Lista 2
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
4 de março de 2021

Exercício 1 Desenhe em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duasparametrizações? Porque falha?

Solução 1 ...

Exercício 2 Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (\log(s), s)$, $s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

Solução 2 ...

Exercício 3 Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

a. $\alpha(t) = (3\cosh 2t, 3\sinh 2t, 6t), \quad t \in [0, \pi]$

b. Catenária: $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir do ponto $(0, 1)$.

Solução 3 ...

Exercício 4 *Mudanças de parâmetro:*

a. Demonstrar que $s(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o invervalo (0∞) no intervalo $(0, 1)$.

b. Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.

c. Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

Solução 4 ...

Exercício 5 Provar que a curva

$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2}\right)$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = \left(\frac{2\cos t}{1+\sin t}, 1+\sin t\right), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Solução 5 ...

Exercício 6 Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento do arco.

Solução 6 ...

Exercício 7 Mostre que, se todas as retas tangentes a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em uma reta.

Solução 7 ...

Exercício 8 Mostre que, se todas as retas normais a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em um círculo.

Solução 8

Referências