

Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística

Aluno: Rener de Souza Oliveira

15 de novembro de 2020

Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros, Ω , em afirmações testáveis sobre o espaço amostral \mathcal{X}^n .

Um teste $\delta(\mathbf{X})$ é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula (H_0) sobre $\theta \in \Omega$ com base em uma amostra \mathbf{X} . A capacidade de um teste de rejeitar H_0 quando ela é falsa é medida pela função poder, $\pi(\theta|\delta)$. Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento δ_A é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento δ_B para testar a mesma hipótese.

Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

1 Motivação e Definição

Sejam:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &\in \Omega_0 \subset \Omega, \\ H_1 : \theta &\in \Omega_1 \subset \Omega, \\ \text{onde } \Omega_1 &= \Omega \setminus \Omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ao realizar um procedimento de teste $\delta(\mathbf{X})$, é desejável que a função poder $\pi(\theta|\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(\textit{Rejeitar } H_0 | \theta)$ seja menor ou igual à um nível de significância $\alpha_0 \in (0, 1)$, quando $\theta \in \Omega_0$, limitando superiormente a probabilidade de erro do tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). Podemos expressar tal propriedade da seguinte forma:

$$\alpha(\delta) \leq \alpha_0$$

Onde $\alpha(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)$ é o tamanho do teste.

Além disso, queremos também ter algum controle sobre a probabilidade de erro do tipo II (não rejeitar H_0 quando ela é falsa). Como a probabilidade de tal erro quando $\theta \in \Omega_1$ é igual a $1 - \pi(\theta|\delta)$, queremos que, na região onde H_0 é falsa (Ω_1) a função poder $\pi(\theta|\delta)$ seja máxima, para todo θ em tal região. Tal maximização, minimiza a probabilidade de erro do tipo II quando $\theta \in \Omega_1$, isso nem sempre é possível, mas quando for, temos um nome especial para esse teste, que segue abaixo sua definição:

Definição 1 (*Teste Uniformemente mais poderoso*) *Seja \mathcal{C} uma classe de teste para as hipóteses (1); $\delta^* \in \mathcal{C}$ é chamado de uniformemente mais poderoso (UMP^1) da classe \mathcal{C} , se:*

$$\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta|\delta) \quad \forall \theta \in \Omega_1,$$

para qualquer teste $\delta \in \mathcal{C}$.

Seguindo a motivação dada acima, podemos definir \mathcal{C} como o conjunto de todos dos testes de tamanho menor ou igual a α_0 , limitando o erro tipo I. Neste caso, chamamos δ^* de UMP para (1) ao nível α_0 .

2 Razão de Verossimilhança Monótona

Definição 2 (*Razão de Verossimilhanças Monótona*) *Seja $f_n(\mathbf{x}|\theta)$ a função de verossimilhança das observações $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, e $T = r(\mathbf{X})$ uma estatística. Dizemos que a distribuição dos dados tem **razão de verossimilhanças monótona** quando, $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Omega; \theta_1 < \theta_2$, a razão $\frac{f(\mathbf{x}|\theta_2)}{f(\mathbf{x}|\theta_1)}$ depende dos dados através de $r(\mathbf{x})$ somente, e é uma função monótona de $r(\mathbf{x})$ sob seu espaço de definição.*

3 UMP para H_0 simples

Considere uma hipótese nula simples, $H_0 : \theta = \theta_0, \theta_0 \in \Omega$. Mostraremos que, se vale o Teorema da Fatorização, e existem c e α_0 tais que

$$\Pr(r(\mathbf{X}) \geq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha_0,$$

então o procedimento δ^* que rejeita H_0 se $r(\mathbf{X}) \geq c$ é UMP para H_0 ao nível α_0 .

Mas antes, vamos enunciar alguns teoremas:

Teorema 1 (*Teorema da Fatorização*)(*citar degroot*) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n amostra aleatória de uma distribuição de densidade ou massa $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \Omega$. Uma estatística $T = r(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é suficiente para θ , se, e somente se a distribuição conjunta dos dados $f_n(\mathbf{x}|\theta)$ pode ser fatorizada como:*

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) = u(\mathbf{x})v[r(\mathbf{x}), \theta],$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e $\forall \theta \in \Omega$. u e v são funções não negativas.

¹Uniformly Most Powerful Test

A demonstração pode ser encontrada em (degroot 445)

Teorema 2 (*Lema de Neyman-Pearson*)(*citar casella 388-389*) Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ uma amostra indexada por θ . Considere as hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &= \theta_0, \\ H_1 : \theta &= \theta_1, \end{aligned} \tag{2}$$

e seja $f_n(\mathbf{x}|\theta_i)$, com $i = 0, 1$ a função de densidade ou massa dos dados. Seja $R \in \mathbb{R}^n$ uma região de rejeição que satisfaça:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in R \text{ se } f(\mathbf{x}|\theta_1) &> k f(\mathbf{x}|\theta_0) \\ \text{e } \mathbf{x} \in R^C \text{ se } f(\mathbf{x}|\theta_1) &< k f(\mathbf{x}|\theta_0), \end{aligned} \tag{3}$$

para algum $k \geq 0$ e

$$\Pr(\mathbf{X} \in R | \theta = \theta_0) = \alpha_0. \tag{4}$$

Então, todo teste que satisfaz (2) e (3) é UMP ao nível α_0 .

A demonstração será omitida pois pode ser encontrada em (citar casella).

Corolário 1 Considere as hipóteses (2). Seja $T(\mathbf{X})$ uma estatística suficiente para θ e $g(t|\theta_i)$ a distribuição de T dado θ_i , $i = 0, 1$