Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística
Aluno: Rener de Souza Oliveira

14 de novembro de 2020

Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros, Ω, em afirmações testáveis sobre o espaço amostral $\mathcal{X}^n$.
Um teste $\delta(\boldsymbol{X})$ é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula (H_0) sobre $\theta \in \Omega$ com base em uma amostra $\boldsymbol{X}$. A capacidade de um teste de rejeitar H_0 quando ela é falsa é medida pela função poder, $\pi(\theta|\delta)$. Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento δ_A é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento δ_B para testar a mesma hipótese.
Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

1 Motivação e Definição

Sejam:

$$\begin{aligned} H_0 :&\theta \in \Omega_0 \subset \Omega, \\ H_1 :&\theta \in \Omega_1 \subset \Omega, \\ \text{onde } \Omega_1 &= \Omega \setminus \Omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ao realizar um procedimento de teste $\delta(\boldsymbol{X})$, é desejável que a função poder $\pi(\theta|\delta) :\stackrel{\text{def}}{=} \Pr(\textit{Rejeitar } H_0|\theta)$ seja menor ou igual à um nível de significância $\alpha_0 \in (0, 1)$, quando $\theta \in \Omega_0$, limitando superiormente a probabilidade de erro do tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). Podemos expressar tal propriedade da seguinte forma:

$$\alpha(\delta) \leq \alpha_0$$

Onde $\alpha(\delta) :\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)$ é o tamanho do teste.

Além disso, queremos também ter algum controle sobre a probabilidade de erro do tipo II (não rejeitar H_0 quando ela é falsa). Como a probabilidade de tal erro quando $\theta \in \Omega_1$ é igual a $1 - \pi(\theta|\delta)$, queremos que, na região onde H_0 é falsa (Ω_1) a função poder $\pi(\theta|\delta)$ seja máxima, para todo θ em tal região. Tal maximização, minimiza a probabilidade de erro do tipo II quando $\theta \in \Omega_1$, isso nem sempre é possível, mas quando for, temos um nome especial para esse teste, que segue abaixo sua definição:

Definicão 1 ***(Teste Uniformemente mais poderoso)*** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de teste para as hipóteses (1); $\delta^* \in \mathcal{C}$ é chamado de uniformemente mais poderoso da classe $\mathcal{C}$, se:*

$$\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta|\delta) \ \forall \, \theta \in \Omega_1,$$

para qualquer teste $\delta \in \mathcal{C}$.

Seguindo a motivação dada acima, podemos definir $\mathcal{C}$ como o conjunto de todos dos testes de tamanho menor ou igual a α_0, limitando o erro tipo I.

2 Razão de Verossimilhanças Monótona