

Lista 3

Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

Exercício 1 Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt), t \in \mathbb{R}$;

Verificando regularidade:

$\alpha'(t) = (c, d)$, que é diferente do vetor nulo para todo t , desde que c e d não sejam ambos nulos, pois neste caso não se trataria de uma reta, mas sim de um ponto isolado. **Logo α é regular.**

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(c, d)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{c^2 + d^2} du \\ &= (t - t_0)\sqrt{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Para a curvatura, vamos reparametrizar α por $\mathcal{L}(t)$ e calcular $\kappa(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ após a reparametrização.

Para facilitar as contas, façamos $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) &= (a + ct/\sqrt{c^2 + d^2}, b + dt/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha'(s) &= (c/\sqrt{c^2 + d^2}, d/\sqrt{c^2 + d^2}) \\ \alpha''(s) &= (0, 0) \Rightarrow \\ \kappa(s) &= \det(\alpha', \alpha'') = 0\end{aligned}$$

- $\alpha(t) = (t, t^4), t \in \mathbb{R}$;

Verificando regularidade:

$\alpha'(t) = (1, 4t^3) \neq 0$, pois a primeira componente é constante não-nula. **Logo a curva é regular.**

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(1, 4u^3)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{16u^6 + 1} du\end{aligned}$$

Lista 3

Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

Para a curvatura vamos usar a Proposição 2.2.1 de [1], que nos dá uma fórmula para curvatura de uma curva regular qualquer¹.

No nosso caso, a curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s))}{\|\alpha'(s)\|^3} \\ &= \frac{\det[(1, 4s^3); (0, 12s^2)]}{(1 + 16s^6)^{3/2}} \\ &= \frac{12s^2}{(1 + 16s^6)^{3/2}}\end{aligned}$$

- (círculos) $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(s/r), b + r \cdot \sin(s/r)), s \in \mathbb{R}, r > 0$;

Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= (-r \cdot \sin(s/r) \cdot 1/r, r \cdot \cos(s/r) \cdot 1/r) \\ &= (-\sin(s/r), \cos(s/r))\end{aligned}$$

Tal velocidade será sempre diferente do vetor nulo, pois os pontos na qual a primeira coordenada zero pertence ao conjunto $A = \{rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja, os múltiplos de 0 e π radianos do círculo trigonométrico (ajustado por r);

Já os pontos que a segunda componente zero pertencem à $B = \{r\pi/2 + rk\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Se $s \in A$, $\alpha(s) = (0, 1)$ para k par e $\alpha(s) = (0, -1)$ para k ímpar.

Se $s \in B$, $\alpha(s) = (1, 0)$ para k par e $\alpha(s) = (-1, 0)$ para k ímpar.

Logo o círculo é regular

Calculando o comprimento de arco:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_{t_0}^t \|(-\sin(u/r), \cos(u/r))\| du \\ &= \int_{t_0}^t (\sin^2(u/r) + \cos^2(u/r))^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t du \\ &= t - t_0\end{aligned}$$

Fazendo $t_0 = 0$ a fórmula original da curva já é a reparametrização por comprimento de arco, pois $\alpha(\mathcal{L}^{-1}(t)) = \alpha(t)$.

¹Na verdade a referência usa norma no produto vetorial no numerador, que no caso é equivalente ao determinante.

Calculando a curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \det(\alpha'(s), \alpha''(s)) \\ &= \det \left[(-\sin(s/r), \cos(s/r)); \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \right] \\ &= \frac{1}{r} [\sin^2(s/r) + \cos^2(s/r)] \\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

- (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2\cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1)), t \in \mathbb{R}$;

Verificando regularidade:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin(t)(2\cos(t) - 1) - \cos(t) \cdot 2\sin(t), \cos(t)(2\cos(t) - 1) - \sin(t) \cdot 2\sin(t)) \\ &= (-4\sin(t)\cos(t) + \sin(t), 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t)) \\ &= (-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\end{aligned}$$

Igualando a primeira componente à zero e resolvendo para t . temos:

$$\begin{aligned}2\sin(2t) &= \sin(t) \\ \Rightarrow 4\sin(t)\cos(t) &= \sin(t) \\ \Rightarrow \sin(t) &= 0 \text{ ou } 4\cos(t) = 1 \\ \Rightarrow t &= k\pi \text{ ou } t = 2k\pi + \arccos(1/4) \text{ ou } t = 2k\pi - \arccos(1/4)\end{aligned}$$

No caso $t = k\pi$, a segunda componente será:

$$2\cos(2k\pi) - \cos(k\pi) = 2 - 1 = 1 \text{ para } k \text{ par e}$$

$$= 2 - (-1) = 3 \text{ para } k \text{ ímpar}$$

No caso $t = 2k\pi + \arccos(1/4)$, por Pitágoras² $\sin(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, assim, a segunda componente será:

²ou Relação Fundamental da Trigonometria, o que preferir.

Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

$$\begin{aligned} & 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - \cos(t) \\ &= 2\left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16}\right) - \frac{1}{4} \\ &= 2\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

No último caso $t = 2k\pi - \arccos(1/4)$, teremos $\sin(t) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ por simetria no círculo trigonométrico. Entretanto o cálculo da segundo componente não muda, pois o único lugar que usa o seno, usa-o quadrático.

Vemos então que os pontos que zeram a primeira coordenada não zeram a segunda. Resta verificar se os pontos que zeram a segunda componente também não zeram a segunda, se isso for provado, teremos uma curva regular. Como os cálculos são um pouco complicados, provarei a regularidade de outra forma, mas não apagarei os passos acima pois deram muito trabalho.

Basta ver a norma da velocidade:

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \|(-2\sin(2t) + \sin(t), 2\cos(2t) - \cos(t))\| \\ &= \sqrt{4\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 4\sin(2t)\sin(t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 4\cos(2t)\cos(t)} \\ &= \sqrt{4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 1 - 4(\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} \\ &= \sqrt{4 + 1 - 4\cos(t)(2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t))} \\ &= \sqrt{5 - 4\cos(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{5 - 4\cos(t)} \end{aligned}$$

Como o cosseno varia entre -1 e 1, $\|\alpha'(t)\|$ vai varia entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{9}$, sendo assim estritamente positiva, levando-nos a colcluir, pela definição de norma, que $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. **Logo a curva é regular.**

O comprimento de arco é:

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{5 - 4\cos(u)} du$$

Lista 3

Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

A curvatura será:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \\ &= \frac{\det[(-2 \sin(2t) + \sin(t), 2 \cos(2t) - \cos(t)); (-4 \cos(2t) + \cos(t), -4 \sin(2t) + \sin(t))]}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} \cdot [8 \sin^2(2t) - 2 \sin(2t) \sin(t) - 4 \sin(2t) \sin(t) + \sin^2(t) \\ &\quad + 8 \cos^2(2t) - 2 \cos(2t) \cos(t) - 4 \cos(2t) \cos(t) + \cos^2(t)] \\ &= \frac{1}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}} [8 + 1 - 6 \cos(t)(2 \sin^2(t) + \cos(2t))] \\ &= \frac{9 - 6 \cos(t)}{(5 - 4 \cos(t))^{3/2}}\end{aligned}$$

- (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t)), t \in \mathbb{R}$

Verificando regularidade, temos $\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ por conta da primeira componente constante.

O comprimento de arco será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_{t_0}^t \|(1, \sinh(u))\| du \\ &= \int_{t_0}^t (1 + \sinh^2(u))^{1/2} du = \\ &= \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{e^{2u} + e^{-2u} - 2e^u e^{-u}}{4}\right)^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2\right]^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t [\cosh^2(u)]^{1/2} du \\ &= \int_{t_0}^t \cosh(u) du \\ &= \sinh(t) - \sinh(t_0)\end{aligned}$$

Calculando a curvatura:

Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\det[(1, \sinh(t)); (0, \cosh(t))]}{\|(1, \sinh(t))\|^3} \\ &= \frac{\cosh(t)}{[1 + \sinh^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{\cosh(t)}{[\cosh^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(t)}\end{aligned}$$

A função acima é conhecida como $\operatorname{sech}^2(t)$ e o passo de divisão por $\cosh(t)$ que fizemos é válido por nos reais, o cosseno hiperbólico é estritamente positivo. A curvatura então está bem definida.

Exercício 2 Considere a elipse $\beta(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução 2 É fácil ver que α é regular, por argumentos que já usamos anteriormente sobre pontos onde seno e cosseno zeram. Sendo assim, a curva admite reparametrização por comprimento de arco, fazendo o vetor tangente ter norma 1. Vamos calcular a curvatura pela fórmula usada anteriormente [1].

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(t) &= \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det[(-a \sin t, b \cos t); (-a \cos t, -b \sin t)]}{\|(-a \sin t, b \cos t)\|^3} \\ &= \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}\end{aligned}$$

Como o numerador é fixo, a maximização da curvatura ocorre com a minimização do denominador e de forma análoga, a curvatura mínima ocorre quando o denominador é máximo.

Como a função $x \mapsto x^{3/2}$ é monótona não-decrescente para $x \geq 0$ e $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, basta maximizar/minimizar esta expressão, sem o expoente $3/2$.

Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

Derivando, chegamos a $(a^2 - b^2) \sin(2t)$, que se anula nos pontos do conjunto $\{k\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.

Sem perda de generalidade, consideremos $a > b$, a segunda derivada será

$$2(a^2 - b^2) \cos(2t)$$

Note que para k par, $\cos(k\pi) = 1 > 0$, nesses casos a concavidade do ponto $t = k\pi/2$ é "para baixo" indicando que tal ponto é ponto de mínimo do denominador, logo máximo da fração toda da curvatura.

Analogamente, para k ímpar $\cos(k\pi) = -1 < 0$, fazendo com que $t = k\pi/2$ sejam pontos de máximo do denominador e mínimo para a curvatura.

Se $a < b$, essas relações se invertem.

Resumindo:

- Caso 1: $a > b$
Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$
Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
- Caso 2:
Pontos de máximo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é ímpar}\}$
Pontos de mínimo de $\kappa_\beta(t)$: $\{k\pi/2; k \text{ é par}\}$

Exercício 3 Seja $I = (-a, a)$, $a > 0$ um intervalo aberto de \mathbb{R} o qual é simétrico com respeito à origem. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco.

- Mostre que $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que $\beta(s) = \alpha(-s)$, é uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco e que satisfaz $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s) \forall s \in I$ (Isto é, a curvatura de uma curva plana muda de sinal quando se inverte a sua orientação)
Regularidade: A curva β é uma função composta $\alpha \circ f$, com $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : I \rightarrow I$ dada por $f(x) = -x$. É bem fácil verificar que f é diferenciável, invertível e com inversa diferenciável, omitirei esta prova aqui.

Usando o resultado visto em aula de que uma reparametrização defeomorfa de uma curva regular é regular, concluímos que $\beta(s)$ é regular.

Para verificar que $\beta(s)$ está parametrizada por comprimento de arco, basta ver se a norma da velocidade é 1. Usaremos a Regra da Cadeia.

Lista 3 Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
16 de março de 2021

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\| &= \left\| \frac{d}{ds} \alpha(f(s)) \right\| \\ &= \|\alpha'(f(s)) \cdot f'(s)\| \\ &= \|\alpha'(f(s)) \cdot (-1)\| \\ &= |-1| \cdot \|\alpha'(f(s))\| \\ &\text{Pelo fato de } \alpha \text{ ser } \textit{unit-speed}: \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Inversão de sinal da Curvatura:

Como β é *unit-speed*, a curvatura será dada pelo determinante entre os vetores velocidade e aceleração.

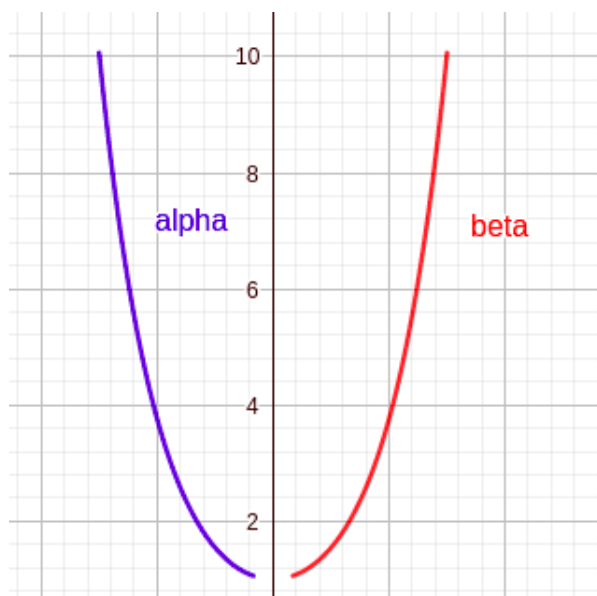
$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \det[\beta'(s), \beta''(s)] \\ &= \det[-\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \\ &= -\det[\alpha'(-s), \alpha''(-s)] \end{aligned}$$

Onde o último passo é uma propriedade de determinantes entre vetores do plano, na qual trocar o sinal do primeiro vetor inverte o sinal do determinante.

Pela definição de curvatura para curvas *unit-speed*, a expressão final é justamente igual a $-\kappa_\alpha(-s)$; Fica demonstrado então que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$.

- [Desenhe em ambiente computacional um par de parametrizações de uma curva que ilustre o fato demonstrado no item anterior.](#)

Na figura 1, segue um corte da animação disponível no [GitHub](#) da catenária restrita a um intervalo aberto, e sua reparametrização.

Figura 1: Catetária sob o intervalo $(-3,3)$

Referências

- [1] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain, K. Erdmann, A.J. Macintyre, J.F. Toland, and E. Süli. *Elementary Differential Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2001.