Monitoria 07/04/2021 - Revisão A_1

1. (Decomposição LU) (Valor:1,0)

Considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Sabendo que $PA = LU$ e que $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $Ax = b$.

Método de Resolução:

$PA = LU$

$A = P^T LU$

$P^T LUx = b$

$LUx = Pb$

Considerando $Ux = y$, primeiro resolvemos o sistema $Ly = Pb$ e depois $Ux = y$.

$Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad Ly = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 2 \\ y_3 = 2 \end{array}$$

$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$3x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 2/3$

$x_2 = 2$

$x_1 - 2x_2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1 + 4 = 5$

Portanto $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

2. **(Norma Induzida) (Valor: 2,0)**
   a) Seja $\|A\|$ uma norma de matriz induzida por uma norma vetorial. Mostre que $\|I_n\| = 1$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.
   b) Existe uma norma vetorial que induza a norma de Frobenius? Por que sim ou por que não?

a) A definição de norma induzida é

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Assim:

$$\|I_n\| = \max_{\|x\|=1} \|I_n x\|$$

$$= \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$, pois estamos extraindo o máximo de $\|x\|$ sobre vetores na qual $\|x\| = 1$

b) Suponha que a norma de Frobenius seja induzida por alguma norma vetorial. Assim:

$$\|A\|_F = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$, para toda matriz A $n \times n$

Tome $A = I_n$

$$\|I_n\|_F = \max_{\|x\|=1} \|I_n x\|$$

Pelo item (a), $\max_{\|x\|=1} \|I_n x\| = 1$, mas $\|I_n\|_F = \sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{n \text{ vezes}}} = \sqrt{n}$

Assim teríamos $\sqrt{n} = 1$, absurdo p $n \geq 2$

Logo, não existe norma vetorial que induza Frobenius

3. (Raio Espectral) (Valor: 2,0)

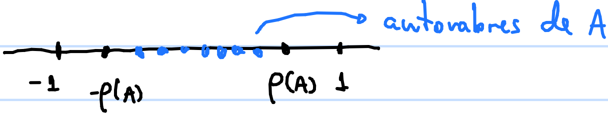
a) Seja A uma matriz quadrada e I_n a matriz identidade, ambas de ordem n. Mostre que , se $I_n - A$ e $I_n + A$ são matrizes singulares, isto é, não invertíveis, então 1 e −1 são autovalores, respectivamente, de $I_n - A$ e $I_n + A$.

b) Mostre que se o raio espectral de A é menor do que 1 ($\rho(A) < 1$), então $I_n - A$ e $I_n + A$ são invertíveis.

b) Suponhemos que $\rho(A) < 1$, vamos mostrar que $I_n - A$ e $I_n + A$ são inventíveis provando que 0 não é um de seus autovalores.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A, $\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$, ou seja, o raio espectral é o módulo do autovalor de maior módulo.

Se $\rho(A) < 1$, todos os autovalores de A em módulo, são também menores do que 1, assim. 1 e −1 não são autovalores de A



Assim, $Av \neq \lambda v$, se $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (v autovetor correspondente)

Suponha por absurdo que 0 é autovalor de I-A; assim:

$(I-A)v = 0$

$\Rightarrow Iv - Av = 0$

$\Rightarrow Av = v$

$\Rightarrow$ 1 é autovalor de A, absurdo!

Analogamente, suponha que 0 é autovalor de $I + A$:

$(I+A)v = 0 \cdot v$

$\Rightarrow Iv + Av = 0$

$\Rightarrow Av = -Iv$

$\Rightarrow Av = -v$

$\Rightarrow -1$ é autovalor de A, absurdo!

Logo, $I_n - A$ e $I_n + A$ são invertíveis.

4. (Número Condicional) (Valor: 2,0)

a) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2.

É sempre verdade que $\left\|A^T\right\|_1 = \|A\|_1$?

b) Mostre que se A é uma matriz quadrada invertível de ordem 2, então é sempre verdade que $cond_1(A^T) = cond_1(A)$.

c) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ calcule $cond_1(A)$ e $cond_1(A^T)$ e conclua que $cond_1(A^T) \neq cond_1(A)$.

a) Podemos calcular a norma induzida $\|A\|_1$ via:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\dots n} \left(\|a_j\|_1\right)$$

ou sejo, o máximo entre as normas somas das colunas

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$\|A\|_1 = \max\{|a|+|c|, |b|+|d|\}$

$\|A^T\|_1 = \max\{|a|+|b|, |c|+|d|\}$

Não é difícil encontrar um contraexemplo onde $\|A\|_1 \neq \|A^T\|_1$

Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, por exemplo.

$\|A\|_1 = \max\{2, 2\} = 2$

$\|A^T\|_1 = \text{máx}\{1, 3\} = 3$

Logo, nem sempre é verdade que $\|A\|_1 = \|A^T\|_1$

b) $\text{Cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= \text{máx}\{|a|+|c|, |b|+|d|\} \cdot \frac{1}{|ad-bc|} \cdot \text{máx}\{|c|+|d|, |a|+|b|\}$

$\text{Cond}_1(A^T) = \|A^T\| \cdot \|(A^T)^{-1}\|$

$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ $\quad (A^T)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$= \text{máx}\{|a|+|b|, |c|+|d|\} \cdot \frac{1}{|ad-bc|} \cdot \text{máx}\{|b|+|d|, |a|+|c|\}$

Como podemos ver, as expressões de $\text{cond}_1(A)$ e $\text{cond}_1(A^T)$ são as mesmas. Logo, é sempre verdade que, para A quadrada 2x2 invertível, tem-se

$\text{cond}_1(A) = \text{cond}_1(A^T)$ //

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\|A\|_1 = \text{máx}\{4, 2, 1\} = 4$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\|A^T\|_1 = \text{máx}\{2, 2, 3\} = 3$

Precisamos inverter A e A^T para calcular o número condicional. Faremos cada inversão de uma formas diferentes.

Teorema: A inversa de uma triangular inferior (superior) é também uma triangular inferior (superior).

Note que A é triangular inferior. Assim, existe $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}$ tal que $AA^{-1} = I$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$

$a + b = 0 \Rightarrow b = -a = -1/2$

$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$1 \cdot 0 + 1 \cdot d + 0 \cdot e = 1$

$\Rightarrow d = 1$

$d + e = 0 \Rightarrow e = -d = -1$

$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot f = 1$

$\Rightarrow f = 1$

$$\begin{cases} a = +1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = -1 \\ f = 1 \end{cases}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Com isso

$\|A^{-1}\| = \text{máx}\{|\frac{1}{2}| + |-\frac{1}{2}|, |1| + |-1|, |1|\}$

$= \text{máx}\{1, 2, 1\} = 2$

Temos toda informação então para calcular $Cond_1(A)$

$$Cond_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\| = 4 \cdot 2 = 8$$

Vamos inverter A^T de outra forma:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrevemos A^T ao lado de I e fazemos operações de escalonamento para transformar A^T em identidade. O resultado da direita será a inversa de A^T.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_1/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Assim $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Cond_1(A^T) = \|A^T\| \cdot \|(A^T)^{-1}\|$$
$$= 3 \cdot \max\{1/2, 3/2, 2\} = 3 \cdot 2 = 6$$

Como $cond_1(A) = 8$ e $cond_1(A^T) = 6$, concluímos que

$$cond_1(A) \neq cond_1(A^T)$$