Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística
Aluno: Rener de Souza Oliveira

15 de novembro de 2020

Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros, Ω, em afirmações testáveis sobre o espaço amostral $\mathcal{X}^n$.
Um teste $\delta(\boldsymbol{X})$ é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula (H_0) sobre $\theta \in \Omega$ com base em uma amostra $\boldsymbol{X}$. A capacidade de um teste de rejeitar H_0 quando ela é falsa é medida pela função poder, $\pi(\theta|\delta)$. Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento δ_A é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento δ_B para testar a mesma hipótese.
Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

1 - Motivação e Definição

Sejam:

$$\begin{aligned} H_0 :& \theta \in \Omega_0 \subset \Omega, \\ H_1 :& \theta \in \Omega_1 \subset \Omega, \\ \text{onde } \Omega_1 &= \Omega \setminus \Omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ao realizar um procedimento de teste $\delta(\boldsymbol{X})$, é desejável que a função poder $\pi(\theta|\delta) \stackrel{\text{def}}{:=} \Pr(\textit{Rejeitar } H_0|\theta)$ seja menor ou igual à um nível de significância $\alpha_0 \in (0,1)$, quando $\theta \in \Omega_0$, limitando superiormente a probabilidade de erro do tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). Podemos expressar tal propriedade da seguinte forma:

$$\alpha(\delta) \leq \alpha_0$$

Onde $\alpha(\delta) \stackrel{\text{def}}{:=} \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)$ é o tamanho do teste.

Além disso, queremos também ter algum controle sobre a probabilidade de erro do tipo II (não rejeitar H_0 quando ela é falsa). Como a probabilidade de tal erro quando $\theta \in \Omega_1$ é igual a $1 - \pi(\theta|\delta)$, queremos que, na região onde H_0 é falsa (Ω_1) a função poder $\pi(\theta|\delta)$ seja máxima, para todo θ em tal região. Tal maximização, minimiza a probabilidade de erro do tipo II quando $\theta \in \Omega_1$, isso nem sempre é possível, mas quando for, temos um nome especial para esse teste, que segue abaixo sua definição:

Definicão 1 ***(Teste Uniformemente mais poderoso)*** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de teste para as hipóteses (1); $\delta^* \in \mathcal{C}$ é chamado de uniformemente mais poderoso (UMP[1]) da classe $\mathcal{C}$, se:*

$$\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta|\delta) \ \forall \, \theta \in \Omega_1,$$

para qualquer teste $\delta \in \mathcal{C}$.

Seguindo a motivação dada acima, podemos definir $\mathcal{C}$ como o conjunto de todos dos testes de tamanho menor ou igual a α_0, limitando o erro tipo I. Neste caso, chamamos δ^* de UMP para (1) ao nível α_0.

2 - Razão de Verossimilhança Monótona

Definicão 2 ***(Razão de Verossimilhanças Monótona)*** *Seja $f_n(\boldsymbol{x}|\theta)$ a função de verossimilhança das observações $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, e $T = r(\boldsymbol{X})$ uma estatística. Dizemos que a distribuição dos dados tem **razão de verossimilhanças monótona** quando, $\forall \, \theta_1, \theta_2 \in \Omega; \theta_1 < \theta_2$, a razão $\dfrac{f(\boldsymbol{x}|\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}$ depende dos dados através de $r(\boldsymbol{x})$ somente, e é uma função monótona de $r(\boldsymbol{x})$ sob seu espaço de definição.*

3 - UMP para H_0 simples

Considere uma hipótese nula simples, $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \Omega$. Mostraremos que, se vale o Teorema da Fatorização, e existem c e α_0 tais que

$$\Pr\left(r(\boldsymbol{X}) \geq c \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha_0,$$

então o procedimento δ^* que rejeita H_0 se $r(\boldsymbol{X}) \geq c$ é UMP para H_0 ao nível α_0.
Mas antes, vamos enunciar alguns teoremas:

Teorema 1 ***(Teorema da Fatorização)(citar degroot)*** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ amostra aleatória de uma distribuição de densidade ou massa $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \Omega$. Uma estatística $T = r(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é suficiente para θ, se, e somente se a distribuição conjunta dos dados $f_n(\boldsymbol{x}|\theta)$ pode ser fatorizada como:*

$$f_n(\boldsymbol{x}|\theta) = u(\boldsymbol{x})v[r(\boldsymbol{x}), \theta],$$

para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e $\forall \theta \in \Omega$. u e v são funções não negativas.

[1] Uniformly Most Powerful Test

A demostração pode ser encontrada em (degroot 445)

Teorema 2 ***(Lema de Neyman-Pearson)(citar casella 388-389)*** *Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ uma amostra indexada por θ. Considere as hipóteses*

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \theta = \theta_0, \\
H_1 &: \theta = \theta_1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

e seja $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_i)$, com $i = 0, 1$ a função de densidade ou massa dos dados.
Seja $R \in \mathbb{R}^n$ uma região de rejeição que satisfaça:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} \in R \ se \ f(\boldsymbol{x}|\theta_1) \geq kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \\
&e \ \boldsymbol{x} \in R^C \ se \ f(\boldsymbol{x}|\theta_1) \leq kf(\boldsymbol{x}|\theta_0),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

para algum $k \geq 0$ e

$$
\Pr(\boldsymbol{X} \in R|\theta = \theta_0) = \alpha_0. \tag{4}
$$

Então, todo teste que satisfaz (3) e (4) é UMP ao nivel α_0.

A demostração será omitida pois pode ser encontrada em (citar casella).

Corolário 1 *Considere as hipóteses (2). Seja $T(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente para θ e $g(t|\theta_i)$ $i = 0, 1$, uma função de $t = T(\boldsymbol{x})$ tal que fatoriza a verossimilhança dos dados em $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_i) = g(t|\theta_i)u(\boldsymbol{x})$, para alguma função $u(\boldsymbol{x}) \geq 0$.*
Seja δ um teste que rejeite H_0 se T pertence a uma região de rejeição S (subconjunto do espaço de definição de T). Assim, δ será UMP ao nível α_0 se satisfazer:

$$
\begin{aligned}
&g(t|\theta_1) \geq kg(t|\theta_0) \implies t \in S \\
&e \ g(t|\theta_1) \leq kg(t|\theta_0) \implies t \in S^C,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

para algum $k \geq 0$ e

$$
\Pr[T(\boldsymbol{X}) \in S|\theta = \theta_0] = \alpha_0. \tag{6}
$$

Demonstração: Definindo $R = \{\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{x}) \in S\}$, rejeitaremos H_0 se $\boldsymbol{x} \in R$. Pelo Teorema da Fatorização, dado que $T(\boldsymbol{X})$ é suficiente, a verossimilhança de $\boldsymbol{X}$ pode ser escrita como $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_i) = g(T(\boldsymbol{x})|\theta_i)u(\boldsymbol{x})$, $i = 0, 1$, para alguma função $u(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
Multiplicando tal função nas desigualdades (5) temos:

$$
\begin{aligned}
&g(T(\boldsymbol{x})|\theta_1) \geq kg(T(\boldsymbol{x})|\theta_0) \\
\Leftrightarrow &g(T(\boldsymbol{x})|\theta_1)u(\boldsymbol{x}) \geq kg(T(\boldsymbol{x})|\theta_0)u(\boldsymbol{x}) \\
\Leftrightarrow &f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) \geq kf_n(\boldsymbol{x}|\theta_0)
\end{aligned}
$$

Assim, tem-se: $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) \geq k f_n(\boldsymbol{x}|\theta_0) \implies T(\boldsymbol{x}) \in S \implies \boldsymbol{x} \in R$.
Analogamente, $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) \leq k f_n(\boldsymbol{x}|\theta_0) \implies \boldsymbol{x} \in R^C$.
De (6), tem-se:

$$\Pr(\boldsymbol{X} \in R|\theta = \theta_0) = \Pr[T(\boldsymbol{X}) \in S|\theta = \theta_0] = \alpha_0$$

Pelo **Lema de Neyman-Pearson** concluímos que o teste δ é UMP ao nível α_0.
Voltando agora ao problema inicial da seção, queremos provar que δ^* é UMP ao nível α_0 para $H_0 : \theta = \theta_0$.
Primeiramente precisamos provar que $\alpha(\delta^*) = \alpha_0$.

$$\begin{aligned}\alpha(\delta^*) &= \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta^*) \\ &= \sup_{\theta \in \Omega_0} \Pr[r(\boldsymbol{X}) \geq c|\theta]\end{aligned}$$

Como $\Omega_0 = \{\theta_0\}$, o supremo ocorre em θ_0 o que implica que $\alpha(\delta^*) = \alpha_0$.
Agora precisamos provar que δ^* é UMP.
Façamos θ' arbitrário, com $\theta' \neq \theta_0$, testaremos $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1' : \theta = \theta'$.
No problema em questão, vale o **Teorema da Fatorização** para $r(\boldsymbol{X})$, logo assumindo sua suficiência, temos que a verossimilhança pode ser escrita como $f_n(\boldsymbol{x}|\theta) = g(r(\boldsymbol{x})|\theta)u(\boldsymbol{x})$, para alguma função $u(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
Seja $t = r(\boldsymbol{x})$; Definamos:

$$k = \inf_{t \in \mathcal{T}} \frac{f_n(\boldsymbol{x}|\theta')}{f_n(\boldsymbol{x}|\theta_0)} = \frac{g(t|\theta')}{g(t|\theta_0)}$$

Com $\mathcal{T} :\overset{\text{def}}{=} \{t|t \geq c\}$
Tal ínfimo existe, pois pelo Teorema da Fatorização, a função g é não-negativa, logo, o conjunto na qual estamos tomando ínfimo é limitado inferiormente por 0. Pelo análogo do Axioma do Supremo para ínfimos, k está bem definido.
Pela definição de ínfimo segue que:
$r(\boldsymbol{x}) \geq c \Leftrightarrow \dfrac{g(r(\boldsymbol{x})|\theta')}{g(r(\boldsymbol{x})|\theta_0)} \geq k$.
Pelo Corolário 1 do Lema de Neyman-Pearson, temos que δ^* é UMP para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1' : \theta = \theta'$, ou seja, $\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta'|\delta)$, para qualquer teste δ de tamanho α_0. Como θ' foi escolhido arbitrariamente diferente de θ_0, temos que δ^* satisfaz $\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta'|\delta)$ $\forall\, \theta' \neq \theta_0$, o que prova nossa afirmação inicial.
$\blacksquare$

4 - Duas-Caras e UMP para Bernoulli

Suponha que você encontra o Duas-Caras na rua e ele não vai com a sua... cara. Ele decide jogar a sua famosa moeda para o alto para decidir se te dá um cascudo. Se der cara (C), você toma um cascudo. Você, que sabe bem Estatística, pede que ele pelo menos jogue a moeda umas $n = 10$ vezes antes de tomar a decisão derradeira.

Surpreendentemente, ele concorda. Lança a moeda e obtém

KCKCKCCKKK

Você agora deve decidir se foge, se arriscando a tomar dois cascudos ao invés de um, ou se fica e possivelmente não toma cascudo nenhum. Se p é a probabilidade de dar cara, estamos interessados em testar a hipótese

$$H_0 : p \leq \frac{1}{2},$$
$$H_1 : p > \frac{1}{2}.$$

1. Escreva a razão de verossimilhanças para esta situação;

   Sejam p_0 e p_1, tais que $0 < p_0 \leq \frac{1}{2} < p_1 < 1$. Seja X_i a variável indicadora de cara no i-ésimo lançamento do Duas-Caras; Assumindo que os 10 lançamentos são independentes, temos $X_1, X_2, \ldots, X_{10} \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$, na qual $f(x_i|p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$.

   A verossimilhança sera então:

   $$f_n(\boldsymbol{x}|p) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^y(1-p)^{10-y},$$

   onde $y = \sum_{i=1}^{10} x_i$.

   Assim, a razão de verossimilhança será:

   $$\frac{f_n(\boldsymbol{x}|p_1)}{f_n(\boldsymbol{x}|p_0)} = \frac{p_1^y(1-p_1)^{10-y}}{p_0^y(1-p_0)^{10-y}}$$
   $$= \left[\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right]^y \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{10}$$

   Podemos ver que a razão depende dos dados somente através da estatística suficiente y, e que a expressão é monótona em y, pois $p_0 < p_1 \Rightarrow \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} > 1$, que mostra que a razão é estritamente crescente neste caso. Por definição, dizemos que a distribuição dos dados tem razão de verossimilhança monótona crescente (MLR[2] crescente).

2. Nesta situação, é do seu interesse encontrar um teste UMP. Faça isso e aplique o teste desenvolvido aos dados que conseguiu arrancar do Duas-Caras.

   Existe uma generalização dos resultados da seção anterior, que estende a noção de existência de UMP para H_0 composta, e inclui a hipótese de distribuição com MLR. Vamos enunciá-lo e demonstrá-lo brevemente, pois basta algumas adaptações da demonstração da seção anterior para H_0 simples.

[2]Monotone Likelihood Ratio

Teorema 3 ***(Teorema de Karlin-Rubin)*** *Sejam as hipóteses:*

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

Seja $r(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente para θ. Suponha que a famiia de distribuição conjunta dos dados $\{f_n(\boldsymbol{x}|\theta)|\theta \in \Omega\}$ tem razão de verossimilhança monótona. Assim, para qualquer c, o teste que rejeita H_0 se $r(\boldsymbol{x})$ se $r(\boldsymbol{x}) \geq c$ é um teste UMP ao nível α_0, onde $\alpha_0 = \Pr[r(\boldsymbol{X}) \geq c|\theta = \theta_0]$.