Lista 7 - Curvas e Superfícies
Rener Oliveira

6.1.3 Seja $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ a 1ª Forma Fundamental de um patch $\sigma(u,v)$ de uma Superfície S. Mostre que, se p está na imagem de σ e $v, w \in T_pS$, então

$$\langle v, w\rangle = E\,du(v)du(w) + F[du(v)dv(w) + du(w)dv(v)] + G\,dv(v)dv(w)$$

Resolução: Se $v, w \in T_p(S)$ e p é tal que $p = \sigma(u^*, v^*)$ para algum ponto (u^*, v^*) no domínio, podemos escrever v e w como combinação linear das derivadas parciais de σ:

$$v = a\sigma_u + b\sigma_v$$
$$w = c\sigma_u + d\sigma_v$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle a\sigma_u + b\sigma_v, c\sigma_u + d\sigma_v\rangle \\
&= \langle a\sigma_u, c\sigma_u\rangle + \langle a\sigma_u, d\sigma_v\rangle + \langle b\sigma_v, c\sigma_u\rangle + \langle b\sigma_v, d\sigma_v\rangle \\
&= ac\langle \sigma_u, \sigma_u\rangle + ad\langle \sigma_u, \sigma_v\rangle + bc\langle \sigma_u, \sigma_v\rangle + bd\langle \sigma_v, \sigma_v\rangle \\
&= acE + (ad + bc)F + bdG
\end{aligned}$$

que é justamente o que queremos provar, mas numa notação diferente.

$$\begin{cases} du(v) = a \\ dv(v) = b \\ du(w) = c \\ dv(w) = d \end{cases}$$, por definição do Pressley

6.1.5 (i) $\Rightarrow$ (ii) $E_v = G_u = 0 \Rightarrow \sigma_{uv}$ é paralelo a vetor normal unitário N

Definimos tal N como:

$$N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

Além disso, sabemos $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$ e $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$

A hipótese propõe $E_v = G_u = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle + \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle = \langle \sigma_v, \sigma_{vu} \rangle + \langle \sigma_{vu}, \sigma_v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2} \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle = \cancel{2} \langle \sigma_v, \sigma_{vu} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle = \langle \sigma_v, \sigma_{vu} \rangle = 0$$

Como $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$, estamos dizendo nesta última linha que σ_{uv} é ortogonal a σ_u e a σ_v. Como, em superfícies regulares tais derivadas parciais primeiras são LI, $\sigma_u \times \sigma_v$ é não-nulo, é está na mesma direção de σ_{uv}. Consequentemente, σ_{uv} é paralelo à N.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se $N \parallel \sigma_{uv}$, então $E_v = G_u = 0$

Se $N \parallel \sigma_{uv}$, então $\exists\, c \in \mathbb{R}$, onde $\sigma_{uv} = cN = \frac{c}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} (\sigma_u \times \sigma_v)$

$$E_v = 2 \langle \sigma_u, \sigma_{uv} \rangle$$
$$G_u = 2 \langle \sigma_v, \sigma_{uv} \rangle$$

Propriedade

$\langle a, b \times c \rangle = \langle b, c \times a \rangle = \langle c, a \times b \rangle$

$$\frac{2c}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \langle \sigma_u, \sigma_u \times \sigma_v \rangle$$

$$= \frac{2c}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \langle \sigma_v, \underbrace{\sigma_u \times \sigma_u}_{0} \rangle$$

$$= 0$$

Analogamente $G_u \propto \langle \sigma_v, \sigma_u \times \sigma_v \rangle = \langle \sigma_u, \sigma_v \times \sigma_v \rangle = 0$ ∎

6.2.1 Queremos exibir $f: S \to U$ isometria entre $S := \{(u\cos v, u\sin v, u) \mid u>0,\ 0<v<2\pi\}$ e U aberto no plano xy qualquer.

Percebe que dado $(x,y,z) \in S$, $x^2+y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2 = z^2$

Vamos propor então, $f^{-1}: U \to S$, com $U = \text{Plano } xy \mid \text{Semi-reta}_{\substack{y=0\\x\geq 0}}$
$$(x,y,0) \longmapsto (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$$

Dessa forma $f: S \to U$ é dada por $f(x,y,z) = (x,y,0)$, nossa primeira proposta de isometria.

Se provarmos que $f\circ\sigma$ e σ tem a mesma forma fundamental, fica provada a isometria pelo Colorário 6.2.3 do Pressley.

Formas fundamentais σ:

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u\rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (\cos v, \sin v, 1)\rangle$$
$$= \cos^2 v + \sin^2 v + 1$$
$$= 2$$

$$F = \langle \sigma_u, \sigma_v\rangle = \langle (\cos v, \sin v, 1), (-u\sin v, u\cos v, 0)\rangle$$
$$= -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v$$
$$= 0$$

$$G = \langle \sigma_v, \sigma_v\rangle = \langle (-u\sin v, u\cos v, 0), (-u\sin v, u\cos v, 0)\rangle$$
$$= +u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v$$
$$= u^2(\cos^2 v + \sin^2 v)$$
$$= u^2$$

Com $f\circ\sigma = (u\cos v, u\sin v, 0)$ não teremos diretamente as mesmas forma fundamental, mas podemos adicionar constanstes que forcem isso. Para que $E=2$ por exemplo, modificaremos $f(x,y,z) = (x\sqrt2, y\sqrt2, 0)$, assim

$f\circ\sigma = (\sqrt2\cos v\sqrt2,\ \sqrt2\sin v\sqrt2,\ 0)$

$(f\circ\sigma)_u = (\sqrt2\cos v\sqrt2, \sqrt2\sin v\sqrt2, 0)$

$(f\circ\sigma)_v = (-2u\sin v\sqrt2,\ 2u\cos v\sqrt2,\ 0)$

$E = \sqrt2^2(\cos^2 v\sqrt2 + \sin^2 v\sqrt2) = 2$

$cs(x) = \cos x\cdot\sin x$

$F = -2\sqrt2 u\ cs(v\sqrt2) + 2\sqrt2 u\cdot cs(v\sqrt2) = 0$

O coeficiente G será $4u^2$. Ainda não coincide com u^2

Propomos então uma segunda alteração $f(x,y,z) = (x\sqrt2, y/\sqrt2, 0)$, o que mantém $E=2$ e $F=0$, mas agora, $f\circ\sigma = (u\sqrt2\cos\frac{v}{\sqrt2}, u\sqrt2\sin\frac{v}{\sqrt2}, 0)$ implica

$$(f \circ \sigma)_v = \left(\frac{-u\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin v/\sqrt{2},\ \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos \frac{v}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

Logo, $G = \|(-u\sin v/\sqrt{2}, u\sqrt{2}\cos v/\sqrt{2}, 0)\|^2$

$= u^2 (\sin^2 v/\sqrt{2} + \cos^2 v/\sqrt{2})$

$= u^2$

Agora sim, temos que $f : S \to U$ é isometria local.

$(x,y,z) \mapsto (x\sqrt{2}, y/\sqrt{2}, 0)$

O fato de f ser difeomorfismo é facilmente verificável pois as formas funcionais de f e f^{-1} são diferenciáveis.

Área do Toro de Revolução:

Toro: $X(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$

$u, v \in (0, 2\pi)$

Área:

$$\int_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} \|X_u \wedge X_v\| \, du\, dv$$

$X = (a\cos v, a \operatorname{sen} v, 0)$

$+ (r\cos u \cos v, r\cos u \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$

$$X_v \wedge X_u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\sin u \cos v & -r\sin u \sin v & r\cos u \\ -b\sin v & b\cos v & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} X_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u \sin v, r\cos u) \\ X_v = (-b\sin v, b\cos v, 0) \end{cases}$$

$b = a + r\cos u$

$= (rb\cos u \cos v, -rb\cos u \sin v, -rb\sin u \cos^2 v - rb\sin u \sin^2 v)$

$= rb(\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$

$$\|X_u \wedge X_v\| = \left(r^2 b^2 (\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$= rb(\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}$

$= rb$

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r b \, du \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(a + r\cos u) \, du \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r a \, du \, d\theta + r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos u \, du \, d\theta$$

$$= r a \, 2\pi \cdot 2\pi + r^2 \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{\left[-\operatorname{sen} u\right]_0^{2\pi}} \, d\theta$$

$$= 4 a r \pi^2$$