2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ e uma fatoração QR aproximada da mesma, obtida pelo Método de Gram-Schmidt: $Q = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}099 \\ 0{,}6 & 0{,}132 \\ 0 & 0{,}986 \end{bmatrix}$ e $R = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 6{,}08 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

a) (2,5 pto) Sendo $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, use as matrizes dadas para encontrar a solução por mínimos quadrados da equação $Ax = b$.

$A = QR$

ortogonal — tri. superior

$Q^T = Q^{-1}$

$$\boxed{A^T A \bar{x} = A^T b}$$

$$(QR)^T (QR)\bar{x} = (QR)^T b$$

$$R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R \bar{x} = R^T Q^T b$$

$$R^T R \bar{x} = R^T Q^T b$$

Se R invertível $\Rightarrow R^T$ invertível

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow R\bar{x} = Q^T b \\ &\Rightarrow \bar{x} = R^{-1} Q^T b \end{aligned}}$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 6{,}08 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{60{,}8}\begin{bmatrix} 6{,}08 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}099 & 0{,}132 & 0{,}986 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = R^{-1} Q^T b$$

b) (2,5 pto) Agora, utilizando o Método de Householder, mostre os resultados da primeira iteração, isto é, construa a matriz $Q_1 = H_1$ (primeiro refletor de Householder) tal que

$$Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = R_1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad Hx = \begin{bmatrix} \pm\|x\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x

$$\|x\| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

$$Hx = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u = \frac{x - Hx}{\|x - Hx\|}$$

$$x - Hx = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|x - Hx\| = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{2}{10}$$

$$H_1 = I - 2uu^T$$

$$= I - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{H_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}} \quad ///$$

Tirando a prova

$$H_1 A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 0 & -5 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$