Lista 2
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
6 de março de 2021

Exercício 1 Desenhe em ambiente computacional, utilizando sistemas de computação simbólica, incluindo a animação do vetor tangente percorrendo as seguintes parametrizações da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\gamma(t) = (t^3, t^6)$. Mostre que α é curva regular e γ não é regular. Qual seria a função naturalmente candidata a ser uma reparametrização entre as duas parametrizações? Porque falha?

Solução 1 Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t^2)$ e $\gamma'(t) = (3t^2, 6t^5)$. Por conta da coordenada constante, $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, logo é regular. Já γ' é anulada para $t = 0$, logo não é regular.

Antes de definir reparametrização vamos fixar algumas coisas. Seja I_1 o domínio de α e I_2 o domínio de γ; Vamos considerar neste caso $I_1 = I_2 = \mathbb{R}$. γ é reparametrização de α se existe um **difeomorfismo** $\phi : I_2 \to I_1$ tal que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t))\ \forall t \in I_2$.

Assim a função naturalmente candidata à reparametrização de α é $\phi(t) = t^3$.

Porque falha? Pois ϕ não é um difeomorfismo, logo não é reparametrização segundo a definição dada! Sua inversa $\phi^{-1}(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável em todos os pontos do domínio, pois a derivada $\frac{1}{3}t^{-2/3}$ não está definita em $t = 0$.

Exercício 2 Mostre que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (\log(s), s)$, $s \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

Solução 2 Queremos provar que $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}_{>0})$. Tome

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ \phi(s) &= \log(s) \end{aligned}$$

Afirmo que ϕ é bijetiva. A injetividade segue da monotonicidade estrita do logaritmo[1]. Segue um rascunho da prova da sobrejetividade:

Usando a definição $\log x := \displaystyle\int_1^x \frac{1}{u} du$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo[1], temos que log é diferenciável em todo seu domínio ($\mathbb{R}_{>0}$), disso segue a continuidade.

Para todo inteiro k no contradomínio $\mathbb{R}$ conseguimos encontrar um elemento x no domínio tal que $\log(x) = k$ usando que $\log(e) = 1$ e a propriedade $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, os inteiros positivos são atingidos pelas potências positivas de e e os negativos pelas potências negativas. Pela continuidade, e pelo Teorema do Valor Intermediário[1], segue que $\forall k \in \mathbb{Z}$, vale que $\forall r \in (k, k+1)$, $\exists x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\log(x) = r$, que prova a sobrejetividade.

[1] Uma outra prova (rascunho) rápida: $\log(x) = \log(y) = b \Rightarrow e^b = x$ e $e^b = y \Rightarrow x = y$

Acima já demos o motivo de ϕ ser diferenciável, se verificarmos que ϕ^{-1} é diferenciável, teremos que ϕ é um difeomorfismo. De fato $\phi^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definida pel exponencial, não só é diferenciável como pertence a C^∞.

Sendo assim ϕ é difeomorfismo. Note que $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$.

O traço de α, $\alpha(\mathbb{R})$ é o conjunto $\{(x, y); x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R}_{>0}\}$, pois a segunda entrada exponencial é estritamente positiva.

O difeomorfismo ϕ (por ser bijetivo) leva todos os pontos $s \in \mathbb{R}_{>0}$ em $\mathbb{R}$. Sendo assim,

$$\beta(\mathbb{R}_{>0}) = \alpha(\phi(\mathbb{R}_{>0})) = \alpha(\mathbb{R})$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 3 Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

a. $\alpha(t) = (3\cosh 2t, 3\sinh 2t, 6t), \quad t \in [0, \pi]$

b. Catenária: $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir do ponto $(0, 1)$.

Solução 3 Usareмos a fórmuma $\displaystyle\int_{t_0}^{t} ||\gamma'(u)||du$ para calcular o comprimento de arco de γ entre t_0 e t.

a. Para $\alpha(t) = (3\cosh 2t, 3\sinh 2t, 6t)$ com $t \in [0, \pi]$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi ||\alpha'(u)||du \\
=&\int_0^\pi ||(3\cosh 2u, 3\sinh 2u, 6u)'||du \\
=&\int_0^\pi ||(6\sinh 2u, 6\cosh 2u, 6)||du \\
=&\int_0^\pi \left(36(\sinh^2 2u + \cosh^2 2u + 1)\right)^{1/2} du \\
=&\int_0^\pi 6(2\cosh^2 2u - 1 + 1)^{1/2} du \\
=&6\sqrt{2}\int_0^\pi \cosh 2u \ du \\
=&3\sqrt{2}\sinh 2u|_0^\pi \\
=&3\sqrt{2}(\sinh(2\pi) - \cancelto{0}{\sinh(0)}) \\
=&\frac{3}{2}\sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})
\end{aligned}$$

b. Para $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir de $(0,1)$, quer dizer a partir de $t = 1$, e iremos calcular a distância parametrizada por s.

$$\begin{aligned}
&\int_1^s ||(t, \cosh(t))'||dt \\
&= \int_1^s ||(1, \sinh(t))||dt \\
&= \int_1^s \left(1 + \sinh^2 t\right)^{1/2} dt \\
&= \int_1^s (\cosh^2 t)^{1/2} dt \\
&= \int_1^s \cosh t \; dt \\
&= \sinh t|_{t=1}^{t=s} \\
&= \sinh(s) - \cancelto{0}{\sinh(0)} \\
&= \sinh(s)
\end{aligned}$$

Exercício 4 *Mudanças de parâmetro:*

a. Demonstrar que $s(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o invervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0,1)$.

b. Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ definida por $\lambda(t) := \tan(\pi t/2)$ é uma mudança de parâmetro.

c. Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.

Solução 4 **a.** Primeiramente precisamos mostrar que $s(\mathbb{R}_{>0}) = (0,1)$, ou seja, que $s(\mathbb{R}_{>0}) \subseteq (0,1)$ e $(0,1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$

Tome $x \in s(\mathbb{R}_{>0})$, é fácil ver que $x > 1$, pois x é divisão de dois números estritamente positivos: $\dfrac{\theta^2}{\theta^2+1}, \theta \in \mathbb{R}_{>0}$, para provar a continência em $(0,1)$ basta provar que $x < 1$. Veja que, dado $\theta > 0$, temos $\dfrac{\theta^2}{\theta^2+1} = \dfrac{1}{1 + 1/\theta^2} < 1$, ou seja, $x < 1$, o que implica finalmente, que $x \in (0,1)$.

Para provar a continência inversa, tome $x \in (0,1)$, vamos provar que $x \in s(\mathbb{R}_{>0})$ exibindo um $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $s(\theta) = x$. Com um algebrismo simples[2], chega-se

[2]Não houve nenhuma divisão por zero no processo, pode confiar

em $\theta = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2} \in \mathbb{R}_{>0}$, veja então, que $s(\theta) = \dfrac{1}{1+1/\theta^2} = \dfrac{x}{1+(1-x)/x} = \dfrac{x^2}{x+1-x} \cdot \dfrac{1}{x} = x^2/x = x$

Logo $(0,1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$, e portanto $(0,1) = s(\mathbb{R}_{>0})$.

Agora resta provar que a aplicação é um difeomorfismo. A sobrejetividade já for demonstrada do fato de que $(0,1) \subseteq s(\mathbb{R}_{>0})$ que equivale à $\forall x \in (0,1), \exists \theta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $s(\theta) = x$.

Para provar a injetividade, vamos pela contrapositiva da definição. $s(\theta_1) = s(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$:

$$\begin{aligned}
&s(\theta_1) = s(\theta_2)\\
&\Rightarrow \frac{1}{1+1/\theta_1^2} = \frac{1}{1+1/\theta_2^2}\\
&\Rightarrow 1+1/\theta_1^2 = 1+1/\theta_2^2\\
&\Rightarrow 1/\theta_1^2 = 1/\theta_2^2\\
&\Rightarrow \theta_1^2 = \theta_2^2
\end{aligned}$$

Como $\theta_1, \theta_2 > 0$, então segue que $\theta_1 = \theta_2$

Conclui-se então que s é bijetiva, e sua inversa $s^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$, é dada por $s^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2}$.

Vamos provar, por fim a diferenciabilidade de s e s^{-1}.

Tome as funções:

$$\begin{aligned}
s_1 : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}_{>0}\\
x &\mapsto 1/x^2\\
s_2 : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}_{>1}\\
x &\mapsto x+1\\
s_3 : \mathbb{R}_{>1} &\to (0,1)\\
x &\mapsto 1/x
\end{aligned}$$

Veja que $s(\theta) = (s_3 \circ s_2 \circ s_1)(\theta)$ Sob seus domínios, todas as funções acima são diferenciáveis, omitirei a prova. Pela Regra da Cadeia[1], a composição anterior é diferenciável $\forall \theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Podemos calcular a derivada usando regras usuais do cálculo na fórmula principal e chegamos em $s'(\theta) = \dfrac{2\theta}{(\theta^2+1)^2}$

Pelo Corolário da Regra da Cadeia[1] que estabelece a derivada da função inversa, a função s satisfaz todas as condições que implicam a diferenciabilidade de s^{-1}: S é diferenciável no seu domínio, s^{-1} é contínua [3] em todos os pontos da imagem de s, e $s'(\theta) > 0,\ \forall \theta \in \mathbb{R}_{>0}$. Segue que s^{-1} é diferenciável de derivada $1/s'$.

Provamos então que s é **bijetiva**, **diferenciável** e **sua inversa é diferenciável**, provando então que se trata de uma mudança de variáveis difeomorfa. ■

a. Vamos usar a interpretação do termo "mudança de parâmetro"como sendo um homeomorfismo.

Temos que provar então que λ é bijetiva e contínua com inversa contínua.

(Injetividade) Tome $t_1, t_2 \in (-1, +1)$ arbitrários. Temos então,

$$\begin{aligned} &\lambda(t_1) = \lambda(t_2) \\ \Rightarrow\ &\tan(\pi t_1/2) = \tan(\pi t_2/2) \\ \Rightarrow\ &\pi t_1/2 = \pi t_2/2 \\ \Rightarrow\ &t_1 = t_2, \end{aligned} \tag{1}$$

onde 1 segue da bijetividade da tangente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Segue então que λ é injetiva em $(-1, 1)$.

(Sobrejetividade) Segue da bijetividade da tangente no mapeamento $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty)$, que $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\tan(\theta) = x$, sendo assim, é direto que $\exists\ t \in (-1, 1)$ tal que $\tan(\pi t/2) = x$.

(Continuidade) A continuidade de λ segue da continuidade da tangente. Tome $\lambda^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada por $\lambda^{-1}(x) = \dfrac{2\arctan(x)}{\pi}$.

Segue da continuidade da arco tangente que λ^{-1} é contínua em todos os reais, pois é apenas uma multiplicação por constante.

Exercício 5 Provar que a curva

$$\gamma(t) = \left(2t, \frac{2}{1+t^2}\right)$$

com $t > 0$ é regular e é uma reparametrização de

[3] O único ponto (real) de descontinuidade da expressão de $s^{-1}(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2}$ seria $x = 1$ que não está no domínio $(0, 1)$

$$\alpha(t) = \left(\frac{2\cos t}{1+\sin t}, 1+\sin t\right), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Solução 5 ...

Exercício 6 Seja $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$. Reparametrizar α pelo comprimento do arco.

Solução 6 ...

Exercício 7 Mostre que, se todas as retas tangentes a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em uma reta.

Solução 7 ...

Exercício 8 Mostre que, se todas as retas normais a uma curva regular passam por um mesmo ponto $P \in \mathbb{R}^2$, então seu traço está contido em um círculo.

Solução 8

Referências

[1] E.L. Lima. *Curso de Análise Vol. 1, 15ª ed.*, page 185. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019.