Lista 1
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
3 de março de 2021

Observação: Todos os arquivos Geogebra citados neste texto, estão disponíveis nesta pasta do GitHub.

1. Encontrar uma curva (parametrizada) $\alpha(t) : t \in I \to \mathbb{R}^2$; cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$; de maneira que t percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva.

   Solução: Tome $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Veja que $\alpha(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$. O vetor tangente é dado por $\vec{v}(t) = \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Na Figura 1, vemos uma representação da animação desejada com $t = 0.4$. Ao executar a animação (arquivo ex1.ggb) percebe-se que de fato o sentido do movimento é anti-horário.

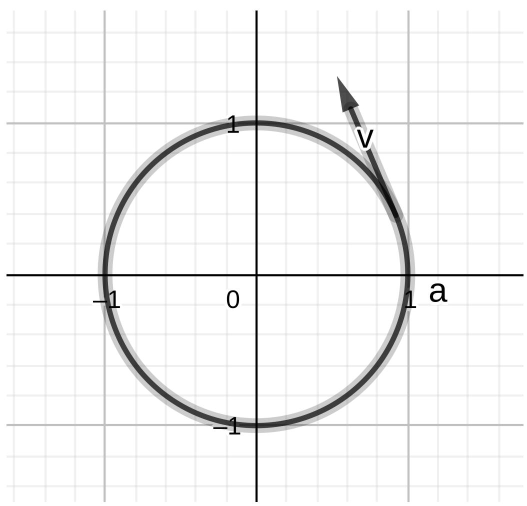

Figura 1: Circunferência uninária e vetor tangente

2. A *limaçon* (ou caracol de Pascal) é a curva parametrizada

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos(t)) \cdot \cos(t); (1 + 2\cos(t)) \cdot \sin(t)); t \in \mathbb{R}$$

   Faça o desenho desta curva. Observe que o ponto $(0, 0)$ pertence ao traço da curva, e ache o vetor tangente nesse ponto.

   Solução: O vetor tangente (unitário) é

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} \\ &= \frac{(-\sin(t)(4\cos t+1), 2\cos(2t)+\cos t)}{\sqrt{4\cos t+5}} \end{aligned} \tag{1}$$

É fácil ver que o ponto $(0,0)$, pois $\gamma(2\pi/3) = \gamma(4\pi/3) = (0,0)$ já que $\cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$, o que anula $(1+2\cos t)$ que por sua vez anula o vetor γ. De fato, a Figura 2 mostra que a origem é cruzada duas vezes pelo traço.

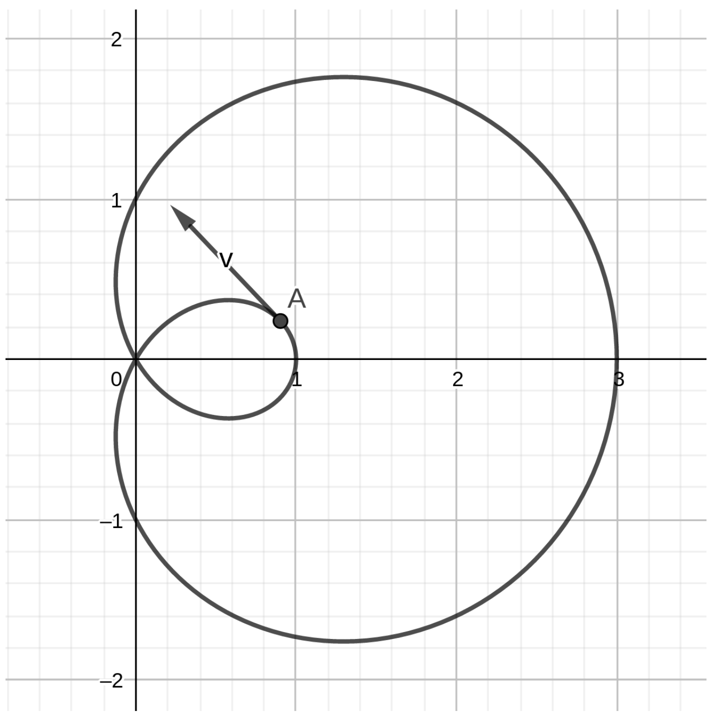

Figura 2: Caracol de Pascal e vetor tangente

De 1, temos que o vetor tangente na origem será:

$v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ no primeiro cruzamento e

$v\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ no segundo cruzamento.

3. A *Cissoide de Diocles* é a curva definida implicitamente pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2a^2y^2 = 0$$

. Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. Busque informação para entender qual o fenômeno modelado por esta curva que a tornou famosa. (Dica: use $y = xt$ para encontrar uma parametrização da curva).

Solução: Usando $y = xt$, temos:

$$\begin{aligned} x^3 + x^3t^2 - 2ax^2t^2 = 0 \Rightarrow \\ x^3(1+t^2) = 2ax^2t^2 \end{aligned}$$

Dado que $1 + t^2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. A solução considerando $x(t) \neq 0$ é:
$x(t) = \dfrac{2at^2}{1+t^2}$ e consequentemente $y(t) = \dfrac{2at^3}{1+t^2}$
Daí vemos que $x = 0$ se, e somente se $t = 0$ ou $a = 0$. E $x < 0 \leftrightarrow a < 0$. Tornando a fórmula consistente.

O vetor tangete (unitário) de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{1}{||\gamma'(t)||}(x'(t), y'(t)) \\ &= \frac{1+t^2}{2|at|\sqrt{4+t^2}}\left(\frac{4at}{(1+t^2)^2}, \frac{2at^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2\,\mathrm{sign}(at)}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}, \frac{\mathrm{sign}(at)(t^3+3t)}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{sign}(at)}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}\left(2, t^3+3t\right) \end{aligned}$$

Veja um corte da animação em ex3.ggb na Figura 3

O curva surgiu do problema resolvido pelo grego Diocles para encontrar médias proporcionais[3], isto é, dados a e b, a curva pode ser usada para

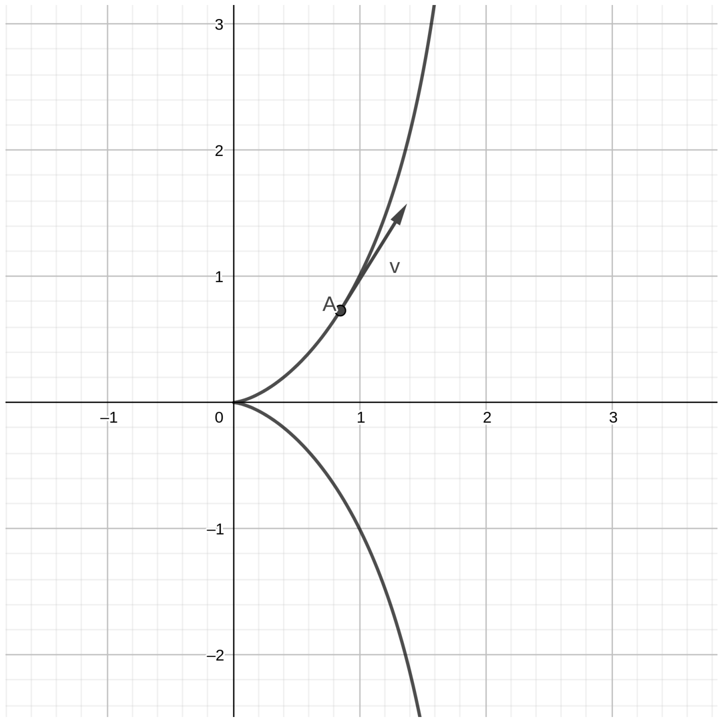

Figura 3: Cissoide de Diocles

encontrar u e v tal que $\dfrac{a}{u} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{v}{b}$. Um problema particular, é o problema de Delian: Quanto a medida do lado de um cubo deve aumentar, para que seu volume dobre?

4. O *Folium de Descartes* é definido implicitamenete pela equação]

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

.

Encontre uma parametrização para esta curva. Faça o desenho em Geogebra, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo a curva. A descrição implicita desta curva da origem a uma familia de curvas da forma

$$F_\varepsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \varepsilon$$

.

Observe, usando o Geogebra, a mudança no traço da curva ao mudar de elemento da família (ex.: $\varepsilon = -\frac{1}{10}$).

Solução: Fazendo $y = x^2 t$, temos que a curva será, sobre hipótese $t \neq 0$ e $x \neq 0$:

$$\gamma(t) = \left(\frac{(3t-1)^{1/3}}{t}, \frac{(3t-1)^{2/3}}{t} \right)$$

O ponto $(0,0)$ é atingido uma vez quando $t = 1/3$, mas para fechar a curva implícita, ele não é atingido novamente.

Note que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$, pois a derivada dos numeradores tende pra 0 ao $|t| \to \infty$, ou seja, o numerador estabiliza enquanto o denominador só cresce constantemente.

Ao variar o ε para algo negativo, a curva se subdivide em duas curvas desconexas, ao passo de que a variação positiva faz uma curva regular.

O vetor tangente unitário é:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} \\
&= \frac{1}{||\gamma'(t)||} = \left(\frac{1-2t}{t^2(3t-1)^{2/3}}, \frac{1-t}{t^2(3t-1)^{1/3}} \right) \\
&= \frac{t^2|3t-1|^{2/3}}{\sqrt{(t-1)^2(3t-1)^{2/3} + (1-2t)^2}} \cdot \left(\frac{1-2t}{t^2|3t-1|^{2/3}}, \frac{1-t}{t^2(3t-1)^{1/3}} \right) \\
&= \frac{\operatorname{sign}((3t-1)^{2/3})}{\sqrt{(t-1)^2|3t-1|^{2/3} + (1-2t)^2}} \cdot \left(1-2t, (1-t)(3t-1)^{1/3} \right)
\end{aligned}$$

Veja um corte da animação do vetor tangente em ex4.ggb na Figura 4.

5. Verifique que a aplicação $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, com a e b constantes não-nulas, é uma curva parametrizada diferenciável. Descreva o traço de α.

   Solução: Temos que provar que $\alpha(t)$ é da classe C^∞ [2], ou seja, que as derivadas de todas as ordens são contínuas e deriváveis.

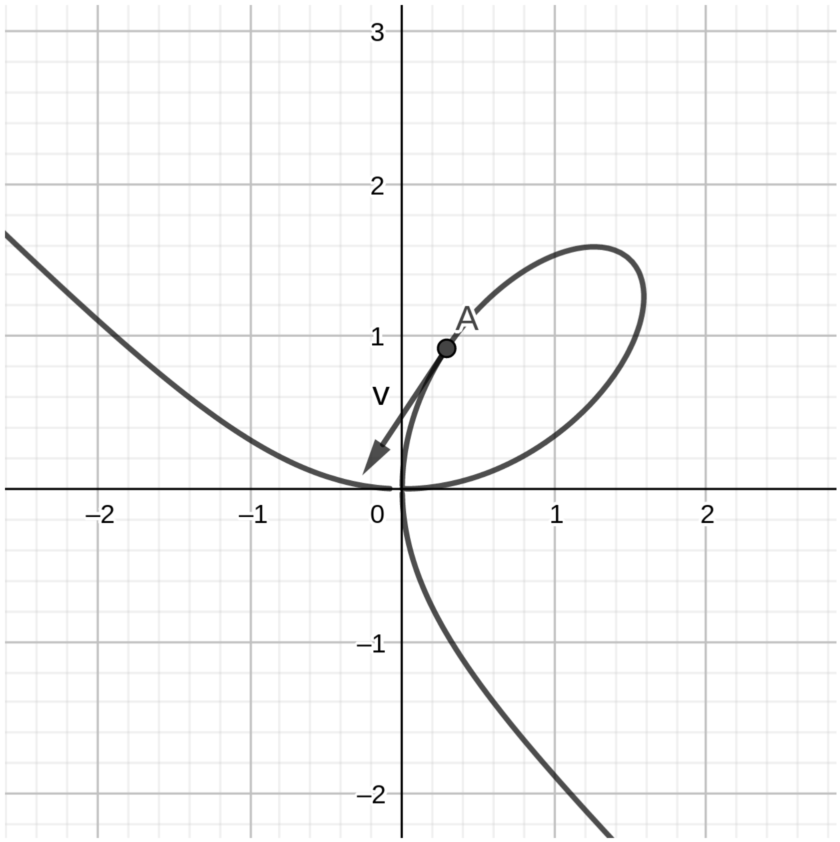

Figura 4: Folium de Decartes

Sendo $a, b > 0$, temos:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$
$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$$
$$\alpha^{(3)}(t) = (a \sin t, -b \cos t)$$
$$\alpha^{(4)}(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

Veja que após quatro iterações de derivação, voltamos a $\alpha(t)$ original. Como as funções seno e cosseno são deriváveis e contínuas nos reais, e as derivadas de qualquer ordem de α são senos e cossenos, à menos de constantes não-nulas, concluímos que todas as derivadas de α também são deriváveis e contínuas.

Podemos entender o traço da curva olhando pata os pontos notáveis $t = 0$,

$t = \pi/2$, $t = \pi$ e $t = 3\pi/2$.

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= (a, 0) \\
\alpha(\pi/2) &= (0, b) \\
\alpha(\pi) &= (-a, 0) \\
\alpha(3\pi/2) &= (0, -b)
\end{aligned}$$

Esses pontos são estremidades de uma elipse de eixos $2a$ e $2b$, com equação implícita $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.

Solução: Tomemos $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t \alpha'(s)ds$.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \alpha'(s)ds &= \int_0^t (s^2, e^s)ds \\
&= \left(\frac{s^3}{3}, e^s\right)\Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= \left(\frac{t^3}{3}, e^t\right) - (0, 1) \\
&= \left(\frac{t^3}{3}, e^t - 1\right)
\end{aligned}$$

Note que $\beta'(t) = (t^2, e^t)$, mas $\beta(0) = (0, 0)$. Já que adição de constantes não afeta a derivada, podemos definir $\alpha(t) = \beta(t) + (2, 0) = \left(\dfrac{t^3}{3} + 2, e^t - 1\right)$ e cumpriremos as exigências.

7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ á constante se, e somente se, para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Solução: $(\Longrightarrow)$ Dado $\alpha(t)$, se $||\alpha'(t)||$ é constante queremos provar que $\alpha'(t) \perp \alpha''(t)$ para todo $t \in I$.

É fácil ver que $||\alpha'(t)|| = c \Rightarrow ||\alpha'(t)||^2 = c^2$, com $c \in \mathbb{R}$, ou seja se a norma da derivada é constante, o quadrado da norma também é. Já que $||\alpha'(t)||^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$, temos que, $||\alpha'|| = c$ implica em :

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha', \alpha' \rangle = c^2 \\
\Rightarrow &\frac{d}{dt}\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 \\
\Rightarrow &\langle \alpha'', \alpha' \rangle + \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \\
\Rightarrow &2\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \\
\Rightarrow &\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0
\end{aligned}$$

O parâmetro t foi omitido, mas a conclusão acima implica que

$$\forall\ t \in I\ \alpha'(t) \perp \alpha''(t)$$

($\Longleftarrow$) A recíproca é facilmente verificácel pois todos as implicações acima são invertíveis. Assim, se $\alpha' \perp \alpha''$, o produto escalar será nulo, implicando pela regra do produto usada de forma inversa, que a derivada de $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ é nula, o que mostra que tal produto é constante, implicando finalmente que $||\alpha'(t)|| = \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle}$ é constante.

Q.E.D

8. Prove que, se uma curva regular $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, é tal que $x'(t) \neq 0\ \forall t \in I$, então o traço de α é o gráfico de uma função diferenciável.

   Solução:

Sejam $X = \{x(t); t \in I\}$ e $Y = \{y(t); t \in I\}$ e $\alpha(I)$ o traço da curva.

$$\begin{aligned}
f : X &\to Y \\
x &\mapsto f(x) = y \text{ tal que } (x, y) \in \alpha(I)
\end{aligned}$$

Vamos provar for absurdo que f é uma função bem definida.

Suponha então por contradição, que $\exists\ x^* \in X$ tal que $f(x^*)$ mapeia mais de 1 valor em Y, isto é, $\exists\ y_1, y_2 \in Y$, com $y_1 \neq y_2$ tal que $f(x^*) = y_1$ e $f(x^*) = y_2$

Tome $t_1 = \alpha^{-1}(x^*, y_1)$ e $t_2 = \alpha^{-1}(x^*, y_2)$, e façamos a restrição da componente $x(t)$ de α para o intervalo $I^* = [t_1, t_2]$ supondo, sem perda de generalidade, que $t_1 < t_2$; tal restrição está bem definida, pela boa definição das componentes de α.

Teorema de Rolle[1]. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $g(a) = g(b)$. Se g é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $g'(c) = 0$.

Como $x(t)$ é contínua e derivável para todo t em I, vale que $x : I^* \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável. Note que $x(t_1) = x(t_2) = x^*$. Pelo teorema acima, $\exists\ t^* \in (t_1, t_2)$ tal que $x'(t^*) = 0$, **absurdo, pela hipótese** $x'(t) \neq 0\ \forall t \in I$.

Logo f está bem definida.

Para provar a diferenciabilidade, precisamos provar que $f'(x)$ existe para todo ponto em X, ou seja, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe $\forall a \in X$.

Sejam $s_1, s_2 \in I$ tais que $x(s_1) = x$ e $x(s_2) = a$ assim,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x(s_1)\to x(s_2)} \frac{f(x(s_1)) - f(x(s_2))}{x(s_1) - x(s_2)} \\
&= \lim_{s_1\to s_2} \frac{y(s_1) - y(s_2)}{x(s_1) - x(s_2)}
\end{aligned}$$

A última igualdade vale pois, pela continuidade de $x(t)$, podemos trocar o limite $x(s_1) \to x(s_2)$ para $s_1 \to s_2$; e pela boa definição de f, $f(x(s_1)) - f(x(s_2)) = y(s_1) - y_(s_2)$.

Podemos usar o fato de que, dentro do limite, $s_1 \neq s_2$, e dividir numerador e denominador por $s_1 - s_2$. Assim,

$$\lim_{s_1 \to s_2} \frac{y(s_1) - y(s_2)}{x(s_1) - x(s_2)} = \lim_{s_1 \to s_2} \frac{\frac{y(s_1)-y(s_2)}{s_1 - s_2}}{\frac{x(s_1)-x(s_2)}{s_1 - s_2}}$$

Veja que $\lim_{s_1 \to s_2} \frac{x(s_1) - x(s_2)}{s_1 - s_2}$ é a definição de $\frac{d}{dt}x(t)$, que por hipótese é não-nula para todo $t \in I$. O limite do quociente acima será então o quociente do limite, que pela definição de derivada é igual a $\frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)}$, fração que está bem definida para todo $t \in I$. Portanto, prova-se que $\frac{d}{dx}f(x)$ existe para todo $x \in X$.

Q.E.D

9. Considere a espiral logaritmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sin(t))$$

. Desenhe a curva em ambiente computacional e mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vetor tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.

Solução:

Veja um corte da animação do vetor tangente em ex9.ggb na Figura 9.

De fato, ao executar a animação, o ângulo entre o vetor tangente e a curva não muda. Seja θ_t o ângulo para dado t entre o vetor tangente o o eixo x do plano. Se o vetor tangente $\vec{v}(t)$ é unitário e centrado na origem, então seu ponto final coincide com $(\cos\theta_t, \sin\theta_t)$.

Calculando v, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{1}{||\gamma'(t)||}\left(e^{kt}(k\cos(t) - \sin(t)), e^{kt}(k\sin(t) + \cos(t))\right) \\
&= \frac{e^{kt}}{e^{kt}\sqrt{k^2+1}}(k\cos(t) - \sin(t), k\sin(t) + \cos(t)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(k\cos(t) - \sin(t), k\sin(t) + \cos(t))
\end{aligned}$$

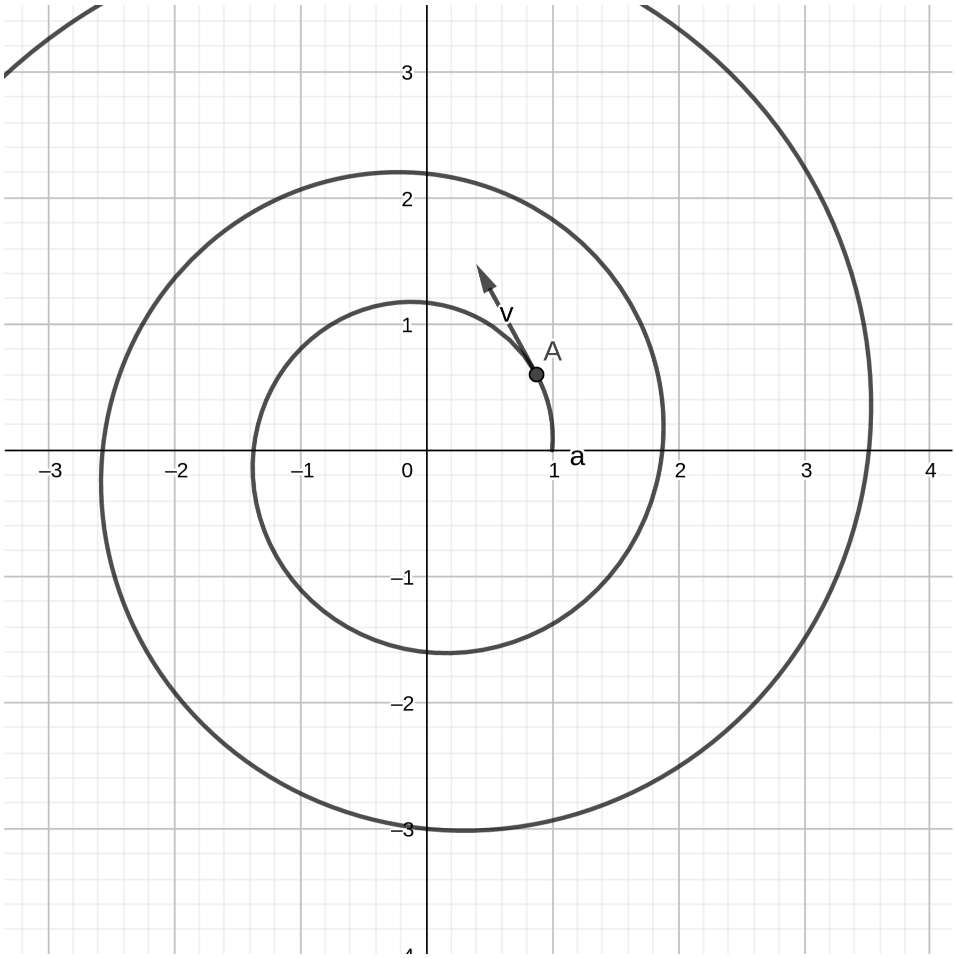

Figura 5: Espiral logarítmica

Assim, à menos de translaçoes por múltiplos de 2π temos:

$$\sin(\theta_t) = \frac{k\sin(t) + \cos(t)}{\sqrt{k^2+1}}$$
$$\cos(\theta_t) = \frac{k\cos(t) - \sin(t)}{\sqrt{k^2+1}}$$

Ou seja, $\tan(\theta_t) = \dfrac{k\sin(t) + \cos(t)}{k\cos(t) - \sin(t)} = \dfrac{k\tan t + 1}{k - \tan t} = \dfrac{\tan t + \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}\tan t}$, considerando t tal que o cosseno esteja definido.

Usando a fórmula, $\arctan a + \arctan b = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$, temos que:

$\theta_t = \arctan(\tan\theta_t) =$
$\arctan\left(\dfrac{\tan t + \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}\tan t}\right) =$
$\arctan(\tan t) + \arctan(\frac{1}{k}) =$
$t + \arctan(\frac{1}{k})$

Assim $\theta_t = t + \arctan(\frac{1}{k})$, o ângulo entre v e o eixo x do plano.

Para obter o ângulo entre o vetor e a curva[4] para t dado, subtrai-se de θ_t tal parâmetro t e obtemos $\arctan(\frac{1}{k})$ como um ângulo invariante entre a curva e o vetor.

Q.E.D

Referências

[1] E.L. Lima. *Curso de Análise Vol. 1, 15ª ed.*, page 185. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019.

[2] Ronaldo Freire Lima. *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[3] Wikipedia. Cissoid of Diocles — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cissoid%20of%20Diocles&oldid=965964307, 2021. [Online; accessed 27-February-2021].

[4] Wikipedia. Tangential angle — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangential%20angle&oldid=773476653, 2021. [Online; accessed 28-February-2021].