Lista 4
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
24 de março de 2021

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

Usaremos a definição de [1], para curvas 2-regulares, que diz que a curva precisa ser regular e com curvatura estritamente positiva.

Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ que é diferente do vetor nulo, para todo t real por conta da primeira componente constante igual a 1. Logo α é regular. Pelo item 7, a curvatura é $\kappa_\alpha(t) = 2\sqrt{\dfrac{1 + 9t^2 + 9t^4}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}$, que só seria nula no caso $1 + 9t^2 + 9t^4 = 0$ o que não ocorre, dado que $(9t^2 + 9t^4) \geq 0$ e $1 > 0$. Logo α é 2-regular.

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

Temos $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 1)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$, a velocidade é não-nula pelo termo constante o que faz α ser regular. Usaremos a aceleração no cálculo da curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} \\
&= \frac{||(0, 2, 6t) \times (1, 2t, 3t^2 + 1)||}{||(1, 2t, 3t^2 + 1)||^3} \\
&= \frac{||(2 - 6t^2, 6t, -2)||}{(1 + 4t^2 + (3t^2 + 1)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Para evitar contas, dado que queremos analisar se a curvatura é nula ou não, vamos olhar somente o numerador:

$$\begin{aligned}
||(2 - 6t^2, 6t, -2)|| &= \sqrt{(2 - 6t^2)^2 + 36t^2 + 4} \\
&= \sqrt{4 - 24t^2 + 36t^4 + 36t^2 + 4} \\
&= \sqrt{8 + 12t^2 + 36t^4} \\
&\geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ pois } (12t^2 + 36t^4) \geq 0 \text{ e } 8 > 0
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que α é 2-regular.

Exercício 2 Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - 1)^2 + y^2 = 1$ e da esfera $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional

Solução 2 A duas primeiras coordenadas da velocidade, a menos de sinal, são $\sin(t)$ e $\cos(t)$ que já foi provado no início da Lista 3 que não serão ao mesmo tempo. A terceira componente é, à menos de constantes $\cos(t/2)$. É fácil ver que ela não zera quando $\cos(t) = 0$; O único problema seria com ângulos $t = \pi + 2k\pi$, onde $\sin(t) = \cos(t/2) = 0$, mas neste caso a componente $\cos(t) \neq 0$. Podemos então assegurar que as componentes não se anulam ao memso tempo, comprovando a regularidade da curva.

Na Figura 1, segue uma captura do conteúdo do arquivo L4_ex2.ggb. Como podemos ver, de fato o traço da curva está contido na interseção das duas superfícies, o que termina nossa demonstração.

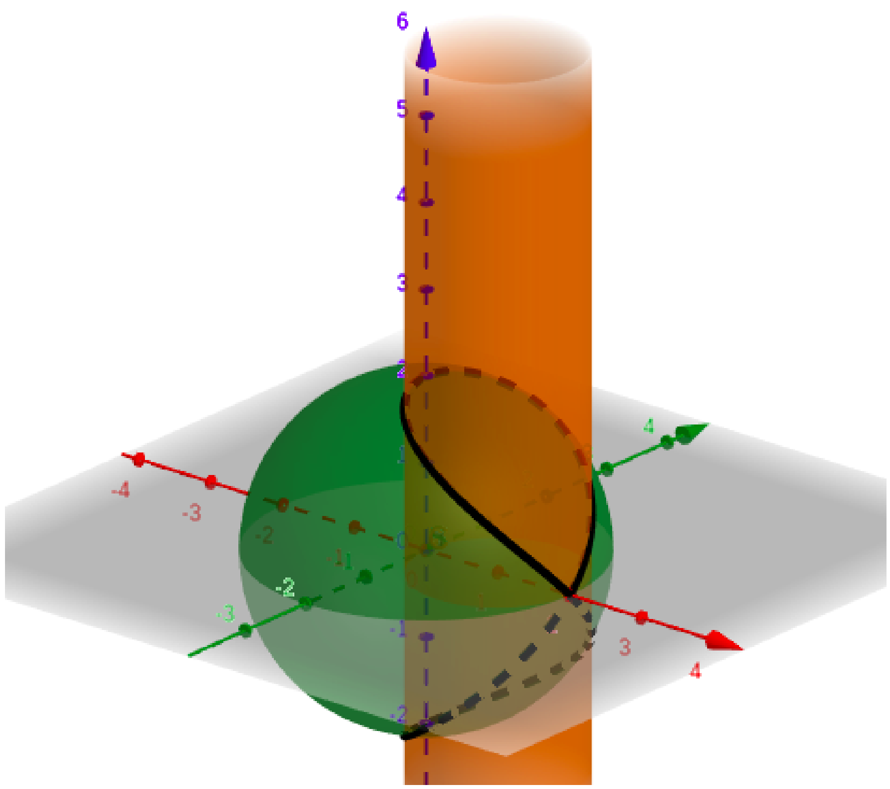

Figura 1: Interseção de cilindro e esfera

Brindadeiras a parte, vamos dar a prova formal de que o traço está na interseção. O cilindro C é o lugar geométrico do $\mathbb{R}^3$ dos pontos equidistantes (distância $= 1$) do eixo central, que, no caso, é dado pela reta que passa por $(1, 0, 0)$ paralela ao eixo z.

A esfera S é o lugar geométrico do espaço dos pontos que distam 2 unidades da origem $O = (0, 0, 0)$.

Para provar provar que $\alpha(\mathbb{R}) \subset C \cap S$, basta provar que

$$||\alpha(t) - (1, 0, 0)||_* = 1, \text{ e}$$
$$||\alpha(t) - O|| = 2 \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $||.||_*$ é um operador de norma que leva em conta somente as duas primeiras componentes dados que estamos calculando distância à uma reta paralela ao eixo z. Fazendo os cálculos, temos então:

$$\begin{aligned}||\alpha(t)-(1,0,0)||_* &= ||(1+\cos(t),\sin(t),2\sin(t/2))-(1,0,0)||_*\\&= ||(\cos(t),\sin(t),2\sin(t/2))||_*\\&= \sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\\&= \sqrt{1}=1\end{aligned}$$

Provando então que o traço de α pertence a C.

$$\begin{aligned}||\alpha(t)-O|| &= ||(1+\cos(t),\sin(t),2\sin(t/2))||\\&= \sqrt{1+2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)+4\sin^2(t/2)}\\&= \sqrt{2+2\cos(t)+4\cdot\frac{1-\cos(t)}{2}}\\&= \sqrt{2+\cancel{2\cos(t)}+2-\cancel{2\cos(t)}}\\&= \sqrt{4}=2\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t)=(e^t\cos(t),e^t\sin(t),e^t),\ \ t\in\mathbb{R}$$

Solução 3 Encontrando a função comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t}||\alpha'(u)||du\\&= \int_{t_0}^{t}||e^u(-\sin u,\cos u,1)||du\\&= \int_{t_0}^{t}e^u(\sin^2 u+\cos^2 u+1)^{1/2}du\\&= \sqrt{2}\int_{t_0}^{t}e^u du\\&= \sqrt{2}(e^t-e^{t_0})\end{aligned}$$

Tomando os devidos cuidados com os domínios e imagens, podemos inverter a função comprimeiro de arco, fixando gerando $\mathcal{L}^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)$

Assim, tomando $s_t = \frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}$ a reparametrização por comprimeiro de arco será:

$$\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = s_t\left(\cos\left(s_t\right), \sin\left(s_t\right), 1\right),$$

Onde está definida para valores de t na qual $\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} > 0 \Rightarrow t > -e^{t_0}\sqrt{2}$.

Exercício 4 Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e só se,$\forall t \in I$, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $||\alpha'(t)||$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$.

Solução 4 Como a curva é regular $||\alpha'(t)|| > 0$, $\forall t \in I$. Dada uma constante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, temos então:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| = c &\Leftrightarrow ||\alpha'(t)||^2 = c^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle\alpha', \alpha'\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha', \alpha''\rangle + \langle\alpha'', \alpha'\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\langle\alpha', \alpha''\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha', \alpha''\rangle = 0
\end{aligned}$$

Logo $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Para o caso particular da hélice, temos:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= ||(a\cos(t), a\sin(t), bt)'|| \\
&= ||(-a\sin(t), a\cos(t), b)|| \\
&= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + b^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2},
\end{aligned}$$

que é constante, pois a e b são arbitrários, mas fixos.

Exercício 7 Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{||(0,2,6t) \times (1,2t,3t^2)||}{||(1,2t,3t^2)||^3} \\
&= \frac{||(-6t^2, 6t, -2)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} = \frac{2||(-3t^2, 3t, -1)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= \frac{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{1+9t^2+9t^4}{(1+4t^2+9t^4)^3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha(t) &= \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2} \\
&= \frac{\langle(6t^2, -6t, 2), (0,0,6)\rangle}{||(6t^2, -6t, 2)||^2} \\
&= \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} \\
&= \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}
\end{aligned}$$

(b) $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$

Como $||\beta'(t)|| = ||(-\sin t, \cos t, 1)|| = \sqrt{2}$ a curva β não é unit-speed, podemos reparametrizar por comprimento de arco, trnasformá-la em unit-speed e calcular a curvatura e torção a partir daí.

É fácil ver que fazendo $t_0 = 0$, $\mathcal{L}_\beta(t) = \sqrt{2}t$, logo $\mathcal{L}_\beta^{-1}(t) = t/\sqrt{2}$, e a cruva reparametrizada será:

$$\beta(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(t) &= ||\beta''(t)|| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}||(-\sin(t/\sqrt{2}), \cos(t/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2})'|| \\
&= \frac{1}{2}||(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(t/\sqrt{2}) + \cos^2(t/\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para a torção, vamos determinar os vetores tangente (T), normal (N) e binormal (B), do Triedro de Frenet, e calcular torção como a $\tau(s)$ tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s/\sqrt{2}), \cos(s/\sqrt{2}), 1)\\
N(s) &= (-\cos(s/\sqrt{2}), -\sin(s/\sqrt{2}), 0)\\
B(s) &= T(s) \times N(s)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1)
\end{aligned}$$

Exercício 11 Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante como eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

Solução 11 Dada a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ com um cálulo similar ao que foi feito na questão 7, que está detalhado em [1], obtemos a seguinte reparametrização por comprimento de arco, considerando $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\alpha(s) = (a\cos(s/\ell), a\sin(s/\ell), bs/\ell)$$

Assim a curva fica *unit-speed* e teremos:

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\ell}(-a\sin(s/\ell), a\cos(s/\ell), b)$$

‘ O vetor normal $N(s)$ é o unitário da aceleração.

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \frac{1}{\ell^2}(-a\cos(s/\ell), -a\sin(s/\ell), 0)\\
||\alpha''(s)|| &= \frac{1}{\ell^2}\sqrt{a^2} = \frac{|a|}{\ell^2}\\
N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||} = -\frac{a}{|a|}(\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0)
\end{aligned}$$

Assim, o binormal será:

$$\begin{aligned}
B(s) &= T(s) \times N(s)\\
&= -\frac{a}{\ell|a|}(-a\sin(s/\ell), a\cos(s/\ell), b) \times (\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0)\\
&= -\frac{a}{\ell|a|}(-b\sin(s/\ell), b\cos(s/\ell), -a)
\end{aligned}$$

Tal hélice está no cilindro de eixo z, queremos provar que o ângulo entre o binormal e tals eixo é constante. Tomemos o vetor $\vec{v} = (0,0,1)$, vamos então calcular o cosseno entre B e v e mostrar que é constante.

$$
\begin{aligned}
\cos(B(s),\vec{v}) &= \frac{\langle B(s),\vec{v}\rangle}{||B(s)||\cdot||\vec{v}||}\\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{||B(s)}\\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a|\cdot||(-b\sin(s/\ell), b\cos(s/\ell), -a)||}\\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\\
&= \frac{a}{\ell},
\end{aligned}
$$

que é contante, como queríamos demonstrar.

Referências

[1] Ronaldo Freire Lima. *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.