Tema 5: Análisis operacional en servidores

¿Cómo analizar y mejorar el rendimiento de mi servidor?

Analistas, administradores y diseñadores

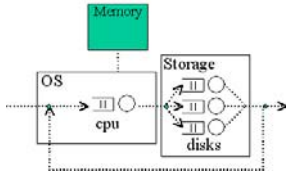
Objetivos del tema

- Proporcionar un modelo analítico de comportamiento de un sistema informático como punto de partida para obtener índices de rendimiento.
- Entender la importancia de los cuellos de botella como limitadores del rendimiento de los sistemas informáticos.
- Saber aplicar las leyes operacionales en ejemplos sencillos para obtener índices de rendimiento.
- Saber interpretar los límites optimistas del rendimiento que establece el análisis operacional.
- Saber evaluar de forma cuantitativa el efecto de diferentes terapias de mejora o estrategias de diseño sobre el rendimiento de un servidor.

Bibliografía

- *Evaluación y modelado del rendimiento de los sistemas informáticos*. X. Molero, C. Juiz, M. Rodeño. Pearson Educación, 2004. Capítulos 4 y 5.
- *The art of computer system performance analysis.* R.Jain. John Wiley & Sons, 1991. Capítulos 30, 32, 33 y 34.
- *Measuring computer performance: a practitioner's guide.* David J. Lilja, Cambridge University Press, 2000. Capítulo 11.

Contenido

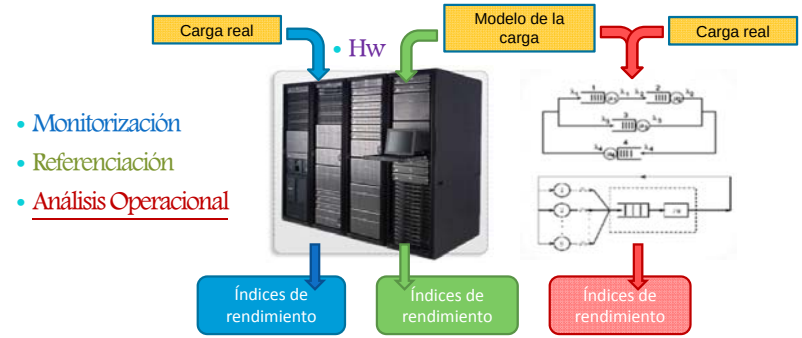


No os despistéis…

5.1. Introducción: Redes de Colas de Espera

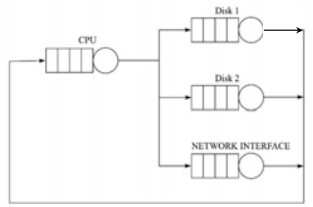
Como decíamos al final del tema 2…

- **¿Cómo podemos evaluar/analizar/estudiar el rendimiento de un servidor?**



El modelo de un sistema informático

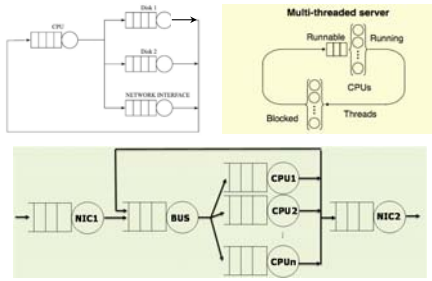
- Abstracción del sistema informático real.
  - Conjunto de dispositivos interrelacionados y trabajos que los usan (carga).
    - Dispositivos (*resources*): procesador, discos, memoria, red, etc.
    - Trabajos (*jobs*): procesos, peticiones, accesos, etc.
  - Normalmente un dispositivo o recurso solo puede ser usado por un trabajo a la vez. El resto de trabajos habrá de **esperar**.
- Modelos basados en redes de colas (*queueing networks*).
  - Introducidos en la década de 1950.
  - Objetivo básico: cálculo del tiempo que necesita el sistema para procesar cada trabajo (tiempo de respuesta).
  - Aproximación estadística.
- Otros modelos: redes de Petri, cadenas de Markov, …



Red de colas: concepto

- Conjunto de estaciones de servicio conectadas entre sí.
- Estación de servicio (*service station*): Objeto abstracto compuesto por un dispositivo (recurso físico) que presta un servicio y una cola de espera para los trabajos (clientes) que demandan un servicio de él.

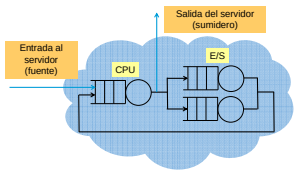
Estación de Servicio

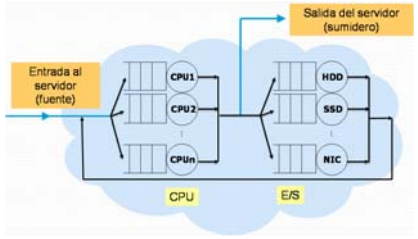


Ejemplos de redes de colas

El modelo de servidor central

- Es el modelo de redes de colas que más se ha utilizado para representar el comportamiento básico de los programas en un servidor de cara a extraer información sobre su rendimiento.
  - Un trabajo que "llega" al servidor comienza utilizando el procesador.
  - Después de "abandonar" el procesador, el trabajo puede:
    - terminar (sale del servidor), o bien
    - realizar un acceso a una unidad de entrada/salida (discos, red,...).
  - Después de una operación con una unidad de entrada/salida, el trabajo vuelve a "visitar" al procesador.



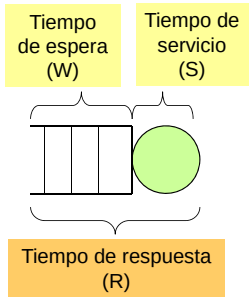


Algunas variables que caracterizan a **un trabajo** en una estación de servicio

- Tiempo de espera en cola (W, *waiting time*)
  - Tiempo transcurrido desde que el trabajo solicita hacer uso del recurso físico (=se pone en la cola) hasta que realmente empieza a utilizarlo.
- Tiempo de servicio (S, *service time*)
  - Desde que el trabajo accede al recurso físico hasta que lo libera (=tiempo que tarda el recurso físico en procesar el trabajo).
- Tiempo de respuesta (R, *response time*)
  - Suma de los dos tiempos anteriores.

$$R = W + S$$

➢ Recopilando estas medidas para múltiples trabajos, obtendremos distribuciones de probabilidad que caracterizan a esa estación de servicio.

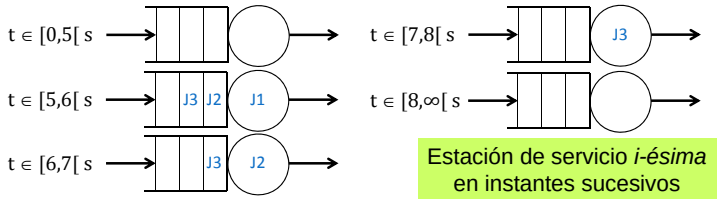


Ejercicio

Suponga que la estación de servicio i-ésima de una red de colas tiene un tiempo de servicio constante S_i=1s. Suponga que los trabajos (*jobs*) llegan con la siguiente distribución temporal:

- Durante los primeros 5 segundos no llega ningún trabajo.
- En t=5s llegan 3 trabajos: J1, J2 y J3 (por ese orden).

Calcule los tiempos de espera en la cola y los tiempos de respuesta que experimentan **cada uno** de los tres trabajos. Calcule finalmente los valores medios de W y R.

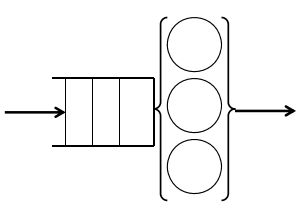


$W_i(J1) = 0s$ $W_i(J2) = 1s$ $W_i(J3) = 2s$ Valor medio $W_i = 1s$

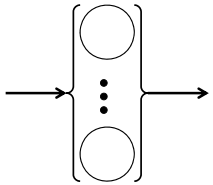
$R_i(J1) = 1s$ $R_i(J2) = 2s$ $R_i(J3) = 3s$ Valor medio $R_i = 2s$

Estaciones con más de un servidor

- Son capaces de atender a más de un trabajo en paralelo:



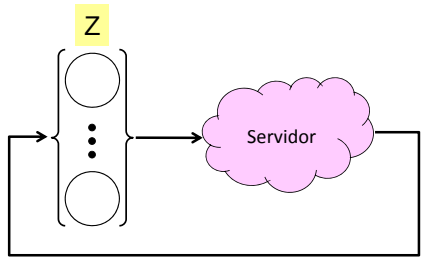
3 servidores idénticos compartiendo la misma cola de espera



Infinitos servidores: no hay espera en cola. R=S. Estación tipo *retardo*

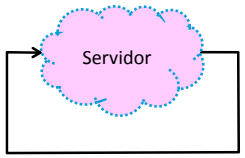
El tiempo de reflexión (Z, *think time*)

- Es un parámetro (Z) que representa el tiempo que requiere el usuario antes de volver a lanzar una petición al servidor tras la respuesta de éste.
- Se suele modelar mediante una estación de servicio tipo retardo con un tiempo de servicio = Z.

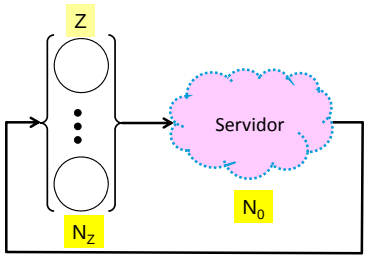


Redes de colas cerradas

- Presentan un número constante de trabajos que van **recirculando** por la red (N_T). Dependiendo de si hay o no interacción con usuarios se distingue entre redes de tipo **batch** (por lotes) o redes **interactivas**.



Red cerrada tipo batch
$N_T=N_0$



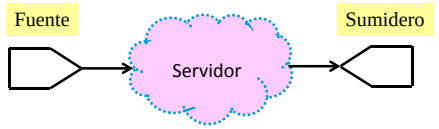
Red cerrada tipo interactivo
$N_T=N_0+N_Z$

N_o=Número de trabajos en el servidor.

N_Z=Número de trabajos en reflexión (esperando a que los usuarios vuelvan a introducirlos en el servidor). **Siempre supondremos 1 usuario = 1 trabajo.**

Redes de colas abiertas

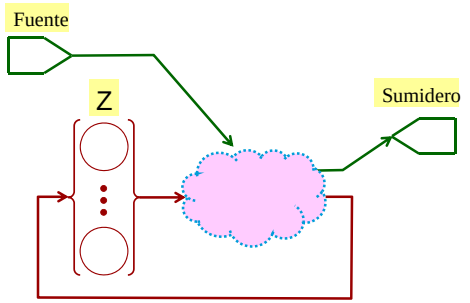
- Los trabajos llegan a la red a través de una fuente externa que no controlamos. Tras ser procesados, salen de ella a través de uno o más sumideros. **No existe realimentación entre sumidero y fuente.**
- El número de trabajos en el servidor (N_o) puede variar con el tiempo.



Red abierta

Redes mixtas

- Cuando el modelo no corresponde a ninguno de los dos anteriores.



5.2. Variables y leyes operacionales

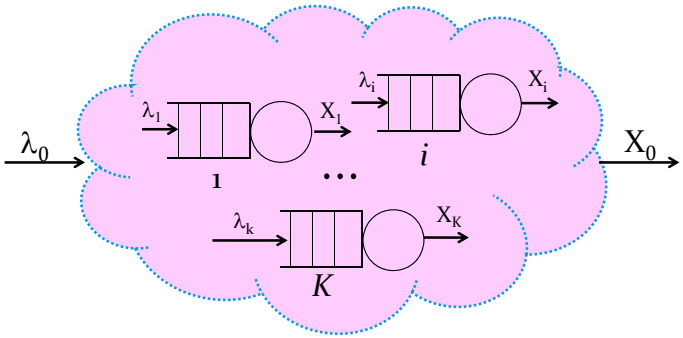
El análisis operacional

- Técnica de análisis de redes de colas presentada por Denning y Buzen en 1978.
- Basada en valores medios de *variables operacionales* (=magnitudes medibles) del sistema informático.

- Leyes operacionales: relaciones entre las variables operacionales.
- Nos permitirá calcular límites optimistas de las prestaciones del servidor por medio de cálculos muy sencillos.

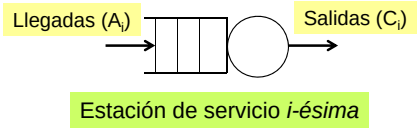
Variables: servidor vs. estación de servicio

- El servidor contiene *K* estaciones de servicio (recursos o dispositivos).
- A todo el servidor en su globalidad lo denotamos como dispositivo "*cero*".



Variables operacionales básicas

- Variable global temporal:
  - ***T*** Duración del periodo de medida para el que se extrae el modelo.
- Variables operacionales básicas de la estación de servicio *i-ésima* medidas durante el tiempo T:
  - A_i Número de trabajos solicitados a la estación (llegadas, *arrivals*).
  - B_i Tiempo que el dispositivo está ocupado (*busy time*).
  - C_i Número de trabajos completados por la estación (salidas, *completions*).



Variables operacionales deducidas

- **Se deben poder estimar a partir de las variables básicas:**
  - λ_i Tasa media de llegada (*arrival rate*) — trabajos/segundo
  - X_i Productividad media (*throughput*) — trabajos/segundo
  - S_i Tiempo medio de servicio (*service time*) — segundos [/trabajo]
  - W_i Tiempo medio de espera en cola (*waiting time*) — segundos [/trabajo]
  - R_i Tiempo medio de respuesta *(response time)* — segundos [/trabajo]
  - U_i Utilización media *(utilization)* — sin unidades

$\lambda_i = \frac{A_i}{T}$ → Estación *i-ésima* → $X_i = \frac{C_i}{T}$

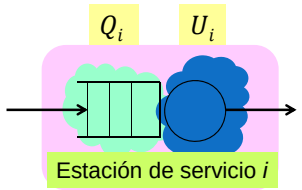
$U_i = \frac{B_i}{T}$

$S_i = \frac{B_i}{C_i}$

$R_i = W_i + S_i$

Variables operacionales deducidas (II)

- $\mathbf{N_i}$: Número medio de trabajos en la estación de servicio (cola más recurso).
- $\mathbf{Q_i}$: Número medio de trabajos en cola de espera (*jobs in queue*).
- $\mathbf{U_i}$: Número medio de trabajos siendo servidos por el dispositivo, $U_i = N_i - Q_i$. Coincide numéricamente con la **utilización** media = proporción de tiempo que el dispositivo ha estado en uso (*busy*) con respecto al intervalo total de medida (T) (como máximo 1 si B_i=T).



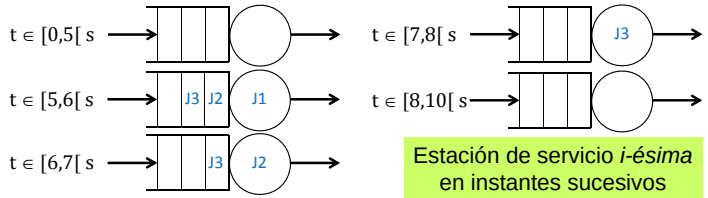
$U_i = \frac{B_i}{T}$

Ejercicio

Suponga que la estación de servicio i-ésima de una red de colas tiene un tiempo de servicio constante S_i=1s. Suponga que los trabajos llegan con la siguiente distribución temporal:

- Durante los primeros 5 segundos no llega ningún trabajo.
- En t=5s llegan 3 trabajos: J1, J2 y J3 (por ese orden).

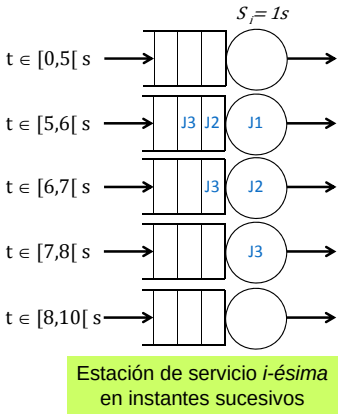
Para el intervalo de medida [0, 10[s, calcule A_i, B_i, C_i, λ_i, X_i, U_i, Q_i, N_i.



A_i = 3 trabajos, B_i = 3s, C_i = 3 trabajos, $\lambda_i = X_i$ = 3/10 = 0,3 trabajos/s

Ejercicio (cont.)

Cálculo de la utilización media (U_i) y del número medio de trabajos en la cola (Q_i) y en la estación (N_i).



$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$Q_i = \frac{0 \times 5s + 2 \times 1s + 1 \times 1s + 0 \times 3s}{10s} = 0{,}3\ tr.$

$N_i = Q_i + U_i = 0{,}6\ tr.$

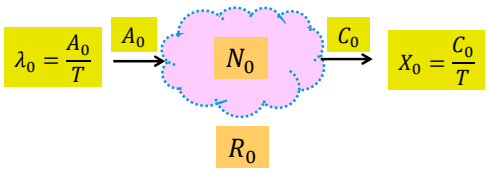
Otras alternativas para calcular N_i y U_i:

$N_i = \frac{0 \times 5s + 3 \times 1s + 2 \times 1s + 1 \times 1s}{10s} = 0{,}6\ tr.$

$U_i = \frac{0 \times 5s + 1 \times 3s + 0 \times 2s}{10s} = 0{,}3\ tr.$

Variables globales del servidor

- Variables básicas
  - A_0 Número de trabajos solicitados al servidor (*arrivals*).
  - C_0 Número de trabajos completados por el servidor (*completions*).
- Variables deducidas
  - λ_0 Tasa media de llegada al servidor (*arrival rate*).
  - X_0 Productividad media del servidor (*throughput*).
  - N_0 Número medio de trabajos en el servidor (#jobs) = $N_1+N_2+...+N_K$.
  - R_0 Tiempo medio de respuesta del servidor (*response time*) ≡ tiempo que tarda, de media, el servidor en procesar una petición.



Razón de visita y demanda de servicio

- Razón de visita media V_i (*visit ratio*). Representa la proporción entre el número de trabajos completados por el servidor y el número de trabajos completados por la estación de servicio i-ésima (dispositivo). Es como si el trabajo tuviera que "visitar" el dispositivo i-ésimo una media de V_i veces antes de poder abandonar el servidor.

$$V_i = \frac{C_i}{C_0}$$

- Demanda de servicio media D_i (*service demand*). Cantidad de tiempo que, por término medio, el dispositivo i-ésimo le ha dedicado a cada trabajo que finalmente abandona el servidor (=que realiza el servidor).

$$D_i = \frac{B_i}{C_0} = V_i \times S_i$$

Nótese que la demanda de servicio de una estación no tiene en cuenta la posible espera de un trabajo en su cola.

Ejercicio

Después de monitorizar el **disco duro** de un servidor web durante un periodo de **48 horas**, se sabe que ha estado en uso (=ocupado) un total de **28 horas**. Asimismo, se han contabilizado durante ese periodo un total de **340 mil** peticiones de lectura/escritura al disco duro y un total de **350 mil** peticiones completadas. Se ha estimado que cada petición atendida por el servidor web ha requerido una media de **4** accesos de E/S al disco duro. Calcule:

a) ¿Cuál es la tasa de llegada al disco duro?
b) ¿Cuál es la productividad del disco duro?
c) Determínese la utilización del disco duro, su tiempo de servicio y su demanda de servicio.
d) ¿Cuál es la productividad del servidor web?

Nota: Todas las variables que se usan en este tema son valores medios por lo que, de aquí en adelante, normalmente no se indicará de forma explícita la palabra "medio" al referirnos a ellas.

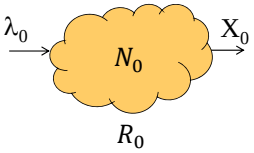
Leyes operacionales

- Casi todas las variables utilizadas en el análisis operacional son **valores medios** para el intervalo de monitorización T. Por tanto, el valor de dichas variables dependerá del intervalo de observación T.
- Existen, sin embargo, una serie de relaciones entre algunas variables operacionales que se mantienen válidas para cualquier intervalo de observación y que no dependen de suposiciones sobre la distribución de los tiempos de servicio o de la forma en la que llegan los trabajos. Esta relaciones se denominan **leyes operacionales**.
- Estas leyes son tanto más útiles cuando se cumple la denominada **hipótesis del equilibrio de flujo** que establece que en un servidor **no saturado**, si se escoge un intervalo de observación suficientemente largo, se cumple que:
  - El número de trabajos que completa el servidor coincide aproximadamente con los solicitados ($C_o \approx A_o$). Dicho de otra manera, la productividad media coincide aproximadamente con la tasa media de llegada ($X_o \approx \lambda_o$).
  - El número de trabajos que completa cada estación de servicio coincide aproximadamente con los que se solicitan: ($C_i \approx A_i \Rightarrow X_i \approx \lambda_i, \forall i=1...K$).

Ley de Little

"The long-term average number of customers in a stable system is equal to the long-term average arrival rate multiplied by the average time a customer spends in the system"

- Aplicada a un servidor, esta ley relaciona las dos variables más importantes que reflejan el rendimiento de un servidor: su productividad (X_0) y su tiempo de respuesta (R_0).



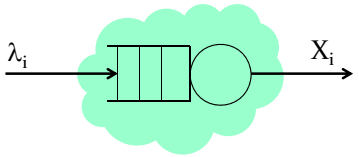
$$N_0 = \lambda_0 \times R_0 = X_0 \times R_0$$

- Esta ley solo es válida cuando el servidor está en equilibrio de flujo (no saturado)

Ley de Little (cont.)

La ley de Little puede ser aplicada no solo al servidor en su totalidad, sino a cada estación de servicio y a cada uno de los diferentes sub-niveles de una estación de servicio.

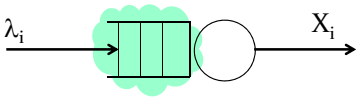
- Aplicación a toda una estación de servicio:



$$N_i = \lambda_i \times R_i = X_i \times R_i$$

Tiempo medio de respuesta: R_i
Nº medio de trabajos en la estación: N_i

- Aplicación a la cola de una estación de servicio:



$$Q_i = \lambda_i \times W_i = X_i \times W_i$$

Tiempo medio de espera en cola: W_i
Nº medio de trabajos en la cola: Q_i

Ley de la Utilización

- Relaciona la utilización de un dispositivo con el número de trabajos que es capaz de realizar por unidad de tiempo (=su productividad) y el tiempo que le dedica a cada uno de ellos (=su tiempo de servicio).

$$U_i = X_i \times S_i \overset{\text{Si no saturado}}{=} \lambda_i \times S_i$$

- Demostración:

$$S_i = \frac{B_i}{C_i} = \frac{B_i/T}{C_i/T} = \frac{U_i}{X_i}$$

- Una consecuencia inmediata de esta ley es que la productividad media de un dispositivo viene limitada por la inversa de su tiempo de servicio:

$$U_i \leq 1 \quad \Rightarrow \quad X_i \leq \frac{1}{S_i} \quad \forall i = 1, \ldots, K$$

Ley del flujo forzado y relación Utilización-Demanda

- Las productividades (flujos) a diferentes niveles del servidor tienen que ser proporcionales a la productividad global del servidor. La **ley del flujo forzado** relaciona la productividad del servidor con la de cada uno de los dispositivos que integran el mismo:

$$X_i = X_0 \times V_i \overset{\text{Si no saturado}}{=} \lambda_0 \times V_i = \lambda_i$$

Demostración: $V_i = \frac{C_i}{C_0} = \frac{X_i}{X_0}$

- Como consecuencia de la ley del flujo forzado, las utilizaciones de cada dispositivo son proporcionales a las demandas de servicio del mismo, siendo la constante de proporcionalidad precisamente la productividad global del servidor (**relación Utilización-Demanda de servicio**):

$$U_i = X_0 \times D_i \overset{\text{Si no saturado}}{=} \lambda_0 \times D_i$$

Demostración: $D_i = \frac{B_i}{C_0} = \frac{B_i/T}{C_0/T} = \frac{U_i}{X_0}$

Ejemplo de aplicación

- Un servidor de base de datos **no saturado** recibe una media de 120 consultas por minuto. Sabemos que el tiempo medio de respuesta del disco duro principal del servidor es 48ms, su tiempo medio de servicio es 30ms y su productividad 25 peticiones de E/S completadas por segundo. Calcule:

a) El número medio de trabajos en la cola de espera del disco duro.

- Solución alternativa 1:

$$\boldsymbol{Q_{dd} = \lambda_{dd} \times W_{dd} = X_{dd} \times (R_{dd} - S_{dd}) = 25tr/s \times 0,018s = 0,45\ tr.}$$

- Solución alternativa 2:

$N_{dd} = \lambda_{dd} \times R_{dd} = X_{dd} \times R_{dd} = 25$ tr/s × 0,048 s = 1,2 tr.

$U_{dd} = X_{dd} \times S_{dd} = 25$ tr/s × 0,03 s/tr = 0,75 (75%)

$$\boldsymbol{Q_{dd} = N_{dd} - U_{dd} = 1,2 - 0,75 = 0,45\ tr.}$$

Cuestión: ¿Por qué el tiempo de respuesta (48 ms) es bastante mayor (60%) que el tiempo de servicio (30 ms) si la utilización del disco es bastante menor que 1 (0,75)?

b) ¿Cuánto tiempo, de media, consumen los accesos al disco duro por cada consulta que se realiza al servidor?

$$\boldsymbol{D_{dd} = \frac{B_{dd}}{C_0} = \frac{U_{dd}}{X_0} = \frac{U_{dd}}{\lambda_0} = \frac{0,75}{120tr/min} = 0,00625\ min = 0,375s.}$$

Ley general del tiempo de respuesta

- El tiempo medio de respuesta que experimenta, de media, una petición a un servidor no saturado se puede calcular teniendo en cuenta que cada una de ellas ha tenido que "visitar" V_i veces al dispositivo i-ésimo, requiriendo cada visita una media de R_i segundos:

$$R_0 = V_1 \times R_1 + V_2 \times R_2 + \cdots + V_K \times R_K = \sum_{i=1}^{K} V_i \times R_i$$

Ley general del tiempo de respuesta

- Demostración:

$$N_0 = N_1 + N_2 + \cdots + N_K \Rightarrow \text{(Ley de Little)}\ X_0 \times R_0 = \boldsymbol{X_1} \times R_1 + \boldsymbol{X_2} \times R_2 + \cdots + \boldsymbol{X_K} \times R_K$$

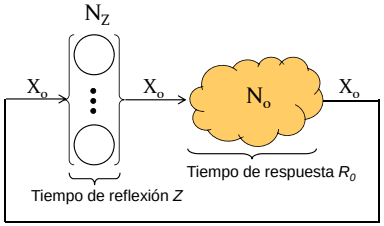
$$\Rightarrow \text{(Ley del Flujo Forzado)}\ X_0 \times R_0 = \boldsymbol{X_0} \times \boldsymbol{V_1} \times R_1 + \boldsymbol{X_0} \times \boldsymbol{V_2} \times R_2 + \cdots + \boldsymbol{X_0} \times \boldsymbol{V_K} \times R_K$$

Nótese que, en general: $R_0 \neq R_1 + R_2 + \cdots + R_K = \sum_{i=1}^{K} R_i$

Ley del tiempo de respuesta interactivo

- Se obtiene mediante la aplicación de la ley de Little a una red cerrada de tipo interactivo.
- En una red cerrada nunca se desbordan las colas (si el tamaño de las colas es suficiente).

Recordemos: N_Z= Número medio de trabajos (=clientes) en reflexión.



$$N_Z = X_0 \times Z; \qquad N_0 = X_0 \times R_0$$

$$N_T = N_Z + N_0 = X_0 \times Z + X_0 \times R_0 = X_0 \times (Z + R_0)$$

$$R_0 = \frac{N_T}{X_0} - Z$$

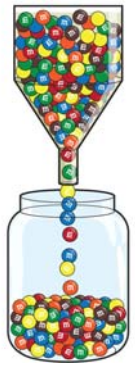
que se conoce como la *Ley del tiempo de respuesta interactivo.*

Nótese que al ser una red cerrada, el número total de trabajos (=clientes) en la red cerrada (N_T=N_Z+N_0), es constante.

5.3. Límites optimistas del rendimiento

Limitaciones en el rendimiento: cuello de botella

- Todo servidor presenta alguna limitación en su rendimiento.
- En esta sección veremos que la localización del elemento limitador no solo depende del servidor sino también de la carga.
  - Al elemento limitador del rendimiento del servidor se le denomina cuello de botella (*bottleneck*).
  - Además, puede haber más de uno de estos elementos limitadores.
- Veremos que la única manera de mejorar las prestaciones de un servidor de manera significativa es actuando sobre el cuello de botella.



Identificación del cuello de botella

- El cuello de botella es el dispositivo que primero llegará a saturarse (U_i=1) cuando aumente la carga (λ_0 mayor).

Si no saturado

$$U_i = X_0 \times D_i = \lambda_0 \times D_i$$

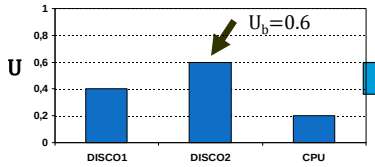
- Como $U_i \propto D_i$, podemos identificar fácilmente el cuello de botella de un servidor simplemente identificando el dispositivo con **mayor demanda de servicio o con mayor utilización.**
- No hace falta llevar el servidor al límite para identificar el cuello de botella.
- Como $D_i = V_i \times S_i$, concluimos que la localización del cuello de botella no solo depende de lo rápido que sea el servidor (S_i) sino también de la carga (V_i).
- Denotaremos por "b" (*bottleneck*) al índice del dispositivo cuello de botella. Su demanda de servicio y su utilización vendrán dadas por.

$$D_b = \max_{i=1\cdots K}\{D_i\} = V_b \times S_b$$

$$U_b = \max_{i=1\cdots K}\{U_i\} = X_0 \times D_b$$

Saturación del servidor

- El servidor se satura cuando lo hace el cuello de botella ya que éste será el primer dispositivo en alcanzar una utilización = 1 cuando aumente la carga.

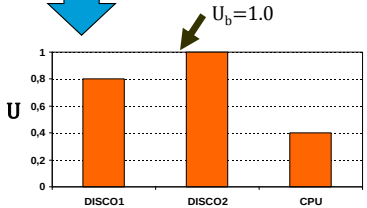


Operación "normal"

Si no saturado

$$U_b = X_0 \times D_b = \lambda_0 \times D_b$$

Aumento de la carga: λ_0 ⇈



Servidor saturado

- En saturación, el cuello de botella está al máximo de su productividad:

$$X_b = {}^1/_{S_b}$$

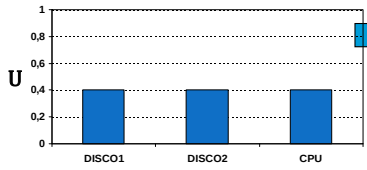
- En saturación, el servidor alcanza su productividad máxima:

$$X_0^{max} = {}^1/_{D_b}$$

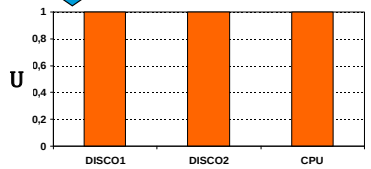
Servidor equilibrado (*balanced system*)

- Servidor en que todos los dispositivos, de media, tienen la misma demanda de servicio y utilización (la carga se absorbe equitativamente):

$$U_i \approx U_j \ \ \forall i,j = 1\cdots K \quad \Rightarrow \quad D_i \approx D_j \ \ \forall i,j = 1\cdots K$$



Aumento de la carga: λ_0 ⇈



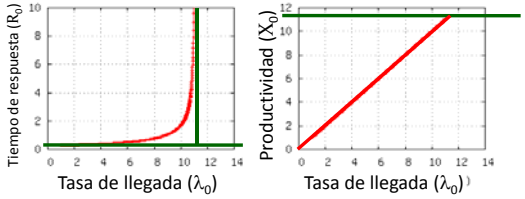
Todos los dispositivos son cuellos de botella

Límites del rendimiento de un servidor

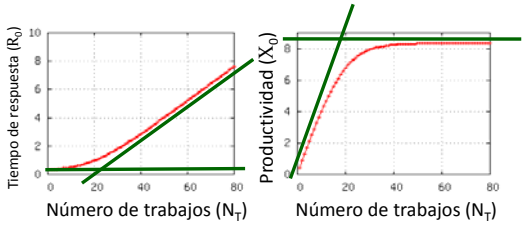
- Se trata de estimar las prestaciones límite de un servidor (R_o, X_o) en los casos extremos de alta y baja cargas.
- Esencialmente, se trata de estimar una cota superior de la productividad e inferior para el tiempo de respuesta del servidor por lo que a estos límites se les suele denominar ***límites optimistas*** del rendimiento. En particular, debemos preguntarnos:
  - ¿Cuál es la productividad máxima (X_0^{max}) del servidor?
  - ¿Cuál es el tiempo de respuesta mínimo (R_0^{min}) del servidor?
- Campos de aplicación:
  - Planificación de la capacidad del servidor (*capacity planning*).
  - Estimación de la mejora potencial de prestaciones que pueden reportar ciertas acciones sobre el servidor.

Localización de los límites (asíntotas)

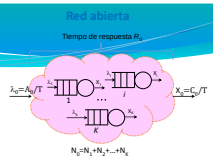
Redes abiertas



Redes cerradas



Límites optimistas: redes abiertas



- El valor máximo de la productividad del servidor será aquél producido por una tasa de llegada que sature completamente el dispositivo cuello de botella (U_b=1):

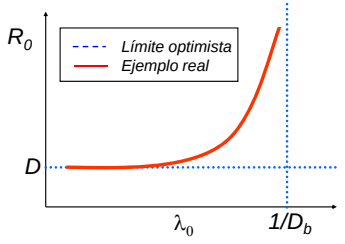
$$U_b = X_0 \times D_b \overset{\text{Si no sat.}}{=} \lambda_0 \times D_b \qquad Si\ U_b = 1 \Rightarrow X_o^{max} = \frac{1}{D_b}$$

  A partir de ese momento, una tasa de llegada mayor provocaría la saturación del servidor y, por tanto, dejaría de cumplirse la hipótesis del equilibro de flujo (X_o ya no podría seguir a λ_o).
- El valor más optimista (= el valor mínimo) del tiempo medio de respuesta del servidor (R_o^{min}) será el que experimenta un trabajo cuando llega al servidor sin que haya otros trabajos previamente ($W_i = 0 \rightarrow R_i^{min}=S_i \ \forall i=1..K$):

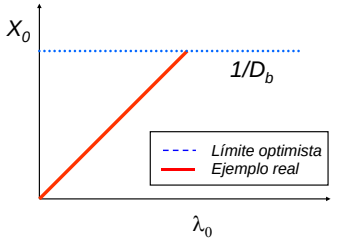
$$R_o^{min} = \sum_{i=1}^{K} V_i \times R_i^{min} = \sum_{i=1}^{K} V_i \times S_i = \sum_{i=1}^{K} D_i \equiv D$$

Resumen: Límites optimistas en redes abiertas

Tiempo de respuesta



Productividad



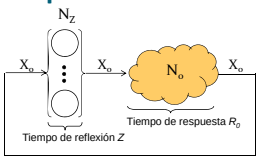
$$R_o^{min} = D \equiv \sum_{i=1}^{K} D_i \qquad X_o^{max} = \frac{1}{D_b}$$

Ejemplo de red abierta

Dispositivo	V_i	S_i (ms)	D_i (s)
CPU	16	10	0,16
DISCO A	7	20	0,14
DISCO B	8	30	**0,24**

- Tiempo de respuesta mínimo:
  - $R_0^{min} = 0{,}16 + 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}54s.$
- Productividad máxima:
  - $X_0^{max} = \frac{1}{D_b} = \frac{1}{0{,}24} = 4{,}2\ tr/s.$
- Utilización máxima de la CPU:
  - $U_{CPU}^{max} = X_0^{max} \times D_{CPU} = 0{,}67.$
- Productividad máxima de la CPU:
  - $X_{CPU}^{max} = X_0^{max} \times V_{CPU} = 67\ tr/s.$
- U_i con λ_o = 2 trabajos/s (=X_o):
  - $U_{CPU} = X_o \times D_{CPU} = 0{,}32.$
  - $U_A = X_o \times D_A = 0{,}28.$
  - $U_B = X_o \times D_B = 0{,}48.$

Límites optimistas: redes cerradas



Ley de Little a la red completa (N_T=N_o+N_Z):

$$N_T = X_0 \times (R_0 + Z)$$

$$R_0 = \frac{N_T}{X_0} - Z$$

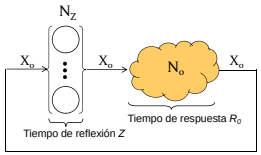
- a) Para valores de carga altos (N_T grande):
  - Valor optimista de la productividad: Cuando el dispositivo cuello de botella esté cerca de la saturación:

$$U_b = X_0 \times D_b \qquad Si\ U_b \longrightarrow 1 \Rightarrow X_0 \longrightarrow X_o^{max} = \frac{1}{D_b}$$

  - Valor optimista del tiempo de respuesta, a partir del valor optimista de la productividad (sin más que reemplazar ese valor de X_o en la ley de Little a la red completa):

$$R_0 \longrightarrow \left(\frac{N_T}{X_o^{max}}\right) - Z = D_b \times N_T - Z$$

Límites optimistas: redes cerradas (II)



Ley de Little a la red completa (N_T=N_o+N_Z):

$$N_T = X_0 \times (R_0 + Z)$$

$$X_0 = \frac{N_T}{R_0 + Z}$$

- b) Para valores de carga bajos (N_T pequeño):
  - Valor optimista del tiempo de respuesta: cuando los trabajos siempre encuentran los dispositivos sin ocupar (W_i = 0, por lo que R_i=S_i $\forall$i=1..K):

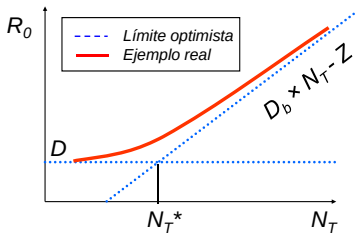
$$R_0 \rightarrow R_o^{min} = \sum_{i=1}^{K} V_i \times R_i^{min} = \sum_{i=1}^{K} V_i \times S_i = \sum_{i=1}^{K} D_i \equiv D$$

  - Valor optimista de la productividad a partir del valor optimista del tiempo de respuesta (sin más que reemplazar ese valor de R_o en la ley de Little a la red completa):

$$X_0 \rightarrow \frac{N_T}{R_o^{min} + Z} = \frac{N_T}{D + Z}$$

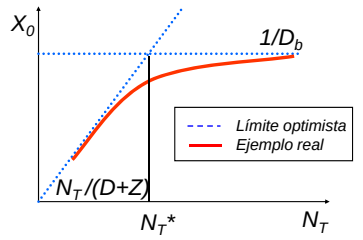
Resumen: límites optimistas en redes cerradas

Tiempo de respuesta



$$R_0 \geq max\{D, D_b \times N_T - Z\}$$

Productividad



$$X_0 \leq min\left\{\frac{N_T}{D+Z}, \frac{1}{D_b}\right\}$$

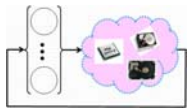
Punto teórico de "saturación" (knee point)

- Es el valor de N_T en donde las asíntotas coinciden:

$$D = D_b \times N_T^* - Z \Rightarrow N_T^* = \frac{D+Z}{D_b}$$

- Propiedades del punto teórico de "saturación" N_T^*:
  - Para un número total de trabajos $N_T > N_T^*$, los límites asintóticos vienen impuestos únicamente por el cuello de botella del servidor.
  - A partir de N_T^* trabajos ya no se puede conseguir el tiempo de respuesta mínimo ya que se empiezan a formar colas de espera en, al menos, el dispositivo cuello de botella (en la práctica, esto sucede bastante antes).
  - En principio, podría parecer el número ideal de trabajos en la red ya que, al menos teóricamente, para $N_T = N_T^*$ se podría conseguir la productividad máxima y el tiempo de respuesta mínimo absolutos del servidor (en la práctica esto nunca se puede conseguir de forma simultánea): $N_T^* = X_o^{max} \times \left(R_o^{min} + Z\right) = \frac{D+Z}{D_b}$

Ejemplo de red cerrada



Tiempo de reflexión (Z)			18 s
Dispositivo	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	5	1	5
DISCO A	2	2	4
DISCO B	2	1.5	3

- Asíntotas:

$R_0 \geq max\{D, D_b \times N_T - Z\}$

$= max\{12, 5 \times N_T - 18\}$

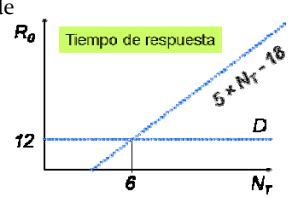
$X_0 \leq min\left\{\frac{N_T}{D+Z}, \frac{1}{D_b}\right\} = min\left\{\frac{N_T}{30}, 0{,}2\right\}$

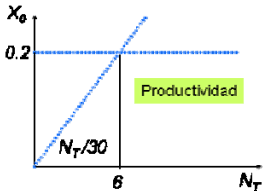
- Punto teórico de saturación:

$N_T^* = \frac{D+Z}{D_b}$

$= \frac{12+18}{5}$

$= 6\ trabajos$

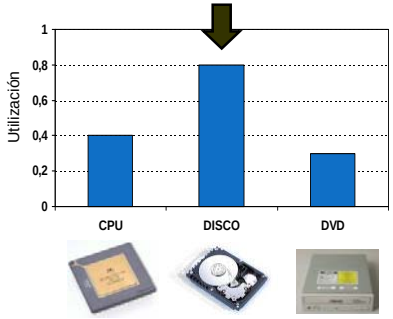




5.4. Técnicas de mejora

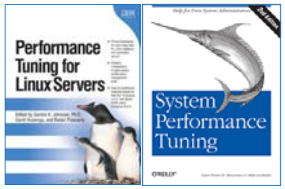
Técnicas para mejorar las prestaciones

- Para mejorar las prestaciones de manera significativa hay que actuar sobre el cuello de botella del servidor.
  - Sintonización o ajuste (tuning).
  - Actualización o ampliación (upgrading).



Sintonización o ajuste (*tuning*)

- Optimización del funcionamiento de componentes existentes:
  - Componentes hardware: frecuencias, voltajes, parámetros de la placa, ...
  - Aplicaciones. Usamos profilers.
  - Sistema operativo: políticas de gestión de procesos y memoria virtual, distribución de la información entre discos,...
- Algunos problemas:
  - Posible alteración de la fiabilidad.
  - Hay que conocer muy bien el sistema operativo y el funcionamiento de los componentes hardware.
  - Deberíamos realizar tests estadísticos para ver qué factores realmente influyen en las prestaciones.

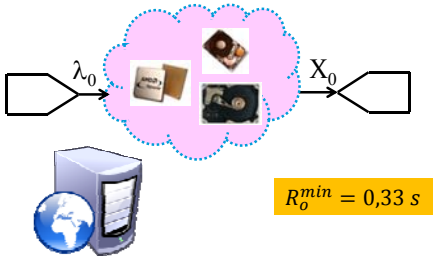


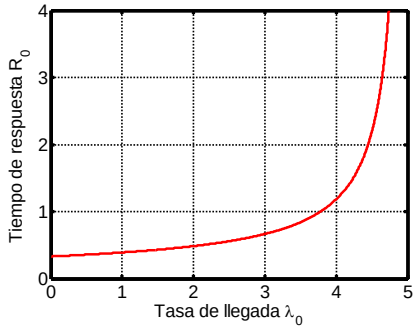
Actualización o ampliación (*upgrading*)

- Reemplazar dispositivos por otros más rápidos → Disminuimos el tiempo medio de servicio.
  - Procesador, memoria, placa base, disco...
- Añadir dispositivos para poder realizar más tareas en paralelo → Disminuimos la razón de visita.
  - Ejemplo: multiprocesadores, matrices de discos (RAID),...
- Algunos problemas:
  - Compatibilidad de los nuevos elementos con los existentes.
  - Facilidad del servidor para dejarse actualizar (extensibilidad/escalabilidad).

Ejemplo: red abierta (servidor web)

Dispositivo	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	10	0,02	**0,2**
DISCO A	4	0,02	0,08
DISCO B	5	0,01	0,05





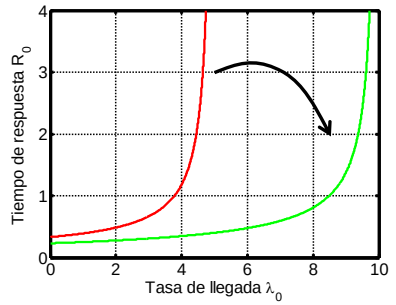
$R_o^{min} = 0{,}33\ s$

$X_o^{max} = \frac{1}{D_b} = \frac{1}{0{,}2} = 5\ tr/s$

Actualización: CPU doble de rápida

Dispositivo	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	10	0,01	**0,1**
DISCO A	4	0,02	0,08
DISCO B	5	0,01	0,05

La CPU se mantiene como cuello de botella pero con menor demanda



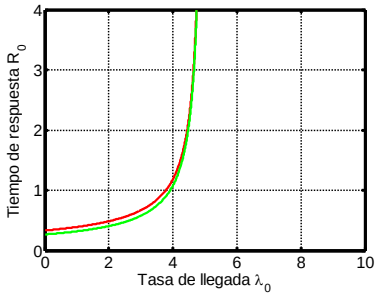
$R_o^{min} = 0{,}23\ s$

$X_o^{max} = \frac{1}{D_b} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ tr/s$

Actualización: discos doble de rápidos

Dispositivo	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	10	0,02	**0,2**
DISCO A	4	0,01	0,04
DISCO B	5	0,005	0,025

La CPU se mantiene como cuello de botella

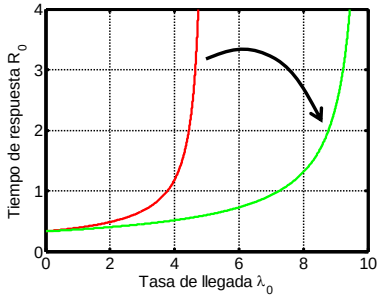


$R_o^{min} = 0{,}265\ s$ $X_o^{max} = \frac{1}{D_b} = \frac{1}{0{,}2} = 5\ tr/s$

Ampliación: Añadimos una segunda CPU

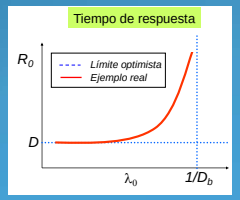
Dispositivo	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	5	0,02	**0.1**
DISCO A	4	0,02	0,08
DISCO B	5	0,01	0,05
CPU 2	**5**	**0,02**	**0.1**

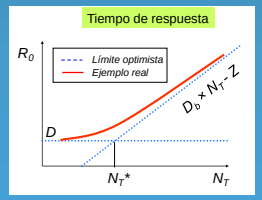
Suponemos que el S.O. equilibra la carga entre ambas CPU

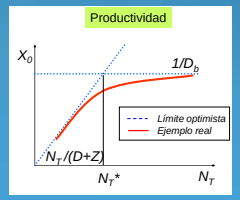


$R_o^{min} = 0{,}33\ s$ $X_o^{max} = \frac{1}{D_b} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ tr/s$

5.5. Algoritmos de resolución de modelos de redes de colas







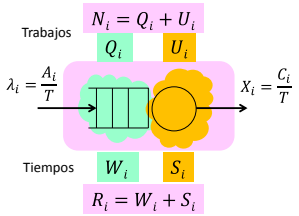
Algoritmos de resolución de redes de colas

- En este apartado vamos a proporcionar una metodología (algoritmo) para resolver modelos de redes de colas. Supondremos conocido:
  - El número de estaciones de servicio (K).
  - Por cada estación:
    - Razón de visita medio de cada estación (V_i).
    - Tiempo de servicio medio de cada estación (S_i).
  - Si la red es abierta: Tasa de llegada al servidor (λ_0).
  - Si la red es cerrada:
    - Número total de trabajos en la red (N_T).
    - Si la red es interactiva: Tiempo medio de reflexión de los usuarios (Z).

Hipótesis del "peor escenario posible" para redes abiertas en equilibrio de flujo

- Cuando un trabajo llega a la estación de servicio i-ésima de una **red de colas abierta** supondremos que para poder acceder al dispositivo tiene que esperar a que se procesen **todos** los N_i trabajos que, de media, hay en ese momento en la estación, uno comenzando a ser servido y el resto esperando:

$$W_i = N_i \times S_i$$



- Por lo tanto, el tiempo de respuesta medio vendrá dado, en este peor escenario posible, por:

$$R_i = W_i + S_i = N_i \times S_i + S_i$$

- Aplicando la ley de Little ($N_i = \lambda_i \times R_i$):

$$\boldsymbol{R_i} = \lambda_i \times \boldsymbol{R_i} \times S_i + S_i \Rightarrow$$

$$R_i = \frac{S_i}{1 - \lambda_i \times S_i} = \frac{S_i}{1 - \lambda_0 \times V_i \times S_i} = \frac{S_i}{1 - \lambda_0 \times D_i}$$

Resolución de redes de colas abiertas

- Suponemos conocidos: λ_o, V_i y S_i $\forall i=1..K$.

  - Paso 1.- Calculamos la demanda media de servicio de cada estación: $D_i = V_i \times S_i$
  - Paso 2.- Calculamos el tiempo medio de respuesta de cada estación: $R_i = \frac{S_i}{1 - \lambda_i \times S_i} = \frac{S_i}{1 - \lambda_0 \times D_i}$
  - Paso 3.- Calculamos el tiempo medio de respuesta del servidor: $R_0 = \sum_{i=1}^{K} V_i \times R_i = \sum_{i=1}^{K} \frac{V_i \times S_i}{1 - \lambda_0 \times D_i} = \sum_{i=1}^{K} \frac{D_i}{1 - \lambda_0 \times D_i}$

- El resto de variables operacionales (X_i, U_i, N_i , N_o, W_i, Q_i,...) se pueden calcular usando sus expresiones habituales.

Ejemplo: resolución de redes abiertas

Recurso	V_i	S_i (s)
CPU	9	0,010
DISCO	3	0,020
RED	5	0,016

Suponiendo que la tasa de llegada de peticiones al servidor es de 5 peticiones/s:

a) Calcule las demandas de servicio de cada recurso.
b) ¿Qué recurso es el cuello de botella? ¿Cuál es la productividad máxima del servidor? ¿Está el servidor saturado?
c) Calcule el tiempo de respuesta, para el peor caso posible, de cada recurso y del servidor.
d) Calcule el nº medio de clientes conectados (=trabajos) en el servidor.
e) Calcule la utilización, el tiempo medio de espera en la cola y el número de medio de trabajos en la cola de cada recurso.

Solución del ejemplo

a)

Recurso	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	9	0,010	0,09
DISCO	3	0,020	0,06
RED	5	0,016	0,08

b) La CPU es el cuello de botella (el recurso de mayor demanda de servicio).
- Productividad máxima del servidor:

$$X_0^{max} = {}^{1}/_{D_b} = 11{,}1\ tr/s$$

Como $\lambda_0 = 5\ tr/s < X_0^{max}$ el servidor no está saturado.

c) Peor caso posible: $R_i = N_i \times S_i + S_i \Rightarrow R_i = \frac{S_i}{1 - \lambda_0 \times D_i}$

$$R_{CPU} = \frac{S_{CPU}}{1 - \lambda_0 \times D_{CPU}} = \frac{0{,}01\ s}{1 - 5tr/s \times 0{,}09s} = 0{,}018s$$

Igualmente, $R_{DISCO} = 0{,}029s$, $R_{RED} = 0{,}027s$.

Finalmente, $R_0 = V_{CPU} \times R_{CPU} + V_{DISCO} \times R_{DISCO} + V_{RED} \times R_{RED} = 0{,}38\ s$

d) $N_0 = X_0 \times R_0 = 5\frac{tr}{s} \times 0{,}38s = 1{,}9\ tr$

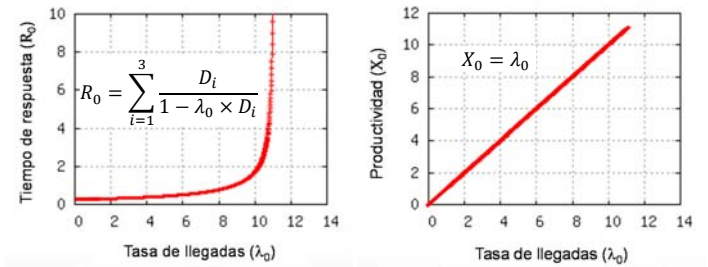
Solución del ejemplo (cont.)

e)

Recurso	V_i	S_i (s)	D_i (s)	R_i (s)	U_i	W_i (s)	Q_i (tr.)
CPU	9	0,010	0,09	0,018	0,45	0,008	0,37
DISCO	3	0,020	0,06	0,029	0,30	0,009	0,13
RED	5	0,016	0,08	0,027	0,40	0,011	0,27

- $U_i = X_0 \times D_i = 5\ tr/s \times D_i$;
- $W_i = R_i - S_i$
- $Q_i = \lambda_i \times W_i = X_i \times W_i =$
  $= X_0 \times V_i \times W_i = 5\ tr/s \times V_i \times W_i$

Adicionalmente, podríamos representar R_0 y X_0 en función de λ_0:



Resolución con `solvenet`

- Programa muy sencillo que resuelve redes de colas utilizando los algoritmos de esta sección.
  - Disponible el código fuente en lenguaje C (SWAD).
  - Los parámetros del modelo se indican en la línea de comandos.

```
Usage: solvenet [0|1] [lambda0| NT Z] K S1 V1...SK VK
  With no parameters, shows this message
  network: 0 (open) and 1 (closed)
  lambda0: arrival rate = throughput(only open networks)
  NT:      total number of jobs in the net (only closed nets)
  Z:       think time (only interactive closed networks)
  K:       number of service stations
  Si:      service time of device i
  Vi:      ratio visit of device i
```


Resolución con `solvenet`: redes abiertas

Recurso	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	9	0.010	0.09
DISCO	3	0.020	0.06
RED	5	0.016	0.08

λ_o	5.0 trabajos/s

```
solvenet 0 5.0 3 0.01 9 0.02 3 0.016 5
```

```
*********************************************************************
*   NAME    *     Ui     *     Ni     *     Ri     *     Xi     *     Wi     *
*********************************************************************
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 1     *    0.4500*    0.8182*    0.0182*   45.0000*    0.0082*
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 2     *    0.3000*    0.4286*    0.0286*   15.0000*    0.0086*
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 3     *    0.4000*    0.6667*    0.0267*   25.0000*    0.0107*
*           *            *            *            *            *            *
*********************************************************************
```


Resolución con `solvenet`: redes abiertas (II)

Recurso	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	9	0.010	0.09
DISCO	3	0.020	0.06
RED	5	0.016	0.08

λ_o	5.0 trabajos/s

```
solvenet 0 5.0 3 0.01 9 0.02 3 0.016 5
```

```
*********************************************************
*   NAME    *     Vi     *     Si     *     Di     *     Qi     *
*********************************************************
*           *            *            *            *            *
* DEV 1     *    9.0000*    0.0100*    0.0900*    0.3682*
*           *            *            *            *            *
* DEV 2     *    3.0000*    0.0200*    0.0600*    0.1286*
*           *            *            *            *            *
* DEV 3     *    5.0000*    0.0160*    0.0800*    0.2667*
*           *            *            *            *            *
*********************************************************
```

Resolución con `solvenet`: redes abiertas (III)

Recurso	V_i	S_i (s)	D_i (s)
CPU	9	0.010	0.09
DISCO	3	0.020	0.06
RED	5	0.016	0.08

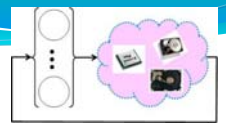
λ_o	5.0 trabajos/s

```
solvenet 0 5.0 3 0.01 9 0.02 3 0.016 5
```

```
**********************************
*         SYSTEM VARIABLES       *
**********************************
*                        *       *
* #JOBS IN SYSTEM (N0)   *  1.9134*
*                        *       *
* RESPONSE TIME (R0)     *  0.3827*
* MINIMUM RESPONSE TIME  *  0.2300*
*                        *       *
* THROUGHPUT (X0)        *  5.0000*
* MAXIMUM THROUGHPUT     *  11.111*
*                        *       *
**********************************
```

```
**********************************
*       ASIMPTOTIC BOUNDS        *
**********************************
*                                *
* R0_min =      0.2300           *
* X0_max =      11.1111          *
*                                *
**********************************
```


Resolución de redes cerradas



- Suponemos conocidos: V_i , S_i, N_T y Z.
  - Método: Debemos ir resolviendo la red para valores incrementales del número de trabajos en la red hasta alcanzar N_T: n_T=1,...,N_T.
  - Notación: $N_i(n_T)$: Número de trabajos en la estación de servicio i-ésima si en la red hubiese n_T trabajos. Ídem para los tiempos de respuesta $R_i(n_T)$ y las productividades $X_i(n_T)$.
  - Hipótesis: $W_i(n_T) = N_i(n_T - 1) \times S_i \Rightarrow \boldsymbol{R_i(n_T) = (N_i(n_T - 1) + 1) \times S_i}$

$For\ i = 1\ to\ K\ do\ N_i(0) = 0$ ← Inicialización del nº de trabajos en cada estación

$For\ n_T = 1\ to\ N_T\ do$

$For\ i = 1\ to\ K\ do\ \boldsymbol{R_i(n_T) = (N_i(n_T - 1) + 1) \times S_i}$ ← **Hipótesis del peor caso para redes cerradas**

$R_0(n_T) = \sum_{i=1}^{K} V_i \times R_i(n_T)\,, X_0(n_T) = \frac{n_T}{Z + R_0(n_T)}$ ← Tiempo de respuesta y productividad del servidor

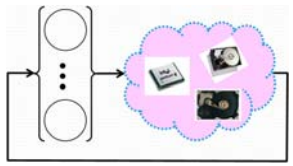
$For\ i = 1\ to\ K\ do\ N_i(n_T) = X_0(n_T) \times V_i \times R_i(n_T)$

Actualización del número de trabajos en cada estación.

Ejemplo: resolución de redes cerradas

T. reflexión (Z)	2 s

Recurso	V_i	S_i (s)
CPU	10	0.01
DISCO1	5	0.02
DISCO2	4	0.03



$N_{CPU}(0)$=$N_{DISCO1}(0) = N_{DISCO2}(0) = 0$

$n_T = 1$

$R_{CPU}(1) = S_{CPU} = 0.01s$

$R_{DISCO1}(1) = S_{DISCO1} = 0.02s$

$R_{DISCO2}(1) = S_{DISCO2} = 0.03s$

$R_0(1) = 10 \times 0.01 + 5 \times 0.02 + 4 \times 0.03 = 0.32s$

$X_0(1) = \frac{1}{2 + 0.32} = 0.43\ trabajos/s$

$N_{CPU}(1) = 0.43 \times 10 \times 0.01 = 0.043$

$N_{DISCO1}(1) = 0.43 \times 5 \times 0.02 = 0.043$

$N_{DISCO1}(1) = 0.43 \times 4 \times 0.03 = 0.052$

Ejemplo: resolución de redes cerradas (II)

$N_{CPU}(1) = 0.043; N_{DISCO1}(1) = 0.043$

$N_{DISCO2}(1) = 0.052$

$n_T = 2$

$R_{CPU}(2) = (0.043 + 1) \times S_{CPU} = 0.01043s$

$R_{DISCO1}(2) = (0.043 + 1) \times S_{DISCO1} = 0.0209s$

$R_{DISCO2}(2) = (0.052 + 1) \times S_{DISCO2} = 0.0316s$

$R_0(2) = \sum_{i=1}^{3} V_i \times R_i(2) = 0.3348s$

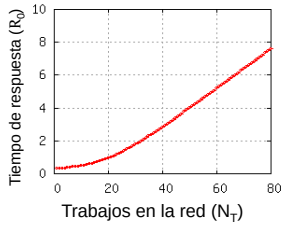
$X_0(2) = \frac{2}{2 + 0.3348} = 0.857\ trabajos/s$

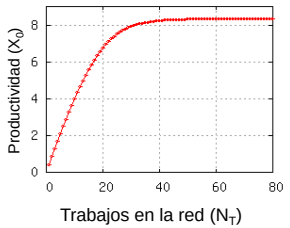
$N_{CPU}(2) = 0.857 \times 10 \times 0.01043 = 0.0894$

$N_{DISCO1}(2) = 0.857 \times 5 \times 0.0209 = 0.0894$

$N_{DISCO1}(2) = 0.857 \times 4 \times 0.03348 = 0.1081$

etc. hasta llegar al valor n_t=N_T que nos pidan





Resolución con `solvenet`: redes cerradas

Recurso	V_i	S_i (s)
CPU	10	0.01
DISCO1	5	0.02
DISCO2	4	0.03

T. reflexión (Z)	2 s
Nº Trabajos en la red cerrada (N_T)	2

```
solvenet 1 2 2 3 0.01 10 0.02 5 0.03 4
```

```
*****************************************************************
*   NAME    *     Ui     *     Ni     *     Ri     *     Xi     *     Wi     *
*****************************************************************
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 1     *     0.0857*     0.0894*     0.0104*     8.5659*     0.0004*
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 2     *     0.0857*     0.0894*     0.0209*     4.2830*     0.0009*
*           *            *            *            *            *            *
* DEV 3     *     0.1028*     0.1081*     0.0316*     3.4264*     0.0016*
*           *            *            *            *            *            *
*****************************************************************
```


Resolución con `solvenet`: redes cerradas (II)

Recurso	V_i	S_i (s)
CPU	10	0.01
DISCO1	5	0.02
DISCO2	4	0.03

T. reflexión (Z)	2 s
Nº Trabajos en la red cerrada (N_T)	2

```
solvenet 1 2 2 3 0.01 10 0.02 5 0.03 4
```

```
*********************************************************
*   NAME    *     Vi     *     Si     *     Di     *     Qi     *
*********************************************************
*           *            *            *            *            *
*  DEV 1    *   10.0000*     0.0100*     0.1000*     0.0037*
*           *            *            *            *            *
*  DEV 2    *    5.0000*     0.0200*     0.1000*     0.0037*
*           *            *            *            *            *
*  DEV 3    *    4.0000*     0.0300*     0.1200*     0.0053*
*           *            *            *            *            *
*********************************************************
```


Resolución con `solvenet`: redes cerradas (III)

Recurso	V_i	S_i (s)
CPU	10	0.01
DISCO1	5	0.02
DISCO2	4	0.03

T. reflexión (Z)	2 s
Nº Trabajos en la red cerrada (N_T)	2

```
solvenet 1 2 2 3 0.01 10 0.02 5 0.03 4
```

```
***********************************
*         SYSTEM VARIABLES        *
***********************************
*                         *       *
* #JOBS IN SYSTEM (N0)    *    0.2868*
* #INTERACTIVE USERS(NZ)*    1.7132*
* #JOBS IN THE NET (NT) *       2*
* SATURATION POINT (N*) *      20*
*                         *       *
* RESPONSE TIME (R0)      *    0.3348*
* MINIMUM RESPONSE TIME   *    0.3200*
*                         *       *
* THROUGHPUT (X0)         *    0.8566*
* MAXIMUM THROUGHPUT      *    8.3333*
*                         *       *
***********************************
```

```
***********************************
*         ASIMPTOTIC BOUNDS       *
***********************************
*                                 *
* R0 >= max{0.32,  0.12*NT-2.00}  *
*                                 *
* X0 <= min {NT/2.32,  8.33}      *
*                                 *
*                                 *
***********************************
```