4.4 Löser für diskretisierte Sattelpunktprobleme

Eine (stabile) gemischte FE-Diskretisierung des Stokes-Problems führt auf lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

mit einer symmetrisch und regulär aber indefiniten Systemmatrix. Weiter hat das Gleichungssystem folgende Eigenschaften

- Der Block A_h ist symmetrisch positiv definit mit Konditionszahl $\kappa(A_h) = \mathcal{O}(h^{-2})$.
- Das Schurkomplement $S = B_h A_h^{-1} B_h^T$ ist symmetrisch positiv definit.

Notation: Zur einfacheren Darstellung wird im Folgenden auf den Index h (Diskretisierungsparameter) verzichtet.

4.4.1 Das klassische Uzawa-Verfahren

Das einfachste Verfahren zum Lösen von Sattelpunktproblemen ist das klassiche Uzawa-Verfahren.

Für die Probleme von der Form (4.10) lautet dies: Sei $p^{(0)}$ Startvektor für den Druck p.
Iterationsvorschrift für $k \geq 0$:

$$Au^{(k+1)} = f - B^T p^{(k)} \tag{4.11a}$$

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \tau B u^{(k+1)} \tag{4.11b}$$

Bei Eliminierung von $u^{(k+1)} = A^{-1}(f - B^T p^{(k)})$ in (4.11b) erhält man

$$\begin{aligned} p^{(k+1)} &= p^{(k)} + \tau B A^{-1}(f - B^T p^{(k)}) \\ &= p^{(k)} + \tau(h - Sp^{(k)}) \end{aligned}$$

mit $S := BA^{-1}B^T$ und $h = BA^{-1}f$.
Das heisst das klassische Uzawa-Verfahren (4.11) ist äquivalent zum Richardson-Verfahren für das Schurkompelment-System in p

$$Sp = h. \tag{4.12}$$

Da das Schurkomplement symmetrisch positiv definit ist folgt die Konvergenz des klassischen Uzawa-Verfahrens für hinreichend kleine Parameter $\tau > 0$. Für die optimale Parameterwahl $\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(S) + \lambda_{\max}(S)}$ wird somit eine Konvergenzrate $q = \frac{\kappa(S)-1}{\kappa(S)+1}$ erzielt.

4.4.2 Varianten des Uzawa-Verfahrens

Sei $\hat{S}$ ein geeigneter Vorkonditionierer für das Schurkomplement S. Die Konvergenz des Richardson-Verfahrens für $Sp = h$ kann durch Vorkonditionierung wesentlich verbessert werden:

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \tau \hat{S}^{-1}(h - Sp^{(k)}).$$

Dies ist äquivalent zum *vorkonditionierten Uzawa-Verfahren*

$$Au^{(k+1)} = u^{(k+1)} + \tau f - B^T p^{(k)} \tag{4.13a}$$
$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \tau \hat{S}^{-1} B u^{(k+1} \tag{4.13b}$$

Als Nachteil bleibt jedoch dass in jeder Iteration eine exakte Lösung des Gleichungssystems (4.13a) bzw. das Anwenden des Schurkomplements S erforderlich ist. Dies motiviert das *vorkonditionierte inexakte Uzawa-Verfahren* (auch als *vorkonditioniertes Arrow-Hurrwicz-Verfahren* bezeichnet), in dem das exakte Lösen von (4.13a) durch einen Schritt eines vorkonditionierten Richardson-Verfahrens ersetzt wird:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau \hat{A}^{-1}(f - Au^{(k)} - B^T p^{(k)} \tag{4.14a}$$
$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \tau \hat{S}^{-1} B u^{(k+1)}) \tag{4.14b}$$

wobei $\hat{A}^{-1}$ ein geeigneter Vorkonditionierer für A.

Bemerkung 4.1. *Die Konvergenzeigenschaften der beschriebenen Verfahren können weiters verbessert werden, indem man die vorkonditionierten Richardson-Iterationen durch PCG-Iterationen ersetzt.*

Vorkonditionierer $\hat{S}$ für das Schurkomplement S

Eine stabile Diskretisierung des Stokes-Problem erfüllt unter anderem

- $a(u, v)$ symmetrisch und elliptisch,
- $b(q, v)$ beschränkt mit $|b(q, v)| \leq 1\, |u|_1 \|q\|_0$,
- es existiert eine h-unabhängige Konstante $\tilde{\beta}_1 > 0$ sodass

$$\inf_{v_h \in V_h} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b(q_h, v_h)}{\|v_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq \tilde{\beta}_1 > 0.$$

Motivation: Die Matrix $S = BA^{-1}B^T$ entspricht dem Operator $\operatorname{div}(\Delta^{-1})\nabla$, daher liegt die Spektraläquivalenz zur Massenmatrix nahe.

Theorem 4.2. *Das Schurkomplement $S = BA^{-1}B^T$ ist spektraläquivlent zur Massenmatrix M_h,*

$$\tilde{\beta}_1^2 (M_h \underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} \leq (S \underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} \leq (M_h \underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} \qquad \forall \underline{q}_h \in \mathbb{R}^{n_p} \tag{4.15}$$

mit h-unabhängiger Konstante $\tilde{\beta}_1^2$.

Beweis. der Spektraläquivalenz
Sei $q_h = \sum_{i=1}^{n_p} \underline{q}_{h,i} \psi_i(x)$ und $v_h = \sum_{i=1}^{n_u} \underline{v}_{h,i} \phi_i(x)$.

Die Massenmatrix ist definiert als $(M_h \underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} = (q_h, q_h)_0$.

$$
\begin{aligned}
(S\underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} &= (BA^{-1}B^T \underline{q}_h, \underline{q}_h)_{\ell_2} = (A^{-1/2}B^T \underline{q}_h, A^{-1/2}B^T \underline{q}_h)_{\ell_2} \\
&= \sup_{\underline{w}_h \in \mathbb{R}^{n_u}, \underline{w}_h \neq 0} \frac{(A^{-1/2}B^T \underline{q}_h, \underline{w}_h)^2_{\ell_2}}{(\underline{w}_h, \underline{w}_h)_{\ell_2}} \\
&= \sup_{\underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_u}, \underline{v}_h \neq 0} \frac{(B^T \underline{q}_h, \underline{v}_h)^2_{\ell_2}}{(A^{1/2}\underline{v}_h, A^{1/2}\underline{v}_h)_{\ell_2}} \\
&= \sup_{v_h \in V_h, v_h \neq 0} \frac{b(q_h, v_h)^2}{a(v_h, v_h)}
\end{aligned}
$$

mit den obigen Abschätzungen (Beschränktheit und inf-sup-Bedindungung) folgt die Behauptung.

□

Daher kann die Inverse der Massenmatrix M_h^{-1} bzw. in der Praxis gebräuchlich ein geeigneter Vorkonditionierer $\hat{M}_h^{-1}$ (z.B. Diagonal-Matrix) von M_h als Vorkonditionierer für das Schurkomplement verwendent werden.

4.4.3 Literatur zur gemischten FEM für das Stokes-Problems

[1] Braess: Finite Elemente. Springer. 2003. (3rd edition)

[2] Brezzi, Fortin: Mixed and hybrid finite element methdos. Springer. 1991.

[3] Griault, Raviart: Finite Element Approximation of Navier-Stokes Equations. Springer. 1986 (2nd edition)

[4] Elman, Silvester, and Wathen: Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford Press. 2005.

[5] Zulehner: Analysis of Iterative Methods for Saddle Point Problems: A Unified Approach. Mathematics of Computation, Volume 71, No 238, pages 479-505, 2002.