Capítulo 7.2

Friday, March 12, 2021   8:25 AM

(1) $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Norma euclidiana: $\|u\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{1 + 16 + 25}$
$= \sqrt{42}$

Norma Soma: $\|u\|_s = |-1| + |4| + |-5|$
$= 1 + 4 + 5 = 6$

Norma do máximo: $\|u\|_m = \text{máx}\{|-1|, |4|, |-5|\}$
$= 5$

(3) Calcular $d(u,v)$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ em relação à norma 1, 2 e do máximo

• em relação à norma soma:

$d_s(u,v) = \|u - v\|_s = \left\| \begin{bmatrix} -1-2 \\ 4-(-2) \\ 5-0 \end{bmatrix} \right\|_s = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|_s = |-3| + 6 + 5$
$= 14$

• em relação à norma euclidiana:

$d_E(u,v) = \|u - v\|_E = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|_E = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 25 + 36} = \sqrt{70}$

• em relação à norma do máximo:

$d_m(u,v) = \|u - v\|_m = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|_m = \text{máx}\{|-3|, 6, 5\} = 6$

(5) $u = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$ $v = [0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1]^T$

$\|u\|_H = 4$ e $\|v\|_H = 5$

↳ quantidade de "uns"

(6) Distância de Hamming entre u e v:

$d_H(u,v) = \|u - v\|_H = \|[1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T\|_H$
$= 5$

(4) (a) $\|v\|_E = \|v\|_m$, $v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{\frac{1}{2}} = \text{máx}\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$

Seja k, tal que $|v_k| = \max\limits_{1 \le i \le n}\{|v_i|\}$

$\Rightarrow v_1^2 + \dots + v_k^2 + \dots v_n^2 = v_k^2$

$\Rightarrow v_1^2 + \dots + v_{k-1}^2 + v_{k+1}^2 + \dots + v_n^2 = 0$

$\Rightarrow v_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$

Os cálculos ao lado mostram que os vetores v que satisfazem $\|v\|_E = \|v\|_m$ são aqueles na qual todas as coordenada exceto a de maior módulo são nulas. Ou seja, vetores com apenas uma coordenana não nula, e também o vetor nulo, obviamente.

Sunday, March 14, 2021 10:00 PM

(b) $\|v\|_s = \|v\|_m$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |v_K|$, onde $|v_K| = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$

$\Rightarrow |v_1| + \dots + \cancel{|v_K|} + \dots + |v_n| \cancel{- |v_K|} = 0$

$\Rightarrow |v_1| + \dots + |v_{K-1}| + |v_{K+1}| + \dots + |v_n| = 0$

$\Rightarrow v_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, K-1, K+1, \dots, n$

De forma parecida com o item anterior, os vetores que satisfazem $\|v\|_s = \|v\|_m$, além do trivial $v \equiv 0$, são aqueles que possuem apenas uma coordenada não-nula (v_K); são os múltiplos dos vetores canônicos.

(c) Por (a) e (b), temos que os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem $\|v\|_s = \|v\|_m = \|v\|_E$ são vetores com uma única coordenada não nula, mais o vetor nulo. De forma geral, o conjunto abaixo representa tal classe, como múltiplos canônicos (incluindo o vetor nulo).

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid v = c \cdot e_n,\ c \in \mathbb{R},\ e_n \text{ canônico qualquer de } \mathbb{R}^n\}$$

9 Mostre que, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_m \leq \|v\|_E$

Seja $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$ e K o índice de módulo máximo, ou seja, $|v_K| = \text{máx}\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$.
Assim, queremos provar que

$$|v_K| \leq \|v\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Note que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(v_K^2 + \sum_{i \neq K} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $v_K^2 \leq v_K^2 + \sum_{i \neq K} v_i^2$, e $|v_K| = \sqrt{v_K^2}$, então, segue, pela monotonicidade da raiz quadrada, que

$$|v_K| = \sqrt{v_K^2} \leq \left(v_K^2 + \sum_{i \neq K} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_E$$

Ou seja, $\|v\|_m \leq \|v\|_E \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

Sunday, March 14, 2021 10:29 PM

(b) Mostre que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_E \leq \|v\|_S$

Seja $v = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^T$

Como, ambas as normas são não-negativas por definição de norma, então podemos provar que $\|v\|_E^2 \leq \|v\|_S^2$, que a monotonicidade da raiz quadrada garantirá o resultado principal.

Queremos então provar que:

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \leq (|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|)^2$$

Intuitivamente, podemos ver que a expressão do segundo membro, ao ser aberta por distributiva conterá não só todos os termos $|v_i|^2$ mas também vários termos mistos, o que garantiria a desigualdade. Para provar tal propriedade formalmente, podemos usar indução em n.

(Caso Base) $n = 1$

$v_1^2 \leq |v_1|^2$ é trivialmente verdade, pois vale a igualdade $v_1^2 = |v_1|^2$, $\forall v_1 \in \mathbb{R}$.

(Hipótese Indutiva) Suponha que existe algum n inteiro positivo não-nulo tal que

$$v_1^2 + \cdots + v_n^2 \leq (|v_1| + \cdots + |v_n|)^2$$

(Passo Indutivo) Vamos investigar o que acontece para $n+1$.

Tome $\left(\sum_{i=1}^{n+1} |v_i|\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i| + |v_{n+1}|\right)^2$, faça $M = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ e teremos um produto notável

$$(M + |v_{n+1}|)^2 = M^2 + |v_{n+1}|^2 + 2M|v_{n+1}|$$

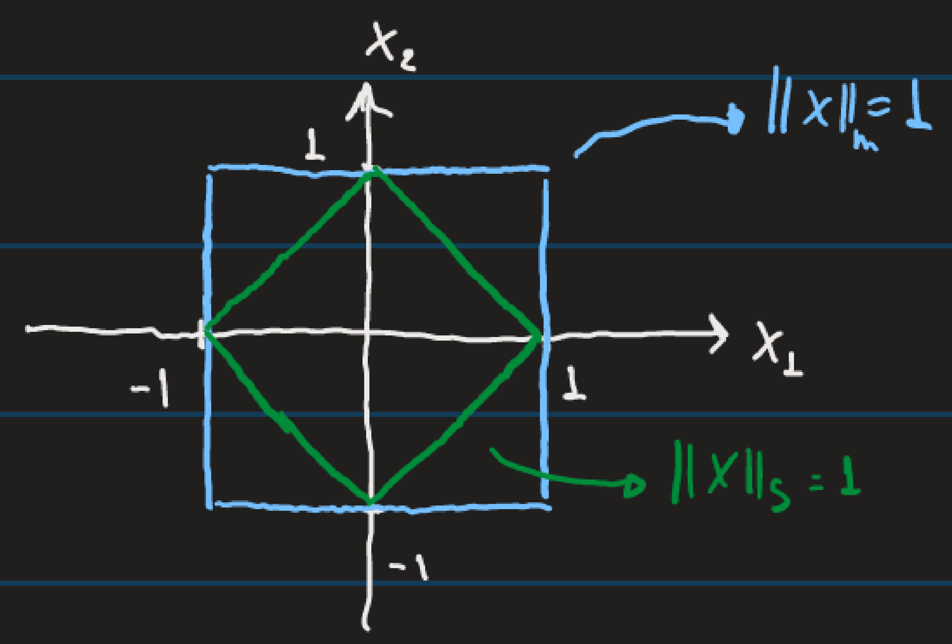
Pela Hipótese Indutiva, $M^2 \geq v_1^2 + \cdots + v_n^2$, assim:

$$\begin{aligned}(M + |v_{n+1}|)^2 &\geq v_1^2 + \cdots + v_n^2 + |v_{n+1}|^2 + 2M|v_{n+1}| \\ &= v_1^2 + \cdots + v_n^2 + v_{n+1}^2 + \underbrace{2M|v_{n+1}|}_{\geq 0} \\ &\geq v_1^2 + \cdots + v_{n+1}^2 \end{aligned}$$,

ou seja $\left(\sum_{i=1}^{n+1} |v_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n+1} v_i^2$, finalizando a prova por indução. ■

Sunday, March 14, 2021 11:01 PM

(13)



$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(25) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} (a_{ij})^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-3)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{16 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 + 9}$

$= \sqrt{20 + 24}$

$= \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

Pelo Teorema 7.7 do Poole,

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,3} \left\{ \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| \right\}$$

ou seja, é o máximo entre as somas dos módulos nas colunas

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 7$$

Soma dos módulos $\downarrow$ 7 $\downarrow$ 6 $\downarrow$ 3

Pelo mesmo Teorema:

$$\|A\|_m = \max_{i=1,2,3} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow 7 \\ \longrightarrow 3 \\ \longrightarrow 6 \end{matrix} \Rightarrow \|A\|_m = 7$$

Ou seja, o máximo dentre as somas de valores absolutos nas linhas

(27) Encontra x e y com $\|x\|_s = 1$ e $\|y\|_m = 1$ tais que $\|A\|_1 = \|Ax\|_s$ e $\|A\|_\infty = \|Ay\|_m$

No caso $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Pelo Teorema 7.7, $\|A\|_1 = 4$ e $\|A\|_\infty = 6$

Queremos $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ com $\overset{(*)}{|x_1| + |x_2| = 1}$ e $\|Ax\|_s = 4$, ou seja $\left\| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = 4$

$\Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} -x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \right\|_s = 4 \Rightarrow |x_2| + 3|x_2 - x_1| = 4$

Sunday, March 14, 2021 11:43 PM

Perceba que se $|x_2| = 1$ e $|x_2 - x_1| = 1$, a equação acima é satisfeita; considerando (*) temos $|x_1| = 1 - |x_2|$, então se tomarmos x_2 tal que $|x_2| = 1$, teríamos $|x_1| = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

A expressão acima nesse caso, de fato é satisfeita:

$$|x_2| + 3|x_2 - x_1| = 1 + 3|x_2| = 1 + 3 = 4$$

Basta tomar então $x = \pm\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Agora, queremos achar $y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ com $\max\{|y_1|, |y_2|\} = 1$ e $\|Ay\|_\infty = 6$, ou seja,

$$\left\|\begin{bmatrix}0 & -1\\-3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix}-y_2\\-3y_1+3y_2\end{bmatrix}\right\|_\infty = 6$$

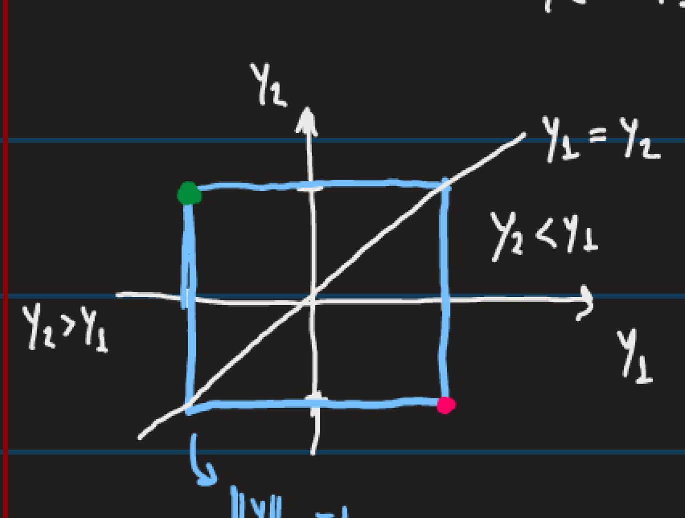
$$\Rightarrow \text{máx}\{|y_2|, 3|y_2 - y_1|\} = 6$$

Se tal máximo for $|y_2|$ teríamos um absurdo com o fato $\|y\|_\infty = 1$; Portanto, o máximo ocorre em $3|y_2 - y_1|$. Assim:

$$3|y_2 - y_1| = 6 \Rightarrow |y_2 - y_1| = 2$$

Na representação geométrica do item b (quadrado azul) fica fácil ver quais valores de y_1, y_2 satisfazem $|y_2 - y_1| = 2$.

No caso $y_2 > y_1$, teríamos $|y_2 - y_1| = y_2 - y_1 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 + y_1$, o que possibilita a solução em verde $y_1 = -1$, $y_2 = 2 - 1 = 1$ qualquer os pontos do quadrado nessa região com $y_1 > -1$ implicariam em $y_2 > 2 + y_1 = 1$, ou seja, cairiam fora do quadrado.



No caso $y_2 < y_1$, $|y_2 - y_1| = y_1 - y_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 2 + y_2$ e de forma análoga ao caso anterior, mas agora buscando soluções na parte de baixo da reta $y_1 = y_2$, temos a solução em rosa, $y_2 = -1$ e $y_1 = 2 + y_2 = 1$.

As duas soluções $y = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, por construção, satisfazem $\|y\|_\infty = 1$, pois as buscamos na região do plano que satifaz isso ("circunferência unitária" azul).

Ambas também satisfazem $\|Ay\|_\infty = 3|y_2 - y_1| = 3 \cdot 2 = 6 = \|A\|_\infty$, como foi pedido.

Conclusão: $y = \pm\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

33 a) $\|A\|$ é uma norma de operador, ou seja, se $\|x\|$ é uma norma vetorial ($x \in \mathbb{R}^n$) a norma de operador induzida pela norma de vetor $\|x\|$ é definida como $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Se I é uma matriz identidade, $Ix = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, logo $\|I\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|x\| = 1$ ∎

b) Suponha, por absurdo, que exista uma norma de vetor $\|x\|$, tal que

$\|A\|_F = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, ou seja, tal norma vetorial induz a norma de Frobenius e a expressão ao lado, para tal norma vale para qualquer matriz A de dimensão compatível com x.

Se $x \in \mathbb{R}^n$, tome I a matriz identidade $n \times n$. Pelo item anterior $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1$, mas $\|I\|_F = \sqrt{n}$, por definição da norma de Frobenius (só seria somados os termos da diagonal). Sendo assim, teríamos $\sqrt{n} = 1$, o que é um absurdo, para todo natural $n > 1$.

Sendo assim, a norma de Frobenius para dimensões maiores que 1, não é uma norma de operador. (e a dimensão 1 é sem graça :c)

37) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Cond}_1(A) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1$

Encontrando a inversa: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}99 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

$$\Rightarrow A^{-1} = 100 \begin{bmatrix} 1 & -0{,}99 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -99 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Cond}_1(A) = \|A^{-1}\|_1 \cdot \|A\|$ $\qquad \|A^{-1}\|_1 =$ máximo da soma dos módulos nas colunas

$\mathrm{Cond}_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$ $\qquad \|A^{-1}\|_\infty =$ máximo da soma dos módulos nas colunas

$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 100 & -99 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to 199 \\ \to 200 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 200 & 199 \end{array} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \|A^{-1}\|_1 = 200 \\ \|A^{-1}\|_\infty = 200 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to 1{,}99 \\ \to 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1{,}99 \end{array} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \|A\|_1 = 2 \\ \|A\|_\infty = 2 \end{array}$$

Como as normas se coincidiram, temos que $\mathrm{Cond}_1(A) = \mathrm{Cond}_\infty(A) = 200 \cdot 2 = 400$, um número que indica que A é uma matriz (bastante) malcondicionada.