Notas 2021-04-19

Monday, April 19, 2021 2:08 PM

Método da Potência

Teorema: $A_{n \times n}$ diagonalizável de autovalor dominante λ_1, associado a v_1.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Então existe x_0 tal que

$$\begin{cases} x_1 = A x_0 \\ x_k = A x_{k-1} \end{cases} \Rightarrow$$ x_k vai convergir para um múltiplo de v_1

$$x_2 = A x_1 = A(A x_0) = A^2 x_0$$

$$x_k = A^k x_0$$

Algoritmo:

Normaliza x_0 : $y_0 = x_0 / \|x_0\|_m$

Repita os passos

1.) $x_k = A y_{k-1}$ $\leftarrow$ $\lambda_1 \approx x_{k+1}^T \cdot x_k$

2.) armazene $m_k \to$ componente de maior módulo de x_k

3.) $y_k = x_k / \|x_k\|_m$

Quociente de Rayleigh

$$\underbrace{Ax = \lambda_1 x}$$

$$\underbrace{\frac{(Ax)\cdot x}{x \cdot x}}_{R(x)} = \frac{(\lambda_1 x)\cdot x}{\underbrace{x \cdot x}_{\|x\|_2^2}} = \frac{\lambda_1 (x \cdot x)}{x \cdot x} = \lambda_1$$

$x \cdot x = 1$

$$R(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda_1$$

↳ Quociente de Rayleigh

Se garantirmos que $\|x_k\|_2 = 1$ podemos aproximar λ_1 simplesmente por $x_{k+1} \cdot x_k = x_{k+1}^T x_k$

$$= x_k^T x_{k+1}$$

Método da Potência deslocada

Teorema: λ é autovalor de A, com autovetor associado x,

$\Rightarrow (\lambda - \alpha)$ é autovalor de $A - \alpha I$, com o mesmo autovetor associado x.

Dem: $Ax = \lambda x$

Queremos provar: $(A - \alpha I)x = (\lambda - \alpha)x$

$$\begin{aligned}(A - \alpha I)x &= Ax - \alpha x I \\ &= \lambda x - \alpha x I \\ &= \lambda x - \alpha x \\ &= (\lambda - \alpha)x\end{aligned}$$

$\lambda_1 \to$ autovalor dominante

$\downarrow$ $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$\alpha = \lambda_1$

$(A - \lambda_1 I) \to$ Autovalores: $0, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1$

↳ Autovalor dominante: $\lambda_2 - \lambda_1$

↳ $(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1 = \lambda_2$

Repetindo o processo, encontramos todos os autovalores de A.

Método da Potência deslocada com iteração inversa

Ideia: Encontrar λ mais próximo de α

Teorema: λ autovalor de A invertível, associado ao autovetor x

$\Rightarrow \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ é autovalor de A^{-1} com o mesmo autovetor.

Dem: $Ax = \lambda x$

Queremos $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \lambda^{-1} I A x &= \lambda^{-1} I \lambda x \\ \lambda^{-1} A x &= I x \\ \lambda^{-1}(A^{-1}A)x &= A^{-1}x \\ \lambda^{-1} I x &= A^{-1}x \\ \lambda^{-1}x &= A^{-1}x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\alpha \neq \lambda$, α não é autovalor de A

$(A - \alpha I)^{-1} \to$ encontra autovalor dominante

λ autovalor de A

$\Rightarrow \lambda - \alpha$ autovalor de $A - \alpha I$

$\Rightarrow \underbrace{1/(\lambda - \alpha)}$ autovalor de $(A - \alpha I)^{-1}$

$\downarrow$ é dominante quando λ é o autovalor mais próximo de α.

Algoritmo

$\det(A - \alpha I) \neq 0$

$$y_k = x_k / \|x_k\|_2$$

Resolve p/ x_{k+1} $\to$ $(A - \alpha I)x_{k+1} = y_k$

$$\lambda_k = x_{k+1}^T y_k$$

$\uparrow$ $\|y_k\|_2 = 1$

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

$$(A - \alpha I)^{-1}x = (\lambda - \alpha)^{-1}x$$

$$R(x_k) = \frac{Ax_k \cdot x_k}{x_k \cdot x_k}$$

$R(x_k) \longrightarrow x$

$\lambda_k \longrightarrow \lambda$