

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

Exercício 1 Desenhe em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

Solução 1 Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t^2)$ e $\gamma'(t) = (3t^2, 6t^5)$. Por conta da coordenada constante, $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, logo é regular. Já γ' é anulada para $t = 0$, logo não é regular.

Antes de definir reparametrização vamos fixar algumas coisas. Seja I_1 o domínio de α e I_2 o domínio de γ ; Vamos considerar neste caso $I_1 = I_2 = \mathbb{R}$. γ é reparametrização de α se existe um **difeomorfismo** $\phi : I_2 \rightarrow I_1$ tal que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) \ \forall t \in I_2$.

Assim a função naturalmente candidata à reparametrização de α é $\phi(t) = t^3$.

Porque falha? Pois ϕ não é um difeomorfismo, logo não é reparametrização segundo a definição dada! Sua inversa $\phi^{-1}(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável em todos os pontos do domínio, pois a derivada $\frac{1}{3}t^{-2/3}$ não está definida em $t = 0$.

Exercício 2 Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (\log(s), s)$, $s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

Solução 2 Queremos provar que $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}_{>0})$. Tome

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi(s) &= \log(s)\end{aligned}$$

Afirmo que ϕ é bijetiva. A injetividade segue da monotonicidade estrita do logaritmo¹. Segue um rascunho da prova da sobrejetividade:

Usando a definição $\log x := \int_1^x \frac{1}{u} du$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo[1], temos que \log é diferenciável em todo seu domínio $(\mathbb{R}_{>0})$, disso segue a continuidade.

Para todo inteiro k no contradomínio \mathbb{R} conseguimos encontrar um elemento x no domínio tal que $\log(x) = k$ usando que $\log(e) = 1$ e a propriedade $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, os inteiros positivos são atingidos pelas potências positivas de e e os negativos pelas potências negativas. Pela continuidade, e pelo Teorema do Valor Intermediário[1], segue que $\forall k \in \mathbb{Z}$, vale que $\forall r \in (k, k+1)$, $\exists x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\log(x) = r$, que prova a sobrejetividade.

¹Uma outra prova (rascunho) rápida: $\log(x) = \log(y) = b \Rightarrow e^b = x$ e $e^b = y \Rightarrow x = y$

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

Acima já demos o motivo de ϕ ser diferenciável, se verificarmos que ϕ^{-1} é diferenciável, teremos que ϕ é um difeomorfismo. De fato $\phi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definida pelo exponencial, não só é diferenciável como pertence a C^∞ .

Sendo assim ϕ é difeomorfismo. Note que $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$.

O traço de α , $\alpha(\mathbb{R})$ é o conjunto $\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$, pois a segunda entrada exponencial é estritamente positiva.

O difeomorfismo ϕ (por ser bijetivo) leva todos os pontos $s \in \mathbb{R}_{>0}$ em \mathbb{R} . Sendo assim,

$$\beta(\mathbb{R}_{>0}) = \alpha(\phi(\mathbb{R}_{>0})) = \alpha(\mathbb{R})$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 3 Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

a. $\alpha(t) = (3 \cosh 2t, 3 \sinh 2t, 6t)$, $t \in [0, \pi]$

b. Catenária: $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir do ponto $(0, 1)$.

Solução 3 Usaremos a fórmula $\int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$ para calcular o comprimento de arco de γ entre t_0 e t .

a. Para $\alpha(t) = (3 \cosh 2t, 3 \sinh 2t, 6t)$ com $t \in [0, \pi]$, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_0^\pi \|(3 \cosh 2u, 3 \sinh 2u, 6u)'\| du \\ &= \int_0^\pi \|(6 \sinh 2u, 6 \cosh 2u, 6)\| du \\ &= \int_0^\pi (36(\sinh^2 2u + \cosh^2 2u + 1))^{1/2} du \\ &= \int_0^\pi 6(2 \cosh^2 2u - 1 + 1)^{1/2} du \\ &= 6\sqrt{2} \int_0^\pi \cosh 2u du \\ &= 3\sqrt{2} \sinh 2u \Big|_0^\pi \\ &= 3\sqrt{2}(\sinh(2\pi) - \sinh(0)) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}) \end{aligned}$$

- b. Para $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir de $(0, 1)$, quer dizer a partir de $t = 1$, e iremos calcular a distância parametrizada por s .

$$\begin{aligned} & \int_1^s ||(t, \cosh(t))'|| dt \\ &= \int_1^s ||(1, \sinh(t))|| dt \\ &= \int_1^s (1 + \sinh^2 t)^{1/2} dt \\ &= \int_1^s (\cosh^2 t)^{1/2} dt \\ &= \int_1^s \cosh t \, dt \\ &= \sinh t \Big|_{t=1}^{t=s} \\ &= \sinh(s) - \sinh(1) \xrightarrow{0} 0 \\ &= \sinh(s) \end{aligned}$$

Exercício 4 Mudanças de parâmetro:

- Demonstrar que $s(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.
- Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.
- Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

Solução 4 a. Primeiramente precisamos mostrar que $s(\mathbb{R}_{>0}) = (0, 1)$, ou seja, que $s(\mathbb{R}_{>0}) \subseteq (0, 1)$ e $(0, 1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$

Tome $x \in s(\mathbb{R}_{>0})$, é fácil ver que $x > 0$, pois x é divisão de dois números estritamente positivos: $\frac{\theta^2}{\theta^2 + 1}, \theta \in \mathbb{R}_{>0}$, para provar a continência em $(0, 1)$ basta provar

que $x < 1$. Veja que, dado $\theta > 0$, temos $\frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1/\theta^2} < 1$, ou seja, $x < 1$, o que implica finalmente, que $x \in (0, 1)$.

Para provar a continência inversa, tome $x \in (0, 1)$, vamos provar que $x \in s(\mathbb{R}_{>0})$ exibindo um $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $s(\theta) = x$. Com um algebrismo simples², chega-se

²Não houve nenhuma divisão por zero no processo, pode confiar

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

em $\theta = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} \in \mathbb{R}_{>0}$, veja então, que $s(\theta) = \frac{1}{1+1/\theta^2} = \frac{x}{1+(1-x)/x} = \frac{x^2}{x+1-x} \cdot \frac{1}{x} = x^2/x = x$

Logo $(0, 1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$, e portanto $(0, 1) = s(\mathbb{R}_{>0})$.

Agora resta provar que a aplicação é um difeomorfismo. A sobrejetividade já foi demonstrada do fato de que $(0, 1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$ que equivale à $\forall x \in (0, 1), \exists \theta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $s(\theta) = x$.

Para provar a injetividade, vamos pela contrapositiva da definição. $s(\theta_1) = s(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$:

$$\begin{aligned} s(\theta_1) &= s(\theta_2) \\ \Rightarrow \frac{1}{1+1/\theta_1^2} &= \frac{1}{1+1/\theta_2^2} \\ \Rightarrow 1+1/\theta_1^2 &= 1+1/\theta_2^2 \\ \Rightarrow 1/\theta_1^2 &= 1/\theta_2^2 \\ \Rightarrow \theta_1^2 &= \theta_2^2 \end{aligned}$$

Como $\theta_1, \theta_2 > 0$, então segue que $\theta_1 = \theta_2$

Conclui-se então que s é bijetiva, e sua inversa $s^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, é dada por $s^{-1}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}$.

Vamos provar, por fim a diferenciabilidade de s e s^{-1} .

Tome as funções:

$$\begin{aligned} s_1 : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto 1/x^2 \\ s_2 : \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}_{>1} \\ x &\mapsto x+1 \\ s_3 : \mathbb{R}_{>1} &\rightarrow (0, 1) \\ x &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

Veja que $s(\theta) = (s_3 \circ s_2 \circ s_1)(\theta)$ Sob seus domínios, todas as funções acima são diferenciáveis, omitirei a prova. Pela Regra da Cadeia[1], a composição anterior é diferenciável $\forall \theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Podemos calcular a derivada usando regras usuais do cálculo na fórmula principal e chegamos em $s'(\theta) = \frac{2\theta}{(\theta^2+1)^2}$

Pelo Corolário da Regra da Cadeia[1] que estabelece a derivada da função inversa, a função s satisfaz todas as condições que implicam a diferenciabilidade de s^{-1} : S é diferenciável no seu domínio, s^{-1} é contínua³ em todos os pontos da imagem de s , e $s'(\theta) > 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Segue que s^{-1} é diferenciável de derivada $1/s'$.

Provamos então que s é **bijetiva, diferenciável e sua inversa é diferenciável**, provando então que se trata de uma mudança de variáveis difeomorfa. ■

- b. Vamos usar a interpretação do termo "mudança de parâmetro" como sendo um homeomorfismo.

Temos que provar então que λ é bijetiva e contínua com inversa contínua.

(Injetividade) Tome $t_1, t_2 \in (-1, +1)$ arbitrários. Temos então,

$$\begin{aligned}\lambda(t_1) &= \lambda(t_2) \\ \Rightarrow \tan(\pi t_1/2) &= \tan(\pi t_2/2) \\ \Rightarrow \pi t_1/2 &= \pi t_2/2 \\ \Rightarrow t_1 &= t_2,\end{aligned}\tag{1}$$

onde 1 segue da bijetividade da tangente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Segue então que λ é injetiva em $(-1, 1)$.

(Sobrejetividade) Segue da bijetividade da tangente no mapeamento $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$, que $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\tan(\theta) = x$, sendo assim, é direto que $\exists t \in (-1, 1)$ tal que $\tan(\pi t/2) = x$.

(Continuidade) A continuidade de λ segue da continuidade da tangente. Tome $\lambda^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ dada por $\lambda^{-1}(x) = \frac{2 \arctan(x)}{\pi}$.

Segue da continuidade da arco tangente que λ^{-1} é contínua em todos os reais, pois é apenas uma multiplicação por constante.

Portanto, segue que λ é um **homeomorfismo**, como queríamos demonstrar.

- c. Seja uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, vamos provar que sempre existe um difeomorfismo $h : (0, 1) \rightarrow I$, com I aberto.

Se $I = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $(a < b)$ a transformação linear $h(x) = x \cdot (b - a) + a$, é claramente diferenciável, de imagem (a, b) , e também é injetiva. A inversa $h^{-1}(x) = \frac{x}{b - a} - a$ também é transformação linear diferenciável.

³O único ponto (real) de descontinuidade da expressão de $s^{-1}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}$ seria $x = 1$ que não está no domínio $(0, 1)$

Para $I = \mathbb{R}$, vimos no item anterior que $\lambda : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$, é um homeomorfismo, mas na verdade vale a diferenciabilidade de λ e λ^{-1} sob seus respectivos domínios, logo λ é um difeomorfismo.

Se tomarmos o mapa difeomorfo linear $\lambda_2 : (0, 1) \rightarrow (-1, 1)$ definido por $\lambda_2(x) = 2x - 1$, a composição $\lambda \circ \lambda_2$, será um difeomorfismo entre $(0, 1)$ e \mathbb{R} .

No caso $I = (-\infty, b)$, podemos usar $\lambda : (0, 1) \rightarrow (-\infty, b)$ dada por $\lambda(x) = \log(x) + b$. A imagem do logaritmo natural na restrição $(0, 1)$ é $(-\infty, 0)$, por isso a translação $+b$ é necessária. A prova da injetividade, sobrejetividade e diferenciabilidade segue de forma análoga ao rascunho da questão 2.

Para $I = (a, \infty)$ podemos tomar $\lambda(x) = -\log(x) + a$, inspirando-se no caso anterior.

Exercício 5 Provar que a curva

$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2} \right)$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

$$\alpha(t) = \left(\frac{2 \cos t}{1 + \sin t}, 1 + \sin t \right), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Solução 5 A derivada da curva é $\gamma'(t) = \left(2, \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right)$, que nunca será nula por conta da primeira componente constante. Logo γ é regular.

Para provar que $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é reparametrização de $\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, temos que provar que existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t))$.

Se tal homeomorfismo existe, teremos:

$$\begin{aligned} 1 + \sin \phi(t) &= \frac{2}{1+t^2} \\ \Rightarrow \sin \phi(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \Rightarrow \phi(t) &= \arcsin \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \end{aligned}$$

Checando se ϕ funciona na primeira componente⁴:

⁴Usamos $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ que segue de Pitágoras

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos \phi(t)}{1 + \sin \phi(t)} \\ &= \frac{2 \sqrt{1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2}}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}}}{2/(1 + t^2)} \\ &= \sqrt{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2t^2 + t^4 - 1 + 2t^4 - t^4} \\ &= \sqrt{4t^2} \\ &= 2t \end{aligned}$$

Que corresponde a primeira componente de γ como esperado.

Agora precisamos provar que ϕ é difeomorfismo. ϕ está bem definida pois $\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ para $t > 0$ pertence ao domínio onde função arcsin é bijetiva.

Como $1 - t^2 < 1 + t^2$ a fração é limitada por 1. E dado que $1 - t^2 > -1 - t^2$, tem-se $\frac{1 - t^2}{1 + t^2} > -1$.

Para provar a bijetividade de ϕ basta provar que $t \mapsto \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ é bijetiva $\forall t \in \mathbb{R}_{>0}$, pois a bijetividade do arcsin implicará na bijetividade de ϕ .

(Injetividade) Tome $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\begin{aligned} \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2} &= \frac{1 - t_2^2}{1 + t_2^2} \\ \Rightarrow (1 - t_1^2)(1 + t_2^2) &= (1 - t_2^2)(1 + t_1^2) \\ \Rightarrow (1 + t_2^2) - t_1^2 - t_1^2 t_2^2 &= (1 + t_1^2) - t_2^2 - t_2^2 t_1^2 \\ \Rightarrow t_2^2 - t_1^2 &= t_1^2 - t_2^2 \\ \Rightarrow 2t_1^2 &= 2t_2^2 \\ \Rightarrow t_1 &= t_2 \end{aligned}$$

(Sobrejetividade) Tome $y \in (-1, 1)$, temos que provar que $\exists t \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = y$.

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

Resolvendo para t , chegamos na solução (única) $t = \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{1/2}$, que está bem definida pois o radicando é sempre positivo.

Com isso estabelecemos a **bijetividade** de ϕ .

Resta provar a diferenciabilidade. A função $\arcsin(x)$, é derivável em todos os pontos de seu domínio $[-1, 1]$ exceto $x = -1$ e $x = 1$, pois $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Mas restringimos o domínio de ϕ para $(-1, 1)$, logo ϕ é diferenciável em todo seu domínio.

A diferenciabilidade de $\phi^{-1}(y) = \sin\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$ segue da diferenciabilidade do seno na reta, e de $\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)' = \frac{-4y}{(1+y^2)^2}$, estar bem definida para todo $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ pois o denominador nunca zera.

Portando ϕ é um **difeomorfismo**, provando que γ é reparametrização de α . ■

Exercício 6 Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento do arco.

Solução 6 Vamos primeiramente, encontrar a função comprimento de arco $\mathcal{L}(t)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) \right\| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) \right\| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\cos^2 s}{2} + \frac{\sin^2 s}{3} + \frac{\sin^2 s}{3} + \frac{\cos^2 s}{2} + \frac{\sin^2 s}{3} \right)^{1/2} ds \\ &= \int_{t_0}^t (\cos^2 s + \sin^2 s)^{1/2} ds \\ &= \int_{t_0}^t ds \\ &= t - t_0\end{aligned}$$

Lista 2 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

Exercício 7 Mostre que, se todas as retas tangentes a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em uma reta.

Solução 7 ...

Exercício 8 Mostre que, se todas as retas normais a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em um círculo.

Solução 8

Referências

- [1] E.L. Lima. *Curso de Análise Vol. 1, 15^a ed.*, page 185. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019.