Lista 4
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
22 de março de 2021

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$
Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$ que é diferente do vetor nulo, para todo t real por conta da componente central constante igual a 2. Logo α é 2-regular.

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1, 2t, 3t^2)\\ \alpha''(t) &= (0, 2, 6t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

logo é 2-regular

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

Solução 3 Encontrando a função comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du\\ &= \int_{t_0}^{t} ||e^u(-\sin u, \cos u, 1)||du\\ &= \int_{t_0}^{t} e^u(\sin^2 u + \cos^2 u + 1)^{1/2}du\\ &= \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} e^u du\\ &= \sqrt{2}(e^t - e^{t_0})\end{aligned}$$

Tomando os devidos cuidados com os domínios e imagens, podemos inverter a função comprimeiro de arco, fixando gerando $\mathcal{L}^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)$

Assim, tomando $s_t = \frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}$ a reparametrização por comprimeiro de arco será:

$$\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = s_t\left(\cos\left(s_t\right), \sin\left(s_t\right), 1\right),$$

Onde está definida para valores de t na qual $\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} > 0 \Rightarrow t > -e^{t_0}\sqrt{2}$.