Lista 4
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
26 de março de 2021

Exercício 1 Verifique se as seguintes curvas são 2-regulares:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

Usaremos a definição de [1], para curvas 2-regulares, que diz que a curva precisa ser regular e com curvatura estritamente positiva.

Veja que $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ que é diferente do vetor nulo, para todo t real por conta da primeira componente constante igual a 1. Logo α é regular. Pelo item 7, a curvatura é $\kappa_\alpha(t) = 2\sqrt{\dfrac{1+9t^2+9t^4}{(1+4t^2+9t^4)^3}}$, que só seria nula no caso $1+9t^2+9t^4 = 0$ o que não ocorre, dado que $(9t^2+9t^4) \geq 0$ e $1 > 0$. Logo α é 2-regular.

(b) $\alpha(t) = (t, t^2+2, t^3+t), t \in \mathbb{R}$

Temos $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2+1)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$, a velocidade é não-nula pelo termo constante o que faz α ser regular. Usaremos a aceleração no cálculo da curvatura:

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} \\
&= \frac{||(0,2,6t) \times (1, 2t, 3t^2+1)||}{||(1,2t,3t^2+1)||^3} \\
&= \frac{||(2-6t^2, 6t, -2)||}{(1+4t^2+(3t^2+1)^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Para evitar contas, dado que queremos analisar se a curvatura é nula ou não, vamos olhar somente o numerador:

$$\begin{aligned}
||(2-6t^2, 6t, -2)|| &= \sqrt{(2-6t^2)^2+36t^2+4} \\
&= \sqrt{4-24t^2+36t^4+36t^2+4} \\
&= \sqrt{8+12t^2+36t^4} \\
&\geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{pois } (12t^2+36t^4) \geq 0 \text{ e } 8 > 0
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que α é 2-regular.

Exercício 2 Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1+\cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)), t \in \mathbb{R}$, é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro $C = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-1)^2+y^2 = 1$ e da esfera $S = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 4$. Desenhe a curva α, o cilindro C e a esfera S em ambiente computacional

Solução 2 A duas primeiras coordenadas da velocidade, a menos de sinal, são $\sin(t)$ e $\cos(t)$ que já foi provado no início da Lista 3 que não serão ao mesmo tempo. A terceira componente é, à menos de constantes $\cos(t/2)$. É fácil ver que ela não zera quando $\cos(t) = 0$; O único problema seria com ângulos $t = \pi + 2k\pi$, onde $\sin(t) = \cos(t/2) = 0$, mas neste caso a componente $\cos(t) \neq 0$. Podemos então assegurar que as componentes não se anulam ao memso tempo, comprovando a regularidade da curva.

Na Figura 1, segue uma captura do conteúdo do arquivo L4_ex2.ggb. Como podemos ver, de fato o traço da curva está contido na interseção das duas superfícies, o que termina nossa demonstração.

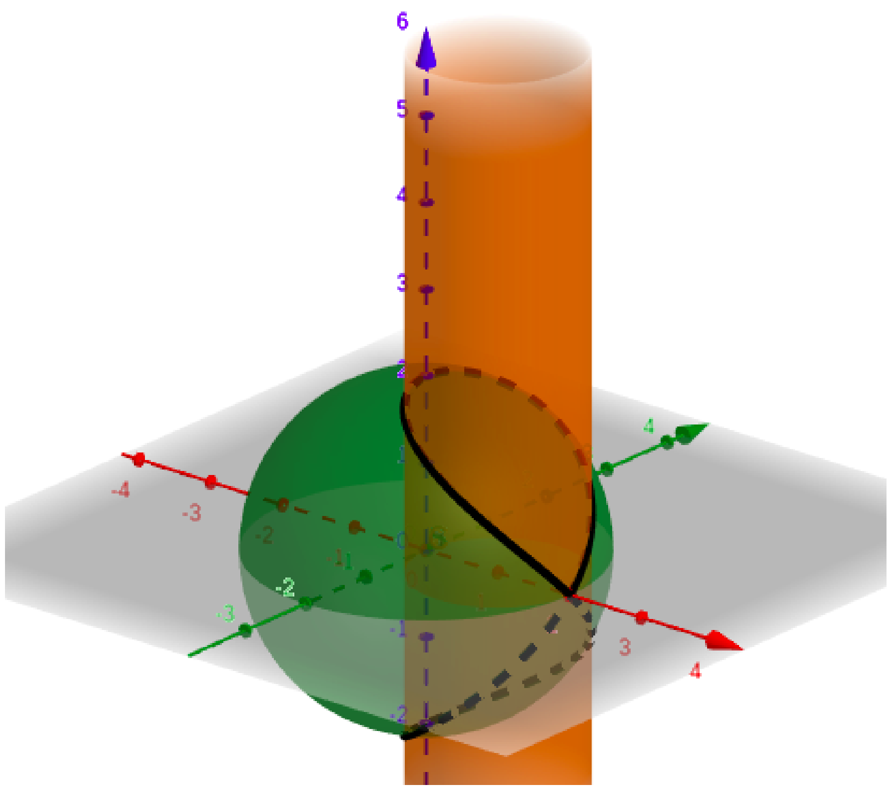

Figura 1: Interseção de cilindro e esfera

Brindadeiras a parte, vamos dar a prova formal de que o traço está na interseção. O cilindro C é o lugar geométrico do $\mathbb{R}^3$ dos pontos equidistantes (distância $= 1$) do eixo central, que, no caso, é dado pela reta que passa por $(1, 0, 0)$ paralela ao eixo z.

A esfera S é o lugar geométrico do espaço dos pontos que distam 2 unidades da origem $O = (0, 0, 0)$.

Para provar provar que $\alpha(\mathbb{R}) \subset C \cap S$, basta provar que

$$||\alpha(t) - (1, 0, 0)||_* = 1, \text{ e}$$
$$||\alpha(t) - O|| = 2 \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $||.||_*$ é um operador de norma que leva em conta somente as duas primeiras componentes dados que estamos calculando distância à uma reta paralela ao eixo z. Fazendo os cálculos, temos então:

$$\begin{aligned}
||\alpha(t) - (1,0,0)||_* &= ||(1+\cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2)) - (1,0,0)||_* \\
&= ||(\cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))||_* \\
&= \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \\
&= \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

Provando então que o traço de α pertence a C.

$$\begin{aligned}
||\alpha(t) - O|| &= ||(1+\cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))|| \\
&= \sqrt{1 + 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4\sin^2(t/2)} \\
&= \sqrt{2 + 2\cos(t) + 4 \cdot \frac{1-\cos(t)}{2}} \\
&= \sqrt{2 + \cancel{2\cos(t)} + 2 - \cancel{2\cos(t)}} \\
&= \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 3 Obtenha uma reparametrização por comprimento de arco da curva

$$\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

Solução 3 Encontrando a função comprimento de arco:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} ||e^u(-\sin u, \cos u, 1)||du \\
&= \int_{t_0}^{t} e^u(\sin^2 u + \cos^2 u + 1)^{1/2}du \\
&= \sqrt{2}\int_{t_0}^{t} e^u du \\
&= \sqrt{2}(e^t - e^{t_0})
\end{aligned}$$

Tomando os devidos cuidados com os domínios e imagens, podemos inverter a função comprimeiro de arco, fixando gerando $\mathcal{L}^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}\right)$

Assim, tomando $s_t = \frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0}$ a reparametrização por comprimeiro de arco será:

$$\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = s_t\left(\cos\left(s_t\right), \sin\left(s_t\right), 1\right),$$

Onde está definida para valores de t na qual $\frac{t}{\sqrt{2}} + e^{t_0} > 0 \Rightarrow t > -e^{t_0}\sqrt{2}$.

Exercício 4 Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $||\alpha'(t)||$ é constante se, e só se,$\forall t \in I$, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$. Em particular, mostre que $||\alpha'(t)||$ é constante para a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$.

Solução 4 Como a curva é regular $||\alpha'(t)|| > 0$, $\forall t \in I$. Dada uma constante $c \in \mathbb{R}_{>0}$, temos então:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| = c \Leftrightarrow ||\alpha'(t)||^2 &= c^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle\alpha', \alpha'\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha', \alpha''\rangle + \langle\alpha'', \alpha'\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\langle\alpha', \alpha''\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha', \alpha''\rangle = 0
\end{aligned}$$

Logo $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Para o caso particular da hélice, temos:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= ||(a\cos(t), a\sin(t), bt)'|| \\
&= ||(-a\sin(t), a\cos(t), b)|| \\
&= \sqrt{a^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + b^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2},
\end{aligned}$$

que é constante, pois a e b são arbitrários, mas fixos.

Exercício 5 Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação dotriedro de Frenet de cada curva

(a) $\alpha(t) = (4\cos(t), 5 - 5\sin(t), -3\cos(t)), t \in \mathbb{R}$
A Figura 2 ilustra uma captura do arquivo disponível no GitHub. Foi incluído na construção, uma parâmetro m que expande o tamanho dos vetores para facilitar a visualização. Tal arquivo também faz a reparametrização por compromentos de arco via CAS.

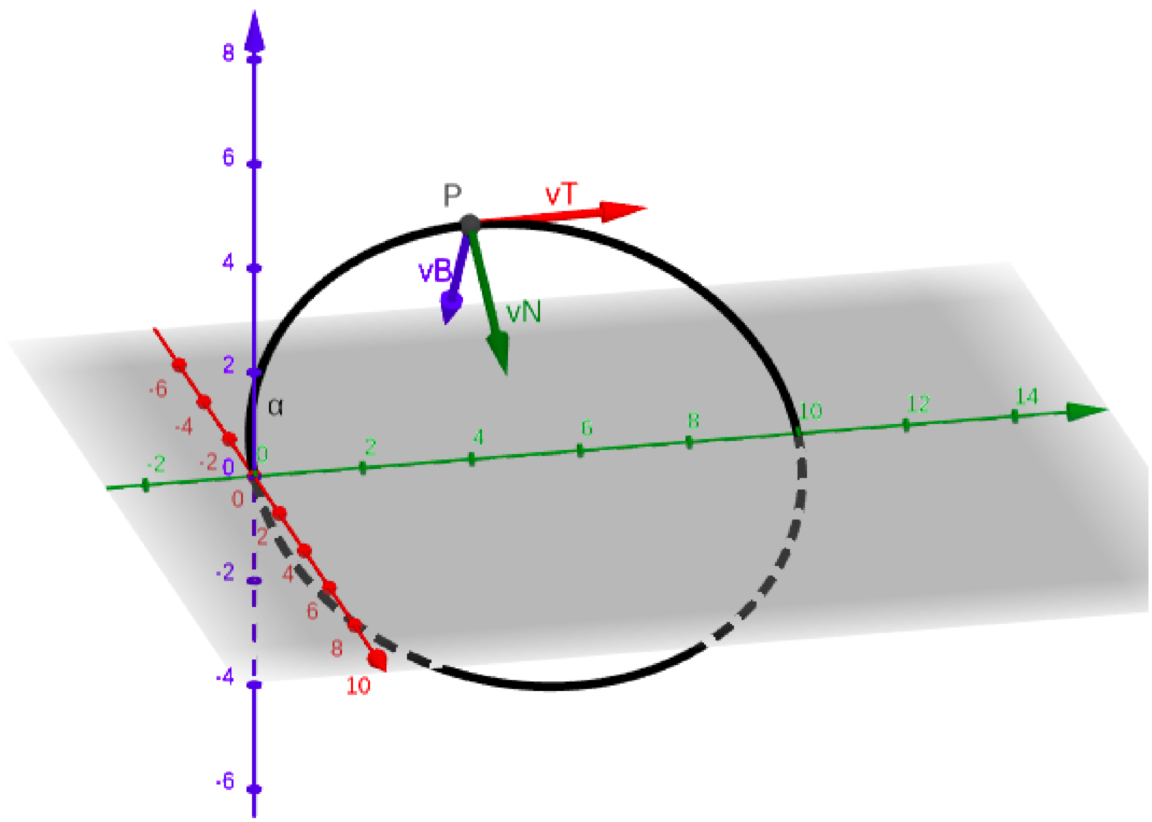

Figura 2: Triedro de Frenet expandido

(b) $(1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$
Na Figura 3, vemos uma captura do arquivo disponível aqui. Que nada mais é do que a mesma construção do item anterior, alterando apenas a equação da curva.

Exercício 6 Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular, a qual, não é, necessariamente, parametrizada por comprimento de arco. Prove, então, que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}$$

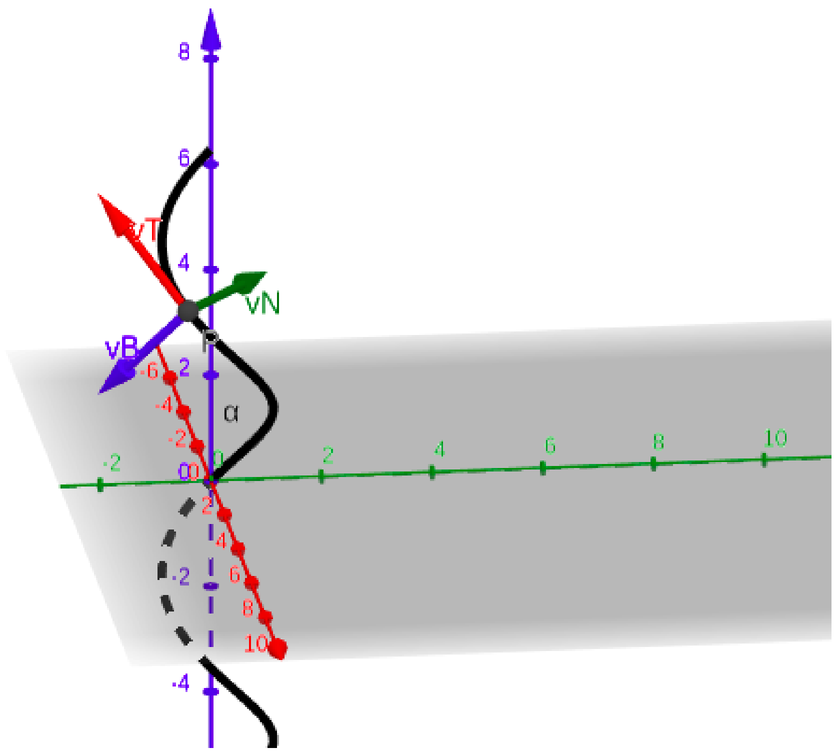

Figura 3: Triedro de Frenet expandido

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$

Solução 6 Para a curvatura, seguirei uma demonstração similar a do Teorema 154 desta referencia[1] Se α é regular, então admite reparametrização por comprimento de arco. Seja então, $\Phi : I \to I_0 \in \mathbb{R}$, definida pelo comprimento de arco $\Phi(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du$, e considere sua inversa $\Phi^{-1} : I_0 \to I$. Dado $t \in I$, e $s \in I_0$ tal que $\Phi(t) = s$, podemos dezer pela bijetividade provada em aula, que $\Phi^{-1}(s) = t$. Por simplificação da escrita, denotaremos Φ^{-1} por h.

Tomemos a curva *unit-speed*:

$$\beta : I_0 \to \mathbb{R}^3$$
$$\beta(s) = \alpha(h(s))$$

[1] https://ksuweb.kennesaw.edu/~plaval/math2203/curvature.pdf

Assim, $\alpha(t)$ pode ser escrito como $\alpha(h(\Phi(t))) = \beta(\Phi(t))$. Por simplicidade de notação, vamos usar simplesmente $\alpha(t) = \beta(s)$. A curvatura de α em t será então a curvatura de β em $s = \Phi(t)$, e como β é *unit-speed*, temos:

$$\kappa_\beta(s) = ||\frac{d}{ds}T_\beta(s)||,$$

Onde $T_\beta(s)$ é o vetor tangente de β em relação a s.

Derivando T_β em relação a t pela regra da cadeia, temos, e pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{dT_\beta(s)}{dt} = \frac{dT_\beta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dT_\beta}{ds}||\alpha'(t)||$$

,

Com isso, isolando dT_β/ds temos uma nova expressão para a curvatura:

$$\kappa_\beta(s) = \left|\left|\frac{dT_\beta/dt}{||\alpha'(t)||}\right|\right| = \frac{||T'_\beta||}{||\alpha'(t)||} \tag{1}$$

Não irei demonstrar aqui, mas é possível escrever $T_\beta(s)$ como $\dfrac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$. O que faremos agora é derivar α' e α'' e escrevê-los en função de T_β e T'_β para demonstrar a fórmula geral da curvatura. Usaremos tambpem que $||\alpha'(t)|| = \dfrac{ds}{dt}$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\beta||\alpha'(t)|| = \frac{ds}{dt}T_\beta \\ \alpha''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}T_\beta\right) = \frac{d^2s}{dt^2}T_\beta + \frac{ds}{dt}T'_\beta \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \frac{ds}{dt}T_\beta \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}T_\beta + \frac{ds}{dt}T'_\beta\right) \\ &= \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}(T_\beta \times T_\beta) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (T_\beta \times T'_\beta) \end{aligned}$$

Uma propriedade de produto vetorial diz que a operação tomada em vetores paralelos é nula, logo $T_\beta \times T_\beta = 0$, e teremos:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (T_\beta \times T'_\beta) \tag{2}$$

Tomando a norma, temos:

$$\begin{aligned} ||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|| &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ||T_\beta \times T'_\beta|| \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ||T_\beta|| \cdot ||T'_\beta|| \sin\theta, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores T_β e T'_β. Mas pelo exercício 4, como β é *unit-speed*, os vetores são ortogonais, logo, $\sin\theta = 1$. Além disso, $||T_\beta|| = 1$, o que nos dá:

$$\begin{aligned} ||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|| &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ||T'_\beta|| \\ &= ||\alpha'(t)||^2 ||T'_\beta|| \end{aligned}$$

Dessa forma, $||T'_\beta|| = \dfrac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^2}$, mas de 1, temos:

$$\kappa_\beta = \frac{||T'_\beta||}{||\alpha'(t)||}, \tag{3}$$

O que nos leva finalmente à conclusão:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}$$

Exercício 7 Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha(t) &= \frac{||\alpha''(t) \times \alpha'(t)||}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{||(0,2,6t) \times (1,2t,3t^2)||}{||(1,2t,3t^2)||^3}\\ &= \frac{||(-6t^2, 6t, -2)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} = \frac{2||(-3t^2,3t,-1)||}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}\\ &= \frac{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}\\ &= 2\sqrt{\frac{1+9t^2+9t^4}{(1+4t^2+9t^4)^3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha(t) &= \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}\\ &= \frac{\langle(6t^2, -6t, 2), (0,0,6)\rangle}{||(6t^2,-6t,2)||^2}\\ &= \frac{12}{36t^4+36t^2+4}\\ &= \frac{3}{9t^4+9t^2+1}\end{aligned}$$

(b) $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$

Como $||\beta'(t)|| = ||(-\sin t, \cos t, 1)|| = \sqrt{2}$ a curva β não é unit-speed, podemos reparametrizar por comprimento de arco, trnasformá-la em unit-speed e calcular a curvatura e torção a partir daí.

É fácil ver que fazendo $t_0 = 0$, $\mathcal{L}_\beta(t) = \sqrt{2}t$, logo $\mathcal{L}_\beta^{-1}(t) = t/\sqrt{2}$, e a cruva reparametrizada será:

$$\beta(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(t) &= ||\beta''(t)||\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}||(-\sin(t/\sqrt{2}), \cos(t/\sqrt{2}), 1/\sqrt{2})'||\\ &= \frac{1}{2}||(-\cos(t/\sqrt{2}), -\sin(t/\sqrt{2}), 0)||\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(t/\sqrt{2}) + \cos^2(t/\sqrt{2})}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Para a torção, vamos determinar os vetores tangente (T), normal (N) e binormal (B), do Triedro de Frenet, e calcular torção como a $\tau(s)$ tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(s/\sqrt{2}), \cos(s/\sqrt{2}), 1) \\ N(s) &= (-\cos(s/\sqrt{2}), -\sin(s/\sqrt{2}), 0) \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1) \end{aligned}$$

Exercício 8 Seja $\alpha(t)$ uma curva 2-regular:

(a) Verifique que $\alpha''(t)$ é paralelo ao plano osculador de α em t.

Utilizando as mesmas notações e definições da questão 6, foi concluído que:

$$\alpha''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T_\beta + \frac{ds}{dt}T'_\beta \tag{4}$$

O plano osculador de α em t é o plano gerado pelos vetores $T_\beta(s)$ e $N_\beta(s) = \dfrac{T'_\beta}{||T'_\beta||}$.

Além disso, temos que $\dfrac{ds}{dt} = ||\alpha'(t)||$ e $\dfrac{d^2s}{dt} = \dfrac{d}{dt}||\alpha'(t)||$. Podemos entender a norma da velocidade com uma função $I \to \mathbb{R}^+$, assim sua derivada em relação a t será uma função escalar.

Dessa forma, pela expressão 4, α'' é uma combinação linar dos vetores T_β e N_β, implicando que pertence ao plano osculador, que é gerado por esses dois vetores.

(b) Prove que o plano osculador de α em t_0 é dado pelos pontos P de $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle P - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\rangle = 0$

De 2, temos:

$$\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) = \left(\frac{ds}{dt}(t_0)\right)^2 (T_\beta(s_0) \times T'_\beta(s_0)),$$

onde $\Phi(t_0) = s_0$. Assim o produto vetorial acima é dedo por

$$\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) = ||\alpha'(t_0)||^2 (T_\beta(s_0) \times T'_\beta(s_0)) \tag{5}$$

Como T_β e T'_β são ortogonais, juntando com o vetor $T_\beta \times T'_\beta$, temos uma tripla ortogonal, onde $T_\beta \times T'_\beta$ é múltiplo do vetor binormal. Como o plano osculador de α em t_0 é dado pelo plano que passa em $\alpha(t_0)$ cujo vetor normal é o binormal, todos os vetores $P-\alpha(t_0)$ desse plano serão ortogonais ao binormal, que é paralelo à $\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)$ pela expressão 5. Portanto, $(P-\alpha(t_0))\perp(\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0))$, ou seja,

$$\langle P-\alpha(t_0), \alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)\rangle = 0$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 9 Desenhe em ambiente computacional as curvas e seus planos normal e osculador em função do parâmetro:

(a) $\alpha(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3), t\in\mathbb{R}$

(b) $(a\cos(t)+b\sin(t), a\sin(t)+b\cos(t), c\sin(2t)), t\in\mathbb{R}$

Solução 9 O arquivo do item (a) se encontra neste link, e neste outro o arquivo do item (b)

Exercício 10 Verifique que o vetor binormal de uma hélice circular forma um ângulo constante como eixo do cilindro sobre o qual está a hélice. Ilustre o fato em ambiente computacional.

Solução 10 Dada a hélice circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ com um cálulo similar ao que foi feito na questão 7, que está detalhado em [1], obtemos a seguinte reparametrização por comprimento de arco, considerando $\ell = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$\alpha(s) = (a\cos(s/\ell), a\sin(s/\ell), bs/\ell)$$

Assim a curva fica *unit-speed* e teremos:

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\ell}(-a\sin(s/\ell), a\cos(s/\ell), b)$$

‘ O vetor normal $N(s)$ é o unitário da aceleração.

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \frac{1}{\ell^2}(-a\cos(s/\ell), -a\sin(s/\ell), 0)\\
||\alpha''(s)|| &= \frac{1}{\ell^2}\sqrt{a^2} = \frac{|a|}{\ell^2}\\
N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||} = -\frac{a}{|a|}(\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0)
\end{aligned}$$

Assim, o binormal será:

$$\begin{aligned}
B(s) &= T(s) \times N(s) \\
&= -\frac{a}{\ell|a|}(-a\sin(s/\ell), a\cos(s/\ell), b) \times (\cos(s/\ell), \sin(s/\ell), 0) \\
&= -\frac{a}{\ell|a|}(-b\sin(s/\ell), b\cos(s/\ell), -a)
\end{aligned}$$

Tal hélice está no cilindro de eixo z, queremos provar que o ângulo entre o binormal e tals eixo é constante. Tomemos o vetor $\vec{v} = (0, 0, 1)$, vamos então calcular o cosseno entre B e v e mostrar que é constante.

$$\begin{aligned}
\cos(B(s), \vec{v}) &= \frac{\langle B(s), \vec{v}\rangle}{||B(s)|| \cdot ||\vec{v}||} \\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{||B(s)} \\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a| \cdot ||(-b\sin(s/\ell), b\cos(s/\ell), -a)||} \\
&= \frac{a^2/\ell|a|}{a/\ell|a| \cdot \sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{a}{\ell},
\end{aligned}$$

que é contante, como queríamos demonstrar.

O arquivo L4_ex11.ggb ilustra tal fato.

Exercício 11 Prove que a aplicação

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5}\cos(s)\right), s \in \mathbb{R}$$

é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cujo traço é um círculo.Determine, então, seus centro e raio

Solução 11 A velocidade da curva é:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right),$$

que é formada essencialmente por senos e cossenos, que já argumentamos anteriormente que não se zeram ao mesmo tempo. Logo a curva é regular.

A norma da velocidade é:

$$\begin{aligned}
||\alpha'(s)|| &= \left|\left|\left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right)\right|\right| \\
&= \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2(s) + \cos^2(s) + \frac{9}{25}\sin^2(s)} \\
&= \sqrt{\sin^2(s) + \cos^2(s)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

O que mostra que a curva está parametrizada por comprimento de arco.

Usando a Proposição 2.3.3 de [2], se provarmos que a torção é identicamente nula, a curva será plana. Bastará então provar que é um lugar geométrico de pontos equidistantes de um centro.

Utilizando o Geogebra CAS nos cálculos, chegamos à:

$$\begin{aligned}
T(s) &= \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right) \\
N(s) &= \left(-\frac{4}{5}\cos(s), \sin(s), \frac{3}{5}\cos(s)\right) \\
B(s) &= T(s) \times N(s) \\
&= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}$$

A torção $\tau(s)$ é tal que $B'(s) = \tau(s)N(s)$, mas como $B(s)$ é constante, sua derivada é nula, implicando então $\tau(s) \equiv 0$.

Pela fórmula da curva, e pelos cálculos que fizemos, podemos desconfiar que $(0, 1, 0)$ é o centro do suposto círculo, pois removendo o termo 1, da expressão inicial, o calculo de distância seria análogo a norma da velocidade:

$$\begin{aligned}
||\alpha(t) - (0,1,0)|| &= \left|\left|\left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s) - 1, -\frac{3}{5}\cos(s)\right)\right|\right| \\
&= \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2(s) + \sin^2(s) + \frac{9}{25}\cos^2(s)} \\
&= \sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração de que o traço da curva é um círculo de centro $(0, 1, 0)$ e raio $||\alpha(t) - (0, 1, 0)|| = 1$.

Referências

[1] Ronaldo Freire Lima. *INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[2] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.