Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística
Aluno: Rener de Souza Oliveira

15 de novembro de 2020

Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros, Ω, em afirmações testáveis sobre o espaço amostral $\mathcal{X}^n$.
Um teste $\delta(\boldsymbol{X})$ é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula (H_0) sobre $\theta \in \Omega$ com base em uma amostra $\boldsymbol{X}$. A capacidade de um teste de rejeitar H_0 quando ela é falsa é medida pela função poder, $\pi(\theta|\delta)$. Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento δ_A é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento δ_B para testar a mesma hipótese.
Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

1 - Motivação e Definição

Sejam:

$$\begin{aligned} H_0 :&\theta \in \Omega_0 \subset \Omega, \\ H_1 :&\theta \in \Omega_1 \subset \Omega, \\ \text{onde } \Omega_1 &= \Omega \setminus \Omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ao realizar um procedimento de teste $\delta(\boldsymbol{X})$, é desejável que a função poder $\pi(\theta|\delta) \stackrel{\text{def}}{:=} \Pr(\textit{Rejeitar } H_0|\theta)$ seja menor ou igual à um nível de significância $\alpha_0 \in (0, 1)$, quando $\theta \in \Omega_0$, limitando superiormente a probabilidade de erro do tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). Podemos expressar tal propriedade da seguinte forma:

$$\alpha(\delta) \leq \alpha_0$$

Onde $\alpha(\delta) \stackrel{\text{def}}{:=} \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)$ é o tamanho do teste.

Além disso, queremos também ter algum controle sobre a probabilidade de erro do tipo II (não rejeitar H_0 quando ela é falsa). Como a probabilidade de tal erro quando $\theta \in \Omega_1$ é igual a $1 - \pi(\theta|\delta)$, queremos que, na região onde H_0 é falsa (Ω_1) a função poder $\pi(\theta|\delta)$ seja máxima, para todo θ em tal região. Tal maximização, minimiza a probabilidade de erro do tipo II quando $\theta \in \Omega_1$, isso nem sempre é possível, mas quando for, temos um nome especial para esse teste, que segue abaixo sua definição:

Definicão 1 ***(Teste Uniformemente mais poderoso)*** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de teste para as hipóteses (1); $\delta^* \in \mathcal{C}$ é chamado de uniformemente mais poderoso (UMP[1]) da classe $\mathcal{C}$, se:*

$$\pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta|\delta)\ \forall\, \theta \in \Omega_1,$$

para qualquer teste $\delta \in \mathcal{C}$.

Seguindo a motivação dada acima, podemos definir $\mathcal{C}$ como o conjunto de todos dos testes de tamanho menor ou igual a α_0, limitando o erro tipo I. Neste caso, chamamos δ^* de UMP para (1) ao nível α_0.

2 - Razão de Verossimilhança Monótona

Definicão 2 ***(Razão de Verossimilhanças Monótona)*** *Seja $f_n(\boldsymbol{x}|\theta)$ a função de verossimilhança das observações $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, e $T = r(\boldsymbol{X})$ uma estatística. Dizemos que a distribuição dos dados tem* ***razão de verossimilhanças monótona*** *quando, $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \Omega; \theta_1 < \theta_2$, a razão $\dfrac{f(\boldsymbol{x}|\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}|\theta_1)}$ depende dos dados através de $r(\boldsymbol{x})$ somente, e é uma função monótona de $r(\boldsymbol{x})$ sob seu espaço de definição.*

3 - UMP para H_0 simples

Considere uma hipótese nula simples, $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \Omega$. Mostraremos que, se vale o Teorema da Fatorização, e existem c e α_0 tais que

$$\Pr\left(r(\boldsymbol{X}) \geq c \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha_0,$$

então o procedimento δ^* que rejeita H_0 se $r(\boldsymbol{X}) \geq c$ é UMP para H_0 ao nível α_0.
Mas antes, vamos enunciar alguns teoremas:

Teorema 1 ***(Teorema da Fatorização)(citar degroot)*** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ amostra aleatória de uma distribuição de densidade ou massa $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \Omega$. Uma estatística $T = r(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é suficiente para θ, se, e somente se a distribuição conjunta dos dados $f_n(\boldsymbol{x}|\theta)$ pode ser fatorizada como:*

$$f_n(\boldsymbol{x}|\theta) = u(\boldsymbol{x})v[r(\boldsymbol{x}), \theta],$$

para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e $\forall \theta \in \Omega$. u e v são funções não negativas.

[1]Uniformly Most Powerful Test

A demostração pode ser encontrada em (degroot 445)

Teorema 2 ***(Lema de Neyman-Pearson)(citar casella 388-389)*** *Seja* $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ *uma amostra indexada por* θ*. Considere as hipóteses*

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \theta = \theta_1, \end{aligned} \tag{2}$$

e seja $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_i)$*, com* $i = 0, 1$ *a função de densidade ou massa dos dados.*
Seja $R \in \mathbb{R}^n$ *uma região de rejeição que satisfaça:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} \in R \text{ se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \\ \\ \text{e } \boldsymbol{x} \in R^C \text{ se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) < kf(\boldsymbol{x}|\theta_0), \end{gathered} \tag{3}$$

para algum $k \geq 0$ *e*

$$\Pr(\boldsymbol{X} \in R|\theta = \theta_0) = \alpha_0. \tag{4}$$

Então, todo teste que satisfaz (3) e (3) é UMP ao nivel α_0*.*

A demostração será omitida pois pode ser encontrada em (citar casella).

Corolário 1 *Considere as hipóteses (2). Seja* $T(\boldsymbol{X})$ *uma estatística suficiente para* θ *e* $g(t|\theta_i)$ *a distribuição de* T *dado* θ_i*,* $i = 0, 1$*.*
Seja δ *um teste que rejeite* H_0 *se* T *pertence a uma região de rejeição* S *(subconjunto do espaço de definição de* T*). Assim,* δ *será UMP ao nível* α_0 *se satisfazer:*

$$\begin{gathered} g(t|\theta_1) > kg(t|\theta_0) \implies t \in S \\ \\ \text{e } g(t|\theta_1) < kg(t|\theta_0) \implies t \in S^C, \end{gathered} \tag{5}$$

para algum $k \geq 0$ *e*

$$\Pr[T(\boldsymbol{X}) \in S|\theta = \theta_0] = \alpha_0. \tag{6}$$

Demonstração: Definindo $R = \{\boldsymbol{x}|T(\boldsymbol{x}) \in S\}$, rejeitaremos H_0 se $\boldsymbol{x} \in R$. Pelo Teorema da Fatorização, dado que $T(\boldsymbol{X})$ é suficiente, a verossimilhança de $\boldsymbol{X}$ pode ser escrita como $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_i) = g(T(\boldsymbol{x})|\theta_i)u(\boldsymbol{x})$, $i = 0, 1$, para alguma função $u(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
Multiplicando tal função nas desigualdades (5) temos:

$$\begin{aligned} & g(T(\boldsymbol{x})|\theta_1) > kg(T(\boldsymbol{x})|\theta_0) \\ \Leftrightarrow & g(T(\boldsymbol{x})|\theta_1)u(\boldsymbol{x}) > kg(T(\boldsymbol{x})|\theta_0)u(\boldsymbol{x}) \\ \Leftrightarrow & f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf_n(\boldsymbol{x}|\theta_0) \end{aligned}$$

Assim, tem-se: $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf_n(\boldsymbol{x}|\theta_0) \implies T(\boldsymbol{x}) \in S \implies \boldsymbol{x} \in R$.
Analogamente, $f_n(\boldsymbol{x}|\theta_1) < kf_n(\boldsymbol{x}|\theta_0) \implies \boldsymbol{x} \in R^C$.
De (6), tem-se:

$$\Pr(\boldsymbol{X} \in R|\theta = \theta_0) = \Pr[T(\boldsymbol{X}) \in S|\theta = \theta_0] = \alpha_0$$

Pelo **Lema de Neyman-Pearson** concluímos que o teste δ é UMP ao nível α_0.