

Questão 1

a) Fazendo  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 2.1 \\ 1.5 \\ 2.1 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix}$  queremos encontrar  $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

tal que  $A\alpha$  seja a melhor aproximação de  $y$  no espaço coluna de  $A$ .  
Tal vetor de coeficientes pode ser encontrado via resolução do sistema linear  $A^T A \alpha = A^T y$ .

Usando o Scilab, obtemos  $a \approx 1.798$  e  $b \approx 0.188$ .

```
1 --> x = [-3;-3;-1;0;1;2;3];  
2 --> A = [ones(7,1) x];  
3 --> y = [1;1.2;2.1;1.5;2.1;2.5;2];  
4 --> alpha = Gaussian_Elimination_4(A'*A,A'*y)  
5 alpha =  
6 1.7982609  
7 0.1878261  
8
```

- b) Com o modelo  $y(x) = a + bx$  do item anterior, realizando os cálculos no Scilab obtemos:

$$y(4) = a + 4b \approx 2.549$$
$$y(10) = a + 10b \approx 3.676$$

- c) No item (a) para a aproximação por função afim, usamos uma matriz com uma coluna de *uns* e outra coluna com os elementos  $x$  da tabela. Para o modelo quadrático deste exercício, adicionaremos uma coluna  $x^2$  para aproximar uma parábola. Dessa forma temos uma matriz modificada:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

e mantemos  $y$  como mesmo vetor do item (a).

Agora o que estamos buscando é um vetor  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , pois a multiplicação  $A_2\alpha_2$  estará representando  $a + bx + cx^2$  com  $x$  vetor coluna dos dados da tabela.

Agora os três coeficientes serão encontrados pela solução do sistema  $A_2^T A_2 \alpha_2 = A_2^T y$ . Pelo Scilab encontra-se:

$$\begin{aligned} a &\approx 1.975 \\ b &\approx 0.171 \\ c &\approx -0.038 \end{aligned}$$

```
1  --> A2 = [ones(7,1) x x^2];
2  --> alpha2 = Gaussian_Elimination_4(A2'*A2,A2'*y)
3  alpha2 =
4  1.9752147
5  0.1712883
6  -0.0380368
7
```

- d) Usando os coeficientes encontrados na função  $y(x) = a + bx + cx^2$ , e o Scilab para realização dos cálculos, temos:

$$\begin{aligned} y(4) &= a + 4b + 16c \approx 2.052 \\ y(10) &= a + 10b + 100c \approx -0.115 \end{aligned}$$

```
1 --> a=alpha2(1);b=alpha2(2);c=alpha2(3);
2 --> a+4*b+16*c
3 ans =
4 2.0517791
5
6 --> a+10*b+100*c
7 ans =
8 -0.1155828
9
```

- e) Para determinar qual modelo melhor se ajustou aos dados vamos calcular o erro quadrático de cada um deles. O erro do modelo linear do item (a) será  $e_1 = \|y - A\alpha\|$  e do modelo quadrático do item (c) será  $e_2 = \|y - A_2\alpha_2\|$ . Utilizando o Scilab para os cálculos, encontramos:

$$e_1 \approx 0.797$$

$$e_2 \approx 0.701$$

Veja que  $e_2 < e_1$ , portanto, o modelo quadrático se ajustou melhor aos dados.

```
1 --> e1 = norm(y-A*alpha)
2 e1 =
3 0.7969507
4
5 --> e2=norm(y-A2*alpha2)
6 e2 =
7 0.7011297
8
```

## Questão 2

- a) Tendo a fatoração  $QR$  da matriz  $A$ , se  $R$  é invertível a solução por mínimos quadrados do sistema  $Ax = b$  é dada por  $x = R^{-1}Q^Tb$ . Para demonstrar tal fato, sabemos que tal solução satisfaz  $A^T Ax = A^T b$ . Substituindo  $A$  por  $QR$  e usando  $Q^{-1} = Q^T$  mais o fato de  $R$

invertível  $\Rightarrow R^T$  invertível, temos:

$$\begin{aligned} A^T Ax &= A^T b \Rightarrow (QR)^T (QR)x = (QR)^T b \\ &\Rightarrow R^T Q^T QRx = R^T Q^T b \\ &\Rightarrow R^T (Q^{-1}Q)Rx = R^T Q^T b \\ &\Rightarrow R^T IRx = R^T Q^T b \\ &\Rightarrow Rx = Q^T b \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Rightarrow x = R^{-1}Q^T b \tag{2}$$

Computacionalmente ou mesmo para cálculos manuais, pode ser preferível encontrar  $x$  resolvendo o sistema linear (1) de inverter  $R$  e

usar (2). Sendo  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  o vetor de respostas obtido através do

número da matrícula. A solução procurada é obtida resolvendo o sistema linear em (1), que no caso será:

$$Rx = Q^T b$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0.4 \\ 0 & 2.417 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.546 & 0.728 & -0.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

A solução a partir daqui é individual, mas pode ser resolvida via `Gaussian_Elimination_4(R,Q'*b)` após definir  $R, Q$  e  $b$  no console, ou substituindo  $b$  no sistema acima e prosseguir os cálculos manualmente.

b) Seja  $x = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  a primeira coluna de  $B$ , vamos transformá-la em

$\pm \begin{bmatrix} \|x\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  via transformação ortogonal  $H_1$  à ser descoberta pelo Método de Householder.

Utilizaremos o Refletor de Householder  $H_1 = I - 2uu^T$  com  $u = \frac{x - H_1 x}{\|x - H_1 x\|}$ . Como  $\|x\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ ,

podemos escolher  $H_1x$  como  $[5 \ 0 \ 0]^T$  ou  $[-5 \ 0 \ 0]^T$ ; Apesar de ambos darem fatorações QR válidas no final, vamos escolher  $H_1x$  tal que  $\|x - H_1x\|$  seja máximo. No caso, é fácil ver que tal  $H_1x$  será  $[5 \ 0 \ 0]^T$  nesse critério, bastando olhar para a primeira coordenada de  $x$  e ver que subtraindo com 5 teremos -9 que é maior em módulo do que  $-4 - (-5) = 1$ .

Encontrando o vetor  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{x - H_1x}{\|x - H_1x\|} = \frac{[-9 \ 3 \ 0]^T}{\|[-9 \ 3 \ 0]^T\|} \\ &= \frac{[-9 \ 3 \ 0]^T}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{[-9 \ 3 \ 0]^T}{\sqrt{90}} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{10}}[-9 \ 3 \ 0]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Encontrando a matriz  $H_1$ :

$$\begin{aligned} H_1 &= I - 2uu^T \\ &= I - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= I - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para encontrar  $R_1$  multiplicamos  $H_1$  por  $B$ .

$$\begin{aligned} R_1 &= H_1 B \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4^2 + 3^2 & -4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ -3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 25 & -2 \\ 0 & 14 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2/5 \\ 0 & 14/5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consolidando a resposta, temos  $H_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  e  $R_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2/5 \\ 0 & 14/5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

### Questão 3

Tome a fórmula  $x = \frac{30 - \sqrt{896}}{2}$  e multiplique espertamente por  $\frac{30 + \sqrt{896}}{30 + \sqrt{896}}$ , assim, teremos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(30 - \sqrt{896})(30 + \sqrt{896})}{2(30 + \sqrt{896})} \\ &= \frac{30^2 - 896}{60 + 2\sqrt{896}} \\ &= \frac{900 - 896}{30 + 2\sqrt{896}} = \frac{4}{60 + 2\sqrt{896}} \\ &= \frac{2}{30 + \sqrt{896}} \end{aligned}$$

Utilizando 29.9 como aproximação da raiz nessa nova fórmula, temos  $x = \frac{2}{30 + 29.9} = \frac{2}{59.9} \approx 0.0333890$ .  
O erro relativo à aproximação do enunciado que usa encontra  $x \approx 0.0333705$  será:

$$\frac{0.0333890 - 0.0333705}{0.0333705} \approx 0.0005544$$

ou ainda, 0.05544% que é bem menor que 49%.

Uma nova proposta de algoritmo de aproximação é usar então a fórmula

alternativa  $\frac{2}{30 + \sqrt{896}}$ .

Porque tivemos tamanha redução? Seja  $r = \sqrt{896}$  a raiz exata e  $\Delta r$  uma perturbação de forma que  $r + \Delta r$  seja uma aproximação da raiz de 896.

Usando  $x = \frac{30 - \sqrt{896}}{2}$ , o erro relativo será:

$$\begin{aligned} \frac{|(30 - r - \Delta r)/2 - (30 - r)/2|}{(30 - r)/2} &= \frac{|30 - r - \Delta r - 30 + r|}{30 - r} \\ &= \frac{|-\Delta r|}{30 - r} \\ &= \frac{|\Delta r|}{30 - r} \end{aligned}$$

Como 30 é numericamente muito próximo de  $r$  (na ordem de 0.066741) é necessário uma perturbação  $\Delta r$  bem menor, para que o erro relativo seja pequeno. O mal condicionamento numérico se dá por essa proximidade de 30 e  $r$  no denominador do erro, o que produz erros grandes se o numerador não for pequeno suficiente. A aproximação de 29.9 por exemplo, não é uma aproximação ruim, mas equivale a um  $\Delta r$  da ordem de 0.033 que corresponde aos 49% vistos no enunciado.

A modificação proposta  $x = \frac{2}{30 + \sqrt{896}}$ , aceita perturbações  $\Delta r$  mais gros-

seiras do que a fórmula anterior, como vemos no cálculo a seguir:

$$\begin{aligned} & \frac{|2/(30+r+\Delta r) - 2/(30+r)|}{2/(30+r)} \\ &= \frac{|1/(30+r+\Delta r) - 1/(30+r)|}{1/(30+r)} \\ &= \left| \frac{30+r}{30+r+\Delta r} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{30+r-30-r-\Delta r}{30+r+\Delta r} \right| \\ &= \frac{|\Delta r|}{30+r+\Delta r} \end{aligned}$$

Esta última expressão mostra que a nova fórmula é muito mais estável numericamente, pois o denominador é grande suficiente (na ordem de 60) para aceitar perturbações bem grosseiras sobre  $r$  e ainda assim manter o erro relativo pequeno. Apenas como exemplo se aproximarmos  $\sqrt{896}$  por 28, com  $\Delta r \approx 1.9332591$  teremos um erro relativo de 0.0312489 ou aproximadamente 3.1%. Achou muito? Usando tal  $\Delta r$  com o primeiro método chega-se a um erro da ordem de 28.966630 ou ainda 2896.63% !!!