Lista 5
Curvas e Superfícies

Rener Oliveira
7 de maio de 2021

Exercício 1 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Mostre que: F é injetora se, e só se, a imagem da base canônica de $\mathbb{R}^2$ forma um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, se a matriz associada de F tem posto 2. (obs.: Repare que este resultado está sendo usado para o conceito de superfície regular descrito acima).

Solução 1 De forma geral, seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ um aplicação linear.

($\Rightarrow$) Suponha injetividade de F, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq y \Rightarrow Fx \neq Fy$.[1]

Queremos provar que a matriz F tem posto m ($\text{rank}(F) = m$). Usando o Teorema do Posto-Nulidade[1], temos:

$$\dim(\mathbb{R}^m) = m = \text{rank}(F) + \dim(\text{Ker}(F)),$$

onde $\text{Ker}(F) := \{x \in \mathbb{R}^m; Fx = 0\}$. Assim, basta provar que a dimensão do núcleo é 0, e teremos o resultado.

Trivialmente, se $x \in \mathbb{R}^m$ é tal que $x = 0$, então $x \in \text{Ker}(F)$. Suponha, por contradição, que $\exists x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0$ tal que $x \in \text{Ker}(F)$, assim $Fx = 0$. Mas pela injetividade, $x \neq 0 \Rightarrow Fx \neq F0 = 0$, absurdo. Logo $\text{Ker}(F) = 0$, que tem dimensão 0. Portanto,

$$\text{rank}(F) = m$$

($\Leftarrow$) Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e considere sua imagem $\{Fe_1, Fe_2, \ldots, Fe_m\}$ linearmente independente, ou seja, a equação

$$\alpha_1 Fe_1 + \alpha_2 Fe_2 + \ldots + \alpha_m Fe_m = 0$$

só possui solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Queremos provar a injetividade de F, ou seja $\forall x, y \in \mathbb{R}^m, Fx = Fy \Rightarrow x = y$.

Tome $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ vetores arbitrários de $\mathbb{R}^m$. Podemos escrever $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$. Considerando $Fx = Fy$, temos:

[1] Abusando um pouco da notação, usamos F para representar tanto a aplicação quanto à sua matriz associada

$$
\begin{aligned}
Fx = Fy &\Rightarrow F\sum_{i=1}^{m} x_i e_i = F\sum_{i=1}^{m} y_i e_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} F x_i e_i = \sum_{i=1}^{m} F y_i e_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i F e_i = \sum_{i=1}^{m} y_i F e_i \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i) F e_i = 0 \\
&\Rightarrow x_i - y_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1) \\
&\Rightarrow x_i = y_i \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}
$$

onde a passagem 1 usa o fato de $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i F e_i = 0$ só possui solução trivial fazendo $\alpha_i = x_i - y_i$. As passagens acima usam a linearidade de F e manipulações simples.

Prova-se então que F é injetiva.

Exercício 2 Mostre que o paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ é uma *superfície regular*. Desenhe o paraboloide em um ambiente gráfico juntamente com o plano tangente e um vetor normal à superfície. Faça o desenho de forma a poder variar o ponto aonde o plano tangente é exibido.

Solução 2 Dado que $z = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, podemos propor uma parametrização única para S, resolvendo $u = x + y, v = x - y$ para x e y:

$$
\begin{aligned}
\sigma : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, uv\right)
\end{aligned}
$$

Não provaremos formalmente que S satisfaz de fato a definição de superfície com a parametrização acima, vamos direto para a prova da regularidade.

Queremos provar que a matriz Jacobiana de σ tem posto 2, ou ainda, que o produto vetorial $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(q) \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(q) \neq (0, 0, 0)$ para todo $q \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (1/2, 1/2, v) \times (1/2, -1/2, u) \\
&= \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}, -1/2\right)
\end{aligned}
$$

que é sempre diferente do vetor nulo, devido à última coordenada constante.

Exercício 3 Mostre que, se $f(u,v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u,v) \in U$, aberto de $\mathbb{R}^2$, então a aplicação $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ é uma *superfície parametrizada regular*, que descreve o gráfico da função f.

Solução 3 Se f é diferenciável, as derivadas parciais f_u e f_v existem. Para provar a regularidade da superfície, provando que a Jacobiana da aplicação $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem posto 2, no caso, que as derivadas parciais de X são linearmente independentes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} &= (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v)\\ &= (-f_u, -f_v, 1)\end{aligned}$$

que é sempre diferente do vetor nulo, devido à última coordenada constante.

Exercício 4 Considere o *hiperbolóide de uma folha*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Mostre que, para todo θ, a reta

$$(x - z)\cos\theta = (1 - y)\sin\theta,\ (x + z)\sin\theta = (1 + y)\cos\theta$$

está contida em S, e que, todo ponto do hiperboloide está em alguma dessas linhas. Desenhe o hiperbolóide e as linhas em um ambiente gráfico. Deduza que a superfície pode ser coberta por uma única parametrização.

Solução 4 test4

Exercício 5 Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in I \subset \mathbb{R}$. Seja o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo O_z. Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva para que S seja o traço de uma *superfície parametrizada regular*.

Solução 5 teste5

Exercício 6 (Extra) Mostre que o cilindro circular

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

pode ser descrito por uma parametrização global, isto é, que existe um atlas composto só por uma única carta.

Referências

[1] Rahmi Jackson. Rank-Nullity Theorem. from MathWorld — A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. https://mathworld.wolfram.com/Rank-NullityTheorem.html.