Aula Prática 5.

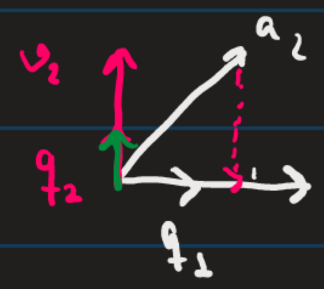
Saturday, May 29, 2021 11:39 AM

Método de Gram - Schmidt (Notas da Aula 14)

Entrada: $A_{m\times n}$ com colunas LI

· Inicializar $Q_{m\times n}$ e $R_{n\times n}$

De $j=1$ até n:



$\quad v = a_j$

$\quad$ De $i=1$ até $j-1$:

$\quad\quad \boxed{r_{ij}} = q_i^T a_j$ → Gram-Schmidt modificado: $r_{ij} = q_i^T v$

$\quad\quad v = v - r_{ij} q_i$

$\quad$ fim

$\quad r_{jj} = \|v\|$

$\quad q_j = v / r_{jj}$

fim

Teste de ortogonalidade: $A = \text{rand}(5,5)$

Analisar e comparar $\|Q^TQ - I\|$ → pequena

Teste de presição: $\|A - QR\|$

É esperado que essas medidas sejam próximas de zero, porém, você pode usá-las diferentes métodos aplicados em uma mesma matriz.

③ Pivoteamento de Colunas

$j \neq k$

No passo 1, toma-se v como a coluna de maior norma, e $q_1 = v/\|v\|$

(Faz-se então a troca de colunas em A e P, que é iniciada como $I_{n\times n}$

De $j=2$ até $j=n$:

$A(:,j:n) = A(:,j:n) - \text{proj}_{q_{j-1}} A(:,j:n)$

$a_j = a_j - \text{proj}_q a_j$ → $\begin{bmatrix} (q\cdot a_j)q & (q\cdot a_{j+1})q & \cdots & (q\cdot a_n)q \end{bmatrix}$, $q\cdot q = 1$, $(q^T a_j)q$

Por simplicidade da notação, $q = q_{j-1}$

$= \boxed{q(q^TA(:,j:n))}$ → $\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}}_{q} [q^Ta_j \; q^Ta_{j+1} \cdots q^Ta_n]$

$k = (j-1) + \text{argmáx}\{\|A(:,l)\|, l = j, j+1, \dots, n\}$

↳ coluna de maior projeção

Ao encontrar k:

· $A(:,j) \xleftrightarrow[\text{trocar}]{\text{colunas}} A(:,k)$ $\quad R(:,j) \leftrightarrow R(:,k)$

· $P(:,j) \xleftrightarrow[\text{trocar colunas}]{} P(:,k)$

Verificando dimensões

$q\,(q^T A(:,j:n))$

$(m\times 1)\,(1\times m)\,(m\times(n-j+1))$ ok

$m\times 1\;(1\times(n-j+1))$ ok

$m\times(n-j+1)$

Mesma dimensão de $A(:,j:n)$

$v = \boxed{A(:,j)}$ $\quad R_j = q_j^T A$

$\boxed{q_j = v/\|v\|}$ → usado na iteração seguin.

Saída: Q, R, P tal que $AP = QR$

Adaptação do Pseudo código de Gilbert Strang, "Linear Algebra and Learning from data" p.130-131

Dicas de comandos: A → matriz $m\times n$

· sum(A.^2 , 1)

↳ retorna $[\|a_1\|^2, \|a_2\|^2, \dots, \|a_n\|^2]$

· [m, k] = max(v) → retorna máximo e índice do máximo

· diag(A'A) → $[\|a_1\|^2 \;\; \|a_2\|^2 \cdots \|a_n\|^2]$

$$\underset{n\times m}{\begin{bmatrix} - a_1^T - \\ - a_2^T - \\ \vdots \\ - a_n^T - \end{bmatrix}} \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & \cdots & & \\ \vdots & a_2^Ta_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & \cdots & & a_n^Ta_n \end{bmatrix}}$$

· Troca de colunas: A(:,[i j]) = A(:,[j i])

Aula Prática 5

Saturday, May 29, 2021 12:37 PM

4 Método de Householder

Algoritmo (Notas de aula 17)

Entrada : $A_{m\times n}$

Saída: $U_{m\times n} \to$ vetores unitários (u) que geram os refletores.

$R_{m\times n} \to$ triangular superior

Inicializa-se U com zeros

De $K=1$ até $\boxed{n}$ $\longrightarrow$ pense um pouco o que acontece na última iteração!

$x = A_{K:m,K}$

Se $x(1) < 0$:

$x(1) = x(1) - \|x\|$

Se não :

$x(1) = x(1) + \|x\|$

$x - Hx$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$u = x/\|x\|$

$U(K:m, K) = u$

$A(K:m, K:n) = A(K:m, K:n) - 2u(u^T A(K:m, K:n))$

$HA = (I - 2uu^T)A = A - 2uu^TA$

↳ passo de triangularização

Fim

$R = \text{triu}(A)$

Fim

Sugestões: Script que gera matrizes quadradas de ordens diferentes (10, 100, 500, 1000, ...) aplica os métodos e compara ortogonalidade ($\|Q^TQ - I\|$) e opcionalmente precisão ($\|A - QR\|$)

5 Função Espectro.

Entrada: A simétrica (quadrada)

tol $\to$ tolerância

$[Q\ R] = qr(A)$

↳ Use seu algoritmo preferi s a

(proibido usar qr nativo Scilab)

$A_1 = RQ$;

$[Q_1, R_1] = qr(A_1)$

⋮

$A_K = R_{K-1} Q_{K-1}$

A_K é semelhante à A

Critério de parada: $\|\text{diag}(A_K) - \text{diag}(A_{K-1})\|_\infty < tol$

$A_K \longrightarrow$ triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & * & * & * & * \\ 0 & a_{22}-\lambda & & & * \\ & 0 & \ddots & & * \\ 0 & & 0 & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} 0$$

$\det(A_K - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

Raízes : $\text{diag}(A_K)$