

Lista 4

Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

Usaremos a definição de [1], para curvas 2-regulares, que diz que a curva precisa ser regular e com curvatura estritamente positiva.

Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ que é diferente do vetor nulo, para todo t real por conta da primeira componente constante igual a 1. Logo α é regular. Pelo item 7, a

curvatura é $\kappa_\alpha(t) = 2\sqrt{\frac{1 + 9t^2 + 9t^4}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}$, que só seria nula no caso $1 + 9t^2 + 9t^4 = 0$ o que não ocorre, dado que $(9t^2 + 9t^4) \geq 0$ e $1 > 0$. Logo α é 2-regular.

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

Temos $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 1)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$, a velocidade é não-nula pelo termo constante o que faz α ser regular. Usaremos a aceleração no cálculo da curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha(t) &= \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{\|(0, 2, 6t) \times (1, 2t, 3t^2 + 1)\|}{\|(1, 2t, 3t^2 + 1)\|^3} \\ &= \frac{\|(2 - 6t^2, 6t, -2)\|}{(1 + 4t^2 + (3t^2 + 1)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Para evitar contas, dado que queremos analisar se a curvatura é nula ou não, vamos olhar somente o numerador:

$$\begin{aligned}\|(2 - 6t^2, 6t, -2)\| &= \sqrt{(2 - 6t^2)^2 + 36t^2 + 4} \\ &= \sqrt{4 - 24t^2 + 36t^4 + 36t^2 + 4} \\ &= \sqrt{8 + 12t^2 + 36t^4} \\ &\geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ pois } (12t^2 + 36t^4) \geq 0 \text{ e } 8 > 0\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que α é 2-regular.

Exercício 2 Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 1)^2 + y^2 = 1$ e da esfera $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Desenhe a curva α , o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional

Solução 2 A duas primeiras coordenadas da velocidade, a menos de sinal, são $\sin(t)$ e $\cos(t)$ que já foi provado no início da [Lista 3](#) que não serão ao mesmo tempo. A terceira componente

é, à menos de constantes $\cos(t/2)$. É fácil ver que ela não zera quando $\cos(t) = 0$; O único problema seria com ângulos $t = \pi + 2k\pi$, onde $\sin(t) = \cos(t/2) = 0$, mas neste caso a componente $\cos(t) \neq 0$. Podemos então assegurar que as componentes não se anulam ao mesmo tempo, comprovando a regularidade da curva.

Na Figura 1, segue uma captura do conteúdo do arquivo [L4_ex2.ggb](#). Como podemos ver, de fato o traço da curva está contido na interseção das duas superfícies, o que termina nossa demonstração.

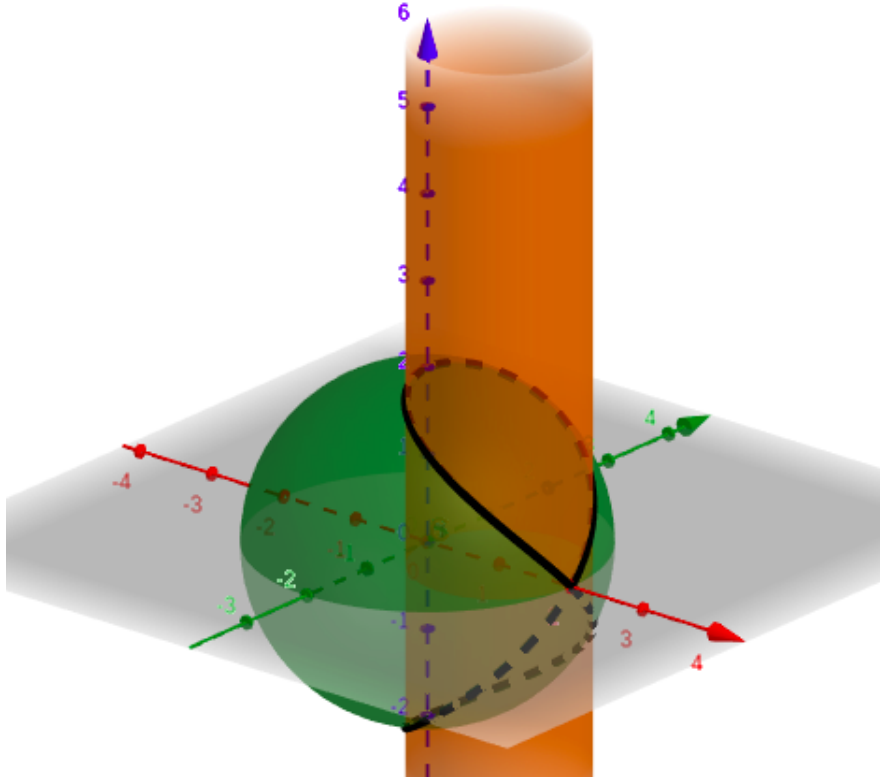


Figura 1: Interseção de cilindro e esfera

Brindadeiras a parte, vamos dar a prova formal de que o traço está na interseção. O cilindro C é o lugar geométrico do \mathbb{R}^3 dos pontos equidistantes (distância = 1) do eixo central, que, no caso, é dado pela reta que passa por $(1, 0, 0)$ paralela ao eixo z .

A esfera S é o lugar geométrico do espaço dos pontos que distam 2 unidades da origem $O = (0, 0, 0)$.

Para provar que $\alpha(\mathbb{R}) \subset C \cap S$, basta provar que

$$\begin{aligned} \|\alpha(t) - (1, 0, 0)\|_* &= 1, \text{ e} \\ \|\alpha(t) - O\| &= 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

onde $||\cdot||_*$ é um operador de norma que leva em conta somente as duas primeiras componentes dados que estamos calculando distância à uma reta paralela ao eixo z . Fazendo os cálculos, temos então:

$$\begin{aligned} ||\alpha(t) - (1, 0, 0)||_* &= ||(1 + \cos(t), \sin(t), 2 \sin(t/2)) - (1, 0, 0)||_* \\ &= ||(\cos(t), \sin(t), 2 \sin(t/2))||_* \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Provando então que o traço de α pertence a C .

$$\begin{aligned} ||\alpha(t) - O|| &= ||(1 + \cos(t), \sin(t), 2 \sin(t/2))|| \\ &= \sqrt{1 + 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4 \sin^2(t/2)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos(t) + 4 \cdot \frac{1 - \cos(t)}{2}} \\ &= \sqrt{2 + \cancel{2 \cos(t)} + 2 - \cancel{2 \cos(t)}} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Solução 3 Encontrando a função comprimento de arco:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t ||\alpha'(u)|| du \\ &= \int_{t_0}^t ||e^u (-\sin u, \cos u, 1)|| du \\ &= \int_{t_0}^t e^u (\sin^2 u + \cos^2 u + 1)^{1/2} du \\ &= \sqrt{2} \int_{t_0}^t e^u du \\ &= \sqrt{2} (e^t - e^{t_0}) \end{aligned}$$

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

Tomando os devidos cuidados com os domínios e imagens, podemos inverter a função comprimeiro de arco, fixando gerando $\mathcal{L}^{-1}(t) = \ln \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} \right)$

Assim, tomando $s_t = \frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}$ a reparametrização por comprimeiro de arco será:

$$\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = s_t (\cos(s_t), \sin(s_t), 1),$$

Onde está definida para valores de t na qual $\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} > 0 \Rightarrow t > -e^{t_0}\sqrt{2}$.

Exercício 4 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante se, e só se, $\forall t \in I$, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $\|\alpha'(t)\|$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$.

Solução 4 Como a curva é regular $\|\alpha'(t)\| > 0, \forall t \in I$. Dada uma constante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, temos então:

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| = c &\Leftrightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = c^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \alpha', \alpha'' \rangle + \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \end{aligned}$$

Logo $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Para o caso particular da hélice, temos:

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \|(a \cos(t), a \sin(t), bt)'\| \\ &= \|(-a \sin(t), a \cos(t), b)\| \\ &= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

que é constante, pois a e b são arbitrários, mas fixos.

Exercício 5 Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação dotriedro de Frenet de cada curva

(a) $\alpha(t) = (4 \cos(t), 5 - 5 \sin(t), -3 \cos(t)), t \in \mathbb{R}$

A Figura 2 ilustra uma captura do arquivo [disponível no GitHub](#). Foi incluído na construção, um parâmetro m que expande o tamanho dos vetores para facilitar a visualização. Tal arquivo também faz a reparametrização por comprimentos de arco via CAS.

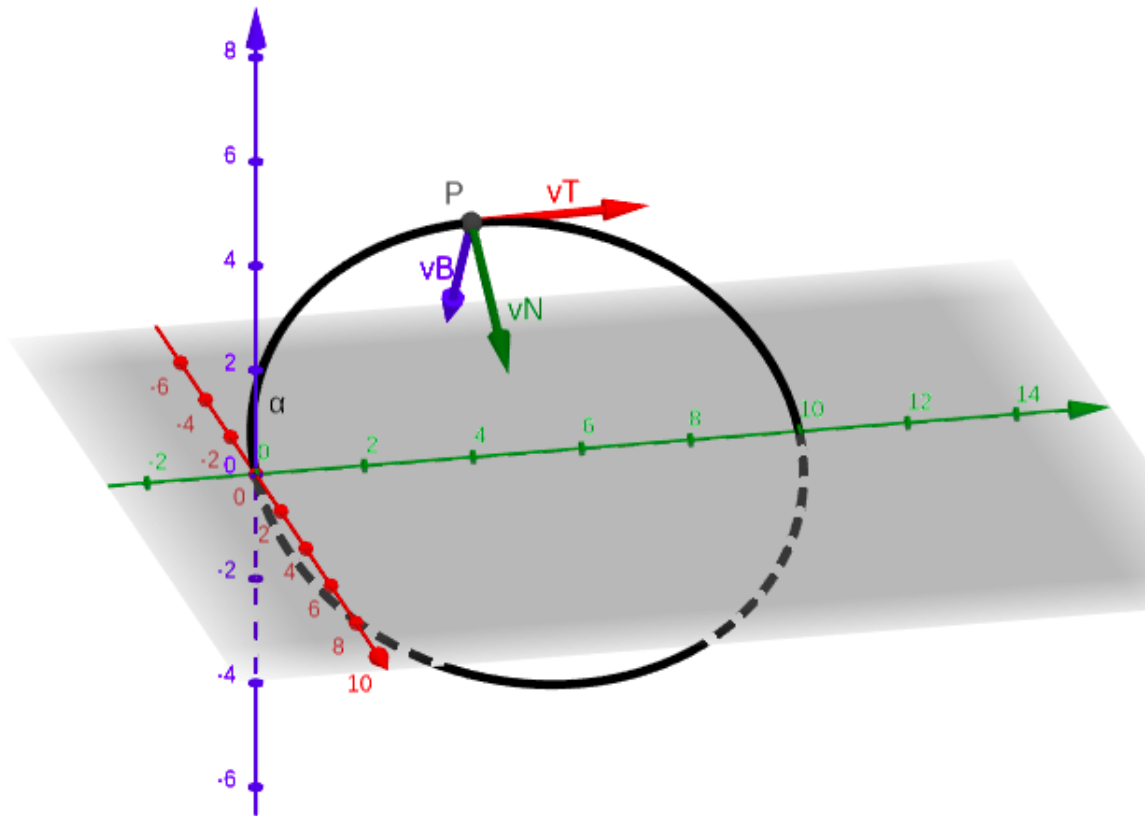


Figura 2: Triedro de Frenet expandido

(b) $(1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

Na Figura 3, vemos uma captura do arquivo [disponível aqui](#). Que nada mais é do que a mesma construção do item anterior, alterando apenas a equação da curva.

Exercício 6 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que

$$\kappa_{\alpha}(t) = \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

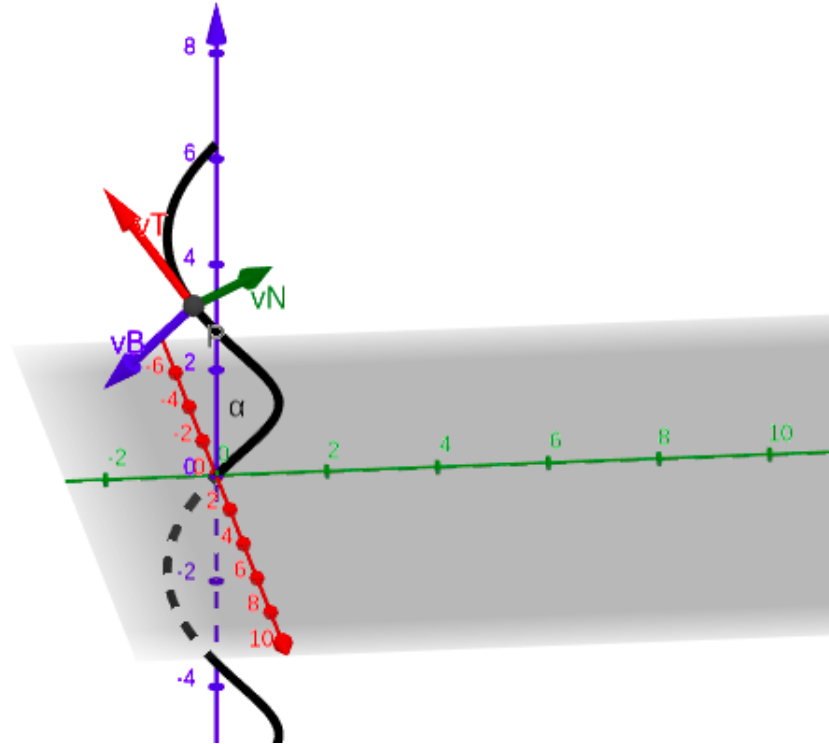


Figura 3: Triângulo de Frenet expandido

$$\tau_{\alpha}(t) = \frac{\langle (\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Solução 6 [1] Se α é regular, então admite reparametrização por comprimento de arco. Seja então, $\Phi : I \rightarrow I_0 \in \mathbb{R}$, definida pelo comprimento de arco $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$, e considere sua inversa $\Phi^{-1} : I_0 \rightarrow I$. Dado $t \in I$, e $s \in I_0$ tal que $\Phi(t) = s$, podemos dizer pela bijetividade provada em aula, que $\Phi^{-1}(s) = t$. Por simplificação da escrita, denotaremos Φ^{-1} por h .

Tomemos a curva *unit-speed*:

$$\begin{aligned} \beta : I_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \beta(s) &= \alpha(h(s)) \end{aligned}$$

Assim, $\alpha(t)$ pode ser escrito como $\alpha(h(\Phi(t))) = \beta(\Phi(t))$.

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

A curvatura de α em t será então a curvatura de β em $\Phi(t)$, e como β é *unit-speed*, temos¹:

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha(t) &= \kappa_\beta(\Phi(t)) \\ &= \left\| \frac{d^2}{dt^2} \beta(\Phi(t)) \right\| \\ &= \left\| \frac{d^2}{dt^2} \alpha[h(\Phi(t))] \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{dt} [\alpha'(t)h'(\Phi(t))] \right\| \\ &= \|\alpha''(t)h'(\Phi(t)) + \alpha'(t)h''(\Phi(t))\| \\ \text{Pelo Teorema da Função Inversa, } h'(t) &= 1/\|\alpha'(t)\|\end{aligned}$$

Temos ainda que $h'(\Phi(t)) = h'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|}$.

Voltando ao cálculo do determinante, pela

Exercício 7 Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha(t) &= \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|(0, 2, 6t) \times (1, 2t, 3t^2)\|}{\|(1, 2t, 3t^2)\|^3} \\ &= \frac{\|(-6t^2, 6t, -2)\|}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} = \frac{2\|(-3t^2, 3t, -1)\|}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \\ &= \frac{2(1 + 9t^2 + 9t^4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{1 + 9t^2 + 9t^4}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(t) &= \frac{\langle (\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle (6t^2, -6t, 2), (0, 0, 6) \rangle}{\|(6t^2, -6t, 2)\|^2} \\ &= \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} \\ &= \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}\end{aligned}$$

¹a notação linha de derivada se refere a variável t

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

(b) $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$

Como $\|\beta'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = \sqrt{2}$ a curva β não é unit-speed, podemos reparametrizar por comprimento de arco, transformá-la em unit-speed e calcular a curvatura e torção a partir daí.

É fácil ver que fazendo $t_0 = 0$, $\mathcal{L}_\beta(t) = \sqrt{2}t$, logo $\mathcal{L}_\beta^{-1}(t) = t/\sqrt{2}$, e a curva reparametrizada será:

$$\beta(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(t) &= \|\beta''(t)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|(-\sin(t/\sqrt{2}), \cos(t/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2})'\| \\ &= \frac{1}{2} \|(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0)\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2(t/\sqrt{2}) + \cos^2(t/\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Para a torção, vamos determinar os vetores tangente (T), normal (N) e binormal (B), do Triedro de Frenet, e calcular torção como a $\tau(s)$ tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s/\sqrt{2}), \cos(s/\sqrt{2}), 1) \\ N(s) &= (-\cos(s/\sqrt{2}), -\sin(s/\sqrt{2}), 0) \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1)\end{aligned}$$

Exercício 8 Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

(a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t .

Seja h um função de reparametrização com inversa $\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$. Seja $\bar{\alpha} := \alpha(\cdot)$

(b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de \mathbb{R}^3 tal que $\langle P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) \rangle = 0$

Exercício 9 Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

(a) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in \mathbb{R}$

(b) $(a \cos(t) + b \sin(t), a \sin(t) + b \cos(t), c \sin(2t)), t \in \mathbb{R}$

Solução 9 O arquivo do item (a) se encontra [neste link](#), e neste outro o arquivo do [item \(b\)](#)

Exercício 10 Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante como eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

Solução 10 Dada a hélice circular $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ com um cálculo similar ao que foi feito na questão 7, que está detalhado em [\[1\]](#), obtemos a seguinte reparametrização por comprimento de arco, considerando $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\alpha(s) = (a \cos(s/\ell), a \sin(s/\ell), bs/\ell)$$

Assim a curva fica *unit-speed* e teremos:

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\ell}(-a \sin(s/\ell), a \cos(s/\ell), b)$$

‘ O vetor normal $N(s)$ é o unitário da aceleração.

$$\begin{aligned}\alpha''(s) &= \frac{1}{\ell^2}(-a \cos(s/\ell), -a \sin(s/\ell), 0) \\ \|\alpha''(s)\| &= \frac{1}{\ell^2} \sqrt{a^2} = \frac{|a|}{\ell^2} \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = -\frac{a}{|a|}(\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0)\end{aligned}$$

Assim, o binormal será:

$$\begin{aligned}B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= -\frac{a}{\ell|a|}(-a \sin(s/\ell), a \cos(s/\ell), b) \times (\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0) \\ &= -\frac{a}{\ell|a|}(-b \sin(s/\ell), b \cos(s/\ell), -a)\end{aligned}$$

Tal hélice está no cilindro de eixo z , queremos provar que o ângulo entre o binormal e tals eixo é constante. Tomemos o vetor $\vec{v} = (0, 0, 1)$, vamos então calcular o cosseno entre B e v e mostrar que é constante.

$$\begin{aligned}\cos(B(s), \vec{v}) &= \frac{\langle B(s), \vec{v} \rangle}{\|B(s)\| \cdot \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{a^2/\ell|a|}{\|B(s)\|} \\ &= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a| \cdot \|(-b \sin(s/\ell), b \cos(s/\ell), -a)\|} \\ &= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{a}{\ell},\end{aligned}$$

que é contante, como queríamos demonstrar.

O arquivo [L4_ex11.ggb](#) ilustra tal fato.

Exercício 11 Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5} \cos(s) \right), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo. Determine, então, seus centro e raio

Solução 11 A velocidade da curva é:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5} \sin(s) \right),$$

que é formada essencialmente por senos e cossenos, que já argumentamos anteriormente que não se zeram ao mesmo tempo. Logo a curva é regular.

A norma da velocidade é:

$$\begin{aligned}\|\alpha'(s)\| &= \left\| \left(-\frac{4}{5} \sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5} \sin(s) \right) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2(s) + \cos^2(s) + \frac{9}{25} \sin^2(s)} \\ &= \sqrt{\sin^2(s) + \cos^2(s)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Lista 4 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

O que mostra que a curva está parametrizada por comprimento de arco.

Usando a Proposição 2.3.3 de [2], se provarmos que a torção é identicamente nula, a curva será plana. Bastará então provar que é um lugar geométrico de pontos equidistantes de um centro.

Utilizando o Geogebra CAS nos cálculos, chegamos à:

$$\begin{aligned}T(s) &= \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right) \\N(s) &= \left(-\frac{4}{5}\cos(s), \sin(s), \frac{3}{5}\cos(s)\right) \\B(s) &= T(s) \times N(s) \\&= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)\end{aligned}$$

A torção $\tau(s)$ é tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$, mas como $B(s)$ é constante, sua derivada é nula, implicando então $\tau(s) \equiv 0$.

Pela fórmula da curva, e pelos cálculos que fizemos, podemos desconfiar que $(0, 1, 0)$ é o centro do suposto círculo, pois removendo o termo 1, da expressão inicial, o calculo de distância seria análogo a norma da velocidade:

$$\begin{aligned}\|\alpha(t) - (0, 1, 0)\| &= \left\| \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s) - 1, -\frac{3}{5}\cos(s) \right) \right\| \\&= \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2(s) + \sin^2(s) + \frac{9}{25}\cos^2(s)} \\&= \sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s)} \\&= 1\end{aligned}$$

o que termina a demonstração de que o traço da curva é um círculo de centro $(0, 1, 0)$ e raio $\|\alpha(t) - (0, 1, 0)\| = 1$.

Referências

- [1] Ronaldo Freire Lima. *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [2] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.