Monitoria 08/03/2021

Monday, March 8, 2021 2:10 PM

Capítulo 7.1 - Produto Interno

$V \in \mathbb{R}^n \to$ espaço vetorial

$u, v, w \in V \longrightarrow \langle u, v \rangle$ é produto interno se satisfaz:

① $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

② $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

③ $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$

④ $\langle u, u \rangle \geq 0$

$= 0 \iff u = 0$

Vetores $u, v \in V \subset \mathbb{R}^n$ $\quad$ A simétrica

$\langle u, v \rangle = u^T A v$ $\quad$ definida positiva $\to$ $\boxed{f(x) = x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ (x \neq 0)}$

Exercício: Provar que $\langle u, v \rangle$ é prod. interno.

① $u^T A v = v^T A u$

$\downarrow$

$= u^T A^T v$

$= (Au)^T v = Au \cdot v$

$= Av \cdot u$

$= A^T v \cdot u$

$(v^T A)^T \cdot u$

$v^T A u$

② $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\downarrow$

$= u^T A (v + w)$

$= u \cdot A(v + w)$

$= u \cdot (Av + Aw)$

$= u \cdot Av + u \cdot Aw$ $\longrightarrow$ distributividade do produto escalar

$= u^T A v + u^T A w$

$= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

④ $u^T A u = \langle u, u \rangle \geq 0$

A def. pos $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \ (x \neq 0)$

$x^T A x > 0$

$u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$

$u = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$

③ $\langle ku, v \rangle \overset{?}{=} k \langle u, v \rangle$

trivial, pois $(ku)^T = ku^T$

$\Rightarrow (ku^T) A v = k u^T A v$

Exercícios da lista: David Poole, Álgebra Linear, 4ª edição (Cap. 7.1)

⑤ $\mathcal{P}_2 \to$ polinômios de grau 2

$p(x) = 3 - 2x \qquad q(x) = 1 + x + x^2$

$\langle p(x), q(x) \rangle = 3 - 2 = 1 \qquad \|p(x)\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$

$= \sqrt{3 \cdot 3 + (-2)(-2)} = \sqrt{9 + 4}$

$= \sqrt{11}$

definido como:

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$

㉚ $\langle u, v \rangle < -1$

u, v unitários

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq 1$

$-1 \leq \langle u, v \rangle \leq 1$

$\langle u, v \rangle \geq -1$

㉟ $\|u + v\| = \|u - v\| \iff u, v$ são ortogonais

$\langle u, v \rangle = 0$

$(\Rightarrow) \sqrt{\langle u+v, u+v \rangle} = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$

$\downarrow$

$\cancel{\langle u, u \rangle} + 2\langle u, v \rangle + \cancel{\langle v, v \rangle} = \cancel{\langle u, u \rangle} - 2\langle u, v \rangle + \cancel{\langle v, v \rangle}$

$2\langle u, v \rangle = -2\langle u, v \rangle$

$4\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

$(\Leftarrow) \langle u, v \rangle = 0$

$\|u + v\| = \sqrt{\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle} = \|u - v\|$

$+2\langle u, v \rangle = 0$