

# Lista 3

## Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

**Exercício 1** Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas)  $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$ ;

Verificando regularidade:

$\alpha'(t) = (c, d)$ , que é diferente do vetor nulo para todo  $t$ , desde que  $c$  e  $d$  não sejam ambos nulos, pois neste caso não se trataria de uma reta, mas sim de um ponto isolado. **Logo  $\alpha$  é regular.**

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(c, d)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{c^2 + d^2} du \\ &= (t - t_0)\sqrt{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Para a curvatura, vamos reparametrizar  $\alpha$  por  $\mathcal{L}(t)$  e calcular  $\kappa(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$  após a reparametrização.

Para facilitar as contas, façamos  $t_0 = 0$ .

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) &= (a + ct/\sqrt{c^2 + d^2}, b + dt/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha'(s) &= (c/\sqrt{c^2 + d^2}, d/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha''(s) &= (0, 0) \Rightarrow \\ \kappa(s) &= \det(\alpha', \alpha'') = 0\end{aligned}$$

- $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$ ;

Verificando regularidade:

$\alpha'(t) = (1, 4t^3) \neq 0$ , pois a primeira componente é constante não-nula. **Logo a curva é regular.**

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(1, 4u^3)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{16u^6 + 1} du\end{aligned}$$

# Lista 3

## Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

Para a curvatura vamos usar a Proposição 2.2.1 de [1], que nos dá uma fórmula para curvatura de uma curva regular qualquer<sup>1</sup>.

No nosso caso, a curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{\|\alpha'(s)\|^3} \\ &= \frac{\det[(1, 4s^3); (0, 12s^2)]}{(1 + 16s^6)^{3/2}} \\ &= \frac{12s^2}{(1 + 16s^6)^{3/2}}\end{aligned}$$

- (círculos)  $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(s/r), b + r \cdot \sin(s/r)), s \in \mathbb{R}, r > 0$ ;

Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= (-r \cdot \sin(s/r) \cdot 1/r, r \cdot \cos(s/r) \cdot 1/r) \\ &= (-\sin(s/r), \cos(s/r))\end{aligned}$$

Tal velocidade será sempre diferente do vetor nulo, pois os pontos na qual a primeira coordenada zero pertence ao conjunto  $A = \{rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ , ou seja, os múltiplos de 0 e  $\pi$  radianos do círculo trigonométrico (ajustado por  $r$ );

Já os pontos que a segunda componente zero pertencem à  $B = \{r\pi/2 + rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Se  $s \in A$ ,  $\alpha(s) = (0, 1)$  para  $k$  par e  $\alpha(s) = (0, -1)$  para  $k$  ímpar.

Se  $s \in B$ ,  $\alpha(s) = (1, 0)$  para  $k$  par e  $\alpha(s) = (-1, 0)$  para  $k$  ímpar.

**Logo o círculo é regular**

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(-\sin(u/r), \cos(u/r))\| du \\ &= \int_{t_0}^t (\sin^2(u/r) + \cos^2(u/r))^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t du \\ &= t - t_0\end{aligned}$$

Fazendo  $t_0 = 0$  a fórmula original da curva já é a reparametrização por comprimento de arco, pois  $\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = \alpha(t)$ .

---

<sup>1</sup>Na verdade a referência usa norma no produto vetorial no numerador, que no caso é equivalente ao determinante.

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \\ &= \det \left[ (-\sin(s/r), \cos(s/r)); \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \right] \\ &= \frac{1}{r} [\sin^2(s/r) + \cos^2(s/r)] \\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

- (cardióide)  $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$ ;

Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin(t)(2\cos(t) - 1) - \cos(t) \cdot 2\sin(t), \cos(t)(2\cos(t) - 1) - \sin(t) \cdot 2\sin(t)) \\ &= (-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t)) \\ &= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\end{aligned}$$

Igualando a primeira componente à zero e resolvendo para  $t$ . temos:

$$\begin{aligned}2\sin(2t) &= \sin(t) \\ \Rightarrow 4\sin(t)\cos(t) &= \sin(t) \\ \Rightarrow \sin(t) &= 0 \text{ ou } 4\cos(t) = 1 \\ \Rightarrow t &= k\pi \text{ ou } t = 2k\pi + \arccos(1/4) \text{ ou } t = 2k\pi - \arccos(1/4)\end{aligned}$$

No caso  $t = k\pi$ , a segunda componente será:

$$2\cos(2k\pi) - \cos(k\pi) = 2 - 1 = 1 \text{ para } k \text{ par e}$$

$$= 2 - (-1) = 3 \text{ para } k \text{ ímpar}$$

No caso  $t = 2k\pi + \arccos(1/4)$ , por Pitágoras<sup>2</sup>  $\sin(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , assim, a segunda componente será:

---

<sup>2</sup>ou Relação Fundamental da Trigonometria, o que preferir.

## Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

$$\begin{aligned} & 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t) \\ &= 2\left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16}\right) - \frac{1}{4} \\ &= 2\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

No último caso  $t = 2k\pi - \arccos(1/4)$ , teremos  $\sin(t) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$  por simetria no círculo trigonométrico. Entretanto o cálculo da segundo componente não muda, pois o único lugar que usa o seno, usa-o quadrático.

Vemos então que os pontos que zeram a primeira coordenada não zeram a segunda. Resta verificar se os pontos que zeram a segunda componente também não zeram a segunda, se isso for provado, teremos uma curva regular. Como os cálculos são um pouco complicados, provarei a regularidade de outra forma, mas não apagarei os passos acima pois deram muito trabalho.

Basta ver a norma da velocidade:

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \|(-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\| \\ &= \sqrt{4\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 4\cos(2t)\cos(t)} \\ &= \sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 1 - 4(\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} \\ &= \sqrt{4 + 1 - 4\cos(t)(2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t))} \\ &= \sqrt{5 - 4\cos(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{5 - 4\cos(t)} \end{aligned}$$

Como o cosseno varia entre -1 e 1,  $\|\alpha'(t)\|$  vai varia entre  $\sqrt{1}$  e  $\sqrt{9}$ , sendo assim estritamente positiva, levando-nos a colcluir, pela definição de norma, que  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ . **Logo a curva é regular.**

**O comprimento de arco é:**

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{5 - 4\cos(u)} du$$

# Lista 3

## Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

A curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \\ &= \frac{\det[(-2 \sin(2t) + \sin(t), 2 \cos(2t) - \cos(t)); (-4 \cos(2t) + \cos(t), -4 \sin(2t) + \sin(t))]}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \cdot [8 \sin^2(2t) - 2 \sin(2t) \sin(t) - 4 \sin(2t) \sin(t) + \sin^2(t) \\ &\quad + 8 \cos^2(2t) - 2 \cos(2t) \cos(t) - 4 \cos(2t) \cos(t) + \cos^2(t)] \\ &= \frac{1}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} [8 + 1 - 6 \cos(t)(2 \sin^2(t) + \cos(2t))] \\ &= \frac{9 - 6 \cos(t)}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}}\end{aligned}$$

- (catenária)  $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$

Verificando regularidade, temos  $\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$  por conta da primeira componente constante.

O comprimento de arco será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|(1, \sinh(u))\| du \\ &= \int_{t_0}^t (1 + \sinh^2(u))^{1/2} du = \\ &= \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{e^{2u} + e^{-2u} - 2e^u e^{-u}}{4}\right)^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2\right]^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t [\cosh^2(u)]^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \cosh(u) du \\ &= \sinh(t) - \sinh(t_0)\end{aligned}$$

Calculando a curvatura:

## Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\det[(1, \sinh(t)); (0, \cosh(t))]}{\|(1, \sinh(t))\|^3} \\ &= \frac{\cosh(t)}{[1 + \sinh^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{\cosh(t)}{[\cosh^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(t)}\end{aligned}$$

A função acima é conhecida como  $\operatorname{sech}^2(t)$  e o passo de divisão por  $\cosh(t)$  que fizemos é válido por nos reais, o cosseno hiperbólico é estritamente positivo. A curvatura então está bem definida.

**Exercício 2** Considere a elipse  $\beta(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $a \neq b$ . Obtenha os valores de  $t$  onde a curvatura de  $\beta$  é máxima e mínima.

**Solução 2** É fácil ver que  $\alpha$  é regular, por argumentos que já usamos anteriormente sobre pontos onde seno e cosseno zeram. Sendo assim, a curva admite reparametrização por comprimento de arco, fazendo o vetor tangente ter norma 1. Vamos calcular a curvatura pela fórmula usada anteriormente [1].

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(t) &= \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det[(-a \sin t, b \cos t); (-a \cos t, -b \sin t)]}{\|(-a \sin t, b \cos t)\|^3} \\ &= \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}\end{aligned}$$

Como o numerador é fixo, a maximização da curvatura ocorre com a minimização do denominador e de forma análoga, a curvatura mínima ocorre quando o denominador é máximo.

Como a função  $x \mapsto x^{3/2}$  é monótona não-decrescente para  $x \geq 0$  e  $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , basta maximizar/minimizar esta expressão, sem o expoente  $3/2$ .

## Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

Derivando, chegamos a  $(a^2 - b^2) \sin(2t)$ , que se anula nos pontos do conjunto  $\{k\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Sem perda de generalidade, consideremos  $a > b$ , a segunda derivada será

$$2(a^2 - b^2) \cos(2t)$$

Note que para  $k$  par,  $\cos(k\pi) = 1 > 0$ , nesses casos a concavidade do ponto  $t = k\pi/2$  é "para baixo" indicando que tal ponto é ponto de mínimo do denominador, logo máximo da fração toda da curvatura.

Analogamente, para  $k$  ímpar  $\cos(k\pi) = -1 < 0$ , fazendo com que  $t = k\pi/2$  sejam pontos de máximo do denominador e mínimo para a curvatura.

Se  $a < b$ , essas relações se invertem.

Resumindo:

- Caso 1:  $a > b$   
Pontos de máximo de  $\kappa_\beta(t)$ :  $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$   
Pontos de mínimo de  $\kappa_\beta(t)$ :  $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
- Caso 2:  
Pontos de máximo de  $\kappa_\beta(t)$ :  $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$   
Pontos de mínimo de  $\kappa_\beta(t)$ :  $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$

**Exercício 3** Seja  $I = (-a, a)$ ,  $a > 0$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  o qual é simétrico com respeito à origem. Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.

- Mostre que  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em que  $\beta(s) = \alpha(-s)$ , é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz  $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s) \forall s \in I$  (Isto é, a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação)  
**Regularidade:** A curva  $\beta$  é uma função composta  $\alpha \circ f$ , com  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $f : I \rightarrow I$  dada por  $f(x) = -x$ . É bem fácil verificar que  $f$  é diferenciável, invertível e com inversa diferenciável, omitirei esta prova aqui.

Usando o resultado visto em aula de que uma reparametrização defeomorfa de uma curva regular é regular, concluímos que  $\beta(s)$  é regular.

Para verificar que  $\beta(s)$  está parametrizada por comprimento de arco, basta ver se a norma da velocidade é 1. Usaremos a Regra da Cadeia.

# Lista 3

## Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\| &= \left\| \frac{d}{ds} \alpha(f(s)) \right\| \\ &= \|\alpha'(f(s)) \cdot f'(s)\| \\ &= \|\alpha'(f(s)) \cdot (-1)\| \\ &= |-1| \cdot \|\alpha'(f(s))\| \\ &\text{Pelo fato de } \alpha \text{ ser } \textit{unit-speed}: \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

### Inversão de sinal da Curvatura:

Como  $\beta$  é unit-speed, a curvatura será dada pelo determinante entre os vetores velocidade e aceleração.

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \det[\beta'(s), \beta''(s)] \\ &= \det[-\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \\ &= -\det[\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \end{aligned}$$

Onde o último passo é uma propriedade de determinantes entre vetores do plano, na qual trocar o sinal do primeiro vetor inverte o sinal do determinante.

Pela definição de curvatura para curvas *unit-speed*, a expressão final é justamente igual a  $-\kappa_\alpha(-s)$ ; Fica demonstrado então que  $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$ .

- Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no item anterior.

Na figura 1, segue um corte da animação disponível no [GitHub](#) da catenária restrita a um intervalo aberto, e sua reparametrização.

**Exercício 4** Considerando o conceito de derivada como aproximação linear. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} f(v) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x^3 + y^3, x^3 - y^3) \end{aligned}$$

determine suas derivadas  $f'(v)$  e  $f''(v)$

**Solução 4** Pelo jacobiano, considerando  $f_1(x, y) = x^3 + y^3$  e  $f_2(x, y) = x^3 - y^3$  a primeira derivada será:

$$f'(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{bmatrix}$$



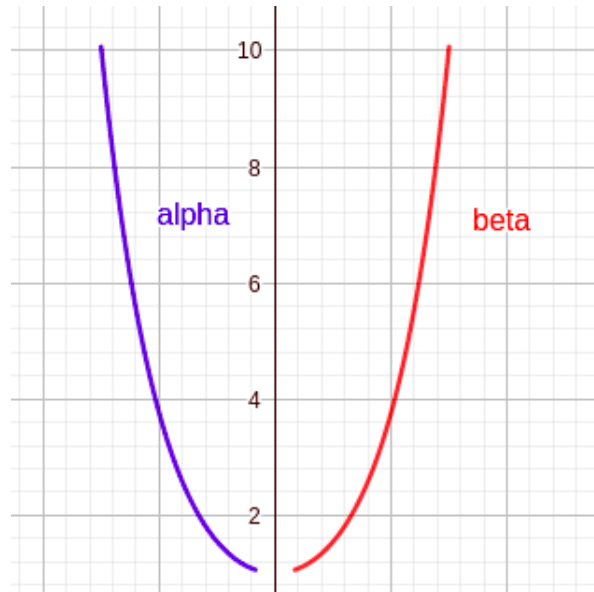


Figura 1: Catetária sob o intervalo  $(-3,3)$

Para a segunda derivada utilizaremos a definição de Hessiana multidimensional para funções vetoriais [2],

$$f''(v) = \mathbf{H}(f) = (\mathbf{H}(f_1), \mathbf{H}(f_2)),$$

$$\text{onde, } \mathbf{H}(f_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}, \text{ e analogamente } \mathbf{H}(f_2) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

Sendo assim,  $f''(v)$  é o tensor  $\left( \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \right)$

**Exercício 5** uma aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *movimento rígido* quando preserva distâncias. Isto é:

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Verifica-se que todo movimento rígido se escreve de forma única como composta de uma transformação linear ortogonal e uma translação, ou seja:

$$\Phi(p) = Ap + p_0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^2,$$

## Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

em que,  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear ortogonal e  $p_0$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Diz-se que  $\Phi$  é *direto* ou *inverso*, conforme  $\det(A) = 1$  ou  $-1$  respectivamente. Verifique que  $\Phi$  é diferenciável e calcule  $\Phi'(p)$  e  $\Phi''(p)$ .

**Exercício 6** Mostre que uma matriz de rotação e uma matriz de reflexão são aplicações lineares ortogonais e, portanto, podem ser interpretadas como um movimento rígido.

**Solução 6** Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^n$  é ortogonal se  $AA^T = I_n$  onde  $I_n$  é a matriz identidade de  $n$  dimensões. Considerando o  $\mathbb{R}^2$ , uma matriz de rotação é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Multiplicando pela transposta temos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, uma matriz de rotação no plano é ortogonal.

Podemos representar uma reflexão de um ponto por uma reta  $L$  que faz ângulo  $\theta$  com o eixo das abscissas pela matrix[3]:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Note que  $A = A^T$ , se realmente for o caso de  $A$  ser ortogonal teremos  $A^2 = I$ , que é o esperado de uma reflexão, pois se aplicada duas (ou um número par) vezes devemos voltar ao mesmo lugar. verificando então a ortogonalidade:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) & \cos(2\theta) \sin(2\theta) - \sin(2\theta) \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \cos(2\theta) - \cos(2\theta) \sin(2\theta) & \sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Q.E.D

## Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira  
19 de março de 2021

**Exercício 7** Mostre que movimentos rígidos levam retas em retas e círculos em círculos.

**Solução 7** Considerando o  $\mathbb{R}^2$ , definamos retas como curvas do tipo  $\alpha(t) = a_0 + t\vec{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}^2$  e  $\vec{v}$  um vetor do plano representando a direção da reta.

Tome  $A$  uma matriz representando um operador linear ortogonal e  $p_0$  um ponto do  $\mathbb{R}^2$  e defina o movimento rígido

$$\Phi(p) = Ap + p_0$$

Queremos provar que  $\Phi(\alpha(t))$  é uma reta.

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha(t)) &= \Phi(a_0 + t\vec{v}) \\ &= A(a_0 + t\vec{v}) + p_0 \\ &= Aa_0 + tA\vec{v} + p_0 \\ &= (Aa_0 + p_0) + tA\vec{v}\end{aligned}$$

Que é uma reta que passa pelo ponto  $(Aa_0 + p_0)$  e segue a direção do vetor  $A\vec{v}$ .

Note que  $\Phi'(\alpha(t)) = A\vec{v}$  e  $\Phi''(\alpha(t)) = 0$ , sendo assim determinante que usamos para calcular a curvatura será zero, implicando curvatura nula, que é o que caracteriza uma reta.

**Exercício 8** Exemplifique, em ambiente computacional, movimentos rígidos sendo aplicados em uma curva de sua preferência.

**Solução 8** A curva escolhida foi uma cardióide transladada:

$$(\cos(t) \cdot (2 \cos(t) - 1) + 2, \sin(t) \cdot (2 \cos(t) - 1)), t \in (0, 2\pi)$$

A matriz  $A$  é tal que representa uma reflexão sobre a reta identidade, e o ponto  $p_0$  é a origem. Segue na Figura 2 um screenshot do conteúdo disponível do arquivo [L3\\_ex8.ggb](#), na qual é possível personalizar a matriz ortogonal e o ponto de translação  $p_0$ .

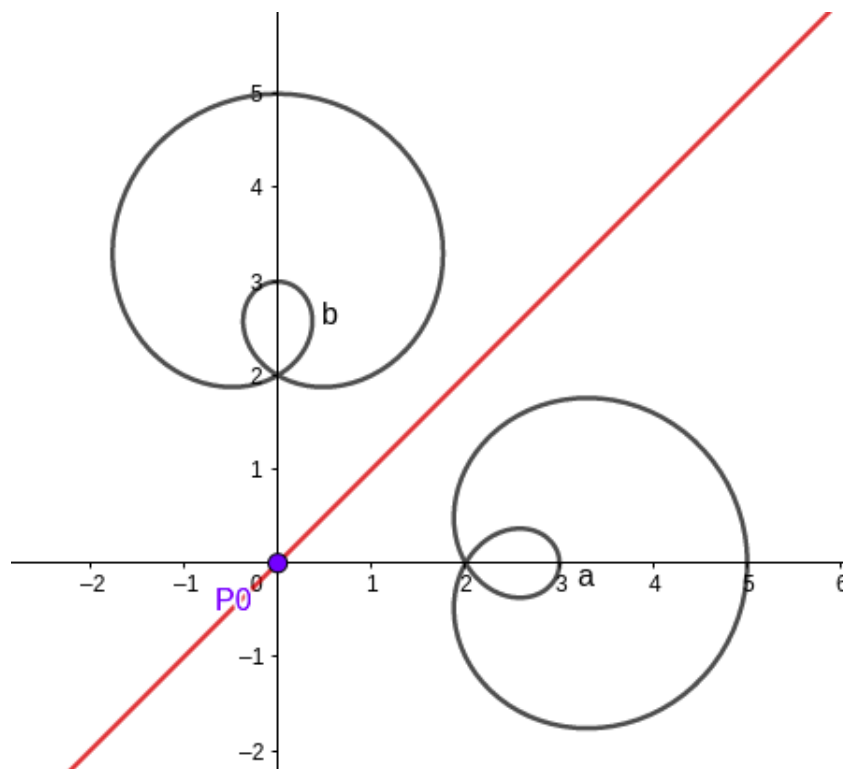


Figura 2: Cardióide Refletida

## Referências

- [1] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.
- [2] Wikipedia. Hessian matrix — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hessian%20matrix&oldid=1011126160>, 2021. [Online; accessed 17-March-2021].
- [3] Wikipedia. Rotations and reflections in two dimensions — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotations%20and%20reflections%20in%20two%20dimensions&oldid=1002077477>, 2021. [Online; accessed 18-March-2021].