Lista 5
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
21 de maio de 2021

Exercício 1 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Mostre que: F é injetora se, e só se, a imagem da base canônica de $\mathbb{R}^2$ forma um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, se a matriz associada de F tem posto 2. (obs.: Repare que este resultado está sendo usado para o conceito de superfície regular descrito acima).

Solução 1 De forma geral, seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ um aplicação linear.

($\Rightarrow$) Suponha injetividade de F, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq y \Rightarrow Fx \neq Fy$.[1]

Queremos provar que a matriz F tem posto m ($\text{rank}(F) = m$). Usando o Teorema do Posto-Nulidade[1], temos:

$$\dim(\mathbb{R}^m) = m = \text{rank}(F) + \dim(\text{Ker}(F)),$$

onde $\text{Ker}(F) := \{x \in \mathbb{R}^m; Fx = 0\}$. Assim, basta provar que a dimensão do núcleo é 0, e teremos o resultado.

Trivialmente, se $x \in \mathbb{R}^m$ é tal que $x = 0$, então $x \in \text{Ker}(F)$. Suponha, por contradição, que $\exists x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0$ tal que $x \in \text{Ker}(F)$, assim $Fx = 0$. Mas pela injetividade, $x \neq 0 \Rightarrow Fx \neq F0 = 0$, absurdo. Logo $\text{Ker}(F) = \{0\}$, que tem dimensão 0. Portanto,

$$\text{rank}(F) = m$$

($\Leftarrow$) Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e considere sua imagem $\{Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_m\}$ linearmente independente, ou seja, a equação

$$\alpha_1 Fe_1 + \alpha_2 Fe_2 + \ldots + \alpha_m Fe_m = 0$$

só possui solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Queremos provar a injetividade de F, ou seja $\forall x, y \in \mathbb{R}^m, Fx = Fy \Rightarrow x = y$.

Tome $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ vetores arbitrários de $\mathbb{R}^m$. Podemos escrever $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$. Considerando $Fx = Fy$, temos:

[1] Abusando um pouco da notação, usamos F para representar tanto a aplicação quanto à sua matriz associada

$$\begin{aligned}
Fx = Fy &\Rightarrow F\sum_{i=1}^{m} x_i e_i = F\sum_{i=1}^{m} y_i e_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} Fx_i e_i = \sum_{i=1}^{m} Fy_i e_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i Fe_i = \sum_{i=1}^{m} y_i Fe_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)Fe_i = 0 \\
&\Rightarrow x_i - y_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1) \\
&\Rightarrow x_i = y_i \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

onde a passagem 1 usa o fato de $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Fe_i = 0$ só possui solução trivial fazendo $\alpha_i = x_i - y_i$. As passagens acima usam a linearidade de F e manipulações simples.

Prova-se então que F é injetiva.

Exercício 2 Mostre que o paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ é uma *superfície regular*. Desenhe o paraboloide em um ambiente gráfico juntamente com o plano tangente e um vetor normal à superfície. Faça o desenho de forma a poder variar o ponto aonde o plano tangente é exibido.

Solução 2 Dado que $z = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, podemos propor uma parametrização única para S, resolvendo $u = x + y, v = x - y$ para x e y:

$$\begin{aligned}
\sigma : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, uv\right)
\end{aligned}$$

Não provaremos formalmente que S satisfaz de fato a definição de superfície com a parametrização acima, vamos direto para a prova da regularidade.

Queremos provar que a matriz Jacobiana de σ tem posto 2, ou ainda, que o produto vetorial $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0)$ para todo $q \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (1/2, 1/2, v) \times (1/2, -1/2, u) \\
&= \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}, -1/2\right)
\end{aligned}$$

que é sempre diferente do vetor nulo, devido à última coordenada constante. O desenho/animação no Geogebra 5.0 está disponível no arquivo L5_ex2.ggb, movendo o ponto A no plano xy é esperado que o ponto $B = \sigma(A)$ se movimente pela superfície.

Uma forma mais fácil de provar esse exercício que só percebi depois de terminar, é perceber que S é gráfico da função diferenciável $f(x, y) = x^2 - y^2$ e usar o exercício 3 para provar regularidade.

Exercício 3 Mostre que, se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma *superfície parametrizada regular*, que descreve o gráfico da função f.

Solução 3 Se f é diferenciável, as derivadas parciais f_u e f_v existem. Para provar a regularidade da superfície, provando que a Jacobiana da aplicação $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem posto 2, no caso, que as derivadas parciais de X são linearmente independentes.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} &= (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) \\
&= (-f_u, -f_v, 1)
\end{aligned}
$$

que é sempre diferente do vetor nulo, devido à última coordenada constante; Logo a aplicação X é uma parametrização de uma superfície regular.

Exercício 4 Considere o *hiperbolóide de uma folha*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Mostre que, para todo θ, a reta

$$(x - z)\cos\theta = (1 - y)\sin\theta, \; (x + z)\sin\theta = (1 + y)\cos\theta$$

está contida em S, e que, todo ponto do hiperboloide está em alguma dessas linhas. Desenhe o hiperbolóide e as linhas em um ambiente gráfico. Deduza que a superfície pode ser coberta por uma única parametrização.

Solução 4 Tome inicialmente o caso $\theta \in \{\pi/2 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ onde $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = \pm 1$.

Dessa forma, pelas equações do enunciado, temos:

$$\pm(1 - y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\pm(x + z) = 0 \Rightarrow x = -z$$

Assim, $x^2 + y^2 - z^2 = z^2 + 1 - z^2 = 1$, satisfazendo a condição de pertencimento a S.

Analogamente, no caso $\theta \in \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ temos $\sin\theta = 0, \cos\theta \pm 1$ e as equações implicam:

$$\pm(x - z) = 0 \Rightarrow x = z$$

$$\pm(1+y) = 0 \Rightarrow y = -1$$

Dessa forma $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$, logo pertence a S.

Nos outros casos, podemos multiplicar as duas equações, e obteremos por produto notável:

$$(x^2 - z^2)\cos\theta\sin\theta = (1 - y^2)\sin\theta\cos\theta$$

Como estamos considerando os casos onde $cos\theta \neq 0, \sin\theta \neq 0$ então podemos dividir a expressão acima por $\sin\theta\cos\theta$, obtendo:

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

satisfazendo assim a condição de pertencimento de S

Para provar que todo ponto da superfície está em uma das linhas, precisamos provar que $\forall(x, y, z) \in S$, existe um θ que satisfaz a expressão das retas.

No caso onde $y = 1$, tomamos $\theta = \pi/2$ e satisfazemos a primeira equação $(x - z)\cos\theta = (1 - y)\sin\theta$.

No caso $y = -1$, pela equação da superfície, tem-se $x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm z$. No sub-caso $x = -z$, tomando $\theta = -\pi/2$, a segunda equação é satisfeita: $(x + z)\sin\theta = 0 \Leftrightarrow x = -z$. No outro caso, onde $x = z$, toma-se $\theta = 0$, e a primeira equação é satisfeita: $(x - z)\cos\theta = 0 \Leftrightarrow x = z$.

No caso onde $y \neq \pm 1$, podemos fatorizar a expressão da superfície em $(x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y) \Rightarrow (x + z)\dfrac{x - z}{1 - y} = 1 + y$. Sendo assim o ângulo $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - z}{1 - y}\right)$ satisfaz a segunda equação, que pode ser reescrita (para $\theta \neq \pi/2 + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$) como $(x+z)\tan\theta = 1+y$.

O desenho se encontra no arquivo L5_ex4.ggb. A parametrização da superfície será feita a partir da parametrização das retas. As retas podem ser expressadas pela interseção dos dois planos cujas equações foram dadas no enunciado. Considerando $z = 0$ chegamos no sistema abaixo, cuja solução para x e y será nosso ponto inicial.

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = \sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta = \cos\theta \end{cases}$$

Com um pouco de algebrismo que omitirei, chega-se em $x = \sin 2\theta, y = -\cos 2\theta$. Logo o ponto $p_0 = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0)$ é ponto inicial da nossa parametrização. Em $z = 0$ nossa superfície é circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$, e o formato de x, y também sugere que θ esteja relacionado ao ângulo de rotação; No caso como temos 2θ nas funções trigonométricas, consideraremos intervalos abertos para θ de tamanho π para cobrir (quase) toda a superfície.

Estamos parametrizando a reta no formato $p_0 + t\vec{v}$ onde $\vec{v}$ é um vetor diretor. podemos encontrar tal vetor pelo produto vetorial dos vetores normais dos dois planos. Esses normais são dados simplesmente pelos coeficientes de x, y, z nas suas equações.

$$\begin{aligned}
\text{Equação 1: } & x\cos\theta + y\sin\theta - z\cos\theta = \sin\theta \\
N_1 &= (\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta) \\
\text{Equação 2: } & x\sin\theta - y\cos\theta + z\sin\theta = \cos\theta \\
N_2 &= (\sin\theta, -\cos\theta, \sin\theta) \\
\vec{v} = N_1 \times N_2 &= (\sin^2\theta - \cos^2\theta, -2\cos\theta\sin\theta, -\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta, -1)
\end{aligned}$$

Sendo assim, usamos o conjunto de parametrizações:

$$\begin{aligned}
\sigma : U \times \mathbb{R} &\to S \\
(\theta, t) &\mapsto (\sin 2\theta, -\cos 2\theta, 0) - t(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 1),
\end{aligned}$$

onde U pode ser $(0, \pi)$ ou $(-\pi/2, \pi/2)$ para cobrir todos os pontos usando duas parametrizações.

Exercício 5 Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in I \subset \mathbb{R}$. Seja o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo O_z. Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva para que S seja o traço de uma *superfície parametrizada regular*.

Solução 5 Uma tentativa de parametrização seria:

$$\begin{aligned}
\sigma : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\
(s, z) &\mapsto (x(s), y(s), z)
\end{aligned}$$

Se $I \times \mathbb{R}$ for aberto e σ caracterizar um homeomorfismo local para cada $p \in (I \times \mathbb{R})$, temos uma superfície.

Uma condição suficiente para ser superfície regular, é o posto da jacobiana da parametrização ser 2, ou ainda, $\sigma_s(s, z) \times \sigma_z(s, z) \neq 0, \ \forall (s, z) \in I \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sigma_s(s, z) &= (x_s(s), y_s(s), 0) \\
\sigma_z(s, z) &= (0, 0, 1) \\
\sigma_s(s, z) \times \sigma_z(s, z) &= (y_s(s), -x_s(s), 0)
\end{aligned}$$

Assim, a condição suficiente equivale à $y_s(s)$ e $x_s(s)$ não se anularem ao mesmo tempo, ou seja:

$$\forall s \in I, x(s) \neq 0 \vee y_s(s) \neq 0$$

Referências

[1] Rahmi Jackson. Rank-Nullity Theorem. from MathWorld — A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. https://mathworld.wolfram.com/Rank-NullityTheorem.html.