Monitoria 15/03/2021

Monday, March 15, 2021 2:10 PM

Tópico do dia: Resolução do Teste 1 - 2019 (disponível no Acervo EMAp)

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $f(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^3$

$\|x\| = 1$

Teorema 5.23 (Poole)

$f(x) = x^T A x$ $f_{máx}$ e $f_{mín}$, $\|x\| = 1$

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$

$f_{máx} = \lambda_1 \longrightarrow$ ocorre em q_1

$f_{mín} = \lambda_n \longrightarrow$ ocorre em q_n

//

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)^2(-1-\lambda) - (-1-\lambda) \cdot 16 = 0$

$(1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 16(\lambda+1) = 0$

$\underbrace{(\lambda+1)}_{=0}\left(16 - (1-\lambda)^2\right) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$

$16 - (1-\lambda)^2 = 0$

$\underbrace{(1-\lambda)^2}_{4 \text{ ou } -4} = 16$

$1-\lambda = 4$ $\quad$ $1-\lambda = -4$

$\lambda = -3$ $\quad$ $\lambda = 5$

Autovalores de A:

$\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = -3$

Pelo Teo. 5.23:

Máximo = 5

Mínimo = -3

2 $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

? $\text{cond}(A) \geq \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$ $\longrightarrow$ maior λ (em módulo), $\longrightarrow$ menor λ (em módulo)

$\|x\|$ é uma norma vetorial

$\|A\|$ induzida por $\|x\|$

$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

Lema 1: Se λ é autovalor de A (inversível) então $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de A^{-1}.

$Aq_1 = \lambda_1 q_1$

$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Aq_1\| = \|\lambda_1 q_1\| = |\lambda_1| \underbrace{\|q_1\|}_{1} = |\lambda_1|$

$\|q_1\| = 1$

autovetor associado a λ_1

$\|A\| \geq |\lambda_1|$ $\quad (*)$

Pelo Lema 1, λ_n é o autovalor (menor módulo) de A, então $\frac{1}{\lambda_n}$ é autovalor A^{-1} $\longrightarrow$ (maior módulo de A^{-1})

Analogamente ao passo acima

$\|A^{-1}\| \geq \|A^{-1} q_n\| = \|\frac{1}{\lambda_n} q_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \cancel{\|q_n\|}^{1} = \frac{1}{|\lambda_n|}$

$\Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{|\lambda_n|}$ $\quad (**)$

$\text{cond}(A) \geq \dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$

obs: vale algo mais geral, $\|A\| \geq |\lambda|$ para qualquer λ (ex 34. Cap 7.2)

Prova do Lema 1: (não precisava demonstrar no teste)

Se λ é autovalor de A, associado ao autovetor v, então:

$Av = \lambda v$ (multiplicando por A^{-1})

$\Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$

$\Rightarrow Iv = \lambda A^{-1} v$

$\Rightarrow v = \lambda A^{-1} v$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v \Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ é autovalor de A^{-1} associado ao autovetor v

Monday, March 15, 2021 3:35 PM

3 a) Usaremos o Teorema 7.7 (Poole)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,3} \left\{ \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| \right\}$$

$\to$ máximo dentre as normas-soma das colunas:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 2 & 8 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \|A\|_1 = \max\{6, 2, 8\} = 8$$

Soma dos módulos

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \right\}$$ $\to$ máximo das normas-soma sob as linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 3 \\ \to 10 \\ \to 3 \end{matrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = \max\{3, 10, 3\} = 10$$

Soma dos módulos

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \sqrt{1 + 4 + 16 + 1 + 25 + 4 + 1} = \sqrt{21 + 31} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

b) • Queremos x tal que $\|x\|_1 = 1$ e $\|Ax\|_1 = 8$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \|x\|_1 = 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

Como a terceira coluna de A é a responsável por $\|A\|_1 = 8$ (soma dos módulos da 3ª coluna = 8) podemos forçar que $\|Ax\|_1 = 8$ fazendo o termo $x_3 = 1$ e $x_1 = x_2 = 0$. Assim replicamos a 3ª coluna de A em Ax como foi marcado em rosa. Assim $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfaz $\|x\|_1 = 1$ e $\|Ax\|_1$. Também podemos usar $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ já que normas são invariantes por sinal.

• Usando o mesmo raciocínio, queremos buscar $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ com $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, |y_3|\} = 1$ e $\|Ay\|_\infty = 1$

Pelo fato $\|y\|_\infty = 1$, é necessário que $-1 \leq y_i \leq 1$, para $i = 1, 2, 3$, pois caso contrário teríamos $\|y\|_\infty > 1$.

Já fizemos a multiplicação de matrizes antes, basta trocar x_i por y_i :

$$Ay = \begin{bmatrix} y_2 - 2y_3 \\ 4y_1 - y_2 + 5y_3 \\ 2y_1 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ay\|_\infty = \max\{|y_2 - 2y_3|, |4y_1 - y_2 + 5y_3|, |2y_1 + y_3|\}$$

Queremos y tal que a expressão acima seja $= 10$. Perceba que a primeira e a última coordenadas não podem atingir 10. (consequência da desig. triangular)

$$|y_2 - 2y_3| \leq |y_2| + |-2y_3| = |y_2| + 2|y_3| \overset{*}{\leq} 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$|2y_1 + y_3| \leq 2|y_1| + |y_3| \overset{*}{\leq} 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

As desigualdades (*) vem do fato de que as coordenadas de y não ultrapassam 1.

Assim, a segunda coordenada será necessáriamente a máxima. Basta agora encontrarmos y_1, y_2 e y_3 tais que:

$$|4y_1 - y_2 + 5y_3| = 10$$

Olhando um pouco pra expressão, uma solução bem clara é $y_1 = y_3 = 1$ e $y_2 = -1$. Assim temos $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfazendo $\|y\|_\infty = 1$ e $\|Ay\|_\infty = 10$.

Como anteriormente, $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ também funciona.