Crecimiento de bolas geodésicas en grupos de Heintze diagonales

Israel García

December 3, 2025

Preliminares

- Sea M una variedad Riemanniana *conexa, homogénea, de curvatura negativa, entonces M es* simplemente conexa por un resultado de Kobayashi.
- Heintze prueba la isometría $M \cong N \rtimes_\alpha \mathbb{R}^+$, donde N es un grupo de Lie simplemente conexo, nilpotente con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ tal que a nivel de álgebras, el $1 \in \mathfrak{n}$ actúa por medio de una derivación $\alpha : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ con valores propios positivos.
- Si α tiene valores propios positivos y negativos, $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}^+$ es isométrico al *producto horocíclico* de dos espacios de Heintze como los anteriores.

Preliminares (cont.)

- Si N es Abeliano, se puede demostrar que el mapeo exponencial $Exp : \mathfrak{n} \rtimes_\alpha \mathbb{R} \to N \rtimes_\alpha \mathbb{R}^+$ es un difeomorismo.
- Exp se convierte en un isomorfismos de grupos de Lie definiendo el siguiente producto en $\mathfrak{n} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$:

$$(n_1, t_1) * (n_2, t_2) := (n_1 + e^{t_1\alpha} n_2, t_1 + t_2),$$

  donde $e^{t_1\alpha} : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ es el mapeo exponencial del operador $t_1\alpha$.
- Sean $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal de N en la que α se representa como la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $E_{n+1} := \partial_t$. La métrica del grupo en esta base es,

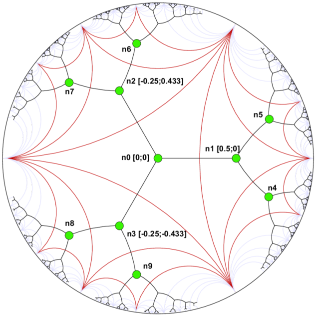
$$g_A = |e^{-tA} dx|^2 + dt^2.$$

Observación

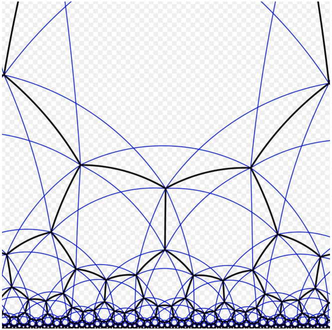
La definición de g_A es general y solo depende de que N sea abeliano.

- Es natural preguntar ¿cuál es la clasificación en clases de isometría de todos los espacios $N \rtimes_\alpha \mathbb{R}^+$ con (N, α) arbitrarios?
- En lo que queda de la plática hablaremos del caso N abeliano y α diagonalizable en $\mathbb{C}$.

Ejemplo: El espacio hiperbólico



Modelo de Poincaré



Modelo del semi-plano

La métrica en el modelo del semi-plano con curvatura $-k^2$ es

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{k^2 y^2}.$$

El modelo logarítmico

Si $y = e^{kt}/k$, $k > 0$, el cambio de variable $(x, t) \mapsto (x, y)$ transforma el modelo del semiplano con curvatura $-k^2$, $\mathbb{H}^2(-k^2)$, en el modelo logarítmico: $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$ds^2_{log} = e^{-2kt} dx^2 + dt^2.$$

Por lo tanto, $\mathbb{H}^2(-k^2)$ es isométrico al grupo de Heintze $\mathbb{R} \rtimes_{(k)} \mathbb{R}$.

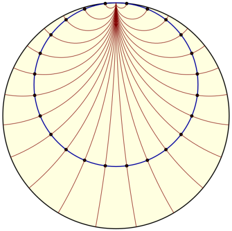
Observación

La siguiente isometría se cumple,

$$\mathbb{H}^{n+1}(-k^2) \cong \mathbb{R}^n \rtimes_{kI} \mathbb{R},$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

Ejemplo: Productos horocíclicos



Construcción

- Sean D_1 y D_2 dos copias iguales de $\mathbb{H}^{n+1}$. En cada una elegimos la misma geodésica $\gamma(t)$.
- Definimos $o := \gamma(0)$; "∞" $:= \lim_{t\to\infty} \gamma(t)$.
- γ determina un horociclo H que pasa por o e ∞.
- H y γ inducen coordenadas horocíclicas (x, t) en D_1 y D_2.
- Identifica $(x_1, t_1) \in D_1$ con $(x_2, t_2) \in D_2$ sii $x_1 = x_2$ y $t_1 + t_2 = 0$. Definimos el producto horocíclico:

$$D_1 \bowtie D_2 := D_1 \times D_2 / \sim .$$

Productos horocíclicos

- Se puede demostrar que $\mathbb{H}^2 \bowtie \mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^2 \rtimes_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{R}$.
- El grupo anterior es SOL, conocido por representar una de las 8 geometrías de Thurston.
- En general, si $H_i = \mathbb{R}^{n_i} \rtimes_{A_i} \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, son dos grupos de Heintze abelianos,

$$H_1 \bowtie H_2 \cong \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rtimes_{\left(\begin{smallmatrix} A_1 & \\ & -A_2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{R}.$$

Grupos abelianos diagonales

Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es normal si cumple que $A^TA = AA^T$ y que A es $\mathbb{C}$-diagonalizable por matrices unitarias si y solo si es normal.

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal con espectro $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ y sea $D = diag(\Re(\lambda_1), \dots, \Re(\lambda_n))$, entonces los espacios $\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n \rtimes_D \mathbb{R}$ son isométricos.

Conexión para grupos diagonales

Proposición

Sean $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ una matriz diagonal, con entradas de cualquier signo y $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por Π el hiperplano generado por esta base en el producto semi-directo $\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ y por E_{n+1} un vector unitario ortgonal a Π. Para $X, Y \in \Pi$ se verifican las siguientes identidades

$$\nabla_X Y = \langle X, AY \rangle E_{n+1}, \qquad \nabla_X E_{n+1} = -AX, \tag{1}$$

Para la siguiente proposición, recordemos que el tensor de curvatura está definido como

$$R(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle,$$

$\forall X, Y, Z, W \in T(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$.

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonal, con M el valor máximo de la diagonal principal y m el valor mínimo. Sea κ la curvatura seccional de cualquier 2-plano en $T(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$, Si A o $-A$ es positiva definida, se cumple que,

$$-M^2 \leq \kappa \leq -m^2.$$

En caso contrario,

$$-\max(m^2, M^2) \leq \kappa \leq M|m|.$$

- La proposición muestra que $\mathbb{R}^n \rtimes_{KI} \mathbb{R}$ tiene curvatura constante $-K^2$ y es por lo tanto isométrico a $\mathbb{H}^{n+1}(-K^2)$.
- Sean D y S las partes simétrica y anti-simétrica de una matriz general A, se puede verificar que la curvatura es negativa si y solo sí D y $D^2 - SD - DS$ son positivas definidas.

Ecuaciones geodésicas

- Para A diagonal, $\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ tiene geometría hiperbólica si y solo si A es positiva definida; en los demás casos, la geometría se parece a la de SOL.
- Nos gustaría describir como crecen las bolas geodésicas en estos espacios.
- Para ello, necesitamos aproximar el comportamiento límite de campos de Jacobi en el infinito.

Ecuaciones geodésicas

Sea $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_{n+1}) \in T_0(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$ unitario, con A diagonal. Sea $\gamma(t) = \exp_0(t\xi)$ la geodésica que parte del origen con velocidad ξ. Entonces $\gamma = (\tilde{\gamma}, \gamma_{n+1})$ es la única solución del ODE siguiente,

$$\tilde{\gamma}' = e^{2A\gamma_{n+1}}\tilde{\xi}, \qquad \gamma''_{n+1} = -\tilde{\xi}^t A e^{2A\gamma_{n+1}}\tilde{\xi}, \tag{2}$$

con condiciones iniciales $\gamma(0) = \xi$. Además, la velocidad de la geodésica satisface la siguiente ecuación

$$\tilde{\xi}^t e^{2A\gamma_{n+1}}\tilde{\xi} + \gamma'^2_{n+1} = 1.$$

Lema

Para toda geodésica de velocidad unitaria γ que parte del origen con $\gamma'_{n+1}(0) \neq 1$, se cumple la aproximación

$$\gamma_{n+1}(s) = -s(1 + o(1)).$$

La ecuación (2) para γ_{n+1} es una ecuación autónoma que corresponde a una barrera de potencial infinita en el extremo $\gamma_{n+1} \to \infty$. De allí se puede probar analíticamente que $\gamma_{n+1}(s) \to -\infty$ cuando $s \to \infty$. De la ecuación de conservación de energía, $\gamma'_{n+1}(s) \to -1$ cuando $s \to \infty$. El resultado se sigue de la regla de L'Hopital.

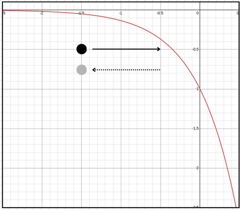


Figure: Un potencial infinito

Lema

Sean $\xi, \omega_0 \in T_0(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$ unitarios y A diagonal positiva con $\xi \perp \omega_0$. Sean $\gamma(s) = \exp_0(s\xi)$ y $\tau_{s,\xi}(\omega_0)$ el transporte paralelo de ω_0 a lo largo de γ hasta $\gamma(s)$. Entonces

$$\tau_{s,\xi}(\omega_0) = \omega_\infty(1 + O(e^{-sA})).$$

Proof.

Sean $v(s)$ el vector de coordenadas de $\gamma(s)$ y $\omega(s)$ el vector de coordenadas de $\tau_{s,\xi}(\omega_0)$ en un marco ortonormal izquierdo invariante de $T(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$. Se verifica la siguiente ecuación de transporte paralelo,

$$\tilde{\omega}' = \omega_{n+1} A\tilde{v}, \qquad \omega'_{n+1} = -\tilde{v}^t A^t \tilde{\omega}. \tag{3}$$

En este marco, $\tilde{v} = e^{A\gamma_{n+1}}\tilde{\xi}$. El estimado en γ_{n+1} prueba que $\int_0^\infty |A\tilde{v}(s)| ds < \infty$ y que $\tilde{v}$ es uniformemente acotada. Viendo el lado derecho de (3) como el residuo de la ecuación trivial $\omega' = 0$, el resultado se sigue de la teoría de estabilidad de Levinson. □

El volumen de bolas geodésicas

Sean $V(r)$ el volumen de la bola $\mathbb{B}_0(r)$ y $S(r)$ el área de $\partial\mathbb{B}_0(r)$. Queremos estimar

$$V(r) = \int_0^r S(t)dt, \qquad \text{cuando } r \to \infty.$$

Sea $\mathcal{R}(s;\xi) = \tau_{s;\xi}^{-1} \circ R(\cdot,\gamma')\gamma' \circ \tau_{s;\xi}$. Si $\{w_1,\ldots,w_n\}$ es una base ortonormal de $\xi^\perp$, la restricción $\mathcal{R}|_{\xi^\perp}$ tiene matriz asociada $[\mathcal{R}]$ con entradas

$$[\mathcal{R}]_{ij} = \langle \tau_{s;\xi}\omega_i, R(\tau_{s;\xi}\omega_j,\gamma')\gamma'\rangle.$$

Sea $\mathcal{A}(\cdot;\xi)$ la solución de la ecuación

$$\mathcal{A}'' + [\mathcal{R}]A = 0,$$

con condiciones iniciales $\mathcal{A}(0) = 0$, $\mathcal{A}'(0) = I$. En un espacio de curvatura negativa, $\exp_0 : T_0(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ es un difeomorfismo. Un resultado clásico afirma que

$$S(r) = \int_{|\xi|=1} \det \mathcal{A}(r;\xi)d\xi.$$

Nuestros estimados previos en el transporte paralelo permiten estudiar el comportamiento asintótico del área.

Lema

Sean $\xi \in T_0(\mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R})$, con A matriz diagonal positiva. Sea $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ una base ortonormal de $\xi^\perp$. Sea $\{E1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal, izquierdo invariante de $\mathbb{R}^n$ y sea ω_i^∞ el vector de coordenadas de la aproximación asintótica de $\tau_{s;\xi}\omega_i$ en esta base. Sea $\Omega = (\omega_1^\infty, \ldots, \omega_n^\infty)$, existe una función matricial $M(s)$ absolutamente integrable y globalmente acotada, tal que

$$\mathcal{A}'' = \Omega^t A^2 \Omega \mathcal{A} - M\mathcal{A}.$$

La prueba del lema es un cálculo largo usando las identidades de conexión y las aproximaciones asintóticas del transporte paralelo.

Como corolario, obtenemos inmediatamente la aproximación

$$\mathcal{A} = \Omega^t A^{-1} \sinh(sA)\Omega(I + o(1)),$$

de donde

$$\det \mathcal{A} = \frac{e^{tr(A)s}}{2^n \det A}(1 + o(1)).$$

Integrando esta ecuación, obtenemos inmediatamente aproximaciones para el área y el volumen en el caso diagonal.

Teorema (–)

Sea G un grupo de Heintze abeliano con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión $n+1$. Sea $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ el álgebra derivada. Si $\mathfrak{g}$ tiene un producto interno tal que para $\xi \in (\mathfrak{g}')^{\perp}$ unitario, la representación adjunta $A = ad_{\xi}|_{\mathfrak{g}'}$ es normal con valores propios de parte real positiva, entonces G con la métrica izquierdo invariante inducida tiene curvatura negativa y el volumen de la bola geodésica $\mathbb{B}_0(r)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico,

$$Vol(\mathbb{B}_0(r)) = \frac{Vol(S^n)}{2^n tr(A)\det(D)} e^{tr(A)r}(1 + o(1)),$$

donde D es la parte simétrica de A y S^n es la n-esfera canónica.