

Sumário

1	Curvatura com Sinal	2
2	Teorema dos 4 Vértices	3
2.1	Definições e Propriedades Iniciais	3
2.2	Enunciado e Demonstração	5
3	Exercícios	7
4	Exemplo Geogebra	11
	Referências	12

1 Curvatura com Sinal

Antes de prosseguirmos com o teorema, vamos definir curvatura com sinal.

Dada uma curva plana suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, regular e *unit-speed*, considere o vetor tangente (unitário), $T(s) = \frac{d\gamma}{ds}$.

Seja N o vetor normal à curva, unitário, obtido a partir de uma rotação de 90 graus no sentido horário de T .

Pela Proposição 1.2.4 de [1], ou pelo Exercício 7 da [Lista 1](#), o vetor $\dot{T}(s) = \frac{dT(s)}{ds}$ é ortogonal a $T(s)$.¹

Desse forma \dot{T}/N , definimos então a curvatura com sinal, como sendo o múltiplo κ_s tal que

$$\dot{T} = \kappa_s N \quad (1)$$

No caso em que γ não é *unit-speed*, considere $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de reparametrização obtido pela função $h : I \rightarrow J$, via $h(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$. Para simplificar a notação, considere $h(t) = s$ e $\Phi(s) := h^{-1}(s) = t$.

Seja $\bar{\gamma}(s)$ a curva reparametrizada definida por $\bar{\gamma}(s) = \gamma(\Phi(s))$.

Abusando um pouco da notação, reusando t e s para representar Φ e h respectivamente, a tangente de γ em relação a t será igual a

$$\begin{aligned} T_\gamma(t) &= T_{\bar{\gamma}}(s) \\ &= \frac{d\bar{\gamma}(s)}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{ds} \\ &= \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \\ &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \end{aligned} \quad (3)$$

Onde [2](#) segue da Regra da Cadeia e [3](#) segue do Teorema da Função Inversa e Teorema Fundamental do Cálculo: $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{d(h(t))/dt} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$

Definimos N da mesma forma, rotacionando por 90 graus anti-horários o vetor $T_\gamma(t)$

¹A notação ponto representa d/ds

²A notação linha representa d/dt

Tomemos a derivata de $T_\gamma(t)$ em relação a t :

$$\begin{aligned} T'_\gamma(t) &= \frac{d}{dt} T_{\bar{\gamma}}(s) \\ &= \frac{dT_{\bar{\gamma}}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= \dot{T}_{\bar{\gamma}}(s) \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

De 1, tem-se:

$$\begin{aligned} &= \kappa_s N \cdot \frac{dh(t)}{dt} \\ &= \kappa_s N ||\gamma'(t)|| \end{aligned}$$

Onde κ_s e N são respectivamente a curvatura com sinal e o vetor normal da reparametrização $\bar{\gamma}$. Mas em relação ao parâmetro t , a relação que se satisfaz deixa de ser 1 e passa a ser:

$$T' = \kappa_s N ||\gamma'(t)||$$

Perceba que no caso *unit-speed*, a fórmula acima coincide com 1, conforme esperado.

Se γ é *unit-speed* e admite função ângulo $\theta(s)$ tal que $\dot{\gamma}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, então a curvatura com sinal pode ser entendida como uma taxa de variação da rotação do vetor tangente, na qual será positiva quando $\dot{T} := \ddot{\gamma}$ estiver no mesmo sentido de N e negativa caso contrário.

Para curvas parametrizadas por comprimento de arco, podemos calcular a curvatura com sinal pela fórmula:

$$\kappa_s(s) = \det[\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)]$$

e para curvas de parâmetro t qualquer:

$$\kappa_s(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t)]}{||\gamma'(t)||^3}$$

2 Teorema dos 4 Vértices

2.1 Definições e Propriedades Iniciais

Definição 1. (*Curvas Convexas*)

Uma curva fechada simples, (ou curva de Jordan), γ no plano \mathbb{R}^2 , pelo Teorema da Curva de Jordan[3], divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada (interior) denotada por $\text{int}(\gamma)$ e uma ilimitada (exterior). O traço da curva γ é a borda dessas regiões.

Definimos como curva de Jordan γ como convexa, quando $\text{int}(\gamma)$ é um conjunto convexo. Isto é, dados dois pontos interiores de γ o segmento de reta que linha esses dois pontos pertence inteiramente ao interior da curva. Mais precisamente:

$$\begin{aligned} &\forall P, Q \in \text{int}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2 \\ &\Rightarrow Pt + (1 - t)Q \in \text{int}(\gamma), \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Definição 2. (Vértice) Um vértice de uma curva $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ é um ponto $(x(t), y(t))$ na qual $d\kappa_s(t)/dt = 0$

Teorema 1. (Teorema do Valor Extremo - Weierstrass) [2]

Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto $X \subset \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores extremos. Ou seja,

$$\exists x_1, x_2 \in X; \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in X.$$

Assim $f(x_1)$ é o **valor mínimo** de f e $f(x_2)$ é seu **valor máximo**.

A demonstração segue na referência.

Propriedade 1. Se $\gamma(s)$ é parametrizada por comprimento de arco, então $\dot{N}(s) = -\kappa_s(s)T(s)$, onde T, N e κ_s são respectivamente o vetor tangente, normal e a curvatura com sinal, conforme definidos na primeira seção.

Prova: Vamos usar a Proposição 1.2.4 de [1] novamente, que diz que no caso da curva *unit-speed*, temos $T(s) \cdot N(s) = 0$. Diferenciando o produto escalar em relação a s , temos:

$$\dot{T} \cdot N + T \cdot \dot{N} = 0$$

Usando 1, temos:

$$\begin{aligned} &\kappa_s N \cdot N + T \cdot \dot{N} = 0 \\ &\Rightarrow \kappa_s ||N||^2 = -T \cdot \dot{N} \\ &\Rightarrow \kappa_s = -T \cdot \dot{N} \\ &\Rightarrow -\kappa_s T = ||T||^2 \dot{N} \\ &\Rightarrow \dot{N}(s) = -\kappa_s(s)T(s) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

2.2 Enunciado e Demonstração

Teorema 2. (Teorema dos 4 Vértices) *Toda curva de Jordan convexa no plano \mathbb{R}^2 tem pelo menos 4 vértices.*

Demonstração:

Vamos supor que γ é uma curva de Jordan *unit-speed*, (caso não seja basta usar a reparametrização por comprimento de arco). Como γ é fechada, podemos considerar o traço restrito à apenas um período, ou seja $\gamma|_{[0,\ell]}$ onde ℓ é o comprimento de arco da curva (apenas uma volta).

Suponhamos, por absurdo que γ possui menos de 4 vértices.

Afirmamos que existem $s_1, s_2 \in [0, \ell]$ tais que o segmento de reta que passa pelos pontos $P = \gamma(s_1)$ e $Q = \gamma(s_2)$ divide a curva em duas partes, uma na qual $\kappa_s > 0$ e outra onde $\kappa_s \leq 0$.

Dado que a função curvatura com sinal $\kappa_s(s)$ atinge todos seus possíveis valores entre $[0, \ell]$, assim pela diferenciabilidade da curvatura, ela é contínua, e podemos aplicar o Teorema 1, pois $[0, \ell]$ é compacto.

Pelo teorema, $\kappa_s(s)$ atinge seu valor máximo e mínimo no intervalo de definição. Seja então s_1, s_2 tais que

$$\begin{aligned} \max_{s \in [0, \ell]} \kappa_s(s) &= \kappa_s(s_1) \text{ e} \\ \min_{s \in [0, \ell]} \kappa_s(s) &= \kappa_s(s_2). \end{aligned}$$

Faça $P = \gamma(s_1)$ e $Q = \gamma(s_2)$. Se $P = Q$ então o Teorema 2 fica provado diretamente, pois se o máximo e mínimo da curvatura são iguais, ela é constante, logo a derivada é zero em todos os pontos, ou seja, a curva teria infinitos vértices.

Supondo $P \neq Q$, sabemos que $\kappa_s(s_1) = \kappa_s(s_2) = 0$, ou seja P, Q são vértices. Se eles forem os únicos vértices da curva, fica claro que eles à dividem em uma parte com $\kappa_s > 0$ e outra $\kappa_s \leq 0$. Isso pois, entre s_1 e s_2 a curvatura não pode mudar de sinal³, suponha então sem perda de generalidade, que nesse intervalo, se tenha $\kappa_s > 0$. Assim para $s \leq s_1$ e $s \geq s_2$ tem-se $\kappa_s(s) \leq 0$, já que a troca de sinal ocorrem em s_1 e s_2 .

Supondo que haja um terceiro vértice $R = \gamma(s_3)$. Sem perda de generalidade podemos supor $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ell$, pois a demonstração seria análoga apenas trocando os papéis de P, Q e R . Neste caso triplo, a curvatura zero em s_1, s_2 e s_3 .

Novamente, sem perda de generalidade, suponha que para $s \in (s_1, s_2)$, tem-se $\kappa_s(s) > 0$. Trocando de sinal em s_2 , temos que para $s \in [s_2, s_3]$ $\kappa_s(s) \leq 0$. Com a troca de sinal em s_3 a derivada da curvatura passa a ser estritamente positiva em $(s_3, \ell) \cup [0, s_1)$.

Sendo assim, para $s \in [s_2, s_3]$ temos $\kappa_s(s) \leq 0$ e em todo o complemento temos $\kappa_s(s) > 0$,

³senão, haveriam mais de dois vértices

sendo assim podemos seleccionar os pontos $Q = \gamma(s_2)$ e $R = \gamma(s_3)$ para formarem o segmento que divide a curva em duas partes com o sinal de $\kappa_s(s)$ diferente.

Concluimos então que, sobre a hipótese de curva com menos de 4 vértices, existe um segmento ligando dois pontos da própria curva, que a separa em uma parte $\dot{\kappa}_s > 0$ e $\dot{\kappa}_s \leq 0$.

Seja L tal segmento. Tome \vec{a} , um vetor unitário perpendicular a L , como na Figura 1

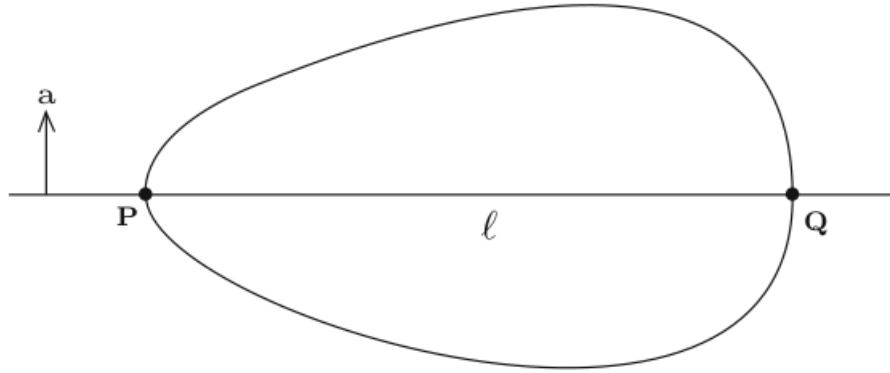


Figura 1: Reprodução[1] - Ilustração do vetor \vec{a}

Em um dos lados de L , teremos $\gamma \cdot \vec{a} > 0$, enquanto no outro lado valerá que $\gamma \cdot \vec{a} < 0$, a depender do ângulo entre a curva e o vetor \vec{a} ser agudo ou obtuso.

Dessa forma a quantidade $\dot{\kappa}_s(s)(\gamma(s) \cdot \vec{a})$ ou é estritamente positiva, ou é estritamente negativa em todo s exceto P, Q .

Sendo assim, a integral

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s(s)(\gamma(s) \cdot \vec{a}) ds \neq 0 \quad (4)$$

pois uma propriedade básica de integrais é que se o integrando é não-nulo, a integral é não nula.

Usando o resultado da Propriedade 1 ($\dot{N} = -\kappa_s \dot{\gamma}$), podemos encontrar uma primitiva para a integral acima. Veja que, pela Regra da Cadeia e pela linearidade da derivada, temos que:

$$\dot{\kappa}_s \gamma = (\dot{\kappa}_s \gamma) - \kappa_s \dot{\gamma} = (\dot{\kappa}_s \gamma) + \dot{N} = \frac{d}{ds}(\kappa_s \gamma + \dot{N})$$

Dado que, fixado \vec{a} ele é um vetor constante em relação ao parâmetro s , então uma primitiva para o integrando acima seria $(\kappa_s \gamma + \dot{N}) \cdot \vec{a}$ que chamaremos de $\lambda(s)$.

Como γ é uma curva fechada de comprimento ℓ ela é ℓ -periódica [1], ou seja,

$$\gamma(s + \ell) = \gamma(s),$$

para qualquer parâmetro s onde a curva esteja definida.

Diferenciando em relação a s , obtemos:

$$T(s + \ell) = T(s)$$

Rotationando os vetores acima por 90 graus antihorários, obtemos:

$$N(s + \ell) = N(s)$$

Assim, $\dot{T}(s + \ell) = \dot{T}(s)$, e pela definição de curvatura com sinal, teremos também uma curvatura periódica: $\kappa_s(s + \ell) = \kappa_s(s)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\lambda(s + \ell) &= (\kappa_s(s + \ell)\gamma(s + \ell) + \dot{N}(s + \ell)) \cdot \vec{a} \\ &= (\kappa_s(s)\gamma(s) + \dot{N}(s)) \cdot \vec{a} \\ &= \lambda(s)\end{aligned}$$

Então, calculando a integral, considerando a periodicidade de λ , teríamos:

$$\int_0^\ell \kappa_s(s)(\gamma(s) \cdot \vec{a})ds = \int_0^\ell \frac{d}{ds}\lambda(s)ds = \lambda(\ell) - \lambda(0) = 0$$

Absurdo pois em 4 concluímos que tal integral era não-nula.

3 Exercícios

Segue a Resolução dos exercícios da Seção 3.3 de [1]:

3.3.1 Mostre que a elipse Example $\gamma(s) = (p \cos s, q \sin s)$ com $p, q \neq 0$ é convexa.

Solução: Podemos definir o interior da elipse como o conjunto $int(\gamma) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} < 1 \right\}$

Sejam $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ pontos interiores da elipse.

Assim, vale que

$$\frac{x_p^2}{p^2} + \frac{y_p^2}{q^2} < 1 \text{ e } \frac{x_q^2}{p^2} + \frac{y_q^2}{q^2} < 1$$

Pela Definição de curvas convexas [1](#), precisamos provar que

$$Pt + (1 - t)Q \in \text{int}(\gamma), \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja,

$$(tx_p + (1 - t)x_q, ty_p + (1 - t)y_q) \in \text{int}(\gamma), \quad \forall t \in [0, 1]$$

Basta provar então que

$$\frac{(tx_p + (1 - t)x_q)^2}{p^2} + \frac{(ty_p + (1 - t)y_q)^2}{q^2} < 1$$

Fazendo os cálculos:

$$\begin{aligned} & \frac{(tx_p + (1 - t)x_q)^2}{p^2} + \frac{(ty_p + (1 - t)y_q)^2}{q^2} \\ &= \frac{t^2 x_p^2}{p^2} + \frac{(1 - t)^2 x_q^2}{p^2} + \frac{t^2 y_p^2}{q^2} + \frac{(1 - t)^2 y_q^2}{q^2} + 2t(1 - t) \left(\frac{x_p x_q}{p^2} + \frac{t_p y_q}{q^2} \right) \\ &= t^2 \left(\frac{x_p^2}{p^2} + \frac{y_p^2}{q^2} \right) + (1 - t)^2 \left(\frac{x_q^2}{p^2} + \frac{y_q^2}{q^2} \right) + 2t(1 - t) \left(\frac{x_p x_q}{p^2} + \frac{y_p y_q}{q^2} \right) \\ &< t^2 + (1 - t)^2 + 2t(1 - t) \left(\frac{x_p x_q}{p^2} + \frac{y_p y_q}{q^2} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Como (x_p, y_p) e (x_q, y_q) são pontos interiores, podemos usar uma parametrização por coordenadas polares da seguinte forma:

$$x_p = pc_1 \cos \theta_1$$

$$y_p = qc_1 \sin \theta_1$$

$$x_q = pc_2 \cos \theta_2$$

$$y_q = qc_2 \sin \theta_2$$

Para $c_1, c_2 \in [0, 1)$ e $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

É fácil ver que tais parametrizações satisfazem a condição de pertencer à $\text{int}(\gamma)$:

$$\frac{x_p^2}{p^2} + \frac{y_p^2}{q^2} < \frac{p^2 \cos^2 \theta_1}{p^2} + \frac{q^2 \sin^2 \theta_1}{q^2} = 1$$

O mesmo vale para (x_q, y_q) . Assim, podemos transformar o último termo de 5 em:

$$\begin{aligned} 2t(1-t) \left(\frac{x_p x_q}{p^2} + \frac{y_p y_q}{q^2} \right) &= 2t(1-t) \left(\frac{p c_1 \cos \theta_1 p c_2 \cos \theta_2}{p^2} + \frac{q c_1 \sin \theta_1 q c_2 \sin \theta_2}{q^2} \right) \\ &= 2t(1-t) c_1 c_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &< 2t(1-t) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &< 2t(1-t) \end{aligned}$$

Continuando em 5:

$$\begin{aligned} t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \left(\frac{x_p x_q}{p^2} + \frac{y_p y_q}{q^2} \right) \\ < t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \\ = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 \\ = 1 \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. ■

3.3.2 Prove que a limaçon

$$\gamma(t) = ((1 + 2 \cos t) \cos t, (1 + 2 \cos t) \sin t), t \in \mathbb{R}$$

tem apenas dois vértices.

Solução: Vamos analisar os pontos onde derivada da curvatura com sinal é nula.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-(4 \cos t + 1) \sin t, 2 \cos 2t + \cos t) \\ &= (-2 \sin 2t - \sin t, 2 \cos 2t + \cos t) \\ \gamma''(t) &= (-\cos t - 4 \cos 2t, -\sin t - 4 \sin 2t) \\ \det[\gamma', \gamma''] &= 2 \sin 2t \sin t + 8 \sin^2 2t + \sin^2 t + 4 \sin 2t \sin t \\ &\quad - (-2 \cos 2t \cos t - 8 \cos^2 2t - \cos^2 t - 4 \cos 2t \cos t) \\ &= 8(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + (\sin^2 t + \cos^2 t) + 6 \sin 2t \sin t + 6 \cos 2t \cos t \\ &= 9 + 6 \cos t (2 \sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t) \\ &= 9 + 6 \cos t \\ ||\gamma'(t)|| &= \sqrt{4 \cos t + 5} \end{aligned}$$

Assim:

$$\kappa_s(t) = \frac{9 + 6 \cos t}{(4 \cos t + 5)^{3/2}}$$

Derivando, temos:

$$\kappa'_s(t) = \frac{(4 \cos t + 5)^{3/2}[-6 \sin t] - (9 + 6 \cos t)[-6 \sin t(4 \cos t + 5)^{1/2}]}{(4 \cos t + 5)^3}$$

Como cosseno é limitado entre -1 e 1 a expressão $4 \cos t + 5$ nunca se anula, logo podemos dividir numerador e denominador acima por $(4 \cos t + 5)^{1/2}$, e obtemos:

$$\begin{aligned}\kappa'_s(t) &= \frac{-(4 \cos t + 5)6 \sin t + 6 \sin t(9 + 6 \cos t)}{(4 \cos t + 5)^{5/2}} \\ &= \frac{12 \cos t \sin t + 24 \sin t}{(4 \cos t + 5)^{5/2}} \\ &= \frac{12 \sin t(2 + \cos t)}{(4 \cos t + 5)^{5/2}}\end{aligned}$$

Como $(2 + \cos t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, a expressão acima só é zero quando $12 \sin t = 0$, ou seja, considerando apenas a "primeira volta"⁴ da curva, os pontos $t = 0$ e $t = \pi$. Logo, a curva tem apenas dois vértices.

Isso não é um contraexemplo para o teorema, pois a limaçon não é uma curva de Jordan, pois possui um auto-interseção, fazendo com que seu traço não defina apenas duas componentes conexas.

3.3.3 Prove que a curva plana γ possui um vértice em $t = t_0$ se, e somente se, a evoluta ϵ de γ tem um ponto singular em $t = t_0$.

Solução: Supondo γ *unit-speed*, usando $\epsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)}N(s)$, e diferenciando ϵ

⁴A limaçon é 2π periódica.

temos:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(s) &= \dot{\gamma}(s) + \frac{\kappa_s \dot{N}(s) - \dot{\kappa}_s(s) N(s)}{\kappa_s(s)} \\ &\text{Pela Propriedade 1, segue que:} \\ &= \dot{\gamma}(s) + \frac{-\kappa_s^2 \dot{\gamma}(s) - \dot{\kappa}_s(s) N(s)}{\kappa_s^2(s)} \\ &= \frac{\cancel{\kappa_s^2 \dot{\gamma}(s)} - \cancel{\kappa_s^2 \dot{\gamma}(s)} - \dot{\kappa}_s(s) N(s)}{\kappa_s^2(s)} \\ &= \frac{-\dot{\kappa}_s(s) N(s)}{\kappa_s^2(s)}\end{aligned}$$

Note que como $\frac{N(s)}{\kappa_s^2(s)}$ não se anula, então $\dot{\epsilon}(s)$ será nula se, e somente se $\dot{\kappa}_s(s) = 0$.

Logo, γ possui um vértice em t_0 , se, e somente se, $\dot{\epsilon}(t_0) = 0$, ou seja a evoluta ϵ de γ tem um ponto singular em t_0 .

4 Exemplo Geogebra

Neste [link](#) há um exemplo interativo mostrando uma elipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Com passos simples de cálculo é possível mostrar que a derivada da curvatura de γ é:

$$\frac{d\kappa_s}{dt} = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}$$

O arquivo contém um controle deslizante que controla a posição de um ponto A sobre a curva. Pela fórmula acima, se $b \neq a$, a derivada é nula em $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Ao fazer o controle deslizante passar por esses valores é possível ver a troca de sinal na variável dk , definina no GeoGebra como a fórmula acima. Tem-se assim, exatamente 4 vértices.

No caso $b = a$, temos uma circunferência, de curvatura constante, cuja derivada é nula em todos os pontos, ou seja, a circunferência tem infinitos vértices.

Referências

- [1] L.M.A. Pressley et al. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001. ISBN: 9781852331528. URL: www.springer.com/series/3423.
- [2] E.L. Lima. “Curso de Análise Vol. 1, 15^a ed.” Em: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019, p. 185. URL: <https://impa.br/page-livros/curso-de-analise-vol-1/>.
- [3] Wikipedia. *Jordan curve theorem* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jordan%20curve%20theorem&oldid=999461428>. [Online; accessed 08-April-2021]. 2021.