Lista 3
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

Exercício 1 Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (c, d)$, que é diferente do vetor nulo para todo t, desde que c e d não sejam ambos nulos, pois neste caso não se trataria de um reta, mas sim de um ponto isolado. **Logo α é regular.**
  Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} ||(c, d)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 + d^2}du \\ &(t - t_0)\sqrt{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

  Para a curvatura, vamos reparametrizar α por $\mathcal{L}(t)$ e calcular $\kappa(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ após a reparametrização.
  Para facilitar as contas, façamos $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) &= (a + ct/\sqrt{c^2 + d^2}, b + dt/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha'(s) &= (c/\sqrt{c^2 + d^2}, d/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha''(s) &= (0, 0) \Rightarrow \\ \kappa(s) &= \det(\alpha', \alpha'') = 0\end{aligned}$$

- $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (1, 4t^3) \neq 0$, pois a primeira componente é constante não-nula. **Logo a curva é regular.**
  Calculando o comprimeiro de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} ||(1, 4u^3)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{16u^6 + 1}du\end{aligned}$$

Para a curvatura vamos usar a Proposição 2.2.1 de [1], que nos dá uma fórmula para curvatura de uma curva regular qualquer[1].

No nosso caso, a curvatura será:

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{||\alpha'(s)||^3} \\
&= \frac{\det[(1, 4s^3); (0, 12s^2)]}{(1 + 16s^6)^{3/2}} \\
&= \frac{12s^2}{(1 + 16s^6)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

- (círculos) $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(s/r), b + r \cdot \sin(s/r)), s \in \mathbb{R}, r > 0$;

  Verificando regularidade:
  $\alpha'(s) = (-r \cdot \sin(s/r) \cdot 1/r, r \cdot \cos(s/r) \cdot 1/r)$
  $= (-\sin(s/r), \cos(s/r))$
  Tal velocidade será sempre diferente do vetor nulo, pois os pontos na qual a primeira coorderada zera pertence ao conjunto $A = \{rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, os múltiplos de 0 e π radianos do círculo trigonométrico (ajustado por r);
  Já os pontos que a segunda componente zera pertencem à $B = \{r\pi/2 + rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
  Se $s \in A$, $\alpha(s) = (0, 1)$ para k par e $\alpha(s) = (0, -1)$ para k ímpar.
  Se $s \in B$, $\alpha(s) = (1, 0)$ para k par e $\alpha(s) = (-1, 0)$ para k ímpar.
  Logo o círculo é regular
  Calculando o comprimento de arco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(-\sin(u/r), \cos(u/r))||du \\
&= \int_{t_0}^{t} (\sin^2(u/r) + \cos^2(u/r))^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} du \\
&= t - t_0
\end{aligned}
$$

  Fazendo $t_0 = 0$ a fórmula original da curva já é a reparametrização por comprimento de arco, pois $\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = \alpha(t)$.

[1] Na verdade a referência usa norma no produto vetorial no numerador, que no caso é equivalente ao determinante.

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s))\\ &= \det\left[(-\sin(s/r), \cos(s/r)); \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))\right]\\ &= \frac{1}{r}\left[\sin^2(s/r) + \cos^2(s/r)\right]\\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

- (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R};$
Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin(t)(2\cos(t) - 1) - \cos(t) \cdot 2\sin(t), \cos(t)(2\cos(t) - 1) - \sin(t) \cdot 2\sin(t))\\ &= (-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t))\\ &= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\end{aligned}$$

Igualando a primeira componente à zero e resolvendo para t. temos:

$$\begin{aligned}&2\sin(2t) = \sin(t)\\ &\Rightarrow 4\sin(t)\cos(t) = \sin(t)\\ &\Rightarrow \sin(t) = 0 \text{ ou } 4\cos(t) = 1\\ &\Rightarrow t = k\pi \text{ ou } t = 2k\pi + \arccos(1/4) \text{ ou } t = 2k\pi - \arccos(1/4)\end{aligned}$$

No caso $t = k\pi$, a segunda componente será:

$$2\cos(2k\pi) - \cos(k\pi) = 2 - 1 = 1 \text{ para k par e}$$

$$= 2 - (-1) = 3 \text{ para k ímpar}$$

No caso $t = 2k\pi + \arccos(1/4)$, por Pitágoras[2] $\sin(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, assim, a segunda componente será:

[2] ou Relação Fundamental da Trigonometria, o que preferir.

$$
\begin{aligned}
&2(\cos^2(t)-\sin^2(t))-\cos(t)\\
&=2\left(\frac{1}{16}-\frac{15}{16}\right)-\frac{1}{4}\\
&=2\frac{-14}{16}-\frac{1}{4}\\
&=-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\\
&=-2
\end{aligned}
$$

No último caso $t = 2k\pi - \arccos(1/4)$, teremos $\sin(t) = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ por simetria no círculo trigonométrico. Entretando o cálculo da segundo componente não muda, pois o único lugar que usa o seno, usa-o quadrático.

Vemos então que os pontos que zeram a primeira coordenada não zeram a segunda.

Resta verificar se os pontos que zeram a segunda componente também não zeram a segunda, se isso for provado, teremos uma curva regular. Como os cálculos são um pouco complicados, provarei a regularidade de outra forma, mas não apagarei os passos acima pois deram muito trabalho.

Basta ver a norma da velocidade:

$$
\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= ||(-2\sin(2t)+\sin(t), 2\cos(2t)-\cos(t))||\\
&=\sqrt{4\sin^2(2t)+sin^2(t)-4\sin(2t)\sin(t)+4\cos^2(2t)+\cos^2(t)-4\cos(2t)\cos(t)}\\
&=\sqrt{4(\sin^2(2t)+\cos^2(2t)))+1-4(\sin(2t)\sin(t)+\cos(2t)\cos(t))}\\
&=\sqrt{4+1-4\cos(t)(2\sin^2(t)+\cos^2(t)-\sin^2(t))}\\
&=\sqrt{5-4\cos(t)(\sin^2(t)+\cos^2(t))}\\
&=\sqrt{5-4\cos(t)}
\end{aligned}
$$

Como o cosseno varia entre -1 e 1, $||\alpha'(t)||$ vai varia entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{9}$, sendo assim estritamente positiva, levando-nos a colcluir, pela definição de norma, que $\alpha'(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.**Logo a curva é regular.**

O comprimento de arco é:

$$
\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{5-4\cos(u)}du
$$

A curvatura será:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{\det[(-2\sin(2t)+\sin(t), 2\cos(2t)-\cos(t)); (-4\cos(2t)+\cos(t), -4\sin(2t)+\sin(t))]}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \cdot [8\sin^2(2t) - 2\sin(2t)\sin(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + \sin^2(t) \\
&\qquad + 8\cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\cos(t) + \cos^2(t)] \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}}[8+1-6\cos(t)(2\sin^2(t)+\cos(2t))] \\
&= \frac{9-6\cos(t)}{(5-4\cos(t))^{3/2}}
\end{aligned}
$$

- (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$
  Verificando regularidade, temos $\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ por conta da primeira componente constante.
  O comprimeiro de arco será:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||(1, \sinh(u))|| du \\
&= \int_{t_0}^{t} (1+\sinh^2(u))^{1/2} du = \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(1 + \frac{e^{2u}+e^{-2u}-2e^{u}e^{-u}}{4}\right)^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{e^{2u}+e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right)^2\right]^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left[cosh^2(u)\right]^{1/2} du \\
&= \int_{t_0}^{t} \cosh(u) du \\
&= \sinh(t) - \sinh(t_0)
\end{aligned}
$$

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det[(1, \sinh(t)); (0, \cosh(t))]}{||(1, \sinh(t))||^3} \\
&= \frac{\cosh(t)}{[1+\sinh^2(t)]^{3/2}} \\
&= \frac{\cosh(t)}{[\cosh^2(t)]^{3/2}} \\
&= \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(t)}
\end{aligned}$$

A função acima é conhecida como $\operatorname{sech}^2(t)$ e o passo de divisão por $\cosh(t)$ que fizems é válido por nos reais, o cosseno hiperbólico é estritamente positivo. A curvatura então está bem definida.

Exercício 2 Considere a elipse $\beta(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenhaos valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução 2 É fácil ver que α é regular, por argumentos que já usamos anteriormente sobre pontos onde seno e cosseno zeram. Sendo assim, a curva admite reparametrização por comprimento de arco, fazendo o vetor tangente ter norma 1. Vamos calcular a curvatura pela fórmula usada anteriormente [1].

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(t) &= \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{||\beta'(t)||^3} \\
&= \frac{\det[(-a\sin t, b\cos t); (-a\cos t, -b\sin t)]}{||(-a\sin t, b\cos t)||^3} \\
&= \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Como o numerador é fixo, a maximização da curvatura ocorre com a minimização do denominador e de forma análoga, a curvatura mínima ocorre quando o denominador é máximo.

Como a função $x \mapsto x^{3/2}$ é monótona não-decrescente para $x \geq 0$ e $a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, basta maximizar/minimizar esta espressão, sem o expoente $3/2$.

Derivando, chegamos a $(a^2-b^2)\sin(2t)$, que se anula nos pontos do conjunto $\{k\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.

Sem perda de generalidade, consideremos $a > b$, a segunda derivada será

$$2(a^2 - b^2)\cos(2t)$$

Note que para k par, $\cos(k\pi) = 1 > 0$, nesses casos a concavidade do ponto $t = k\pi/2$ é "para baixo"indicando que tal ponto é ponto de mínimo do denominador, logo máximo da fração toda da curvatura.

Analogamente, para k ímpar $\cos(k\pi) = -1 < 0$, fazendo com que $t = k\pi/2$ sejam pontos de máximo do deniminador e mínimo para a curvatura.

Se $a < b$, essas relações se invertem.

Resumindo:

- Caso 1: $a > b$
  Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$
  Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
- Caso 2:
  Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
  Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$

Exercício 3 Seja $I = (-a, a), a > 0$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.

- Mostre que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ $\forall s \in I$ (Isto é,a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação)
  Regularidade: A curva β é uma função composta $\alpha \circ f$, com $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ e $f : I \to I$ dada por $f(x) = -x$. É bem fácil verificar que f é diferenciável, invertível e com inversa diferenciável, omitirei esta prova aqui.

  Usando o resultado visto em aula de que uma reparametrização defeomorfa de uma curva regular é regular, concluímos que $\beta(s)$ é regular.

  Para verificar que $\beta(s)$ está parametrizada por comprimento de arco, basta ver se a norma da velocidade é 1. Usaremos a Regra da Cadeia.

$$\begin{aligned}||\beta'(s)|| &= \left|\left|\frac{d}{ds}\alpha(f(s))\right|\right| \\ &= ||\alpha'(f(s)) \cdot f'(s)|| \\ &= ||\alpha'(f(s)) \cdot (-1)|| \\ &= |-1| \cdot ||\alpha'(f(s))|| \\ &\text{Pelo fato de } \alpha \text{ ser } \textit{unit-speed}\text{:} \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Inversão de sinal da Curvatura:
Como β é unit-speed, a curvatura será dada pelo determinante entre os vetores velocidade e aceleração.

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(s) &= \det[\beta'(s), \beta''(s)] \\ &= \det[-\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \\ &= -\det[\alpha'(-s), \alpha''(-s)]\end{aligned}$$

Onde o último passo é uma propriedade de determinantes entre vetores do plano, na qual trocar o sinal do primeiro vetor inverte o sinal do determinante.

Pela definição de curvatura para curvas *unit-speed*, a expressão final é justamente igual a $-\kappa_\alpha(-s)$; Fica demonstrado então que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$.

- Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no ítem anterior.

Na figura 1, segue um corte da animação disponível em LINK da catenária restrita a um intervalo aberto.

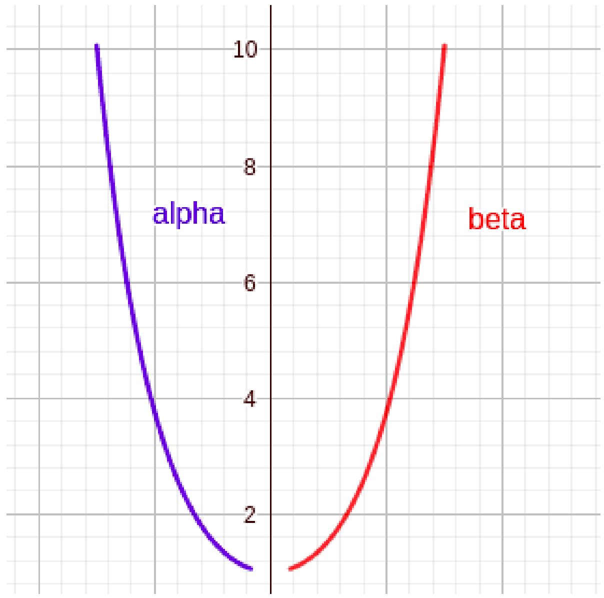

Figura 1: Catetária sob o intervalo (-3,3)

Referências

[1] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.