

# Trabalho IV: Testes uniformemente mais poderosos.

Disciplina: Inferência Estatística

Aluno: Rener de Souza Oliveira

13 de novembro de 2020

## 0.1 Introdução

Vimos que os testes de hipótese fornecem uma abordagem matematicamente sólida para traduzir hipóteses científicas sobre o processo gerador dos dados em decisões sobre os dados – isto é, traduzir afirmações sobre partições do espaço de parâmetros,  $\Omega$ , em afirmações testáveis sobre o espaço amostral  $\mathcal{X}^n$ .

Um teste  $\delta(\mathbf{X})$  é uma decisão (binária) de rejeitar ou não uma hipótese nula ( $H_0$ ) sobre  $\theta \in \Omega$  com base em uma amostra  $\mathbf{X}$ . A capacidade de um teste de rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa é medida pela função poder,  $\pi(\theta|\delta)$ . Nem todos os testes, no entanto, são criados iguais. Em certas situações, é possível mostrar que um procedimento  $\delta_A$  é *uniformemente* mais poderoso que outro procedimento  $\delta_B$  para testar a mesma hipótese.

Neste trabalho, vamos definir e aplicar o conceito de **teste uniformemente mais poderoso**.

## 1 Motivação e Definição

Sejam:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta \in \Omega_0 \subset \Omega, \\ H_1 : \theta \in \Omega_1 \subset \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

Ao realizar um procedimento de teste  $\delta(\mathbf{X})$ , é desejável que a função poder  $\pi(\theta|\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(\text{Rejeitar } H_0 | \theta)$  seja menor ou igual à um nível de significância  $\alpha_0 \in (0, 1)$ , quando  $\theta \in \Omega_0$ , limitando superiormente a probabilidade de erro do tipo I (rejeitar  $H_0$  quando ela é verdadeira). Podemos expressar tal propriedade da seguinte forma:

$$\alpha(\delta) \leq \alpha_0$$

Onde  $\alpha(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta)$  é o tamanho do teste.

Além disso, queremos também ter algum controle sobre a probabilidade de erro do tipo II (não rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa). Como a probabilidade de tal erro quando  $\theta \in \Omega_1$  é igual a  $1 - \pi(\theta|\delta)$ , queremos que, na região onde  $H_0$  é falsa ( $\Omega_1$ ) a função poder  $\pi(\theta|\delta)$  seja máxima, para todo  $\theta$  em tal região. Tal maximização, minimiza a probabilidade de erro do tipo II quando  $\theta \in \Omega_1$ , isso nem sempre é possível, mas quando for, temos um nome especial para esse teste, que segue abaixo sua definição:

(Teste Uniformemente mais poderoso) Um procedimento de teste  $\delta^*$  para as hipóteses (1) é chamado de uniformemente mais poderoso com nível de significância  $\alpha_0$  se:

$$\alpha(\delta^*) \leq \alpha_0 \text{ e} \\ \pi(\theta|\delta^*) \geq \pi(\theta|\delta) \quad \forall \theta \in \Omega_1$$

para qualquer teste  $\delta$  tal que  $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$ .