Lista 2 - Métodos Iterativos

Sunday, March 28, 2021 12:29 PM

1 Encontrar as duas primeiras iterações de Jacobi usando $x^{(0)} = \vec{0}$, e calcular as normas-infinito das matrizes do método:

a) $\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(L+U)$$
$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_J = D^{-1}b$$
$$= \frac{1}{10} \cdot I \cdot b$$
$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = M_J x^{(0)} + C_J$$
$$= M_J \vec{0} + C_J$$
$$= C_J$$
$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = M_J x^{(1)} + C_J$$
$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 7 \\ 9+2\cdot 6 \\ 2\cdot 7 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 7 \\ 21 \\ 14 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}97 \\ 0{,}91 \\ 0{,}74 \end{bmatrix}$$

Norma infinito da matriz do método:

$$\|M_J\|_\infty = \left\| \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{10} \cdot \max\{|1|, |3|, |2|\}$$

↳ máx sob. somas dos módulos das linhas

$$= \frac{1}{10} \cdot 3 = 0{,}3$$

2 Repetir o processo para Gauss-Seidel

$$M_G = -(L+D)^{-1}U$$
$$C_G = (L+D)^{-1}b$$

$$M_G = -\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}}_{(L+D)^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não vamos inverter matrizes diretamente!!

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b$$
$$\Rightarrow (L+D)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

Basta resolver o sistema triangular inferior

Sunday, March 28, 2021 2:41 PM

$x^{(1)}$ será solução do sistema

$$(L+D)\,x^{(1)} = -\cancel{Ux^{(0)}}^{\,0} + b$$

$$(L+D)\,x^{(1)} = b$$

Primeira iteração

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = 5/4$$

$$-x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} = -4$$

$$-\frac{5}{4} + 3x_2^{(1)} = -4$$

$$-5 + 12x_2^{(1)} = -16$$

$$12x_2^{(1)} = -11$$

$$x_2^{(1)} = -11/12$$

$$2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 5x_3^{(1)} = 1$$

$$\frac{5}{2} - \frac{11}{6} + 5x_3^{(1)} = 1$$

$$5x_3^{(1)} = 1 - \frac{5}{2} + \frac{11}{6}$$

$$5x_3^{(1)} = \frac{6-15+11}{6}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{2}{30} = 1/15$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -11/12 \\ 1/15 \end{bmatrix}$$

Segunda Iteração

$$(L+D)\,x^{(2)} = -Ux^{(1)} + b$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 \\ -11/12 \\ 1/15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -11/12 - 1/15 \\ 1/15 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 59/60 + 5 \\ -1/15 - 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 359/60 \\ -61/15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 359 \\ -244 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 359 \\ -244 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1^{(2)} = \frac{1}{60}\left(\frac{359}{4}\right) = 359/240$$

$$\Rightarrow x_2^{(2)} = \left(-\frac{244}{60} + x_1^{(1)}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{-976+359}{240}\right) = \frac{-617}{720}$$

$$\Rightarrow x_3^{(2)} = \left(1 - 2x_2^{(2)} - 2x_1^{(2)}\right) \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \left(1 + \frac{617}{360} - \frac{359}{120}\right) \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \left(\frac{360 + 617 - 1077}{360}\right) \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{-100}{360} \cdot \frac{1}{5} = \frac{-20}{360} = -\frac{1}{18}$$

Portanto $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 359/240 \\ -617/720 \\ -1/18 \end{bmatrix}$

Sunday, March 28, 2021 3:39 PM

3

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

a) Mostre que $\rho(M_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ e calcule $\|M_J\|_\infty$

$M_J = -D^{-1}(L+U)$

$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|M_J\|_\infty = \frac{1}{2} \cdot \max\{|2|, |-4|, |2|\}$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$\downarrow$ Autovalores

$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$

$-\lambda^3 - 2 + 2 - \lambda - 2\lambda - 2\lambda = 0$

$-\lambda^3 - 5\lambda = 0$

$\lambda(-\lambda^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = +i\sqrt{5} \\ \lambda_3 = -i\sqrt{5} \end{cases}$ $\Rightarrow \rho\left(\frac{1}{2}M_J\right) = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \rho(M_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

b) Mostre que $\rho(M_G) = \frac{1}{2}$, e calcule $\|M_G\|_\infty$

$M_G = -(L+D)^{-1}U$

$= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= -\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \|M_G\|_\infty = \max\{1, 1, 1/2\} = 1$

$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ Autovalores $\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ $(1-\lambda)^2(-\lambda) = 0$

$\lambda(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = +1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$ $\rho\left(-\frac{1}{2}M_G\right) = 1$

$\Rightarrow \rho(M_G) = 1/2$

Sunday, March 28, 2021 4:27 PM

4) O método converge se M_J converge.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & -4\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad D = I_{3\times 3}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = -I \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\beta & 0 \end{bmatrix}$$

M_J é convergente $\Leftrightarrow \rho(M_J) < 1$

Autovalores $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ \beta^2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 4\beta & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 8\beta^3 = 0$

$$\lambda^3 = 8\beta^3 \Rightarrow \lambda_1 = 2\beta$$

$$\lambda_2 = 2\beta\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\beta + i\sqrt{3}\beta$$

Raízes Complexas
2ª Fórmula de Moivre

$$\lambda_3 = 2\beta\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = -\beta - i\sqrt{3}\beta$$

Assim, $\rho(M_J) = \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \text{máx}\{|2\beta|, \sqrt{\beta^2 + (\sqrt{3}\beta)^2}\} = \text{máx}\{|2\beta|, \sqrt{4\beta^2}\} = \text{máx}\{|2\beta|, |2\beta|\}$
$= |2\beta|$

Portanto uma condição seria $|2\beta| < 1$

Questão 5 - A1 2019

Considere o metodo iterativo definido pela equação $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$. Em cada item a seguir, diga justificando, se o método converge ou não. Se convergir, diga para qual vetor ele converge.

a) $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sunday, March 28, 2021 6:27 PM

Resolução:

a) O método converge se a matriz B é convergente, o que ocorre, se, e somente se $\rho(B) < 1$. Calculemos então os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 2/3-\lambda & 1 \\ 0 & 2/3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2/3-\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2/3$$

$$\Rightarrow \rho(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = 2/3 < 1$$, logo B é convergente

O método convergirá para a solução x^*, então:

$$x^* = Bx^* + c$$

$$\Rightarrow x^* - Bx^* = c$$

$$\Rightarrow (I - B)x^* = c$$

Então, para encontrar x^*, basta resolver o sistema $(I-B)x^* = c$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1^*}{3} - x_2^* = 0 \\ \frac{x_2^*}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2^* = 3$$

$$\frac{x_1^*}{3} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^* = 9$$

Assim, temos $x^* = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) Calculando os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 2/3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2/3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$\rho(B) = |\lambda_2| = 2 > 1$, logo, B não é convergente.

Sunday, March 28, 2021 6:59 PM

Questão 6 - A1 2019

Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 \\ \alpha & 0 & c \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica positiva definida. Mostre que o Método Iterativo de Jacobi para resolver o sistema $Ax = b$ converge quaisquer que sejam b e o vetor inicial x_0.

Resolução:

Temos:

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

assim, $M_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha/a \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores de M_J:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha/a \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\alpha/c & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda \frac{\alpha^2}{ac} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\alpha^2/ac - \lambda^2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}} \\ \lambda_3 = -\frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}} \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{ac}$$

Dessa forma o raio espectral $\rho(M_J)$ será $\frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}}$, se provarmos que $\rho(M_J) < 1$, o problema acaba. Note que não usamos ainda o fato de A ser definida positiva. Pelo Teorema 5.22 a. do Poole, todos os autovalores de A são estritamente positivos. Vamos calcular então, os autovalores de A, para tentar chegar em restrições sobre $\rho(M_J)$.

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & c-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) - \alpha^2(b-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (b-\lambda)\left[(a-\lambda)(c-\lambda) - \alpha^2\right] = 0$$

$$\lambda_1 = b, \text{ ou } (a-\lambda)(c-\lambda) - \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \alpha^2 = 0, \text{ por Bháskara, teremos:}$$

Sunday, March 28, 2021 7:32 PM

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-\alpha^2)}}{2}$$

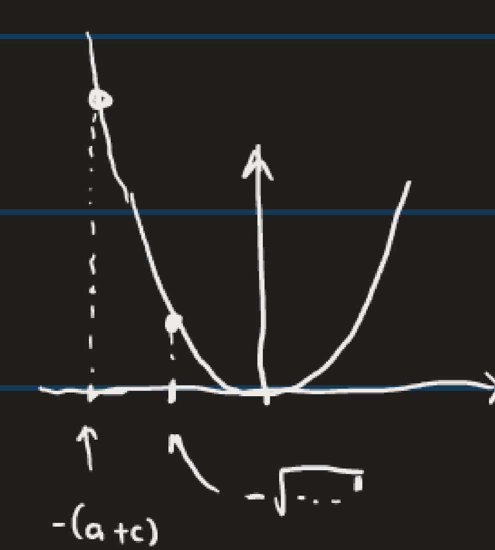
Precisamos que $\lambda > 0$, então:

$$(a+c) - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-\alpha^2)} > 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-\alpha^2)} > -(a+c)$$

elevando ao quadrado

$$\Rightarrow \cancel{(a+c)^2} - 4(ac-\alpha^2) < \cancel{(a+c)^2}$$



$$\Rightarrow -4(ac-\alpha^2) < 0$$

$$\Rightarrow 4(ac-\alpha^2) > 0$$

$$\Rightarrow ac > \alpha^2$$

Como $\alpha^2 > 0$, $ac > \alpha^2 > 0$, então podemos extrair a raiz quadrada sem preocupações:

$$\Rightarrow \sqrt{ac} > \sqrt{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ac} > |\alpha|$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}} \quad (*)$$

Como o raio espectral $\rho(M_J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}}$ e por $(*)$ $\frac{|\alpha|}{\sqrt{ac}} < 1$, temos $\rho(M_J) < 1$, o que implica que o método convergirá para quaisquer condições iniciais b e x_0.