Lista 4
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
24 de março de 2021

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

Usaremos a definição de [1], para curvas 2-regulares, que diz que a curva precisa ser regular e com curvatura estritamente positiva.

Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ que é diferente do vetor nulo, para todo t real por conta da primeira componente constante igual a 1. Logo α é regular. Pelo item 7, a curvatura é $\kappa_\alpha(t) = 2\sqrt{\dfrac{1+9t^2+9t^4}{(1+4t^2+9t^4)^3}}$, que só seria nula no caso $1 + 9t^2 + 9t^4 = 0$ o que não ocorre, dado que $(9t^2 + 9t^4) \geq 0$ e $1 > 0$. Logo α é 2-regular.

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

Temos $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2+1)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$, a velocidade é não-nula pelo termo constante o que faz α ser regular. Usaremos a aceleração no cálculo da curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} \\
&= \frac{||(0, 2, 6t) \times (1, 2t, 3t^2 + 1)||}{||(1, 2t, 3t^2 + 1)||^3} \\
&= \frac{||(2 - 6t^2, 6t, -2)||}{(1 + 4t^2 + (3t^2 + 1)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Para evitar contas, dado que queremos analisar se a curvatura é nula ou não, vamos olhar somente o numerador:

$$\begin{aligned}
||(2 - 6t^2, 6t, -2)|| &= \sqrt{(2 - 6t^2)^2 + 36t^2 + 4} \\
&= \sqrt{4 - 24t^2 + 36t^4 + 36t^2 + 4} \\
&= \sqrt{8 + 12t^2 + 36t^4} \\
&\geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{pois } (12t^2 + 36t^4) \geq 0 \text{ e } 8 > 0
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que α é 2-regular.

Exercício 2 Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - 1)^2 + y^2 = 1$ e da esfera $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional

Solução 2 A duas primeiras coordenadas da velocidade, a menos de sinal, são $\sin(t)$ e $\cos(t)$ que já foi provado no início da Lista 3 que não serão ao mesmo tempo. A terceira componente é, à menos de constantes $\cos(t/2)$. É fácil ver que ela não zera quando $\cos(t) = 0$; O único problema seria com ângulos $t = \pi + 2k\pi$, onde $\sin(t) = \cos(t/2) = 0$, mas neste caso a componente $\cos(t) \neq 0$. Podemos então assegurar que as componentes não se anulam ao memso tempo, comprovando a regularidade da curva.

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

Solução 3 Encontrando a função comprimento de arco:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||e^u(-\sin u, \cos u, 1)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} e^u(\sin^2 u + \cos^2 u + 1)^{1/2}du \\
&= \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} e^u du \\
&= \sqrt{2}(e^t - e^{t_0})
\end{aligned}$$

Tomando os devidos cuidados com os domínios e imagens, podemos inverter a função comprimeiro de arco, fixando gerando $\mathcal{L}^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)$

Assim, tomando $s_t = \frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}$ a reparametrização por comprimeiro de arco será:

$$\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = s_t\left(\cos\left(s_t\right), \sin\left(s_t\right), 1\right),$$

Onde está definida para valores de t na qual $\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} > 0 \Rightarrow t > -e^{t_0}\sqrt{2}$.

Exercício 7 Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{||(0,2,6t) \times (1,2t,3t^2)||}{||(1,2t,3t^2)||^3} \\
&= \frac{||(-6t^2, 6t, -2)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} = \frac{2||(-3t^2,3t,-1)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= \frac{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{1+9t^2+9t^4}{(1+4t^2+9t^4)^3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_\alpha(t) &= \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2} \\
&= \frac{\langle(6t^2, -6t, 2), (0,0,6)\rangle}{||(6t^2,-6t,2)||^2} \\
&= \frac{12}{36t^4+36t^2+4} \\
&= \frac{3}{9t^4+9t^2+1}
\end{aligned}
$$

(b) $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$

Como $||\beta'(t)|| = ||(-\sin t, \cos t, 1)|| = \sqrt{2}$ a curva β não é unit-speed, podemos reparametrizar por comprimento de arco, trnasformá-la em unit-speed e calcular a curvatura e torção a partir daí.

É fácil ver que fazendo $t_0 = 0$, $\mathcal{L}_\beta(t) = \sqrt{2}t$, logo $\mathcal{L}_\beta^{-1}(t) = t/\sqrt{2}$, e a cruva reparametrizada será:

$$\beta(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_\beta(t) &= ||\beta''(t)|| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}||(-\sin(t/\sqrt{2}), \cos(t/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2})'|| \\
&= \frac{1}{2}||(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0)|| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(t/\sqrt{2}) + \cos^2(t/\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Para a torção, vamos determinar os vetores tangente (T), normal (N) e binormal (B), do Triedro de Frenet, e calcular torção como a $\tau(s)$ tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s/\sqrt{2}), \cos(s/\sqrt{2}), 1) \\
N(s) &= (-\cos(s/\sqrt{2}), -\sin(s/\sqrt{2}), 0) \\
B(s) &= T(s) \times N(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1)
\end{aligned}
$$

Referências

[1] Ronaldo Freire Lima. *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.