Lista 3
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
19 de março de 2021

Exercício 1 Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (c, d)$, que é diferente do vetor nulo para todo t, desde que c e d não sejam ambos nulos, pois neste caso não se trataria de um reta, mas sim de um ponto isolado. **Logo α é regular.**
  Calculando o comprimento de arco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(c, d)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 + d^2}du \\
&(t - t_0)\sqrt{c^2 + d^2}
\end{aligned}
$$

  Para a curvatura, vamos reparametrizar α por $\mathcal{L}(t)$ e calcular $\kappa(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ após a reparametrização.
  Para facilitar as contas, façamos $t_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) &= (a + ct/\sqrt{c^2 + d^2}, b + dt/\sqrt{c^2 + d^2}) \\
\alpha'(s) &= (c/\sqrt{c^2 + d^2}, d/\sqrt{c^2 + d^2}) \\
\alpha''(s) &= (0, 0) \Rightarrow \\
\kappa(s) &= \det(\alpha', \alpha'') = 0
\end{aligned}
$$

- $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (1, 4t^3) \neq 0$, pois a primeira componente é constante não-nula. **Logo a curva é regular.**
  Calculando o comprimeiro de arco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(1, 4u^3)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} \sqrt{16u^6 + 1}du
\end{aligned}
$$

Para a curvatura vamos usar a Proposição 2.2.1 de [1], que nos dá uma fórmula para curvatura de uma curva regular qualquer[1].

No nosso caso, a curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{||\alpha'(s)||^3} \\ &= \frac{\det[(1, 4s^3); (0, 12s^2)]}{(1+16s^6)^{3/2}} \\ &= \frac{12s^2}{(1+16s^6)^{3/2}}\end{aligned}$$

- (círculos) $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(s/r), b + r \cdot \sin(s/r)), s \in \mathbb{R}, r > 0$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(s) = (-r \cdot \sin(s/r) \cdot 1/r, r \cdot \cos(s/r) \cdot 1/r)$
  $= (-\sin(s/r), \cos(s/r))$
  Tal velocidade será sempre diferente do vetor nulo, pois os pontos na qual a primeira coorderada zera pertence ao conjunto $A = \{rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, os múltiplos de 0 e π radianos do círculo trigonométrico (ajustado por r);
  Já os pontos que a segunda componente zera pertencem à $B = \{r\pi/2+rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
  Se $s \in A$, $\alpha(s) = (0, 1)$ para k par e $\alpha(s) = (0, -1)$ para k ímpar.
  Se $s \in B$, $\alpha(s) = (1, 0)$ para k par e $\alpha(s) = (-1, 0)$ para k ímpar.
  Logo o círculo é regular
  Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} ||(-\sin(u/r), \cos(u/r))||du \\ &= \int_{t_0}^{t} (\sin^2(u/r) + \cos^2(u/r))^{1/2}du \\ &= \int_{t_0}^{t} du \\ &= t - t_0\end{aligned}$$

Fazendo $t_0 = 0$ a fórmula original da curva já é a reparametrização por comprimento de arco, pois $\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = \alpha(t)$.

[1] Na verdade a referência usa norma no produto vetorial no numerador, que no caso é equivalente ao determinante.

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s))\\ &= \det\left[(-\sin(s/r), \cos(s/r)); \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))\right]\\ &= \frac{1}{r}\left[\sin^2(s/r) + \cos^2(s/r)\right]\\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

- (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t)\cdot(2\cos(t)-1), \sin(t)\cdot(2\cos(t)-1)), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin(t)(2\cos(t)-1) - \cos(t)\cdot 2\sin(t), \cos(t)(2\cos(t)-1) - \sin(t)\cdot 2\sin(t))\\ &= (-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t))\\ &= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\end{aligned}$$

Igualando a primeira componente à zero e resolvendo para t. temos:

$$\begin{aligned}&2\sin(2t) = \sin(t)\\ &\Rightarrow 4\sin(t)\cos(t) = \sin(t)\\ &\Rightarrow \sin(t) = 0 \text{ ou } 4\cos(t) = 1\\ &\Rightarrow t = k\pi \text{ ou } t = 2k\pi + \arccos(1/4) \text{ ou } t = 2k\pi - \arccos(1/4)\end{aligned}$$

No caso $t = k\pi$, a segunda componente será:

$$2\cos(2k\pi) - \cos(k\pi) = 2 - 1 = 1 \text{ para k par e}$$

$$= 2 - (-1) = 3 \text{ para k ímpar}$$

No caso $t = 2k\pi + \arccos(1/4)$, por Pitágoras[2] $\sin(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, assim, a segunda componente será:

[2] ou Relação Fundamental da Trigonometria, o que preferir.

$$\begin{aligned}
&2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t) \\
&= 2\left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16}\right) - \frac{1}{4} \\
&= 2\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \\
&= -2
\end{aligned}$$

No último caso $t = 2k\pi - \arccos(1/4)$, teremos $\sin(t) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ por simetria no círculo trigonométrico. Entretando o cálculo da segundo componente não muda, pois o único lugar que usa o seno, usa-o quadrático.

Vemos então que os pontos que zeram a primeira coordenada não zeram a segunda.

Resta verificar se os pontos que zeram a segunda componente também não zeram a segunda, se isso for provado, teremos uma curva regular. Como os cálculos são um pouco complicados, provarei a regularidade de outra forma, mas não apagarei os passos acima pois deram muito trabalho.

Basta ver a norma da velocidade:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= ||(-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))|| \\
&= \sqrt{4\sin^2(2t) + sin^2(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 4\cos(2t)\cos(t)} \\
&= \sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t))) + 1 - 4(\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} \\
&= \sqrt{4 + 1 - 4\cos(t)(2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t))} \\
&= \sqrt{5 - 4\cos(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\
&= \sqrt{5 - 4\cos(t)}
\end{aligned}$$

Como o cosseno varia entre -1 e 1, $||\alpha'(t)||$ vai varia entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{9}$, sendo assim estritamente positiva, levando-nos a colcluir, pela definição de norma, que $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.**Logo a curva é regular.**

O comprimento de arco é:

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{5 - 4\cos(u)}du$$

A curvatura será:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{\det[(-2\sin(2t)+\sin(t), 2\cos(2t)-\cos(t)); (-4\cos(2t)+\cos(t), -4\sin(2t)+\sin(t))]}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \cdot [8\sin^2(2t) - 2\sin(2t)\sin(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + \sin^2(t) \\
&\qquad + 8\cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\cos(t) + \cos^2(t)] \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}}[8+1-6\cos(t)(2\sin^2(t)+\cos(2t))] \\
&= \frac{9-6\cos(t)}{(5-4\cos(t))^{3/2}}
\end{aligned}
$$

- (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$
  Verificando regularidade, temos $\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ por conta da primeira componente constante.
  O comprimeiro de arco será:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||(1, \sinh(u))||du \\
&= \int_{t_0}^{t} (1+\sinh^2(u))^{1/2} du = \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(1 + \frac{e^{2u}+e^{-2u}-2e^{u}e^{-u}}{4}\right)^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right)^2\right]^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left[cosh^2(u)\right]^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \cosh(u) du \\
&= \sinh(t) - \sinh(t_0)
\end{aligned}
$$

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det[(1, \sinh(t)); (0, \cosh(t))]}{||(1, \sinh(t))||^3} \\
&= \frac{\cosh(t)}{[1 + \sinh^2(t)]^{3/2}} \\
&= \frac{\cosh(t)}{[\cosh^2(t)]^{3/2}} \\
&= \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(t)}
\end{aligned}$$

A função acima é conhecida como $\text{sech}^2(t)$ e o passo de divisão por $\cosh(t)$ que fizems é válido por nos reais, o cosseno hiperbólico é estritamente positivo. A curvatura então está bem definida.

Exercício 2 Considere a elipse $\beta(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenhaos valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução 2 É fácil ver que α é regular, por argumentos que já usamos anteriormente sobre pontos onde seno e cosseno zeram. Sendo assim, a curva admite reparametrização por comprimento de arco, fazendo o vetor tangente ter norma 1. Vamos calcular a curvatura pela fórmula usada anteriormente [1].

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(t) &= \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{||\beta'(t)||^3} \\
&= \frac{\det[(-a\sin t, b\cos t); (-a\cos t, -b\sin t)]}{||(-a\sin t, b\cos t)||^3} \\
&= \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Como o numerador é fixo, a maximização da curvatura ocorre com a minimização do denominador e de forma análoga, a curvatura mínima ocorre quando o denominador é máximo.

Como a função $x \mapsto x^{3/2}$ é monótona não-decrescente para $x \geq 0$ e $a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, basta maximizar/minimizar esta espressão, sem o expoente $3/2$.

Derivando, chegamos a $(a^2-b^2)\sin(2t)$, que se anula nos pontos do conjunto $\{k\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.

Sem perda de generalidade, consideremos $a > b$, a segunda derivada será

$$2(a^2-b^2)\cos(2t)$$

Note que para k par, $\cos(k\pi) = 1 > 0$, nesses casos a concavidade do ponto $t = k\pi/2$ é "para baixo"indicando que tal ponto é ponto de mínimo do denominador, logo máximo da fração toda da curvatura.

Analogamente, para k ímpar $\cos(k\pi) = -1 < 0$, fazendo com que $t = k\pi/2$ sejam pontos de máximo do deniminador e mínimo para a curvatura.

Se $a < b$, essas relações se invertem.

Resumindo:

- Caso 1: $a > b$
  Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$
  Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
- Caso 2:
  Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
  Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$

Exercício 3 Seja $I = (-a, a), a > 0$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.

- Mostre que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)\ \forall s \in I$ (Isto é,a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação)
  Regularidade: A curva β é uma função composta $\alpha \circ f$, com $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ e $f : I \to I$ dada por $f(x) = -x$. É bem fácil verificar que f é diferenciável, invertível e com inversa diferenciável, omitirei esta prova aqui.

  Usando o resultado visto em aula de que uma reparametrização defeomorfa de uma curva regular é regular, concluímos que $\beta(s)$ é regular.

  Para verificar que $\beta(s)$ está parametrizada por comprimento de arco, basta ver se a norma da velocidade é 1. Usaremos a Regra da Cadeia.

$$
\begin{aligned}
||\beta'(s)|| &= \left|\left|\frac{d}{ds}\alpha(f(s))\right|\right| \\
&= ||\alpha'(f(s)) \cdot f'(s)|| \\
&= ||\alpha'(f(s)) \cdot (-1)|| \\
&= |-1| \cdot ||\alpha'(f(s))||
\end{aligned}
$$

Pelo fato de α ser *unit-speed*:

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Inversão de sinal da Curvatura:

Como β é unit-speed, a curvatura será dada pelo determinante entre os vetores velocidade e aceleração.

$$
\begin{aligned}
\kappa_\beta(s) &= \det[\beta'(s), \beta''(s)] \\
&= \det[-\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \\
&= -\det[\alpha'(-s), \alpha''(-s)]
\end{aligned}
$$

Onde o último passo é uma propriedade de determinantes entre vetores do plano, na qual trocar o sinal do primeiro vetor inverte o sinal do determinante.

Pela definição de curvatura para curvas *unit-speed*, a expressão final é justamente igual a $-\kappa_\alpha(-s)$; Fica demonstrado então que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$.

- Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no ítem anterior.

  Na figura 1, segue um corte da animação disponível no GitHub da catenária restrita a um intervalo aberto, e sua reparametrização.

Exercício 4 Considerando o conceito de derivada como aproximação linear. Considere a aplicação:

$$
\begin{aligned}
f(v) &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\to (x^3 + y^3, x^3 - y^3)
\end{aligned}
$$

determine suas derivadas $f'(v)$ e $f''(v)$

Solução 4 Pelo jacobiano, considerando $f_1(x, y) = x^3 + y^3$ e $f_2(x, y) = x^3 - y^3$ a primeira derivada será:

$$
f'(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{bmatrix}
$$

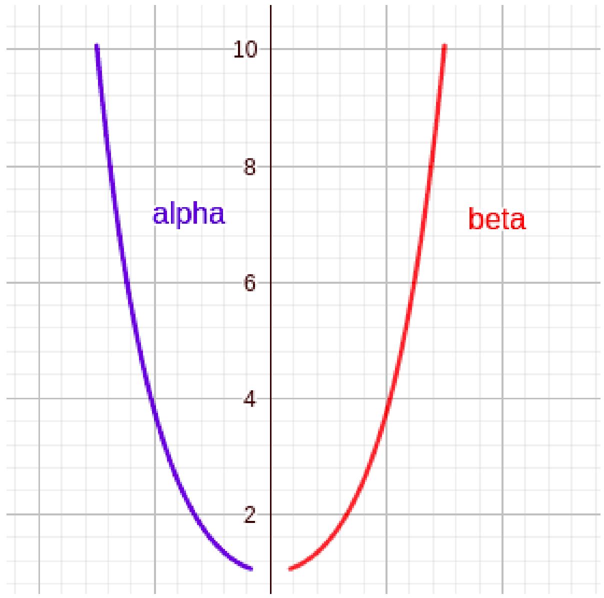

Figura 1: Catetária sob o intervalo (-3,3)

Para a segunda derivada utilizaremos a definição de Hessiana multidimensional para funções vetoriais [2],

$$f''(v) = \boldsymbol{H}(f) = (\boldsymbol{H}(f_1), \boldsymbol{H}(f_2)),$$

onde, $\boldsymbol{H}(f_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$, e analogamente $\boldsymbol{H}(f_2) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$

Sendo assim, $f''(v)$ é o tensor $\left(\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \right)$

Exercício 5 Uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita *movimento rígido* quando preserva distâncias. Isto é:

$$||\Phi(p) - \Phi(q)|| = ||p - q||$$

Verifica-se que todo movimento rígido se escreve de forma única como composta de uma transformação linear ortogonal e uma translação, ou seja:

$$\Phi(p) = Ap + p_0 \ \forall p \in \mathbb{R}^2,$$

em que, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear ortogonal e p_0 um ponto de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que Φ é *direto* ou *inverso*, conforme $\det(A) = 1$ ou -1 respectivamente. Verifique que Φ é diferenciável e calcule $\Phi'(p)$ e $\Phi''(p)$.

Solução 5 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável se, dados $p \in \mathbb{R}^2,\ v \in \mathbb{R}^2$, existe uma transformação linear representada pela matriz T, tal que

$$\Phi(p+v) - \Phi(v) = Tv + r(v), \text{ onde } \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0$$

T é chamada de derivada de Φ.

Dado $\Phi(p) = Ap + p_0$, tome $T = A$, vejamos que de fato a proriedade de diferenciabilidade é satisfeita:

$$\begin{aligned}
\Phi(p+v) - \Phi(v) &= A(p+v) - Av \\
&= Ap + Av - Av \\
&= Ap
\end{aligned}$$

Como $Ap = Tp$ é direto o fato que $r(v) \equiv 0$ e portanto $\lim_{v\to 0} \dfrac{r(v)}{||v||} = 0$

Logo $\Phi'(p) = A$.

Como a derivada é constante em relação à p, segue que $\Phi''(p) = 0$.

Exercício 6 Mostre que uma matriz de rotação e uma matriz de reflexão são aplicações lineares e ortogonais e, portanto, podem ser interpretadas como um movimento rígido.

Solução 6 Uma matriz $A \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal se $AA^T = I_n$ onde I_n é a matriz identidade de n dimensões. Considerando o $\mathbb{R}^2$, uma matriz de rotação é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Multiplicando pela transposta temos:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, uma matriz de rotação no plano é ortogonal.

Podemos representar uma reflexão de um ponto por uma reta L que faz ângulo θ com o eixo das abscissas pela matrix[3]:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Note que $A = A^T$, se realmente for o caso de A ser orgonal teremos $A^2 = I$, que é o esperado de uma reflexão, pois se aplicada duas (ou um número par) vezes devemos voltar ao mesmo lugar. verificando então a ortoginalidade:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\theta) \\ \sin(2\theta)\cos(2\theta) - \cos(2\theta)\sin(2\theta) & \sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Q.E.D

Exercício 7 Mostre que movimentos rígidos levam retas em retas e círculos em círculos.

Solução 7 Considerando o $\mathbb{R}^2$, definamos retas como curvas do tipo $\alpha(t) = a_0 + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R},\ a_0 \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}$ um vetor do plano representando a direção da reta.

Tome A uma matriz representando um operador linear ortogonal e p_0 um ponto do $\mathbb{R}^2$ e defina o movimento rígido

$$\Phi(p) = Ap + p_0$$

Queremos provar que $\Phi(\alpha(t))$ é uma reta.

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha(t)) &= \Phi(a_0 + t\vec{v}) \\
&= A(a_0 + t\vec{v}) + p_0 \\
&= Aa_0 + tA\vec{v} + p_0 \\
&= (Aa_0 + p_0) + tA\vec{v}
\end{aligned}$$

Que é uma reta que passa pelo ponto $(Aa_0 + p_0)$ e segue a direção do vetor $A\vec{v}$.

Note que $\Phi'(\alpha(t)) = A\vec{v}$ e $\Phi''(\alpha(t)) = 0$, sendo assim determinante que usamos para calcular a curvatura será zero, implicando curvatura nula, que é o que caracteriza uma reta.

Definamos agora um círculo de centro $c \in \mathbb{R}^2$ e raio r como o conjunto:

$$S = \{q \in \mathbb{R}^2; ||q - c|| = r\}$$

Aplicando $\Phi(p) = Ap + p_0$ para cada ponto deste conjunto, tome $c^* = \Phi(c) = Ac + p_0$.

Para cada $q \in S$, pela propriedade de preservação de distâncias de Φ temos que

$$||q - c|| = ||\Phi(q) - c^*||,$$

ou seja os pontos de $\Phi(S) = \{\Phi(q); q \in S\}$ são equidistandes de c^*, resta provar que tais pontos coincidem com o círculo de raio r centrado em c^*, ou seja:

$$\Phi(S) = \{q^* \in \mathbb{R}^2; ||q^* - c^*|| = r\}$$

O lado $\Phi(S) \subseteq \{q^* \in \mathbb{R}^2; ||q^* - c^*|| = r\}$ já mostramos no comentário acima. Resta provar o outro lado, ou seja, dado um $q^* \in \mathbb{R}^2$ tal que $||q^* - c^*|| = r$ então existe $q \in S$ tal que $\Phi(q) = q^*$.

Como A, p_0 são arbitrários, mas fixos, dado um q^* conforme descrito acima, tome[3] $q = A^{-1}(q^* - p_0)$, pela definição de matriz ortogonal, a inversa de A existe e é igual à transposta. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= \Phi(A^T(q^* - p_0)) \\
&= AA^T(q^* - p_0) + p_0 \\
&= I(q^* - p_0) + p_0 \\
&= q^* - p_0 + p_0 \\
&= q^*
\end{aligned}$$

Logo $\Phi(S) = \{q^* \in \mathbb{R}^2; ||q^* - c^*|| = r\}$

Exercício 8 Exemplifique, em ambiente computacional, movimentos rígidos sendo aplicados em uma curva de sua preferência.

[3] parece tirado da cartola, mais foi só resolver $Aq + p_0 = q^*$ para q.

Solução 8 A curva escolhida foi uma cardióide transladada:

$$(\cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1) + \mathbf{2}, \sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1)), t \in (0, 2\pi)$$

A matriz A é tal que representa uma reflexão sobre a reta identidade, e o ponto p_0 é a origem. Segue na Figura 2 um screenshot do conteúdo disponível do arquivo L3_ex8.ggb, na qual é possível personalizar a matriz ortogonal e o ponto de translação p_0.

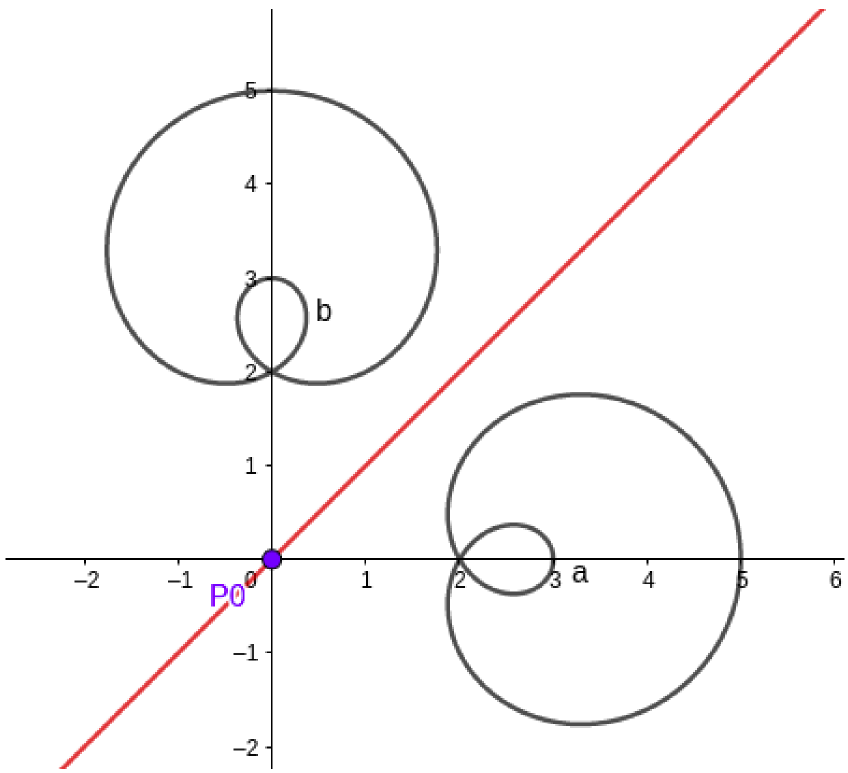

Figura 2: Cardióide Refletida

Referências

[1] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry.* Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.

[2] Wikipedia. Hessian matrix — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hessian%20matrix&oldid=1011126160, 2021. [Online; accessed 17-March-2021].

[3] Wikipedia. Rotations and reflections in two dimensions — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotations%20and%20reflections%20in%20two%20dimensions&oldid=1002077477, 2021. [Online; accessed 18-March-2021].