Lista 3
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
15 de março de 2021

Exercício 1 Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (c, d)$, que é diferente do vetor nulo para todo t, desde que c e d não sejam ambos nulos, pois neste caso não se trataria de um reta, mas sim de um ponto isolado. **Logo α é regular.**
  Calculando o comprimento de arco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(c, d)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 + d^2}du \\
&(t - t_0)\sqrt{c^2 + d^2}
\end{aligned}
$$

  Para a curvatura, vamos reparametrizar α por $\mathcal{L}(t)$ e calcular $\kappa(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ após a reparametrização.
  Para facilitar as contas, façamos $t_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) &= (a + ct/\sqrt{c^2 + d^2}, b + dt/\sqrt{c^2 + d^2}) \\
\alpha'(s) &= (c/\sqrt{c^2 + d^2}, d/\sqrt{c^2 + d^2}) \\
\alpha''(s) &= (0, 0) \Rightarrow \\
\kappa(s) &= \det(\alpha', \alpha'') = 0
\end{aligned}
$$

- $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:
  $\alpha'(t) = (1, 4t^3) \neq 0$, pois a primeira componente é constante não-nula. **Logo a curva é regular.**
  Calculando o comprimeiro de arco:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(1, 4u^3)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} \sqrt{16u^6 + 1}du
\end{aligned}
$$

Para a curvatura vamos usar a Proposição 2.2.1 de [1], que nos dá uma fórmula para curvatura de uma curva regular qualquer.

No nosso caso, a curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{||\alpha'(s)||^3} \\ &= \frac{\det[(1, 4s^3); (0, 12s^2)]}{(1 + 16s^6)^{3/2}} \\ &= \frac{12s^2}{(1 + 16s^6)^{3/2}}\end{aligned}$$

- (círculos) $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(s/r), b + r \cdot \sin(s/r)), s \in \mathbb{R}, r > 0;$

  Verificando regularidade:

  $\alpha'(s) = (-r \cdot \sin(s/r) \cdot 1/r, r \cdot \cos(s/r) \cdot 1/r)$
  $= (-\sin(s/r), \cos(s/r))$

  Tal velocidade será sempre diferente do vetor nulo, pois os pontos na qual a primeira coorderada zera pertence ao conjunto $A = \{rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, os múltiplos de 0 e π radianos do círculo trigonométrico (ajustado por r);

  Já os pontos que a segunda componente zera pertencem à $B = \{r\pi/2+rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

  Se $s \in A$, $\alpha(s) = (0, 1)$ para k par e $\alpha(s) = (0, -1)$ para k ímpar.

  Se $s \in B$, $\alpha(s) = (1, 0)$ para k par e $\alpha(s) = (-1, 0)$ para k ímpar.

  Logo o círculo é regular

  Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\ &= \int_{t_0}^{t} ||(-\sin(u/r), \cos(u/r))||du \\ &= \int_{t_0}^{t} (\sin^2(u/r) + \cos^2(u/r))^{1/2}du \\ &= \int_{t_0}^{t} du \\ &= t - t_0\end{aligned}$$

  Fazendo $t_0 = 0$ a fórmula original da curva já é a reparametrização por comprimento de arco, pois $\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = \alpha(t)$.

  Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \\
&= \det\left[(-\sin(s/r), \cos(s/r)); \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[\sin^2(s/r) + \cos^2(s/r)\right] \\
&= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

- (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$;
  Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-\sin(t)(2\cos(t) - 1) - \cos(t) \cdot 2\sin(t), \cos(t)(2\cos(t) - 1) - \sin(t) \cdot 2\sin(t)) \\
&= (-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t)) \\
&= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))
\end{aligned}$$

Igualando a primeira componente à zero e resolvendo para t. temos:

$$\begin{aligned}
&2\sin(2t) = \sin(t) \\
&\Rightarrow 4\sin(t)\cos(t) = \sin(t) \\
&\Rightarrow \sin(t) = 0 \text{ ou } 4\cos(t) = 1 \\
&\Rightarrow t = k\pi \text{ ou } t = 2k\pi + \arccos(1/4) \text{ ou } t = 2k\pi - \arccos(1/4)
\end{aligned}$$

No caso $t = k\pi$, a segunda componente será:

$$2\cos(2k\pi) - \cos(k\pi) = 2 - 1 = 1 \text{ para k par e}$$

$$= 2 - (-1) = 3 \text{ para k ímpar}$$

No caso $t = 2k\pi + \arccos(1/4)$, por Pitágoras[1] $\sin(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, assim, a segunda componente será:

[1] ou Relação Fundamental da Trigonometria, o que preferir.

$$\begin{aligned}
&2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t) \\
&= 2\left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16}\right) - \frac{1}{4} \\
&= 2\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \\
&= -2
\end{aligned}$$

No último caso $t = 2k\pi - \arccos(1/4)$, teremos $\sin(t) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ por simetria no círculo trigonométrico. Entretando o cálculo da segundo componente não muda, pois o único lugar que usa o seno, usa-o quadrático.

Vemos então que os pontos que zeram a primeira coordenada não zeram a segunda.

Resta verificar se os pontos que zeram a segunda componente também não zeram a segunda, se isso for provado, teremos uma curva regular. Como os cálculos são um pouco complicados, provarei a regularidade de outra forma, mas não apagarei os passos acima pois deram muito trabalho.

Basta ver a norma da velocidade:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= ||(-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))|| \\
&= \sqrt{4\sin^2(2t) + sin^2(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 4\cos(2t)\cos(t)} \\
&= \sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t))) + 1 - 4(\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} \\
&= \sqrt{4 + 1 - 4\cos(t)(2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t))} \\
&= \sqrt{5 - 4\cos(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\
&= \sqrt{5 - 4\cos(t)}
\end{aligned}$$

Como o cosseno varia entre -1 e 1, $||\alpha'(t)||$ vai varia entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{9}$, sendo assim estritamente positiva, levando-nos a colcluir, pela definição de norma, que $\alpha'(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.**Logo a curva é regular.**

O comprimento de arco é:

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{5 - 4\cos(u)}du$$

A curvatura será:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{\det[(-2\sin(2t)+\sin(t), 2\cos(2t)-\cos(t)); (-4\cos(2t)+\cos(t), -4\sin(2t)+\sin(t))]}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}} \cdot [8\sin^2(2t) - 2\sin(2t)\sin(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + \sin^2(t) \\
&\qquad + 8\cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\cos(t) + \cos^2(t)] \\
&= \frac{1}{(5-4\cos(t))^{3/2}}[8+1-6\cos(t)(2\sin^2(t)+\cos(2t))] \\
&= \frac{9-6\cos(t)}{(5-4\cos(t))^{3/2}}
\end{aligned}$$

- (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$
  Verificando regularidade, temos $\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ por conta da primeira componente constante.
  O comprimeiro de arco será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||(1, \sinh(u))|| du \\
&= \int_{t_0}^{t} (1+\sinh^2(u)) du
\end{aligned}$$

Exercício 2 Considere a elipse $\beta(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenhaos valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução 2 É fácil ver que α é regular, por argumentos que já usamos anteriormente sobre pontos onde seno e cosseno zeram. Sendo assim, a curva admite reparametrização por comprimento de arco, fazendo o vetor tangente ter norma 1. Como achei muito difícil calcular a integral da parametrização, usarei o vetor $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$ que é velocidade unitária, e assim, pela definição de curvatura de [1] incompleto por que estou perdido

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||(a\cos(u), b\sin(u))'||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||(-a\sin(u), b\cos(u))||du \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(a^2\sin(u) + b^2\cos^2(u)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Referências

[1] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.