap X_g) \times (H^{k+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \quad \text{und} \quad (3.42a)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{k+2}(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{k+2}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \right) \quad (3.42b)$$

mit einer Konstanten $C = C(\nu, \mu, \Omega)$.

Zum Beweis siehe z.B. Ladyshenskaja [7].

3.4 Diskretisierung von Sattelpunktproblemen

Zur Diskretisierung von (3.4) gibt es zwei Möglichkeiten:

Die **1. Möglichkeit** ist eine Diskretisierung von $X_0 = N(B^*)$. Dies ist i.a. nicht einfach und führt für Quasi-Stokes zu den divergenzfreien Elementen (Stichwort *Nicht-konforme divergenzfreie Elemente*).

Die **2. Möglichkeit**, die wir im folgenden analysieren werden, ist eine direkte Diskretisierung des Sattelpunktproblems (3.4):

Seien dazu $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ lineare Teilräume. Dann lautet das diskrete Problem: Finde $(u_h, p_h) \in X_h \times Y_h$, so daß

$$a(u_h, \psi) + b(p_h, \psi) = (f, \psi)_X \quad \text{für alle } \psi \in X_h, \quad (3.43a)$$

$$b(q, u_h) = (g, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y_h \quad (3.43b)$$

gilt, bzw. in Operatorschreibweise

$$(u_h, p_h) \in X_h \times Y_h : \quad \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h \\ p_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_h \\ g_h \end{bmatrix} \quad \text{in } X_h \times Y_h. \quad (3.43')$$

Dabei sind die Operatoren A_h , B_h und B_h^* definiert durch

$$A_h \in \mathcal{L}(X, X_h) : \quad (A_h v, \psi)_X = a(v, \psi) \quad \text{für alle } v \in X, \psi \in X_h, \quad (3.44a)$$

$$B_h \in \mathcal{L}(Y, X_h) : \quad (B_h q, v)_X = b(q, v) \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X_h \quad (3.44b)$$

und

$$B_h^* \in \mathcal{L}(X, Y_h) : \quad (B_h^* v, q)_Y = b(q, v) \quad \text{für alle } v \in X, q \in Y_h. \quad (3.44c)$$

Da $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ ist, sind damit auch $A_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$, $B_h \in \mathcal{L}(Y_h, X_h)$ und $B_h^* \in \mathcal{L}(X_h, Y_h)$ wohldefiniert. Als Operator $B_h^* \in \mathcal{L}(X_h, Y_h)$ ist B_h^* die Adjungierte zu $B_h \in \mathcal{L}(Y_h, X_h)$.

Die Funktionen $f_h \in X_h$ und $g_h \in Y_h$ sind die Projektionen von $f \in X$ auf X_h bzw. $g \in Y$ auf Y_h , d.h.

$$(f_h, \psi)_X = (f, \psi)_X \quad \text{für alle } \psi \in X_h, \quad (g_h, q)_Y = (g, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y_h. \quad (3.45a)$$

Bemerkung 3.17. Für $g = 0$ ist $u \in N(B^*)$ und $u_h \in N(B_h^*)$. I.a. gilt $N(B^*) \neq N(B_h^*)$ und damit ist i.a. $B^* u_h \neq 0$.

Für Quasi-Stokes ist

$$B^* = -\operatorname{div}$$

und es ist

$$\operatorname{div} : \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow L_0^2(\Omega)$$

wohldefiniert und mit Satz 3.13 surjektiv. Verwenden wir stetige stückweise polynomiale Elemente für die Geschwindigkeit und den Druck, so ist i.a. $\operatorname{div} \mathbf{u}_h \notin Y_h$, da $\operatorname{div} \mathbf{u}_h$ i.a. unstetig über Elementgrenzen hinweg ist. Allerdings ist auch i.a. $B_h^* \mathbf{u}_h \neq -\operatorname{div} \mathbf{u}_h$ in $L^2(\Omega)$.

Es gibt eine Abbildung

$$\operatorname{div}_h : X_h \rightarrow Y_h,$$

so daß

$$B_h^* \mathbf{u}_h = -\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h \quad \text{für alle } \mathbf{u}_h \in X_h$$

gilt. Für $\mathbf{u}_h \in X_h$ ist das Element $\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h \in Y_h$ eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$-\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h \in Y_h : \quad -\int_{\Omega} \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h q = (B_h^* \mathbf{u}_h, q)_{L^2(\Omega)} = -\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h q \quad \text{für alle } q \in Y_h, \quad (3.46)$$

d.h. $\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h$ ist die L^2 -Projektion auf Y_h der L^2 -Funktion $\operatorname{div} \mathbf{u}_h$. Also muß bei jeder Berechnung von $B_h^* \mathbf{u}_h$ ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, wobei die Systemmatrix gerade die Massmatrix des Druckraums ist.

Für die eindeutige Lösbarkeit von (3.43) müssen die Babuška–Brezzi–Bedingungen nun für die Räume X_h, Y_h erfüllt sein, d.h. (3.26) muß mit Konstanten $\alpha_h > 0$, $\alpha_h^* > 0$ und $\beta_h > 0$ erfüllt sein, d.h. es muß z.B.

$$\inf_{q \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} \geq \beta_h$$

gelten. Dies gibt eine Bedingung an die Kombination der Räume X_h, Y_h : in einem geeigneten Sinn muß der Raum X_h groß genug sein im Vergleich zum Raum Y_h . Da desweiteren die Stabilitätseigenschaften des diskreten Problems und die Fehlerabschätzungen von den Konstanten $1/\alpha_h$, $1/\alpha_h^*$ und $1/\beta_h$ abhängen, benötigen wir den Begriff der *stabilen* Diskretisierung:

Definition 3.18. Eine Familie $(X_h, Y_h)_{h>0} \subset (X, Y)$ heißt Familie stabiler Diskretisierung von (3.4), falls die Konstanten $\alpha_h > 0$, $\alpha_h^* > 0$ und $\beta_h > 0$ aus der Babuška–Brezzi–Bedingung (3.26) für X_h, Y_h sich unabhängig von h nach unten abschätzen lassen, d.h. es gibt Konstanten $\tilde{\alpha} > 0$, $\tilde{\alpha}^* > 0$ und $\tilde{\beta} > 0$, so daß

$$\alpha_h > \tilde{\alpha}, \quad \alpha_h^* > \tilde{\alpha}^*, \quad \text{und} \quad \beta_h > \tilde{\beta} \quad \text{für alle } h > 0 \quad (3.47)$$

gilt.

Die Familie heißt konsistent, falls für alle $u \in X$ und $p \in Y$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y = 0 \quad (3.48)$$

gilt.

Bemerkung 3.19. Wir müssen keine Bedingung an die Operatornormen von A_h und B_h stellen, da aus (3.44) sofort

$$\|A_h\|_{\mathcal{L}(X_h, X_h)} \leq C_a \quad \text{und} \quad \|B_h\|_{\mathcal{L}(Y_h, X_h)}, \|B_h^*\|_{\mathcal{L}(X_h, Y_h)} \leq C_b$$

folgt. Ist $a(\cdot, \cdot)$ koerziv auf X mit Konstante $\alpha > 0$, so folgt mit Korollar 3.9 sofort

$$\alpha_h, \alpha_h^* \geq \alpha,$$

d.h. (3.47) ist mit $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^* = \alpha$ erfüllt.

Schwieriger ist es allerdings, eine Familie $(X_h, Y_h)_{h>0}$ zu finden, so daß (3.26c) gleichmäßig in h für X_h, Y_h erfüllt ist.

Lemma 3.20. *Es sei $(X_h, Y_h)_{h>0} \subset (X, Y)$ eine Folge stabiler Diskretisierungen von (3.4). Dann gibt es eine Konstante $C = C(1/\tilde{\alpha}, 1/\tilde{\beta}, C_a)$, so daß für alle $v_h \in X_h$, $q_h \in Y_h$*

$$\|v_h\|_X + \|q_h\|_Y \leq C (\|A_h v_h + B_h q_h\|_X + \|B_h^* v_h\|_Y) \quad (3.49)$$

gilt.

Beweis. Definiere $f_h \in X_h$ und $g_h \in Y_h$ durch

$$f_h = A_h v_h + B_h q_h \quad \text{und} \quad g_h = B_h^* v_h.$$

Dann ist

$$\|f_h\|_X \leq \|A_h v_h + B_h q_h\|_X \quad \text{und} \quad \|g_h\|_Y = \|B_h^* v_h\|_Y$$

und (v_h, q_h) ist Lösung von (3.8) mit rechter Seite $(f_h, g_h) \in X_h \times Y_h$. Nun folgt die Behauptung mit Korollar 3.8 (X durch X_h , f durch f_h , Y durch Y_h und g durch g_h ersetzt). \square

Damit beweisen wir den folgenden

Satz 3.21. *Es sei $(X_h, Y_h)_{h>0} \subset (X, Y)$ eine Familie stabiler Diskretisierungen von (3.4). Sei $(u, p) \in X \times Y$ Lösung von (3.4) und $(u_h, p_h) \in X_h \times Y_h$ sei Lösung von (3.43). Dann gibt es eine Konstante $C = C(1/\tilde{\alpha}, 1/\tilde{\beta}, C_a, C_b)$, so daß*

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Y \leq C \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right) \quad (3.50)$$

gilt. Insbesondere ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Y = 0$$

für eine konsistente Familie.

Beweis. Da $X_h \times Y_h \subset X \times Y$ ist, können wir die Funktionen aus $X_h \times Y_h$ in (3.4) einsetzen und (3.43) subtrahieren. Damit erhalten wir folgende *Orthogonalität* des Fehlers:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h) + b(p - p_h, v_h) &= 0 \\ b(q_h, u - u_h) &= 0 \end{aligned} \quad \text{für alle } v_h \in X_h, q_h \in Y_h. \quad (3.51)$$

Verwenden wir die Operatoren $A_h \in \mathcal{L}(X, X_h)$, $B_h \in \mathcal{L}(Y, X_h)$ und $B_h^* \in \mathcal{L}(X, Y_h)$ aus (3.44) so schreibt sich (3.51) als

$$\begin{aligned} A_h(u - u_h) + B_h(p - p_h) &= 0 & \text{in } X_h, \\ B_h^*(u - u_h) &= 0 & \text{in } Y_h, \end{aligned}$$

bzw.

$$A_h u + B_h p = A_h u_h + B_h p_h \quad \text{in } X_h, \quad (3.52a)$$

$$B_h^* u = B_h^* u_h \quad \text{in } Y_h. \quad (3.52b)$$

Verwenden wir nun Lemma 3.20, so ergibt sich für beliebige $(v_h, q_h) \in X_h \times Y_h$ mit einer Konstanten $C = C(1/\tilde{\alpha}, 1/\tilde{\beta}, C_a)$ und (3.52)

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\|_X + \|p_h - q_h\|_Y &\leq C (\|A_h(u_h - v_h) + B_h(p_h - q_h)\|_X + \|B_h^*(u_h - v_h)\|_Y) \\ &= C (\|A_h u_h + B_h p_h - (A_h v_h + B_h q_h)\|_X + \|B_h^*(u_h - v_h)\|_Y) \\ &= C (\|A_h u + B_h p - (A_h v_h + B_h q_h)\|_X + \|B_h^*(u_h - v_h)\|_Y) \\ &\leq C ((C_a + C_b)\|u - v_h\|_X + C_b\|p - q_h\|_Y). \end{aligned}$$

Damit folgt mit einer Konstanten $C = C(1/\tilde{\alpha}, 1/\tilde{\beta}, C_a, C_b)$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Y &\leq \|u - v_h\|_X + \|p - q_h\|_Y + \|u_h - v_h\|_X + \|p_h - q_h\|_Y \\ &\leq \|u - v_h\|_X + \|p - q_h\|_Y + C(\|u - v_h\|_X + \|p - q_h\|_Y) \\ &\leq (C + 1)(\|u - v_h\|_X + \|p - q_h\|_Y). \end{aligned}$$

Da $(v_h, q_h) \in X_h \times Y_h$ beliebig war folgt damit die Behauptung. \square

Nun müssen wir uns noch mit der Frage der stabilen Diskretisierungen beschäftigen. Denn dann folgen Konvergenzaussagen wie üblich mit Hilfe von Interpolationsabschätzungen. Zunächst ein Lemma, welches den Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen Babuška–Brezzi–Bedingung (3.26c) und der diskreten aufzeigt:

Lemma 3.22. *Es seien X, Y Hilberträume und $b(\cdot, \cdot): Y \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform für die (3.26c) erfüllt ist, d.h. es gibt ein $\beta > 0$, so daß*

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} \geq \beta$$

gilt. Ferner seien $X_h \subset X$ und $Y_h \subset Y$ lineare Teilräume. Das Paar (X_h, Y_h) ist genau dann eine stabile Diskretisierung, wenn ein $\Pi_h \in \mathcal{L}(X, X_h)$ existiert, so daß

$$b(q_h, v) = b(q_h, \Pi_h v) \quad \text{für alle } v \in X, q_h \in Y_h \quad (3.53a)$$

gilt und die Abschätzung

$$\|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X_h)} \leq C \quad (3.53b)$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C erfüllt ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: Da (X_h, Y_h) n.V. eine stabile Diskretisierung ist, können wir wie üblich $X_h = X_{h,0} \oplus X_{h,\perp} = N(B_h^*) \oplus R(B_h)$ zerlegen und es ist $B_h: Y_h \rightarrow X_{h,\perp}$ invertierbar. Diese invertierbare Abbildung bezeichnen wir mit $B_{h,\perp}: Y_h \rightarrow X_{h,\perp}$ und damit ist $B_{h,\perp}^{-1} \in \mathcal{L}(Y_h, X_{h,\perp})$. Verwenden wir weiterhin B_h^* als Operator $B_h^*: X \rightarrow Y_h$, so können wir nun für $v \in X$ das Element $\Pi_h v \in X_h$ wie folgt definieren

$$\Pi_h v \stackrel{\text{def}}{=} B_{h,\perp}^{*-1} B_h^* v,$$

und es gilt

$$b(q_h, \Pi_h v) = (B_h^* \Pi_h v, q_h)_Y = (B_h^* B_{h,\perp}^{*-1} B_h^* v, q_h)_Y = (B_h^* v, q_h)_Y = b(q_h, v)$$

für alle $q_h \in Y_h$. Ferner ist

$$\|\Pi_h v\|_X = \|B_{h,\perp}^{*-1} B_h^* v\|_X \leq \|B_{h,\perp}^{*-1}\|_{\mathcal{L}(Y_h, X_{h,\perp})} \|B_h^*\|_{\mathcal{L}(X, Y_h)} \|v\|_X \leq \frac{C_b}{\beta} \|v\|_X,$$

also ist $C = C_b/\tilde{\beta}$ in (3.53b).

„ \Leftarrow “: Es ist

$$\begin{aligned} \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(q_h, v_h)}{\|q_h\|_Y \|v_h\|_X} &\geq \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q_h, \Pi_h v)}{\|q_h\|_Y \|\Pi_h v\|_X} \\ &= \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_X}{\|\Pi_h v\|_X} \frac{b(q_h, \Pi_h v)}{\|q_h\|_Y \|v\|_X} \\ &\geq \frac{1}{C} \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q_h, v)}{\|q_h\|_Y \|v\|_X} \\ &\geq \frac{1}{C} \inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} \geq \frac{\beta}{C}. \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\beta} \geq \beta/C$. □

Bemerkung 3.23. Für das Quasi-Stokes Problem (3.40) ist die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.37) äquivalent zur Lösung der Divergenzgleichung (3.39), d.h. für alle $q \in L_0^2(\Omega)$ gibt es ein $\mathbf{v} \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit

$$-\operatorname{div} \mathbf{v} = q \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq \beta^{-1} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies ist äquivalent zur Surjektivität des Operators

$$-\operatorname{div} : \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow L_0^2(\Omega).$$

Für die diskrete Divergenz $-\operatorname{div}_h : X_h \rightarrow Y_h$ definiert für $\mathbf{v}_h \in X_h$ durch

$$-\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \in Y_h : \quad - \int_{\Omega} \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h q_h = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h q_h \quad \text{für alle } q \in Y_h$$

gilt nun auch: (X_h, Y_h) ist genau dann eine stabile Diskretisierung, wenn die diskrete Divergenzgleichung lösbar ist, d.h. für alle $q_h \in Y_h$ ein $\mathbf{v}_h \in X_h$ existiert, so daß

$$-\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = q_h \quad \text{und} \quad \|\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h\|_X \leq \tilde{\beta}^{-1} \|q_h\|_Y. \quad (3.54)$$

Beweis. „ \Leftarrow “: Es gelte (3.54). Dann ist

$$\begin{aligned} \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{- \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h}{\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}} &\geq \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h}{\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)}} \\ &= \inf_{q_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{\|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \tilde{\beta} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}} = 1/\tilde{\beta}. \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “: Ist nun X_h, Y_h eine stabile Diskretisierung, so gibt es nach Lemma 3.22 ein $\Pi_h \in \mathcal{L}(\dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d), X_h)$, so daß für alle $V \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$- \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v} = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \Pi_h \mathbf{v} \quad \text{für alle } q_h \in Y_h$$

gilt. Mit der diskreten Divergenz $-\operatorname{div}_h \in \mathcal{L}(X_h, Y_h)$ folgt dann auch sofort

$$- \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v} = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \Pi_h \mathbf{v} = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}_h \Pi_h \mathbf{v} \quad \text{für alle } q_h \in Y_h$$

Sei nun also $q_h \in Y_h$ beliebig. Mit Satz 3.13 gibt es nun ein $\mathbf{v}_{q_h} \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit

$$-\operatorname{div} \mathbf{v}_{q_h} = q_h \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \|\mathbf{v}_{q_h}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq \beta^{-1} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einem $\beta = \beta(\Omega)$. Für $\mathbf{v}_{h,q_h} = \Pi_h \mathbf{v}_{q_h}$ gilt nun

$$-\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{h,q_h} = q_h$$

und

$$\|\mathbf{v}_{h,q_h}\|_X \leq \|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X_h)} \|\mathbf{v}_{q_h}\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq \|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X_h)} \beta^{-1} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

also können wir die diskrete Divergenzgleichung lösen mit $\tilde{\beta} = \beta/\|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X, X_h)}$. □

3.5 Stabile Diskretisierungen für Quasi–Stokes

In diesem Abschnitt wollen wir stabile Diskretisierung für das Quasi–Stokes Problem angeben. Der Einfachheit halber werden wir uns auf Randwerte $\mathbf{g} = 0$ beschränken.

Im folgenden sei immer $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und mit polygonalem Rand. \mathcal{T} sei eine reguläre Triangulierung von Ω in abgeschlossene d –Simplizes T . Für $T \in \mathcal{T}$ sei $\mathbb{P}(T; \mathbb{R}^d)$ ein endlichdimensionaler Funktionenraum, so daß $\mathbb{P}_1(T; \mathbb{R}^d) \subset \mathbb{P}(T; \mathbb{R}^d)$ gilt. Definiere als Ansatzraum für die Geschwindigkeit

$$X_h = \left\{ \boldsymbol{\psi} \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d); \boldsymbol{\psi}|_T \in \mathbb{P}(T; \mathbb{R}^d) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\} \quad (3.55a)$$

und setze

$$X_{h,0} = X_h \cap \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d). \quad (3.55b)$$

Für $T \in \mathcal{T}$ sei $\tilde{\mathbb{P}}(T)$ ein weiterer endlichdimensionaler Funktionenraum für den $\mathbb{P}_1(T) \subset \mathbb{P}(T)$ gilt. Für die Approximation des Druckes definiere

$$Y_h = \left\{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}); \varphi|_T \in \tilde{\mathbb{P}}(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\} \quad (3.56a)$$

und setze

$$Y_{h,0} = X_h \cap L_0^2(\Omega). \quad (3.56b)$$

Die Interpolationsabschätzungen für X_h und $X_{h,0}$ sind standard. Für die Interpolation in den Druckraum $Y_{h,0}$ beweisen wir das

Lemma 3.24. *Sei $k \geq 1$ und $I_h: H^k(\Omega) \rightarrow Y_h$ ein Interpolationsoperator, so daß für alle $l \leq k$ und alle $q \in H^k(\Omega)$*

$$|q - I_h q|_{H^l(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2(k-l)} |q|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2}$$

gilt. Dann erfüllt der Interpolationsoperator $I_{h,0}: H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \rightarrow Y_{h,0}$ definiert durch

$$I_{h,0} q \stackrel{\text{def}}{=} I_h q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I_h q \quad \text{für alle } q \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \quad (3.57a)$$

die gleichen Abschätzungen wie I_h , d.h.

$$|q - I_{h,0} q|_{H^l(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2(k-l)} |q|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{für alle } q \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega). \quad (3.57b)$$

Beweis. Wir müssen nur den Fall $l = 0$ betrachten, da für $l \geq 1$

$$D^l I_{h,0} q = D^l (I_h q - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I_h q) = D^l I_h q$$

gilt. Für $l = 0$ ist

$$\begin{aligned} \|q - I_{h,0} q\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|q - I_h q\|_{L^2(\Omega)} + \frac{|\Omega|^{1/2}}{|\Omega|} \int_{\Omega} I_h q = \|q - I_h q\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \int_{\Omega} I_h q - q \\ &\leq 2\|q - I_h q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2(k-l)} |q|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Die einfachste stabile Triangulierung ist das sogenannte *Mini-Element*. Als Beispiel wollen wir hier den Stabilitätsbeweis führen. Dafür benötigen wir den folgenden

Satz 3.25 (Clément–Interpolierende). *Es seien X_h und $X_{h,0}$ durch (3.55) gegeben. Für $T \in \mathcal{T}$ definiere*

$$M_T \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{T' \in \mathcal{T} \\ T' \cap T \neq \emptyset}} T'$$

Dann gibt es Interpolationsoperatoren

$$R_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), X_h) \quad \text{und} \quad \mathring{R}_h \in \mathcal{L}(\mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d), X_{h,0}), \quad (3.58)$$

so daß mit einer Konstante c , die von der Regularität der Triangulierung abhängt, für alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$\|\mathbf{v} - R_h \mathbf{v}\|_{L^2(T; \mathbb{R}^d)} \leq c h_T \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(M_T; \mathbb{R}^d)}, \quad (3.59a)$$

$$\|\nabla R_h \mathbf{v}\|_{L^2(T; \mathbb{R}^d)} \leq c \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(M_T; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.59b)$$

Da für alle $T \in \mathcal{T} \setminus \{T' \in \mathcal{T}; M_T \cap M_{T'} \neq \emptyset\} \leq c$ gilt, folgt damit sofort für alle $\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$\|\mathbf{v} - R_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(T; \mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.59c)$$

$$\|\nabla R_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.59d)$$

Die selben Abschätzungen folgen auch für $\mathbf{v} \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, wenn R_h in (3.59) durch \mathring{R}_h ersetzt wird.

Zum Beweis siehe Clément [4].

Damit können wir nun folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.26 (Mini–Element). *Für $T \in \mathcal{T}$ seien $\lambda^T = \lambda_0^T, \dots, \lambda_d^T$ die baryzentrischen Koordinaten des Simplex T . Setze*

$$b_T(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^d \lambda_i^T(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in T$$

und definiere

$$\mathbb{P}(T; \mathbb{R}^d) = \mathbb{P}_1(T; \mathbb{R}^d) \oplus \text{span}\{b_T\}^d \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbb{P}}(T) = \mathbb{P}_1(T). \quad (3.60)$$

Dann ist die Diskretisierung $(X_{h,0}, Y_{h,0})$ — das sogenannte Mini-Element — stabil.

Gilt für die schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ von (3.40) mit $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ zusätzlich $(\mathbf{u}, p) \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega)$, und ist $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_{h,0} \times Y_{h,0}$ die diskrete Lösung, so gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \left(|\mathbf{u}|_{H^2(T; \mathbb{R}^d)}^2 + |p|_{H^1(T; \mathbb{R}^d)}^2 \right) \right)^{1/2}. \quad (3.61)$$

Beweis. Sei $\mathbf{v}_h \in X_{h,0}$ beliebig. Dann ist $\mathbf{v}_h|_T$ eine lineare Funktion plus einem Anteil der auf dem Rand von T verschwindet. Sei $\mathring{R}_h \in \mathcal{L}(\mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d), X_{h,0})$ die Clément–Interpolierende aus Satz 3.25. Dann können wir zu $\mathbf{v} \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ wie folgt eine Interpolierende

$$\Pi_h \in \mathcal{L}(\mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d), X_{h,0}) \quad \text{mit} \quad -\text{div}_h \mathbf{v} = -\text{div}_h \Pi_h \mathbf{v}$$

definieren: Seien a_1, \dots, a_N die Knoten der Triangulierung. Setze

$$\begin{aligned} (\Pi_h \mathbf{v})(a_j) &= (\mathring{R}_h \mathbf{v})(a_j) & j &= 1, \dots, N, \\ \int_T \Pi_h \mathbf{v} &= \int_T \mathring{R}_h \mathbf{v} & T &\in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Dies sind $(N + |\mathcal{T}|)d$ linear unabhängige Gleichungen für $(N + |\mathcal{T}|)d$ Unbekannte. Also definieren diese Gleichungen eindeutig ein Element aus X_h . Da $\mathring{R}_h \mathbf{v}$ und auch alle Bubble-Funktionen auf dem Rand von Ω verschwinden, folgt sofort $\Pi_h \mathbf{v} \in X_{h,0}$.

Da $Y_h \subset H^1(\Omega)$ ist, folgt nun für alle $\mathbf{v} \in \mathring{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $q_h \in Y_h$ mittels partieller Integration und da $\nabla q_h \equiv \text{const}$ auf T für alle $T \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} b(q_h, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \mathbf{v} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla q_h \cdot \mathbf{v} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \nabla q_h \cdot \int_T \mathbf{v} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \nabla q_h \cdot \int_T \Pi_h \mathbf{v} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla q_h \cdot \Pi_h \mathbf{v} \\ &= \int_{\Omega} \nabla q_h \cdot \Pi_h \mathbf{v} = - \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \Pi_h \mathbf{v} = b(q_h, \Pi_h \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_T b_T = \frac{(d+1)!d!}{(2d+1)!} |T| \quad \text{und} \quad |b_T|_{H^1(T)} \leq c \frac{|T|^{1/2}}{h_T}.$$

und auf T ist

$$\Pi_h \mathbf{v} = \mathring{R}_h \mathbf{v} + \frac{b_T}{\int_T b_T} \left[\int_T \mathbf{v} - \int_T \mathring{R}_h \mathbf{v} \right].$$

Nun folgt mit (3.59a)

$$\left| \int_T \mathbf{v} - \mathring{R}_h \mathbf{v} \right| \leq |T|^{1/2} \|\mathbf{v} - \mathring{R}_h \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \leq c |T|^{1/2} h_T \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(M_T)}.$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \|\nabla \Pi_h \mathbf{v}\|_{L^2(T)} &\leq \|\nabla \mathring{R}_h \mathbf{v}\|_{L^2(T)} + c \frac{(d+1)!d!}{(2d+1)!|T|} \frac{|T|^{1/2}}{h_T} |T|^{1/2} h_T \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(M_T)} \\ &\leq c \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(M_T)}. \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren folgt nun direkt

$$\|\nabla \Pi_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h. Π_h ist ein stetiger linearer Operator. Nun folgt die Stabilität mit Lemma 3.22.

Die Fehlerabschätzung folgt nun direkt mit Satz 3.21 aus den Interpolationsabschätzungen für $X_{h,0}$ mit Hilfe des Lagrange Interpolationsoperators und für $Y_{h,0}$ mit Lemma 3.24 und der Clément–Interpolierenden für Y_h . \square

Als letztes zitieren wir noch folgenden

Satz 3.27 (Taylor–Hood–Element). *Es sei $d = 2, 3$, $k \geq 2$ und $\mathbb{P}(T; \mathbb{R}^d) = \mathbb{P}_k(T; \mathbb{R}^d)$ und $\tilde{\mathbb{P}}(T) = \mathbb{P}_{k-1}(T)$. Dann ist die Diskretisierung $X_{h,0}, Y_{h,0}$ — das sogenannte Taylor–Hood–Element — stabil.*

Gilt für die schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ von (3.40) mit $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ zusätzlich $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega; \mathbb{R}^d) \times H^k(\Omega)$, und ist $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_{h,0} \times Y_{h,0}$ die diskrete Lösung, so gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2k} \left(|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(T; \mathbb{R}^d)}^2 + |p|_{H^k(T; \mathbb{R}^d)}^2 \right) \right)^{1/2}. \quad (3.62)$$

Zum Beweis siehe Otto [9].

3.6 Gradienten–Verfahren im Hilbertraum

Die Einführung in die Gradienten–Verfahren lehnt sich an die Vorlesung von Alt [1] an.

Im folgenden sei Y ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_Y$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|_Y$. Es sei $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar. Ferner sei T selbstadjungiert und koerziv, d.h.

$$(Tp, q)_Y = (p, Tq)_Y, \quad \text{für alle } p, q \in Y, \quad (3.63)$$

$$(Tp, p)_Y \geq \alpha \|p\|_Y^2, \quad \text{für alle } p \in Y, \quad (3.64)$$

mit einem $\alpha > 0$.

Gegeben sei ein beliebiges $b \in Y$. Dann wollen wir das Problem

$$\hat{p} \in Y : \quad T\hat{p} = b \quad (3.65)$$

lösen.

Da T symmetrisch ist, ist die Abbildung $r: Y \rightarrow Y$.

$$r(q) = Tq - b, \quad (3.66)$$

ein Gradientenoperator, denn für $I: Y \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (Tq, q)_Y - (b, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y, \quad (3.67)$$

gilt

$$DI(q) = Tq - b = r(q) \quad \text{für alle } q \in Y.$$

Sei nun $Y_m \subset Y$ ein abgeschlossener Teilraum von Y . Da T koerziv auf Y und damit auch auf Y_m ist, gilt

$$I(q) = \frac{1}{2} (Tq, q)_Y - (b, q)_Y \geq \gamma \|q\|_Y^2 - \|b\|_Y \|q\|_Y \rightarrow \infty \quad (3.68)$$

für $q \in Y_m$ und $\|q\|_Y \rightarrow \infty$. Da Y abgeschlossen ist, gibt es ein eindeutiges $q^m \in Y_m$, so daß

$$I(q^m) = \min_{q \in Y_m} I(q) \quad (3.69)$$

gilt. Aufgrund der Minimalität von q^m folgt nun

$$0 = (DI(q^m), q)_Y = (Tq^m - b, q)_Y = (r(q^m), q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y_m. \quad (3.70)$$

Ist $Y_m = Y$, so ist $q^m = \hat{p}$ die gesuchte Lösung von (3.65).

Wir werden nun die Lösung \hat{p} approximieren, indem wir das Funktional I auf einer Folge von abgeschlossenen Unterräumen minimieren, auf denen sich das Minimum einfach berechnen läßt.

Für einen abgeschlossenen Teilraum $Y_0 \subset Y$ bezeichnen wir mit Y_\perp sein orthogonales Komplement in Y , d.h.

$$Y = Y_0 \oplus Y^\perp \quad \text{und} \quad Y_\perp = \{p \in Y; (p, q)_Y = 0 \text{ für alle } q \in Y_0\}.$$

3.6.1 Methode des steilsten Abstiegs

Der Gradient einer Funktion steht immer senkrecht auf Niveauflächen und zeigt in Richtung des stärksten Zuwachses der Funktion. Der negative Gradient zeigt also in Richtung der stärksten Abnahme der Funktion. Also erscheint es sinnvoll, von einer gegebenen Zwischenlösung p^m das Funktional I in Richtung des negativen Gradienten zu minimieren.

Lemma 3.28. *Es sei Y ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar, symmetrisch und koerziv auf Y . Ferner sei $b \in Y$ und $\hat{p} \in Y$ Lösung von $T\hat{p} = b$. Sei $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß*

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0 \quad (3.71)$$

gilt.

Setze $r^0 = Tp^0 - b$ und für $m \geq 0$ setze

$$Y_{m+1} = \text{span} \{r^m\}, \quad (3.72a)$$

$$\text{löse } q^{m+1} \in Y_{m+1} : \quad I(p^m - q^{m+1}) = \min_{q \in Y_{m+1}} I(p^m - q), \quad (3.72b)$$

$$p^{m+1} = p^m - q^{m+1}, \quad (3.72c)$$

$$r^{m+1} = Tp^{m+1} - b. \quad (3.72d)$$

Für diese Iteration gilt:

(1) Die Iteration bricht genau dann ab, wenn es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $Y_{m_0+1} = \{0\}$, d.h. $0 = r^{m_0} = Tp^{m_0} - b$, also wenn p^{m_0} die gesuchte Lösung \hat{p} ist.

Ist $r^m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ setze $m_0 = \infty$.

(2) Für $m < m_0$ ist

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m r^m \quad (3.73)$$

mit ($r^m \neq 0$ für $m < m_0$!)

$$\rho_m = \frac{(r^m, r^m)_Y}{(Tr^m, r^m)_Y} \neq 0 \quad (3.74)$$

und

$$r^{m+1} = r^m - \rho_m Tr^m. \quad (3.75)$$

(3) Sei

$$\kappa(T) \stackrel{\text{def}}{=} \|T\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \quad (3.76)$$

die Kondition des Operators T . Das Verfahren konvergiert wie folgt gegen die exakte Lösung \hat{p} :

$$\|p^m - \hat{p}\|_T \leq \left(1 - \frac{1}{\kappa(T)}\right)^{m/2} \|p^0 - \hat{p}\|_T. \quad (3.77)$$

Beweis. (1): klar (\checkmark)

(2): Da $q^{m+1} \in Y_m = \text{span} \{r^m\}$ gibt es ein $\rho_m \in \mathbb{R}$ mit $q^{m+1} = \rho_m r^m$. Mit $q = r^m$ in (3.70) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &= (T(p^m - q^{m+1}) - b, r^m)_Y = (Tp^m - b, r^m)_Y - \rho_m (Tr^m, r^m)_Y \\ &= (r^m, r^m)_Y - \rho_m (Tr^m, r^m)_Y. \end{aligned}$$

Da $r^m \neq 0$ für $m < m_0$ läßt sich diese Gleichung nach ρ_m auflösen und es folgt sofort

$$r^{m+1} = Tp^{m+1} - b = Tp^m - b - \rho_m Tr^m = r^m - \rho_m Tr^m.$$

(3): Es ist

$$r^{m+1} = Tp^{m+1} - b = T(p^{m+1} - \hat{p}) \quad \text{gdw.} \quad T^{-1}r^{m+1} = p^{m+1} - \hat{p}$$

und daraus folgt

$$\|p^{m+1} - \hat{p}\|_T^2 = (T(p^{m+1} - \hat{p}), p^{m+1} - \hat{p})_Y = (r^{m+1}, T^{-1}r^{m+1})_Y.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|p^{m+1} - \hat{p}\|_T^2 &= (r^{m+1}, T^{-1}r^{m+1})_Y \\ &= (r^m - \rho_m Tr^m, T^{-1}r^m - \rho_m r^m)_Y \\ &= (r^m, T^{-1}r^m)_Y - \rho_m (Tr^m, T^{-1}r^m)_Y - \rho_m (r^m, r^m)_Y + \rho_m^2 (Tr^m, r^m)_Y \\ &= (r^m, T^{-1}r^m)_Y - 2\rho_m (r^m, r^m)_Y + \rho_m^2 (Tr^m, r^m)_Y \\ &\stackrel{(3.74)}{=} (r^m, T^{-1}r^m)_Y - \frac{(r^m, r^m)_Y^2}{(Tr^m, r^m)_Y} \\ &= (r^m, T^{-1}r^m)_Y \left(1 - \frac{(r^m, r^m)_Y^2}{(Tr^m, r^m)_Y (r^m, T^{-1}r^m)_Y} \right) \\ &\leq (r^m, T^{-1}r^m)_Y \left(1 - \frac{1}{\|T\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,Y)}} \right) \\ &= (r^m, T^{-1}r^m)_Y \left(1 - \frac{1}{\kappa(T)} \right) = \|p^m - \hat{p}\|_T^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa(T)} \right). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun die Behauptung. □

Damit ergibt sich der folgende Algorithmus:

Algorithmus 3.29 (Methode des steilsten Abstiegs). Es sei Y ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar, selbstadjungiert und koerziv auf Y . Ferner sei $b \in Y$. Sei $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0 \tag{3.78}$$

gilt.

Setze $r^0 = Tp^0 - b$ und $\delta_0 = (r^0, r^0)_Y$.

Falls $\delta_0 = 0$, so ist $p^0 = \hat{p} \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ p^{m+1} und r^{m+1} wie folgt

$$\begin{aligned} h^m &= Tr^m, \\ \rho_m &= \frac{(r^m, r^m)_Y}{(h^m, r^m)_Y}, \\ p^{m+1} &= p^m - \rho_m r^m, \\ r^{m+1} &= r^m - \rho_m h^m, \\ \delta_{m+1} &= (r^{m+1}, r^{m+1})_Y, \\ \text{falls } \delta_{m+1} &= 0, \quad \text{so ist } p^{m+1} = \hat{p}, \text{ stop.} \end{aligned}$$

3.6.2 CG–Verfahren

Um eine bessere Konvergenzrate zu bekommen, ist die Idee beim CG–Verfahren, auf höherdimensionalen Räumen zu minimieren. In jedem Schritt wird der Raum, in dem minimiert wird, um eine Dimension erweitert. Da auf jedem Teilraum selber exakt gelöst wird, bleibt die durchzuführende Minimierung ein eindimensionales Problem, welches einfach zu lösen ist. Ist $\dim Y = n < \infty$ so berechnet dieses Verfahren nach höchstens n Schritten die exakte Lösung. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß der Raum, auf dem minimiert wird, in jedem Schritt um eine Dimension erweitert wird, und daß auf diesem Raum exakt gelöst wird.

Lemma 3.30. *Es sei Y ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar, selbstadjungiert und koerziv auf Y . Ferner sei $b \in Y$ und $\hat{p} \in Y$ Lösung von $T\hat{p} = b$. Sei $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß*

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0 \quad (3.79)$$

gilt.

Setze $r^0 = Tp^0 - b$ und für $m \geq 0$ setze

$$Y_{m+1} = Y_m \oplus \text{span}\{r^m\}, \quad (3.80a)$$

$$\text{löse } q^{m+1} \in Y_{m+1} : \quad I(p^m - q^{m+1}) = \min_{q \in Y_{m+1}} I(p^m - q), \quad (3.80b)$$

$$p^{m+1} = p^m - q^{m+1}, \quad (3.80c)$$

$$r^{m+1} = Tp^{m+1} - b. \quad (3.80d)$$

Für diese Iteration gilt:

(1) Die r^m sind orthogonal, d.h.

$$(r^m, r^k)_Y = 0 \quad \text{für } m \neq k. \quad (3.81)$$

(2) Solange $r^m \neq 0$ ist $\dim Y_{m+1} = \dim Y_m + 1$. Gibt es ein m_0 mit $r^{m_0} = 0$, so ist p^{m_0} die gesuchte Lösung \hat{p} . Ist das orthogonale Komplement Y_\perp von Y_0 endlichdimensional, so berechnet das Verfahren nach höchstens $\dim Y_\perp$ Schritten die exakte Lösung \hat{p} .

Ist $r^m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, setze $m_0 = \infty$.

(3) Für $m < m_0$ gibt es ein $d^m \in r^m + Y_m$ ($r^m \neq 0$ gdw. $d^m \neq 0!$), so daß

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m d^m \quad (3.82)$$

mit

$$\rho_m = -\frac{(r^m, d^m)_Y}{(Td^m, d^m)_Y} = \frac{(r^m, r^m)_Y}{(Td^m, d^m)_Y} \quad (3.83)$$

gilt.

(4) Die d^m sind konjugiert orthogonal, d.h.

$$(Td^m, d^k)_Y = 0 \quad \text{für } m \neq k. \quad (3.84)$$

(5) Für $m + 1 < m_0$ ist

$$d^{m+1} = r^{m+1} + \gamma_m d^m \quad (3.85)$$

mit

$$\gamma_m = -\frac{(Td^m, r^{m+1})_Y}{(Td^m, d^m)_Y} = \frac{(r^{m+1}, r^{m+1})_Y}{(r^m, r^m)_Y}. \quad (3.86)$$

Beweis. (1): Es ist $Y_{m+1} = Y_0 \oplus \text{span}\{r^0, \dots, r^m\}$ und mit $m = m + 1$ folgt aus (3.70)

$$(r^{m+1}, q)_Y = (Tp^{m+1} - b, q)_Y = 0$$

Insbesondere ist $r^{m+1} \in Y_\perp$ und $(r^{m+1}, r^k)_Y = 0$ für $k \leq m$.

(2): Da $r^m \perp Y_m$ ist $\dim Y_{m+1} = \dim Y_m + 1$ solange $r^m \neq 0$.

(3): Ist $q^{m+1} = 0$, so ist $r^{m+1} = r^m$ und es folgt mit $q = r^m$ in (3.70)

$$(r^m, r^m)_Y = (r^{m+1}, r^m)_Y = (T(p^m - q^{m+1}) - b, r^m)_Y = 0$$

also $r^m = 0$ und damit $m = m_0$. Also folgt für $m < m_0$

$$(T(p^m - q^{m+1}) - b, q^{m+1})_Y = (r^m, q^{m+1})_Y - (Tq^{m+1}, q^{m+1})_Y = 0.$$

Damit ist $(r^m, q^{m+1})_Y \neq 0$ und mit $\rho_m = (q^{m+1}, r^m)_Y / (r^m, r^m)_Y$ ist $q^{m+1} = \rho_m d^m$ mit einem $d^m \in r^m + Y_m$, insbesondere ist $d^m \neq 0$.

Setzen wir nun $q = d^m$, so folgt

$$(T(p^m - \rho_m d^m) - b, d^m)_Y = (r^m, d^m)_Y - \rho_m (Td^m, d^m)_Y = 0,$$

was sich wiederum nach ρ_m auflösen läßt und die gewünschte Darstellung von ρ_m liefert.

(4): Da $d^k \in r^k + Y_k \subset Y_{m+1}$, folgt für $k < m$ folgt

$$0 = -\rho_m^{-1} (T(p^m - \rho_m d^m) - b, d^k)_Y = -\rho_m^{-1} (r^m, d^k)_Y (Td^m, d^k)_Y = (Td^m, d^k)_Y.$$

(5): Da $d^m \in r^m + Y_m$ ist, folgt

$$(d^m, r^m)_Y = (r^m, r^m)_Y \neq 0,$$

weil r^m orthogonal zu Y_m ist. Damit folgt $Y_{m+1} = Y_m \oplus \text{span}\{r^m\} = Y_m \oplus \text{span}\{d^m\}$. Weiter folgt nun aus $d^{m+1} \in r^{m+1} + Y_{m+1}$ die Zerlegung $d^{m+1} = r^{m+1} + \gamma_m d^m + z^m$ mit einem $z^m \in Y_m$. Nun ist für alle $q \in Y_{m+1}$ nach (3.84)

$$0 = (Td^{m+1}, q)_Y = (T(r^{m+1} + \gamma_m d^m + z^m), q)_Y.$$

Setzen wir nun $q = z^m$ so folgt

$$(T(r^{m+1} + \gamma_m d^m + z^m), z^m)_Y = (Tz^m, z^m)_Y = 0$$

und somit $z^m = 0$ und für $q = d^m$ läßt sich

$$(Tr^{m+1}, d^m)_Y + \gamma_m (Td^m, d^m)_Y = 0$$

nach γ_m auflösen. Schließlich ist

$$\begin{aligned} (r^{m+1}, r^{m+1})_Y &= (r^{m+1}, r^m - \rho_m Td^m)_Y = -\rho_m (r^{m+1}, Td^m)_Y \\ &= -(r^m, r^m)_Y \frac{(Td^m, r^{m+1})_Y}{(Td^m, d^m)_Y} = (r^m, r^m)_Y \gamma_m. \end{aligned}$$

□

Satz 3.31. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.30 erfüllt. Dann konvergieren die Approximationen p^m des CG-Verfahrens wie folgt gegen die exakte Lösung \hat{p} :*

$$\|p^m - \hat{p}\|_T \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa(T) + 1}{\kappa(T) - 1} \right)^m \|p^0 - \hat{p}\|_T. \quad (3.87)$$

Zum Beweis siehe zum Beispiel [1].

Algorithmus 3.32 (CG–Verfahren). Es sei Y ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar, selbstadjungiert und koerziv auf Y . Ferner sei $b \in Y$, $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0 \quad (3.88)$$

gilt.

Setze $r^0 = Tp^0 - b$, $d^0 = r^0$ und $\delta_0 = (r^0, r^0)_Y$.

Falls $\delta_0 = 0$, so ist $p^0 = \hat{p} \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ p^{m+1} , r^{m+1} und d^{m+1} wie folgt

$$\begin{aligned} h^m &= Td^m, \\ \rho_m &= \frac{(r^m, r^m)_Y}{(h^m, d^m)_Y}, \\ p^{m+1} &= p^m - \rho_m d^m, \\ r^{m+1} &= r^m - \rho_m h^m, \\ \delta_{m+1} &= (r^{m+1}, r^{m+1})_Y, \\ \text{falls } \delta_{m+1} &= 0, \quad \text{so ist } p^{m+1} = \hat{p} \Rightarrow \text{stop}, \\ \gamma_m &= \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}, \\ d^{m+1} &= r^{m+1} + \gamma_m d^m. \end{aligned}$$

Da die Konvergenzgeschwindigkeit entscheidend von der Kondition des Operators T abhängt, liegt die Idee nahe eine äquivalentes Gleichungssystem zu lösen, dessen Operator eine bessere Kondition hat: Ist $C \in \mathcal{L}(Y, Y)$ ein invertierbarer Operator, so gilt: $\hat{p} \in Y$ ist Lösung von

$$T\hat{p} = b$$

genau dann, wenn $\hat{p} \in Y$ die Lösung von

$$C^{-1}T\hat{p} = C^{-1}b$$

ist. Dabei ist C so zu wählen, daß $C \approx T$ gilt. Damit ist $C^{-1}T \approx id$ und daher $\kappa(C^{-1}T) \approx 1$. Dieses Vorgehen nennt sich *Linksvorkonditionierung*.

Für das CG–Verfahren muß der Operator $C^{-1}T$ allerdings selbstadjungiert sein. Dies ist i.a. für das Y –Skalarprodukt und $C^{-1}T$ nicht der Fall, auch wenn C selbstadjungiert ist.

Sei daher $C \in \mathcal{L}(Y, Y)$ zusätzlich selbstadjungiert. Wechseln wir nun das Skalarprodukt und verwenden das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_C$ definiert durch

$$(p, q)_C \stackrel{\text{def}}{=} (Cp, q)_Y \quad \text{für alle } p, q \in Y \quad (3.89)$$

mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_C = (\cdot, \cdot)_C^{1/2}$, so ist

$$(C^{-1}Tp, q)_C = (CC^{-1}Tp, q)_Y = (Tp, q)_Y = (Tq, p)_Y = (C^{-1}Tq, p)_C,$$

also ist $C^{-1}T$ selbstadjungiert bzgl. $(\cdot, \cdot)_C$. Ist C zusätzlich koerziv auf Y so sind die Normen $\|\cdot\|_C$ und $\|\cdot\|_Y$ äquivalent.

Für das Residuum $r = Tp - b$ der Ausgangsgleichung und für das Residuum $\tilde{r} = C^{-1}Tp - C^{-1}b$ der modifizierten Gleichung gilt die Beziehung

$$\tilde{r} = C^{-1}r.$$

Damit lautet der Algorithmus für das links vorkonditionierte CG–Verfahren:

Algorithmus 3.33 (Vorkonditioniertes CG–Verfahren). Es sei Y ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ invertierbar, selbstadjungiert und koerziv auf Y . Ferner sei $b \in Y$, $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0 \quad (3.90)$$

gilt.

Sei $C \in \mathcal{L}(Y, Y)$ ein invertierbarer, selbstadjungierter und koerziver Operator.

Setze $r^0 = Tp^0 - b$, $\tilde{r}^0 = C^{-1}r^0$, $\delta_0 = (r^0, \tilde{r}^0)_Y$ und $d^0 = \tilde{r}^0$.

Falls $\delta_0 = 0$, so ist $p^0 = \hat{p} \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ p^{m+1} , r^{m+1} , \tilde{r}^{m+1} und d^{m+1} wie folgt

$$\begin{aligned} h^m &= Td^m, \\ \rho_m &= \frac{(r^m, \tilde{r}^m)_Y}{(h^m, d^m)_Y}, \\ p^{m+1} &= p^m - \rho_m d^m, \\ r^{m+1} &= r^m - \rho_m h^m, \\ \tilde{r}^{m+1} &= C^{-1}r^{m+1}, \\ \delta_{m+1} &= (r^{m+1}, \tilde{r}^{m+1})_Y, \\ \text{falls } \delta_{m+1} &= 0, \quad \text{so ist } p^{m+1} = \hat{p}, \text{ stop,} \\ \gamma_m &= \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}, \\ d^{m+1} &= \tilde{r}^{m+1} + \gamma_m d^m. \end{aligned}$$

3.7 CG–Verfahren für Sattelpunktprobleme

Es seien X, Y reelle Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_X$ und $(\cdot, \cdot)_Y$. Ferner seien

$a(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und koerzive Bilinearform auf $X \times X$

und

$b(\cdot, \cdot): Y \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform auf $Y \times X$.

Es sei die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.26c) erfüllt, d.h. es gibt ein $\beta > 0$, so daß

$$\inf_{q \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(q, v)}{\|q\|_Y \|v\|_X} \geq \beta > 0$$

gilt. Ferner seien A und B die zugehörigen Operatoren aus (3.5), d.h.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L}(X, X) : \quad & (A v, \psi)_X = a(v, \psi) \quad \text{für alle } v, \psi \in X \\ B \in \mathcal{L}(Y, X) : \quad & (B q, v)_X = b(q, v) \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X \end{aligned}$$

und $B^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ sei die Hilbertraumadjungierte zu B , d.h.

$$B^* \in \mathcal{L}(X, Y) : \quad (B q, v)_X = (q, B^* v)_Y \quad \text{für alle } q \in Y, v \in X.$$

Zu gegebenem $f \in X$ und $g \in Y$ wollen wir (3.4) lösen, d.h.: Finde $(u, p) \in X \times Y$, so daß

$$\begin{aligned} a(u, \psi) + b(p, \psi) &= (f, \psi)_X \quad \text{für alle } \psi \in X, \\ b(q, u) &= (g, q)_Y \quad \text{für alle } q \in Y, \end{aligned}$$

gilt, bzw. in Operatorschreibweise:

$$(u, p) \in X \times Y : \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{in } X \times Y.$$

Unter obigen Voraussetzungen an die Bilinearformen $a(., .)$ und $b(., .)$ gibt es eine eindeutige Lösung $(u, p) \in X \times Y$ und der Schurkomplementoperator

$$T = B^* A^{-1} B \in \mathcal{L}(Y, Y)$$

ist nach Lemma 3.10 ein symmetrischer und koerziver Operator auf Y und p ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Tp = B^* A^{-1} Bp = B^* A^{-1} f - g \stackrel{\text{def}}{=} b \quad (3.91)$$

und u berechnet sich aus p als die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Au = f - Bp. \quad (3.92)$$

Sei $q \in Y$ beliebig und $v \in X$ sei eindeutige Lösung der Gleichung

$$Av = f - Bq. \quad (3.93)$$

Dann gilt für das Residuum $r(q) = Tq - b$ der Gleichung (3.91)

$$r(q) = Tq - b = B^* A^{-1} Bq - B^* A^{-1} f + g = B^* A^{-1} (Bq - f) + g = -B^* v + g. \quad (3.94)$$

Da $T \in \mathcal{L}(Y, Y)$ ein selbstadjungierter und koerziver Operator ist, können wir das CG–Verfahren verwenden, um Näherungslösungen $(u^m, p^m) \in X \times Y$ an die Lösung $(u, p) \in X \times Y$ zu berechnen:

Algorithmus 3.34 (CG–Verfahren für Sattelpunktprobleme). Es seien $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß

$$(Tp^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0$$

gilt. Löse

$$u^0 \in X : \quad Au^0 = f - Bp^0 \quad \text{in } X \quad (3.95a)$$

und setze

$$r^0 = -B^* u^0 + g, \quad (3.95b)$$

$$d^0 = r^0, \quad (3.95c)$$

$$\delta_0 = (r^0, r^0)_Y. \quad (3.95d)$$

Ist $\delta_0 = 0$, so ist $(u^0, p^0) = (u, p) \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ $(u^{m+1}, p^{m+1}) \in X \times Y$, $\chi^m \in X$, $r^{m+1}, d^{m+1} \in Y$ wie folgt:
Löse

$$\chi^m \in X : \quad A\chi^m = Bd^m \quad \text{in } X, \quad (3.95e)$$

setzte

$$h^m = B^* \chi^m, \quad (3.95f)$$

$$\rho_m = \frac{\delta_m}{(h^m, d^m)_Y}, \quad (3.95g)$$

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m d^m, \quad (3.95h)$$

$$u^{m+1} = u^m + \rho_m \chi^m, \quad (3.95i)$$

$$r^{m+1} = r^m - \rho_m h^m, \quad (3.95j)$$

$$\delta_{m+1} = (r^{m+1}, r^{m+1})_Y. \quad (3.95k)$$

Falls $\delta_{m+1} = 0$, so ist $p^{m+1} = p \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten setze

$$\gamma_m = \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}, \quad (3.95l)$$

$$d^{m+1} = r^{m+1} + \gamma_m d^m. \quad (3.95m)$$

Beweis. Für $m = 0$ ist u^0 die eindeutige Lösung von (3.93) für $q = p^0$ und damit gilt für das Residuum $r^0 = -B^* u^0 + g$.

Für $m \geq 0$ ist

$$h^m = B^* \chi^m = B^* (A^{-1} B d^m) = B^* A^{-1} B d^m = T d^m$$

und für u^{m+1} folgt aus der Rekursionsformel für p^{m+1}

$$u^{m+1} = A^{-1}(f - B p^{m+1}) = A^{-1}(f - B p^m) + \rho_m A^{-1} B d^m = u^m + \rho_m \chi^m.$$

□

Bemerkung 3.35. I.a. ist beim diskretisierten Problem der Operator B^* nicht einfach gegeben. So ist z.B. für die Taylor–Hood Diskretisierung des Quasi–Stokes Problems B^* die L^2 –Projektion von $-\operatorname{div} \mathbf{u}_h$ auf den Druckraum. Damit muß bei der Berechnung des Residuums das folgenden Gleichungssystems

$$h^m \in Y : \quad (h^m, \varphi)_Y = b(\chi^m, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in Y$$

gelöst werden. Für Quasi–Stokes haben wir also ein Gleichungssystem zu lösen, dessen Systemmatrix die Massematrix des Druckraums ist.

Das CG–Verfahren wollen wir nun noch vorkonditionieren:

Algorithmus 3.36 (Vorkonditioniertes CG–Verfahren für Sattelpunktprobleme).

Sei $p^0 \in Y$ und $Y_0 \subset Y$ ein abgeschlossener Unterraum, so daß

$$(T p^0 - b, q)_Y = 0 \quad \text{für alle } q \in Y_0$$

gilt. Sei $C \in \mathcal{L}(Y, Y)$ ein selbstadjungierter und koerziver Operator.

Löse

$$u^0 \in X : \quad A u^0 = f - B p^0 \quad \text{in } X \quad (3.96a)$$

und setze

$$r^0 = -B^* u^0 + g. \quad (3.96b)$$

Löse

$$\tilde{r}^0 \in Y : \quad C\tilde{r}^0 = r^0 \quad \text{in } Y \quad (3.96c)$$

und setze

$$d^0 = \tilde{r}^0, \quad (3.96d)$$

$$\delta_0 = (r^0, \tilde{r}^0)_Y. \quad (3.96e)$$

Ist $\delta_0 = 0$, so ist $(u^0, p^0) = (u, p) \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ $(u^{m+1}, p^{m+1}) \in X \times Y$, $\chi^m \in X$, $r^{m+1}, \tilde{r}^{m+1}, d^{m+1} \in Y$ wie folgt: Löse

$$\chi^m \in X : \quad A\chi^m = Bd^m \quad \text{in } X, \quad (3.96f)$$

setze

$$h^m = B^*\chi^m, \quad (3.96g)$$

$$\rho_m = \frac{\delta_m}{(h^m, d^m)_Y}, \quad (3.96h)$$

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m d^m, \quad (3.96i)$$

$$u^{m+1} = u^m + \rho_m \chi^m, \quad (3.96j)$$

$$r^{m+1} = r^m - \rho_m h^m. \quad (3.96k)$$

Löse

$$\tilde{r}^{m+1} \in Y : \quad C\tilde{r}^{m+1} = r^{m+1} \quad \text{in } Y \quad (3.96l)$$

und berechne

$$\delta_{m+1} = (r^{m+1}, \tilde{r}^{m+1})_Y. \quad (3.96m)$$

Falls $\delta_{m+1} = 0$, so ist $p^{m+1} = p \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten setze

$$\gamma_m = \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}, \quad (3.96n)$$

$$d^{m+1} = \tilde{r}^{m+1} + \gamma_m d^m. \quad (3.96o)$$

3.8 Vorkonditioniertes CG–Verfahren für Quasi–Stokes

Wir wollen nun mit Hilfe des CG–Verfahrens Approximationen an die Lösung $(\mathbf{u}, p) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$ von (3.33) berechnen, d.h. gesucht ist $(\mathbf{u}, p) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$, so daß

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \text{für alle } q \in Y \end{aligned}$$

gilt, dabei ist für $\mathbf{g} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ (eine Fortsetzung der Randdaten $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)$)

$$X_{\mathbf{g}} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d); \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

und

$$Y = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q = 0 \right\} = L_0^2(\Omega).$$

Die zugehörigen Operatoren $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d))$ und $B \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d))$ sind gegeben durch

$$A\mathbf{v} \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : \quad (A\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \mu \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}$$

für alle $\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$Bq \in \dot{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : \quad (Bq, \boldsymbol{\psi})_X = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}$$

für alle $q \in L^2(\Omega), \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

In Kapitel 3.3 hatten wir das Problem umgeformt in eine Formulierung mit Nullrandwerten: Gesucht ist $(\mathbf{v}, p) \in X_0 \times Y$, so daß

$$A\mathbf{v} + Bp = F - A\mathbf{g} \quad \text{in } X_0, \quad (3.97a)$$

$$B^*\mathbf{v} = -B^*\mathbf{g} \quad \text{in } Y \quad (3.97b)$$

gilt und $\mathbf{u} \in X_{\mathbf{g}}$ ist dann gegeben als $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{g}$. Dabei ist $F \in X_0$ gegeben als

$$(F, \boldsymbol{\psi})_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0.$$

Da nach Lemma 3.11 A ein selbstadjungierter und koerziver Operator auf X_0 ist und nach Satz 3.13 die Babuška–Brezzi–Bedingung (3.37) für Quasi–Stokes erfüllt ist, ist der Schurkomplementoperator $T = B^*A^{-1}B$ von (3.97) wohldefiniert und der Druck p ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Tp = B^*A^{-1}B = B^*(A^{-1}F - \mathbf{g} - \mathbf{v}) = B^*A^{-1}F - B^*\mathbf{g} - B^*\mathbf{v} = B^*A^{-1}F. \quad (3.98)$$

Ist nun $p^m \in Y$ eine Iterierte im CG–Verfahren angewendet auf das Schurkomplement von (3.97), so berechnet sich die zugehörige (nicht divergenzfreie!) Geschwindigkeit $\mathbf{v}^m \in X_0$ als Lösung der elliptischen Gleichung

$$\mathbf{v}^m \in X_0 : \quad A\mathbf{v}^m = F - A\mathbf{g} - Bp^m \quad \text{in } X_0$$

und $\mathbf{u}^m = \mathbf{v}^m + \mathbf{g}$, bzw. $\mathbf{u}^m \in X_{\mathbf{g}}$ ist direkt gegeben als die Lösung der elliptischen Randwertaufgabe

$$\mathbf{u}^m \in X_{\mathbf{g}} : \quad A\mathbf{u}^m = F - Bp^m \quad \text{in } X_0.$$

Für das Residuum $r^m \in Y$ von (3.98) gilt nun

$$r^m = Tp^m - B^*A^{-1}F = B^*(A^{-1}F - \mathbf{g}) - B^*\mathbf{v}^m - B^*A^{-1}F = -B^*(\mathbf{g} + \mathbf{v}^m) = -B^*\mathbf{u}^m.$$

Im CG–Verfahren können wir also auf \mathbf{v}^m verzichten und direkt mit der Geschwindigkeit \mathbf{u}^m arbeiten. Haben wir im Initialisierungsschritt eine Geschwindigkeit $\mathbf{u}^0 \in X_g$ bestimmt und wird dann für $m \geq 0$ $\mathbf{u}^{m+1} \in X_g$ durch die Rekursionsformel

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \rho_m \chi^m$$

berechnet, so muß $\chi^m \in X_0$ gelten, d.h. χ^m ist Lösung einer elliptischen Gleichung mit Nullrandwerten.

Bristeau, Glowinski und Periaux definieren in [2] folgenden Vorkonditionierer für den Druck: $C^{-1} \in \mathcal{L}(Y, Y)$ sei definiert durch

$$C^{-1}r = ar + b\phi_r \quad \text{für alle } r \in Y = L_0^2(\Omega),$$

dabei sind $a > 0$ und $b \geq 0$ reelle Parameter und für $r \in Y$ ist $\phi_r \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung des Neumann–Problems

$$\begin{aligned} -\Delta \phi_r &= r & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial \nu} &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

bzw. schwach formuliert:

$$\phi_r \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_r \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} r \varphi \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Sei nun $r, q \in Y$ beliebig. Wegen

$$\int_{\Omega} r \phi_q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \phi_r \cdot \nabla \phi_q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \phi_q \cdot \nabla \phi_r \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q \phi_r \, d\mathbf{x}$$

folgt nun aus

$$\begin{aligned} (C^{-1}r, q)_Y &= \int_{\Omega} C^{-1}r \, q \, d\mathbf{x} = a \int_{\Omega} r \, q \, d\mathbf{x} + b \int_{\Omega} \phi_r \, q \, d\mathbf{x} \\ &= a \int_{\Omega} q \, r \, d\mathbf{x} + b \int_{\Omega} \phi_q \, r \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} C^{-1}q \, r \, d\mathbf{x} = (C^{-1}q, r)_Y \end{aligned}$$

die Symmetrie von C^{-1} . Die Stetigkeit folgt aus der a priori Abschätzung für das Neumann Problem und Poincaré mit Mittelwert Null und die Koerzivität von C^{-1} folgt sofort mit

$$(C^{-1}r, r)_Y = a\|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\|\nabla \phi_r\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq a\|r\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

da $a > 0$ ist. Damit ist aber auch $C \in \mathcal{L}(Y, Y)$ ein selbstadjungierter und koerziver Operator auf Y .

Bristeau et al. geben als optimale Wahl für a und b

$$a = \nu \quad \text{und} \quad b = \mu$$

an und motivieren dies durch Fourier–Analysis. Diese Wahl des Vorkonditionierers wird auch in [5] analysiert.

Damit lautet das vorkonditionierte CG–Verfahren für Quasi–Stokes:

Algorithmus 3.37 (Vorkonditioniertes CG–Verfahren für Quasi–Stokes). Es seien $a > 0$, $b \geq 0$ reelle Parameter (optimal für $a = \nu$ und $b = \mu$) und es sei $p^0 \in Y$ gegeben.

Löse die elliptische Randwertaufgabe

$$\mathbf{u}^0 \in X_{\mathbf{g}} : \quad \mu \int_{\Omega} \mathbf{u}^0 \cdot \boldsymbol{\psi} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^0 : \nabla \boldsymbol{\psi} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\Omega} p^0 \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0. \quad (3.99a)$$

Berechne

$$r^0 \in Y : \quad \int_{\Omega} r^0 \varphi = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}^0 \quad \text{für alle } \varphi \in Y \quad (3.99b)$$

und

$$\phi^0 \in H^1(\Omega) \cap Y : \quad \int_{\Omega} \nabla \phi^0 \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}^0 \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3.99c)$$

Setze

$$\tilde{r}^0 = ar^0 + b\phi^0, \quad (3.99d)$$

$$d^0 = \tilde{r}^0, \quad (3.99e)$$

$$\delta_0 = \int_{\Omega} r^0 \tilde{r}^0 = \int_{\Omega} \tilde{r}^0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0. \quad (3.99f)$$

Ist $\delta_0 = 0$, so ist $(\mathbf{u}^0, p^0) = (\mathbf{u}, p) \Rightarrow \text{stop}$.

Ansonsten berechne für $m \geq 0$ $(\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1}) \in X_{\mathbf{g}} \times Y$, $\boldsymbol{\chi}^m \in X_0$, $r^{m+1}, \tilde{r}^{m+1}, d^{m+1} \in Y$ wie folgt:

Löse die elliptische Gleichung

$$\boldsymbol{\chi}^m \in X_0 : \quad \mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^m \cdot \boldsymbol{\psi} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^0 : \nabla \boldsymbol{\psi} = - \int_{\Omega} d^m \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in X_0. \quad (3.99g)$$

Setze

$$\rho_m = \frac{\delta_m}{- \int_{\Omega} d^m \operatorname{div} \boldsymbol{\chi}^m}, \quad (3.99h)$$

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m d^m, \quad (3.99i)$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \rho_m \boldsymbol{\chi}^m. \quad (3.99j)$$

Berechne

$$r^{m+1} \in Y : \quad \int_{\Omega} r^{m+1} \varphi = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} \quad \text{für alle } \varphi \in Y \quad (3.99k)$$

und

$$\phi^{m+1} \in H^1(\Omega) \cap Y : \quad \int_{\Omega} \nabla \phi^{m+1} \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3.99l)$$

Setze

$$\tilde{r}^{m+1} = ar^{m+1} + b\phi^{m+1}, \quad (3.99m)$$

$$\delta_{m+1} = \int_{\Omega} r^{m+1} \tilde{r}^{m+1} = \int_{\Omega} \tilde{r}^{m+1} \operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1}. \quad (3.99n)$$

Ist $\delta_{m+1} = 0$, so ist $(\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1}) = (\mathbf{u}, p) \Rightarrow \text{stop}$.

$$\gamma_m = \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}, \quad (3.99o)$$

$$d^{m+1} = \tilde{r}^{m+1} + \gamma_m d^m. \quad (3.99p)$$

Literatur

- [1] H. W. ALT, *Vorlesungsskript Praktische Mathematik I WS 1988/89*. Manuskript, 1989.
- [2] M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, AND J. PERIAUX, *Numerical methods for the Navier–Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows*, Computer Physics Reports, 6 (1987), pp. 73–187.
- [3] R. CARROLL, G. DUFF, J. FRIBERG, J. GOBERT, P. GRISVARD, J. NEČAS, AND R. SEELEY, *Equations aux dérivées partielles*, no. 19 in Seminaire de mathematiques superieures, Les Presses de l’Université de Montréal, 1966.
- [4] P. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, Rev. Francaise d’Automatique, R-2 (1975), pp. 77–84.
- [5] A. DERVIEUX, G. M. KOBELKOV, AND M. A. OL’SHANSKII, *Effective preconditioning of Uzawa type schemes for generalized Stokes problems*. Preprint, 1997.
- [6] W. HACKBUSCH, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner Studienbuecher Mathematik, Teubner, 1986.
- [7] O. LADYSHENSKAJA, *Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen*, no. Band XIX. in Mathematische Lehrbücher und Monographien, Berlin: Akademie-Verlag, 1965.
- [8] S. MÜLLER-URBANIAK, *Eine Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens zur Lösung der instationären Navier–Stokes–Gleichungen*. Universität Heidelberg, Preprint 94-01, 1994.
- [9] F. OTTO, *Die Babuška–Brezzi–Bedingung für das Taylor–Hood–Element*. Universität Bonn, Diplomarbeit, 1990.
- [10] R. TEMAM, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North–Holland, 1984.