

Skript zum PVK zur Vorlesung

Netzwerke und Schaltungen 1

für D-ITET

verfasst von

René Zurbrügg

D-ITET
ETH Zürich

$$\begin{aligned}\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V \rho \cdot dV = Q \\ \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \left(\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \\ \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Zürich, Dezember 2018

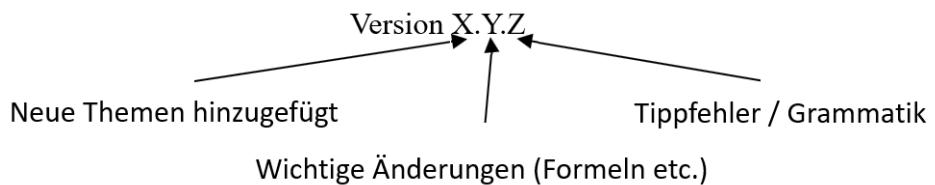
Vorwort

Dieses Skript entstand als Beiblatt zum Prüfungsvorbereitungskurs "Netzwerk und Schaltungen 1" im Januar 2019. Es ist primär als Hilfe für die Studenten gedacht, mit dem Ziel, den Fokus auf die prüfungsrelevanten Themen zu legen. Fragen, Anregungen und vor allem Korrekturen sind willkommen und sollten an zrene@student.ethz.ch adressiert werden.

Die neuste Version des Skriptes befindet sich immer auf: n.ethz.ch/ zrene/nus1-pvk

Dieses Skript wurde von Studenten geschrieben und kann Fehler enthalten.

Version 1.0.0



Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	4
1.1	Koordinatensysteme	4
1.1.1	Kartesische Koordinaten	7
1.1.2	Zylinderkoordinaten	8
1.1.3	Kugelkoordinaten	10
1.1.4	Zusammenfassung	12
1.2	Vektorfelder	13
1.3	Weg- und Oberflächenintegrale	14
2	Elektrostatik	21
2.1	(Ladungs-)Dichte	23
2.2	Elektrische Flussdichte	26
2.3	Vorgehen zur Feldberechnung	30
2.4	Kondensator	31
2.5	Strom	33
2.6	Verhalten des J- und E-Feldes an Materialübergängen	34
3	Netzwerke	35
3.1	Grundlegende Netzwerkumformungen	37
3.2	Stern Dreieck Umformung	38
3.3	Grundregeln bei Netzwerkumformungen	40
3.4	Vereinfachungen mithilfe Symmetrieverlegungen	41
3.5	Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen	42
3.6	Quellen	43
3.7	Superpositionsprinzip	44
3.8	Ersatzquellen	47
3.9	Leistungsanpassung	50
3.10	Analyse umfangreicher Netzwerke	52
4	Magnetostatik	53
4.1	Das Magnetische Feld und die Lorentzkraft	53
4.1.1	Verhalten von B und H Feld an Randflächen	57
4.1.2	Das Reluktanzmodell	58
4.2	Spule und Induktivität	63
5	Zeitlich veränderliches Magnetfeld	67
5.1	Induktion	67
5.2	Charakteristische Gleichungen von Kapazität und Induktivität	74
6	Übertrager	75
6.1	Gegeninduktion	75
6.2	Transformatoren	76
6.3	Der ideale Übertrager	77

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Koordinatensysteme

Häufig sind wir daran interessiert, geometrische Dinge in der Mathematik darzustellen um mit ihnen zu rechnen.

Um mit mathematischen Mitteln geometrische Probleme beschreiben zu können, müssen wir ein System einführen, wie wir Positionen im Raum und Richtungen charakterisieren können.

Zu diesem Zweck werden **Koordinatensysteme** eingeführt.

Definition Koordinatensystem

Ein Koordinatensystem dient zur eindeutigen Bezeichnung der Position von Punkten in einem geometrischen Raum.

Befinden wir uns in einem 3-Dimensionalem Raum so werden 3 **Basisvektoren** benötigt, um jeden Punkt im Raum eindeutig zu definieren.

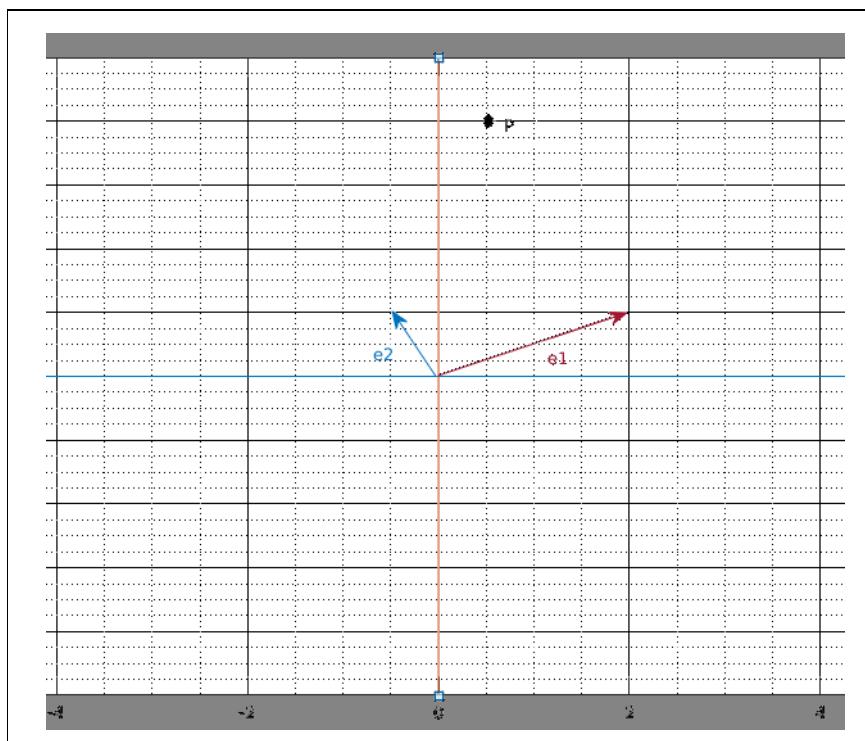
Möchten wir nun einen Punkt im Raum beschreiben, so müssen wir zuerst einen Punkt im Raum als Bezugspunkt (Ursprung) definieren.

Danach beschreiben wir den gesuchten Punkt als **Linearkombination** der Basisvektoren. Die Koeffizienten der Linearkombination bezeichnen wir dabei als Koordinaten.

Beispiel 1 Punkt im Koordinatensystem

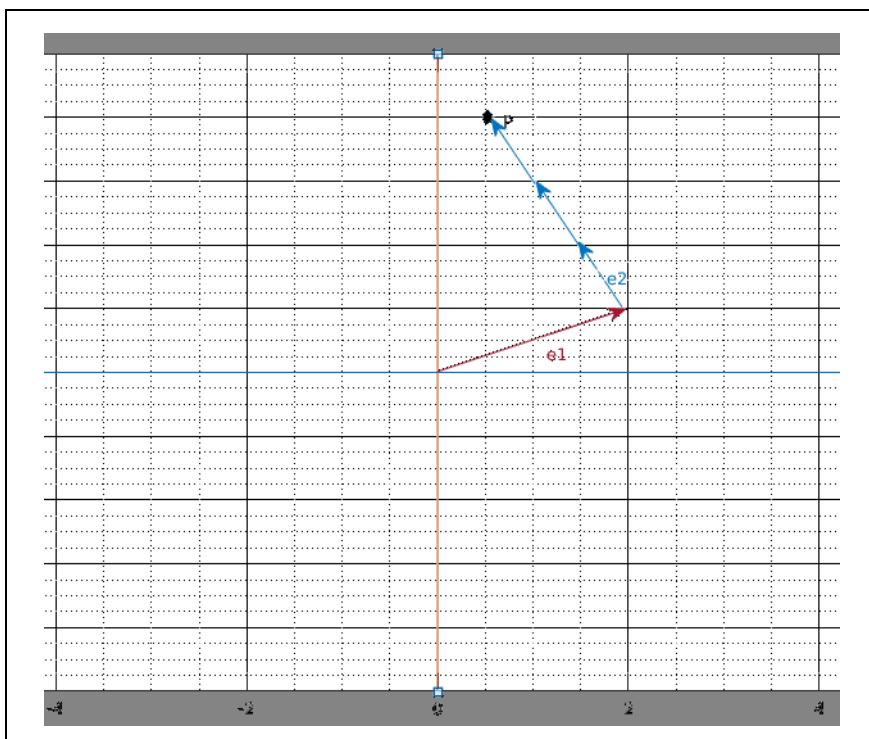
Geben sie die Koordinaten des folgenden Punktes P im 2 Dimensionalen an.

Als Basisvektoren verwenden wir die Vektoren: \vec{e}_1, \vec{e}_2



Lösung

Um vom Ursprung den Punkt P mit den Basisvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 zu erreichen, müssen die Vektoren wie folgt kombiniert werden:



Somit gilt für den Punkt P :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 \\ \rightarrow P &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}\end{aligned}$$

Konzept Winkelabhängige Basisvektoren *

In gewissen Koordinatensystemen werden Basisvektoren verwendet, dessen Richtung sich Abhängig des Winkels ändern.

Sie werden dazu verwendet, Punkte im Raum abhängig eines Winkels zu beschreiben.

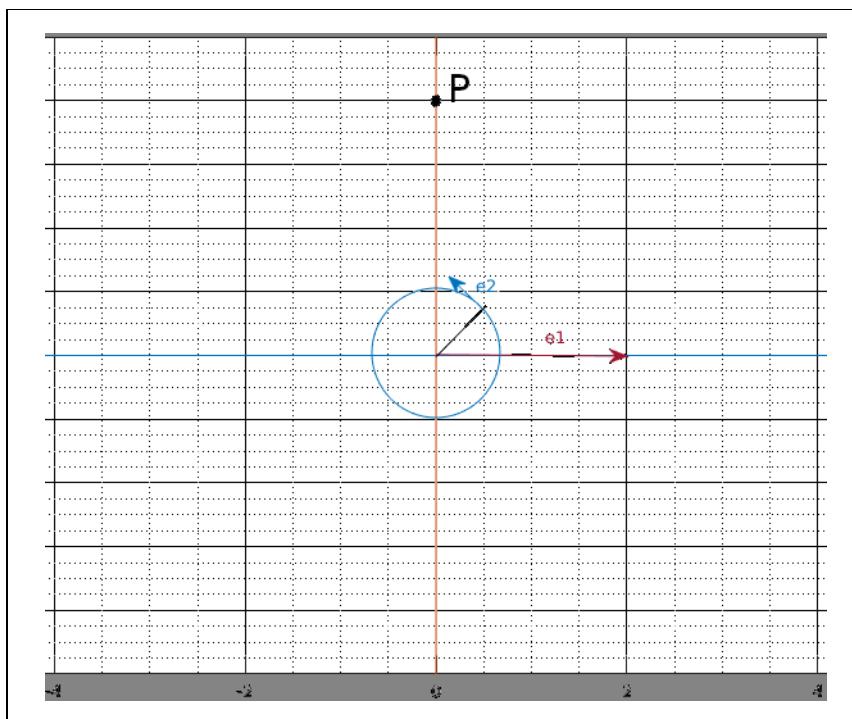
Der Basisvektor zeigt dabei immer in die Richtung des Winkels

* Dies ist ein Konzept, welches Mathematisch nicht genau so existiert.

Beispiel 2 Punkt im Koordinatensystem - Polarkoordinaten

Geben sie die Koordinaten des folgenden Punktes P im 2 Dimensionalen an.

Als Basisvektoren verwenden wir die Vektoren: \vec{e}_1, \vec{e}_2 , wobei \vec{e}_2 ein Winkelabhängiger Basisvektor ist.



Lösung

Da der Punkt P einen Winkel von $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ einschliesst, müssen wir ein Winkelabhängigen Basisvektor \vec{e}_2 mit $\frac{\pi}{2}$ multiplizieren.

Der Abstand des Punktes zum Ursprung beträgt 8 Einheiten, wobei der Vektor \vec{e}_1 die Länge von 2 Einheiten besitzt.

Somit gilt für die Koordinaten des Punktes P in Abhängigkeit von \vec{e}_1, \vec{e}_2 :

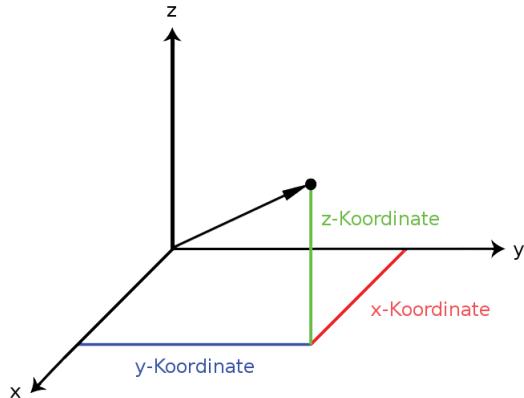
$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{\pi}{2} \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_1 \\ P &= \underline{\underline{\left(\begin{array}{c} 4 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right)}}\end{aligned}$$

1.1.1 Kartesische Koordinaten

Kartesische Koordinaten

Kartesische Koordinaten werden als bekannt vorausgesetzt.

Kartesische Koord. werden vor allem dann verwendet, wenn die geometrische Anordnung **Symmetrien bezüglich einer Ebene** besitzt.



1.1.2 Zylinderkoordinaten

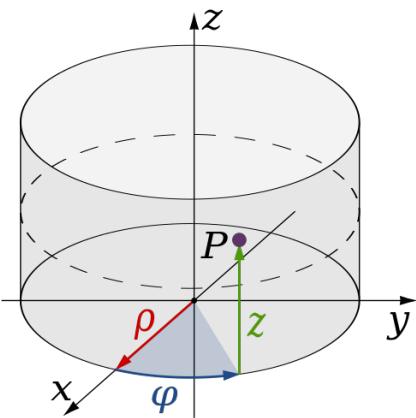
Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten werden meist dann verwendet, wenn die geometrischen Anordnung Symmetrien bezüglich einer **Gerade** aufweist.

Zylinderkoordinaten besitzen 3 Basisvektoren wovon 1 winkelförmig ist.

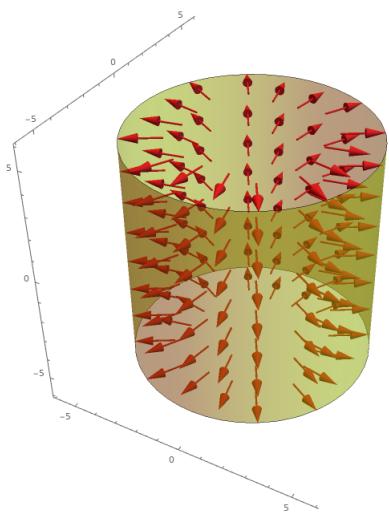
Basisvektoren

1. \vec{e}_ρ Beschreibt den Abstand zur Symmetriearchse
2. \vec{e}_φ Beschreibt den Winkel des Punktes in der XY-Ebene
3. \vec{e}_z Beschreibt den Abstand auf der Symmetriearchse

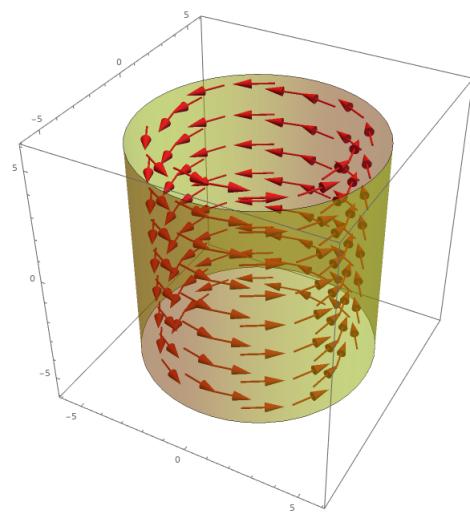


Richtung der einzelnen Basisvektoren für beliebige Punkte im Raum:

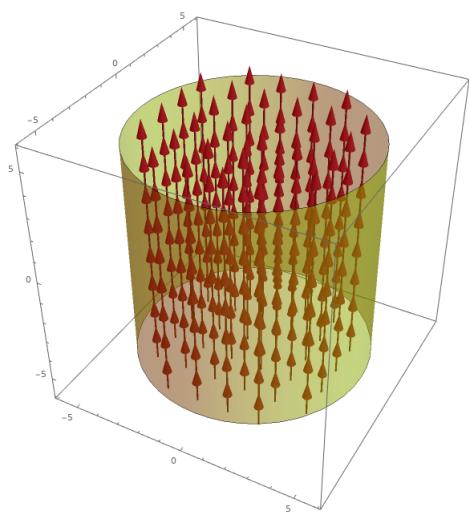
Radialer Vektor \vec{e}_ρ



Azimutaler Vektor \vec{e}_ϕ



Abstandsvektor \vec{e}_z



1.1.3 Kugelkoordinaten

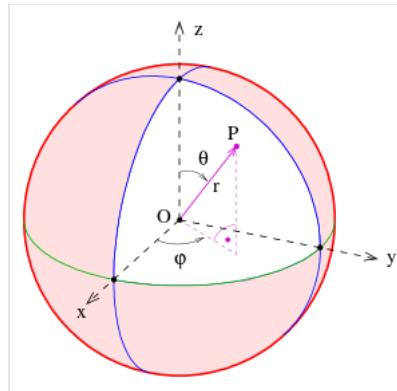
Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten werden meist dann verwendet, wenn die geometrischen Anordnungen **Punktsymmetrien** aufweist.

Kugelkoordinaten besitzen 3 Basisvektoren wovon 2 winkelabhängig sind.

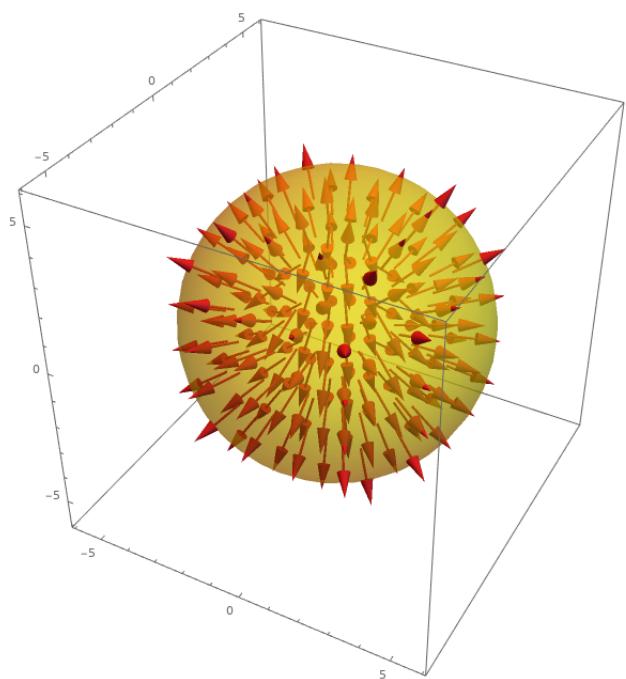
Basisvektoren

1. \vec{e}_r Beschreibt den Abstand zum Ursprung
2. \vec{e}_θ Beschreibt den Winkel des Punktes in der ZY-Ebene
3. \vec{e}_φ Beschreibt den Winkel des Punktes in der XY-Ebene

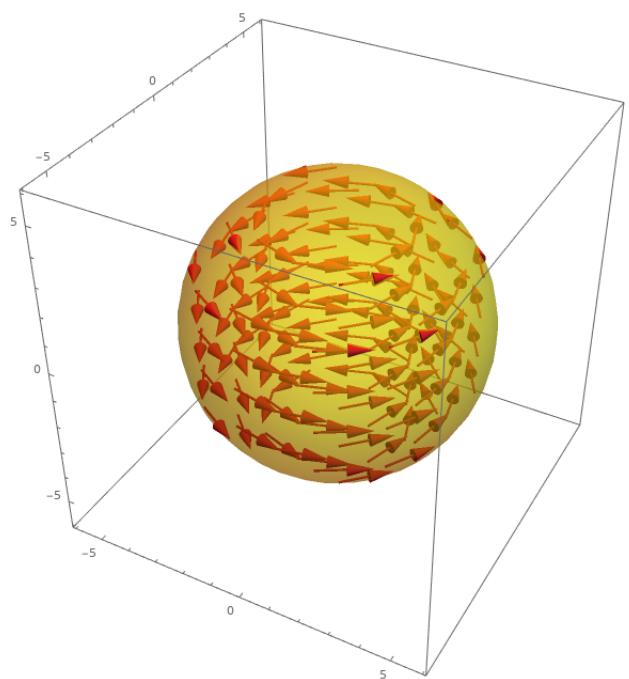


Richtung der einzelnen Basisvektoren für beliebige Punkte im Raum:

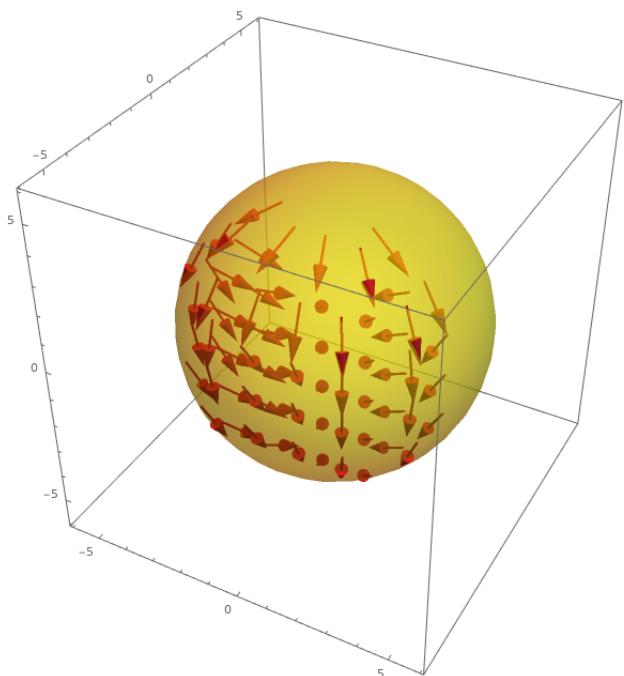
Radialer Vektor \vec{e}_r



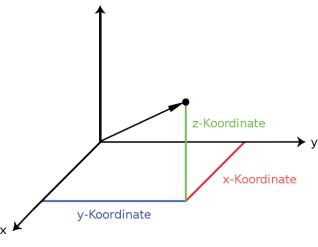
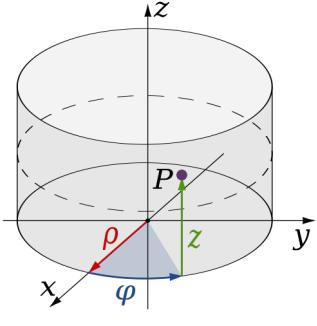
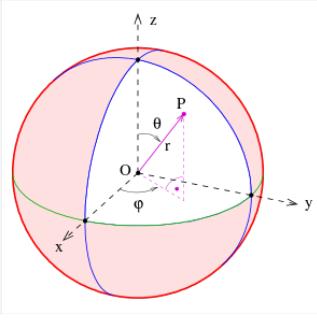
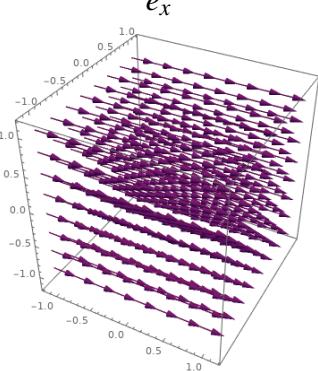
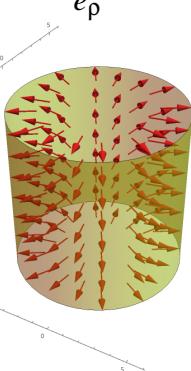
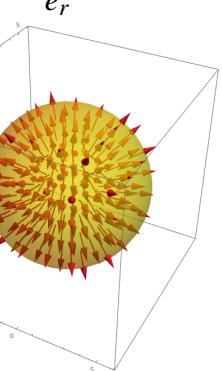
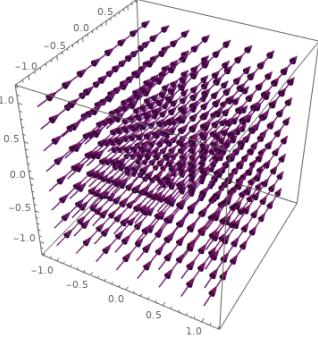
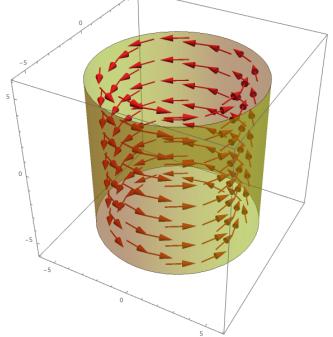
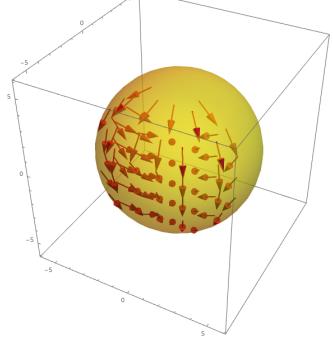
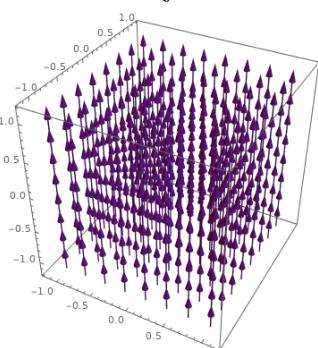
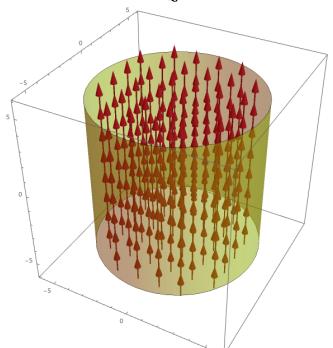
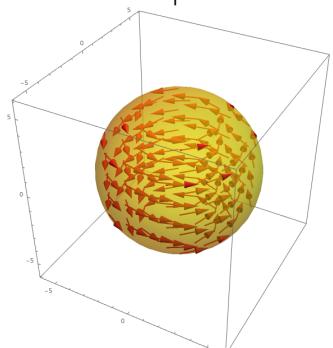
Azimutaler Vektor \vec{e}_ϕ



Meridonaler Vektor \vec{e}_θ



1.1.4 Zusammenfassung

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
 <p>Anwenden bei: Symmetrie zu Ebene</p>	 <p>Anwenden bei: Symmetrie zu Achse</p>	 <p>Anwenden bei: Symmetrie zu Punkt</p>
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$ 	$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + \varphi \cdot \vec{e}_\varphi + z \cdot \vec{e}_z$ 	$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = r \cdot \vec{e}_r + \theta \cdot \vec{e}_\theta + \varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ 
		
		

1.2 Vektorfelder

Möchten wir eine physikalische Grösse im Raum beschreiben, so sind wir häufig nicht nur an den ortsabhängigen Punkten interessiert.

Meistens möchten wir jedem Punkt im Raum eine Richtung zuordnen.

Möchten wir beispielsweise die Erdanziehungskraft modellieren, so wollen wir jedem Punkt im Raum einen **Vektor** zuweisen, der in Richtung der Kraftwirkung zeigt.

Seine Länge soll zudem die Information beinhalten, wie stark die Kraft an diesem Punkt wirkt.

Definition Vektorfeld

Ein Vektorfeld, bezeichnet eine mathematische Funktion, welche anstatt einer skalaren Grösse Vektoren zurück gibt.

Häufig ist ein Vektorfeld nicht nur von einer Variable (x) abhängig, sondern besitzt 3 Parameter (x,y,z) die wir manchmal als Ortsvektor \vec{r} zusammenfassen.

Beispiel Vektorfeld - Gravitation

Möchten wir beispielsweise das Gravitationsfeld der Erde mathematisch beschreiben, würden wir dies in Form eines Vektorfeldes tun.

Dieses Vektorfeld soll jedem Punkt einen Kraftvektor zuweisen, welcher in Richtung Erdmittelpunkt zeigt.

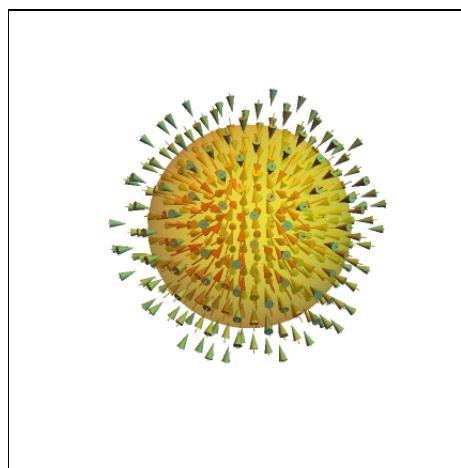
Da die Erde punktsymmetrisch ist, ist es sinnvoll Kugelkoordinaten zu verwenden.

Die Stärke der Gravitationskraft auf ein Massepunkt der Masse m ist definiert als:

$$F_M = \frac{M \cdot G}{r^2}$$

Somit folgt für das Vektorfeld, das die Gravitationskraft beschreibt:

$$\vec{F}_M(r, \theta, \varphi) = \frac{M \cdot G}{r^2} \cdot (-\vec{e}_r)$$



1.3 Weg- und Oberflächenintegrale

Gleichung Wegintegral über ein Vektorfeld

Wegintegrale beschreiben die Auswirkungen eines Vektorfeldes auf ein Teilchen, welches sich entlang eines Weges bewegt.

Sie können in unserem Fall, häufig als ein Mass der Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um ein Teilchen von A nach B zu bewegen, aufgefasst werden.

Wir notieren das Wegintegral über einen Weg γ folgendermassen:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Können wir den Weg γ als mathematische Funktion von t ausdrücken, so lässt sich das Integral folgendermassen darstellen:

$$\int_{t_0}^{t_e} \vec{E}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \cdot dt$$

Variablen

$\gamma(t_0)$ = Startpunkt , $\gamma(t_e)$ = Endpunkt , $\dot{\gamma}(t)$ = Zeitliche Ableitung der Kurve

Das Integral selbst ist relativ schwer zu rechnen. Häufig lässt es sich jedoch vereinfachen: Ist der Weg **parallel zur Richtung des Feldes**, so vereinfacht sich das Integral über eine vektorielle Grösse zu einem Integral über eine skalare Grösse

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B E(r) \cdot dr$$

Variablen

A = Startpunkt des Weges

B = Endpunkt des Weges

Für den Fall, dass das Feld auf dem **gesamten Weg konstant** ist, lässt es sich noch weiter vereinfachen:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = l_{AB} \cdot |\vec{E}|$$

Variablen

l_{AB} = Länge des Weges im Feld

Ist das Feld konstant, schliesst aber mit dem Weg **immer einen Winkel φ** ein, so gilt für das Integral:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = l_{AB} \cdot |\vec{E}| \cdot \cos(\varphi)$$

Variablen

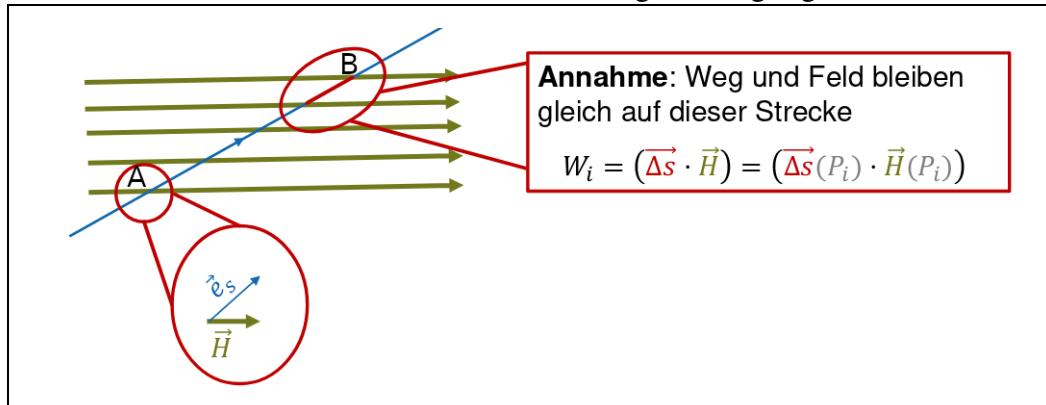
φ = Winkel zwischen Wegrichtung und Richtung des Feldes

Begründung Wegintegral

Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{H} = H \cdot \vec{e}_H$ (Grün) und ein Weg $\vec{s} = s \cdot \vec{e}_s$ (Blau).

Wir interessieren uns dafür, wie viel Arbeit wir aufwenden müssen, um uns von Punkt A (unten Links) nach Punkt B (oben Rechts) zu bewegen.

Wir gehen nun davon aus, dass auf einem sehr kleinem Wegstück Δs sich die Richtung und Stärke des Feldes nicht ändert, sowie die Richtung des Weges gleich bleibt.



Die Arbeit W_i bezeichnen wir als die Arbeit, welche wir aufwenden müssen, um uns auf dem Weg γ um ein Stück Δs nach Vorne zu bewegen.

Diese Arbeit ist Abhängig davon, wie Weg und Feld geometrisch stehen. Möchten wir uns senkrecht zum Feld bewegen, so wirkt nichts dieser Bewegungsrichtung entgegen und die Arbeit ist gleich 0.

Möchten wir uns hingegen parallel zum E-Feld bewegen, so müssen wir maximale Arbeit verrichten, da das E-Feld uns maximal beeinflusst.

Den Winkel, welcher das Feld mit dem Weg einschließt, ist gegeben als $\cos(\varphi) = \vec{e}_s \cdot \vec{e}_H$.

Somit gilt für die Arbeit, welche auf dem Weg Δs aufgewendet wird: $W_i = |H(P_i)| \cdot \Delta s \cdot \vec{e}_s \cdot \vec{e}_H = \vec{H}(P_i) \cdot \Delta \vec{s}(P_i)$

Für den gesamten Weg gilt somit: $W_{ges} = \sum_i W_i = \sum_i \vec{e}_H = \vec{H}(P_i) \cdot \Delta \vec{s}(P_i) \Rightarrow i \rightarrow \infty$

$$W_{ges} = \int_A^B \vec{H}(\vec{P}) \cdot d\vec{s}$$

Ist der Weg s als Funktion gegeben, mit $s(t_0) = A$ und $s(t_e) = B$, so gilt für den Punkt P : $\vec{P} = \vec{s}(t)$ und den kleinen Richtungsvektor $d\vec{s}$ des Weges:

$$\begin{aligned} \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad | \quad \frac{d}{dt}(\cdot) \\ \frac{d}{dt}(\vec{s}(t)) &= \dot{\vec{s}}(t) \quad | \quad \cdot dt \\ d\vec{s}(t) &= \dot{\vec{s}}(t) \cdot dt = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \end{pmatrix} \cdot dt \end{aligned}$$

Und somit für das gesamte Integral:

$$\int_A^B \vec{H}(\vec{P}) \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_e} \vec{H}(s(\vec{t})) \cdot \dot{\vec{s}}(t) \cdot dt$$

Beispiel 3 Wegintegral über ein Vektorfeld

Gegeben sei das Vektorfeld in den Kartesischen Koordinaten $\vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 5z \\ x \end{pmatrix}$

Berechnen sie das Wegintegral, über eine Gerade vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Zuerst müssen wir die Gerade vom Punkt $(0, 0, 0)$ zu $(5, 2, 1)$ als Funktion parameterisieren.
Aus der Vektorrechnung folgt für die Geradengleichung:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Somit gelten für Anfang und Endpunkte unserer Kurve:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0)^T = \gamma(0) \rightarrow t_0 = 0 \\ B &= (5, 2, 1)^T = \gamma(1) \rightarrow t_e = 1 \end{aligned}$$

Für $d\vec{\gamma}$ folgt:

$$d\vec{\gamma} = \dot{\gamma} \cdot dt = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(5 \cdot t) \\ \frac{d}{dt}(2 \cdot t) \\ \frac{d}{dt}(1 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot dt = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dt$$

Und für $\vec{E}(\vec{\gamma}(t))$:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 5t \\ 2t \\ 1t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{P}) &= \begin{pmatrix} 5t + 2 \cdot 2t \\ 5 \cdot 1t \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t \\ 5t \\ 5t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit folgt für das Integral:

$$\underline{\underline{\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma}}} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 9t \\ 5t \\ 5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_0^1 45t + 10t + 5t \cdot dt = \int_0^1 60t \cdot dt = \underline{\underline{30}}$$

Beispiel 4 Wegintegral in Kugelkoordinaten

Gegeben sei das Vektorfeld in Kugelkoordinaten $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 5 \cdot r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot r^2 \cdot \vec{e}_r$

Berechnen sie das Wegintegral, über eine Gerade (in Kugelkoordinaten) vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

Intuitive Lösung:

Da der Weg parallel zum Feld ist ($\vec{e}_\gamma = \vec{e}_E$) vereinfacht sich das Wegintegral zu einem Skalaren Integral:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^5 5 \cdot r^2 dr = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 125 = \frac{625}{3}$$

Mathematische Lösung

Wir beschreiben die Kurve γ in Kugelkoordinaten:

$$\gamma(t) = 5 \cdot t \cdot \vec{e}_r$$

Somit folgt für $d\vec{\gamma}$

$$d\vec{\gamma} = 5 \cdot \vec{e}_r \cdot dt$$

Und für das Integral:

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \vec{E} \cdot 5 \cdot \vec{e}_r = \int_0^1 5 \cdot (5t)^2 \cdot \vec{e}_r \cdot 5 \cdot \vec{e}_r dt = \int_0^1 5^4 \cdot t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 125 = \frac{625}{3}$$

Gleichung Fluss eines Vektorfeldes

Die folgende Gleichung bezeichnen wir als Oberflächenintegral des Vektorfeldes \vec{E} . Der Wert des Integrales gibt uns eine Information darüber, wieviel Feld durch eine gegebene Hüllfläche "fliesst"

$$\Phi = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Variablen

\vec{E} = ein Vektorfeld

A = Fläche, welche geschlossen ist

\vec{A} = Normalenvektor der Fläche

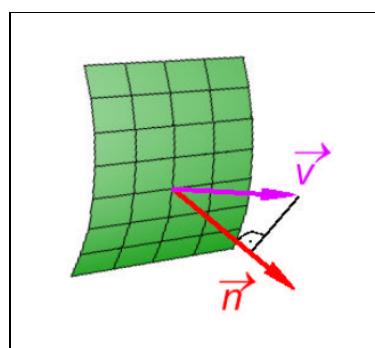
Das Integral selbst ist relativ schwer zu rechnen. Häufig lässt es sich jedoch vereinfachen: Steht das Vektorfeld **senkrecht** zur Hüllfläche und ist es auf der gesamten Fläche **konstant**, so gilt für das Integral:

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \pm A_{eff} \cdot |\vec{E}|$$

Variablen

A_{eff} = Die Fläche auf der das Feld ungleich 0 ist

Ist das Feld zwar konstant auf der gesamten Fläche, fliesst jedoch **nicht senkrecht** hindurch, so lässt sich das Integral auch zu einer Multiplikation vereinfachen:



$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \pm A_{eff} \cdot |\vec{E}| \cdot \cos(\varphi)$$

Variablen

φ = Winkel zwischen Vektorfeld und Flächennormale

Beispiel 5

Wir betrachten ein Rohr der Länge L und mit Radius R.

In der Mitte des Rohres im Ursprung des Koordinatensystems befindet sich eine Wasserquelle, welche eine gewisse Menge Wasser generiert.

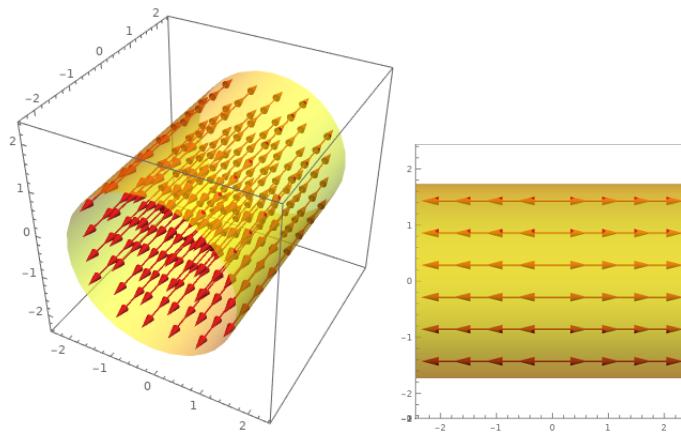
Die Flussdichte des Wassers, ist durch folgendes Vektorfeld gegeben:

$$\vec{J}_{wasser}(x, y, z) = \begin{cases} 1 \cdot \vec{e}_y \cdot \left[\frac{L}{s \cdot m^2} \right] & : (x^2 + z^2) \leq R, y > 0 \\ -1 \cdot \vec{e}_y \cdot \left[\frac{L}{s \cdot m^2} \right] & : (x^2 + z^2) \leq R, y \leq 0 \\ 0 \cdot \vec{e}_y \cdot \left[\frac{L}{s \cdot m^2} \right] & : \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne das Vektorfeld in einem 3-Dimensionalen Koordinatensystem.
2. Berechne sie das Oberflächenintegral $\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ nach aussen, wobei A die Oberfläche des Rohres mit den beiden Kreisen am Ende bezeichne.

Lösung

1.



2. Intuitiver Weg

Da das Vektorfeld nur auf den Kreisflächen ungleich Null ist, müssen wir nur das Oberflächenintegral über diese Kreisflächen berechnen.

Da das Vektorfeld auf den Kreisflächen senkrecht steht und konstant ist, vereinfacht sich dieses Integral zu einer Multiplikation mit der Fläche:

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = A_{eff} \cdot |\vec{J}| = 2 \cdot (\pi R^2) \cdot 1 = \underline{\underline{2\pi R^2}}$$

Mathematischer Weg

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_{Mantel} 0 \cdot d\vec{A} + \iint_{Kreise} \vec{J} d\vec{A}$$

Wir bezeichnen nun mit K_1 die erste Kreisfläche des Zylinders bei $y = -\frac{L}{2}$ und mit K_2 die zweite Kreisfläche bei $y = \frac{L}{2}$. Somit folgt für das Integral:

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iint_{K_1} -1 \vec{e}_y \cdot d\vec{A} + \iint_{K_2} 1 \vec{e}_y \cdot d\vec{A}$$

Die Flächennormalen auf der ersten Kreisfläche zeigt nach $(-\vec{e}_y)$, die der 2. Kreisfläche nach (\vec{e}_y) :

$$\begin{aligned} K_1: d\vec{A} &= (-\vec{e}_y) \cdot dA, K_2: d\vec{A} = \vec{e}_y \cdot dA \\ \rightarrow \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} &= \iint_{K_1} -1 \vec{e}_y \cdot (-\vec{e}_y) dA + \iint_{K_2} 1 \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y dA \\ &= 1 \cdot \iint_{K_1} dA + 1 \cdot \iint_{K_2} dA = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R^2 = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \end{aligned}$$

2 Elektrostatik

Elektrisch geladene Teilchen, welche sich in der Nähe eines anderen, geladenen Teilchen befinden, verspüren eine Kraftwirkung, die abhängig der eigenen Ladung ist.

Um diese Kraftwirkung zu beschreiben, wurde der Begriff des **elektrischen Feldes** eingeführt.

Definition Elektrisches Feld

Das elektrische Feld, beschreibt die Kraftwirkung auf geladene Teilchen im Raum.

Es ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor \vec{E} zu, der in die Richtung der Kraftwirkung zeigt.
Für die Kraftwirkung auf ein Teilchen mit der Ladung Q und dem Ortsvektor \vec{r} gilt:

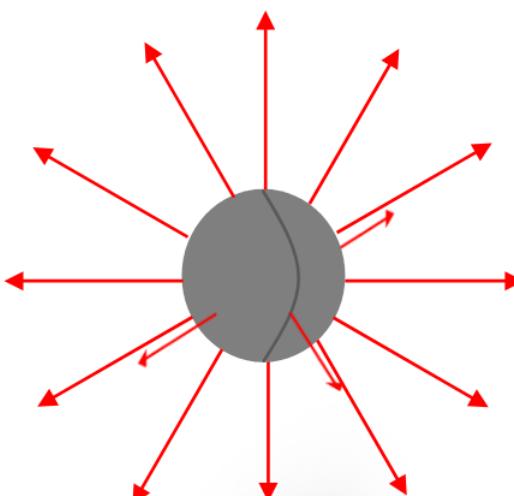
$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Einige wichtige Felder:

Beispiel E-Feld einer Punktladung

Das elektrische Feld einer Punktladung Q ist gegeben als:

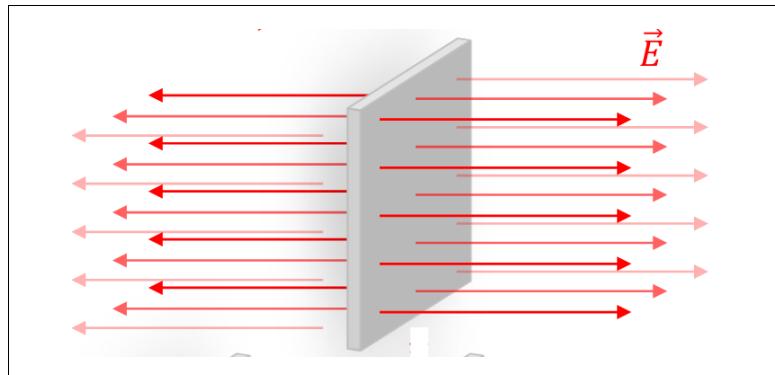
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$



Beispiel E-Feld einer Platte

Das elektrische Feld einer Platte mit Ladung Q ist gegeben als:

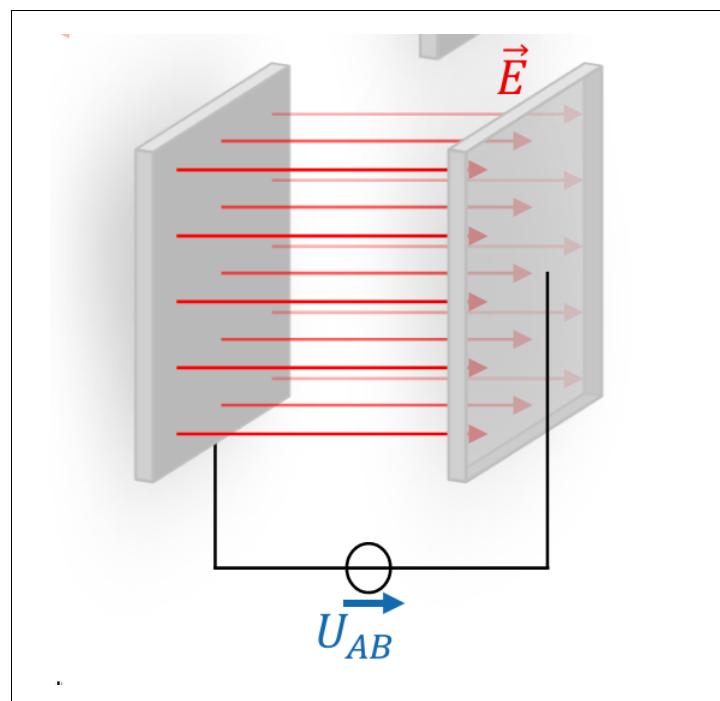
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{2A\epsilon} \cdot \vec{e}_n & , Rechts \\ -\frac{Q}{2A\epsilon} \cdot \vec{e}_n & , Links \end{cases}$$



Beispiel E-Feld eines Kondensators

Das elektrische Feld in einem Kondensator mit der Ladung Q oder Spannung U ist gegeben als:

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon} \cdot \vec{e}_d = \frac{U}{d} \vec{e}_d$$



2.1 (Ladungs-)Dichte

In der Physik sind wir häufig nicht nur daran interessiert, wieviele Ladungsträger sich in einem Volumen befinden, sondern wir möchten gerne Informationen darüber haben, wie sie geometrisch angeordnet sind. (= Verteilen sich alle Ladungsträger auf der Oberfläche, sind alle im Mittelpunkt zentriert etc.).

Dazu werden **Dichtefunktionen** verwendet.

Definition Linienladungsdichte $\lambda(x)$

Eine **Linienladungsdichte** gibt an, wie sich Ladungen entlang einer Linie anordnen.

Sind die Ladungsträger **gleichmäßig** auf einer Linie verteilt, so ist die Dichte einfach eine konstante mit Einheit $\frac{C}{m}$.

Möchten wir die Gesamtladung auf Basis einer Dichte berechnen, so müssen wir die Dichte integrieren:

$$Q_{AB} = \int_A^B \lambda(x) \cdot dx$$

Beispiel 6 Linienladungsdichte

Eine Gesamtladung von $Q = 10C$ verteilt sich gleichmäßig auf einer Gerade der Länge $l = 2m$.

- 1) Geben Sie die Linienladungsdichte $\lambda(x)$ im Bereich $0 < x < l$ an.
- 2) Geben Sie die Gesamtladung im eingeschlossenen Bereich $0 < x < l/3$ an.

Lösung

- 1) Da sich die Ladungen gleichmässig verteilen, ist die Ladungsdichte unabhängig vom Ort x

$$\lambda(x) = \lambda = \frac{C}{l} = 5 \frac{C}{m}$$

- 2) Die eingeschlossene Ladung berechnet sich grundsätzlich mittels Integration:

$$Q = \int_0^{l/3} \lambda(x) \cdot dx = \int_0^{l/3} 5 \frac{C}{m} \cdot dx = 5 \frac{C}{m} \cdot \frac{l}{3} = \frac{10}{3} C$$

Definition Flächenladungsdichte $\sigma(x,y)$

Eine **Flächenladungsdichte** gibt an, wie sich Ladungen auf einer Fläche anordnen.

Sind die Ladungsträger **gleichmässig** auf der Fläche verteilt, so ist die Dichte einfach eine konstante mit Einheit $\frac{C}{m^2}$.

Möchten wir die Gesamtladung auf Basis einer Dichte berechnen, so müssen wir die Dichte integrieren:

$$Q_A = \iint_A \sigma(x,y) \cdot dA$$

Ist die Dichte konstant folgt:

$$Q_A = \sigma \cdot A$$



Beispiel 7 Flächenladungsdichte

Eine Gesamtladung von Q verteilt sich gleichmässig auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R .

Wie gross ist die Flächenladungsdichte σ auf der Kugeloberfläche?

Lösung

Da sich die Ladungen gleichmässig verteilen, gilt für die Ladungsdichte:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Definition Volumenladungsdichte $\rho(x, y, z)$

Eine **Volumenladungsdichte** gibt an, wie sich Ladungen in einem Volumen anordnen.

Sind die Ladungsträger **gleichmäßig** im Volumen verteilt, so ist die Dichte einfach eine konstante mit Einheit $\frac{C}{m^3}$.

Möchten wir die Gesamtladung auf Basis einer Dichte berechnen, so müssen wir die Dichte integrieren:

$$Q_V = \iiint_V \rho(x, y, z) \cdot dV$$

Ist die Dichte konstant folgt:

$$Q_V = \rho \cdot V$$

Beispiel 8 Volumenladungsdichte

Eine Hohlkugel mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 sei im Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$ gleichmäßig mit der Ladung Q gefüllt.

Gesucht ist die Volumenladungsdichte $\rho(r, \theta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten, welche die Ladungsdichte im gesamten Raum beschreibt.

Lösung

Da sich die Ladungen nur in einem gewissen Teil des Raumes befinden, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen:

1. $r < R_1$

Hier befindet sich keine Ladung, somit ist auch die Volumenladungsdichte gleich 0

2. $R_1 \leq r \leq R_2$

Hier ist die Ladung gleichmäßig auf dem Volumen $V = 4 \cdot \pi(R_2^3 - R_1^3)$ verteilt, somit beträgt die Volumenladungsdichte:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4 \cdot \pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

3. $r > R_2$

Hier befindet sich keine Ladung, somit ist auch die Volumenladungsdichte gleich 0

Somit gilt für die ortsabhängige Volumenladungsdichte:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

2.2 Elektrische Flussdichte

Quelle des elektrischen Feldes sind geladene Teilchen. Jedoch hängt das elektrische Feld davon ab, in was für einem Material wir uns befinden.

Das elektrische Feld in einem Metall ist zum Beispiel kleiner, als das elektrische Feld im Vakuum.

Grund dafür ist die **elektrische Influenz**, welche das ursprüngliche Feld abschwächt.

Um gewisse Rechnungen zu vereinfachen, definieren wir ein neues Feld.

Definition Die elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte \vec{D} beschreibt das Feld, welches existieren würde, falls kein Material vorhanden wäre.

Quelle der elektrischen Flussdichte ist die elektrische Ladung Q .

Da die elektrische Flussdichte \vec{D} ausschliesslich von den Ladungsträger abhängt, gibt es eine Formel, die die beiden Grössen in Verbindung bringt:

Gleichung Quellgleichung des elektrischen Fluxes

$$\Psi := \iint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_V \rho dV = Q_{eff}$$

Falls Feld senkrecht auf Fläche und konstant

$$D = \left| \frac{Q_{eff}}{A_{eff}} \right|$$

Variablen:

Ψ = Elektrischer Fluss $[\Psi] = A \cdot s$

D = Elektrische Flussdichte $[D] = \frac{As}{m^2}$

Q_{eff} = Von der Fläche eingeschlossene Ladung $[Q] = A \cdot s$

A_{eff} = Fläche, durch die das D-Feld durchfliesst $[A] = m^2$

Beispiel 9 Berechnung des D-Feldes einer Kugel

Eine Kugel sei mit der Ladung $20C$ gefüllt. Die Kugel habe den Radius $R = 2cm$ und alle Ladungsträger verteilen sich auf der Kugeloberfläche.

Berechne das \vec{D} -Feld der Kugel.

Lösung

Um das D-Feld der Kugel anzugeben, müssen wir zuerst ein passendes Koordinatensystem wählen.

Da wir mit einer Kugel rechnen, muss das Feld punktsymmetrisch sein und einzig der Abstand zum Kugelmittelpunkt bestimmt, wie gross das D-Feld ist.

Aufgrund dieser Überlegung, werden wir **Kugelkoordinaten** verwenden. (Hätten wir etwas, das symmetrisch zur Z-Achse ist, so würden wir Zylinderkoord. verwenden etc.).

Um die Gleichung für den elektrischen Fluss anwenden zu können, müssen wir eine Hüllfläche finden, **auf der das D-Feld konstant ist**.

Da die Anordnung eine Kugel ist, verwenden wir als Hüllfläche eine Kugel mit Radius r .

Nun können wir die Quellgleichung verwenden:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{eff} \rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = Q_{eff}$$

Der Betrag des D-Feldes entspricht also gerade der von der Hüllfläche eingeschlossenen Ladung geteilt durch die Fläche.

Für den Fall, dass wir die Hüllfläche grösser als die Kugel wählen, schliessen wir alle Ladungen ein:

$$r > R$$

$$\begin{aligned}Q_{eff} &= 20C \\D &= \frac{20C}{4\pi r^2} \\ \vec{D} &= D \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

Falls unsere Hüllfläche im Inneren der Kugel ist, so schliessen wir keine Ladung ein:

$$r < R$$

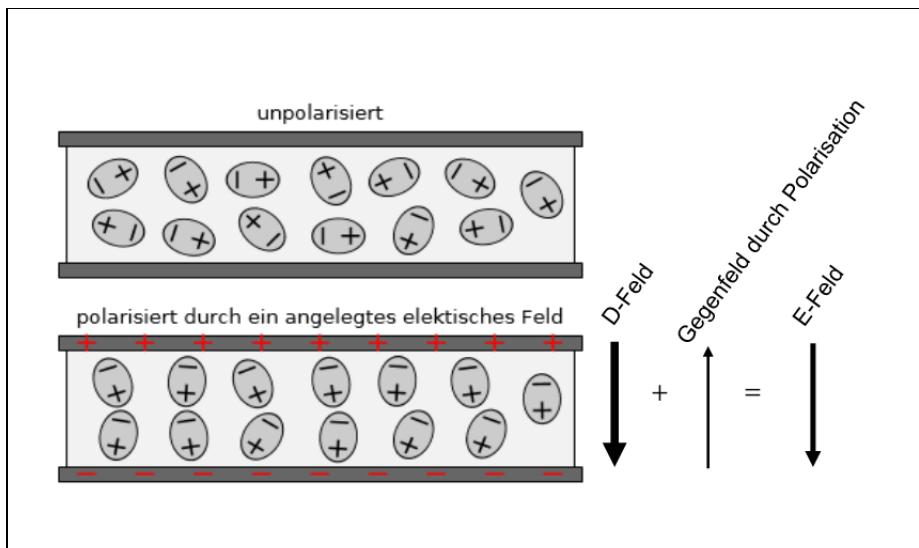
$$\begin{aligned}Q_{eff} &= 0C \\ \vec{D} &= 0\end{aligned}$$

Somit gilt für das D-Feld einer Kugel mit Ladungen auf der Oberfläche:

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{20C}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

Da die elektrische Flussdichte nur von den Ladungsträgern abhängig ist, lässt sie sich relativ einfach berechnen und bildet meist den Grundstein für das Berechnen von E-Feldern usw.

"Fließt" eine elektrische Flussdichte durch ein Material mit Ladungsträgern, so wird diese abgeschwächt, da sich im Inneren des Materials ein elektrisches Feld entgegen dem von Außen angelegten Feld ausbildet.



Gleichung Zusammenhang E-Feld und D-Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{D}$$

Variablen:

$$D = \text{Elektrische Flussdichte } [D] = \frac{As}{m^2}$$

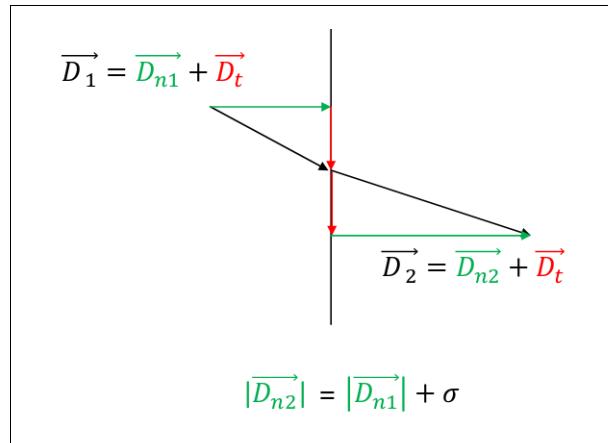
$$E = \text{Elektrisches Feld } [E] = \frac{V}{m}$$

$$\epsilon_0 = \text{Dielektrizitätskonstante } [\epsilon_0] = \frac{C}{V \cdot m}$$

$$\epsilon_r = \text{rel. Permitivität. Unterschiedlich im Material } [\epsilon_r] = []$$

Definition Verhalten von Feldgrößen bei Materialübergängen

Fließt eine elektrische Flussdichte durch eine geladene Fläche, so verändert sich die Normalkomponente des D-Feldes.
Die Tangentialkomponente des Feldes bleibt jedoch konstant.



$$\vec{D}_1 = \vec{D}_{1t} + \vec{D}_{1n} \Rightarrow \vec{D}_2 = \vec{D}_{1t} + (1 + \sigma) \cdot \vec{D}_{1n}$$

Definition Spannung

Wir definieren die Spannung zwischen zwei Punkten als das Wegintegral über das elektrische Feld:

$$U_{AB} := \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

[U] = Volt [V]

Bemerkung zur Spannung

- Da die Beziehung $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ gilt und die Arbeit als $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ definiert ist, können wir die Spannung zwischen zwei Punkten als **Mass der benötigten Arbeit** um ein Ladungsträger von A nach B zu bringen betrachten.
- Die Spannung ist unabhängig des Weges. $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$
⇒ Start- und Endwert sind ausreichend.
- Die Spannung über einen geschlossenen Weg entspricht **0V**: $U_{AB} + U_{BA} = 0$
- Ist die Spannung auf dem gesamten Weg konstant und parallel zum Weg, vereinfacht sich das Integral zu einer Multiplikation:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = l_{AB} \cdot E$$

2.3 Vorgehen zur Feldberechnung

✓ Vorgehen Feldberechnungen für eine gegebene Anordnung

Zuerst: Besteht die Anordnung aus bekannten Teilobjekten (Kugeln mit verschiedenen Radien etc?)

→ Wende **Superposition** an: Berechne das Feld jeder einzelnen Teilanordnung mithilfe des Vorgehens und summiere Resultate auf.

1. Versuche die Symmetrie der Anordnung herauszufinden und entscheide dich für ein Koordinatensystem:

Punktsymmetrisch → Kugelkoordinaten

Achsensymmetrisch → Zylinderkoordinaten

Symmetrisch zu einer Ebene → kartesische Koordinaten

2. a Falls **Ladungsdichte oder Ladung** gegeben:

2. 1 Suche Hüllfläche, auf der das Feld konstant ist

2. 2 Verwende $\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \Rightarrow D = \frac{Q_{eff}}{A_{eff}}$

Je nach Hüllfläche muss hier eine Fallunterscheidung gemacht werden, da ggf. sich die eingeschlossene Ladung Q_{eff} ändern könnte

Falls das D-Feld senkrecht durch verschiedene Materialien fliesst, bleibt es überall konstant.

2. 3 Aus Skizze, finde heraus, in welche Richtung das D-Feld zeigt und ergänze den Richtungsvektor:

$$\vec{D} = D \cdot \vec{e}_D$$

2. 4 Das resultierende E-Feld in einem einzelnen Materialien mit ϵ_{ri} ist gegeben als:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{ri}}$$

2. b Falls **Spannung** zwischen Punkten gegeben ist:

2. 1 Suche eine Weg vom Punkt A zum Punkt B, auf dem das Feld konstant ist.

2. 2 Verwende $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$
 $\rightarrow E = \frac{U_{AB}}{l_{AB}}$

2. 3 Aus Skizze, finde heraus, in welche Richtung das E-Feld zeigt und ergänze den Richtungsvektor:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_E$$

2.4 Kondensator

Bringen wir 2 Platten mit verschiedenen Ladungsträger nah zu einander, so bildet sich ein elektrisches Feld zwischen den Platten.

Die Stärke des elektrischen Feldes ist abhängig der Plattenladung und der Flächen der Platten.

Definition Kondensator

Ein Kondensator ist ein Bauelement, das in der Lage ist elektrische Ladung und somit Energie in Form von Feldlinien zu speichern.

Die charakteristische Kenngrösse des Kondensators ist die Kapazität C .

Die im Feld eines Kondensators gespeicherte Energie entspricht $\mathbf{W} = \frac{1}{2}C \cdot \mathbf{U}^2$

Definition Kapazität

Die elektrische Kapazität C beschreibt die Fähigkeit eines Bauelementes, Ladung Q bei einer gewissen Spannung U zu speichern.

Als Proportionalitätsgrösse gibt sie an, wie gross die Spannung über einem Bauelement bei einer Ladung Q ist.

$$C = \frac{Q}{U}$$

In Abhängigkeit der Felder, lässt sich die Kapazität folgendermassen beschreiben:

$$C = \frac{\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Falls das Feld senkrecht auf der Hüllfläche steht und der Integrationsweg parallel zum E-Feld verläuft gilt:

$$C = \frac{D \cdot A_{eff}}{\int_A^B E \cdot ds}$$

Gleichung Kapazität eines Plattenkondensators

Bei einem Plattenkondensator mit Fläche A und Abstand d , der mit einem Dielektrikum mit konstante ϵ gefüllt ist, gilt:

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Variablen:

A = Fläche einer Platte $[A] = m^2$

d = Abstand der Platten $[d] = m$

$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ Dielektrikum zw. den Platten $[\epsilon] = \frac{C}{V \cdot m}$

Begründung Da das E-Feld eines Plattenkondensators konstant ist, gilt für die Kapazität:

$$C = \frac{D \cdot A_{eff}}{E \cdot d}$$

Mit dem Zusammenhang $D = \epsilon \cdot E$ und der Erkenntniss, dass das Feld nur auf der einen Seite der Platte existiert folgt:

$$C = \frac{E \cdot \epsilon \cdot A_{eff}}{E \cdot d} = \underline{\underline{\epsilon}} \frac{A}{d}$$

Definition Serienschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Kehrwerte der Kapazität

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{C_i} \quad C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = (C_1 || C_2)$$

Begründung

Die Definition der Kapazität ist genau gegensätzlich zu der des Widerstandes ($R \propto \frac{l}{A}$, $C \propto \frac{A}{d}$)
Werden Kondensatoren in Serie geschaltet, so vergrößert sich der effektive Abstand der Platten, weshalb wir die Kehrwerte addieren müssen.

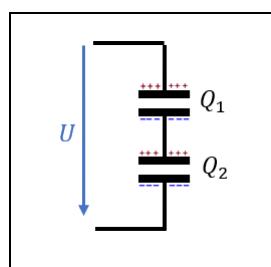
Definition Parallelschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Kapazitäten

$$C_{ges} = \sum_{i=0}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots$$

Definition Ladungserhaltung in der Serienschaltung

Werden Kapazitäten in Serie geschaltet, besitzen alle dieselbe Ladung Q .



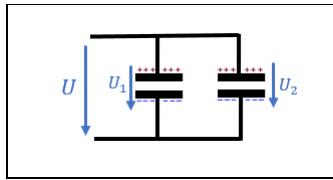
$$\underline{\underline{Q_1 = Q_2 = Q}}$$

Begründung

Damit sich auf dem ersten Kondensator die Ladung Q_1 ansammeln kann, muss diese Ladung unterhalb des Kondensators angesammelt werden. Angenommen, beide Kondensatoren waren zu Beginn ungeladen, so muss die Ladung, welche sich auf der unteren Platte des ersten Kondensators befindet, dieselbe Ladungsmenge auf der oberen Platte des unteren Kondensators hervorrufen.

Definition Maschenregel bei Parallelschaltung

Die Maschenregel für Spannung gilt auch bei Kondensatoren



$$\underline{U_1 = U_2 = U} \text{ und } C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \rightarrow \underline{Q_1 = C_1 \cdot U}$$

2.5 Strom

Legen wir ein elektrisches Feld an einem Material mit beweglichen Ladungsträgern an, so beginnen sich die Ladungsträger entlang dem angelegten Feld zu bewegen.

Je mehr freie Ladungsträger pro Volumen vorhanden sind (ρ), desto mehr Ladungsträger werden sich zu bewegen beginnen.

Die Geschwindigkeit (v , Driftgeschwindigkeit), mit der sich die Ladungsträger bewegen, ist abhängig von der Stärke des elektrischen Feldes und dem Material selbst. Wie gut sich ein Ladungsträger in einem Material bewegen kann, beschreiben wir mit der Beweglichkeit (μ)

Definition Strom und Stromdichte

Der Strom I bezeichnet, wie viele Teilchen sich pro Zeit durch eine Fläche bewegen.

Die Stromdichte J sagt etwas darüber aus, wie viel Strom pro Fläche fliesst (= Dichte)

$$I := \frac{dQ}{dt} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Variablen:

$$I = \text{Strom } [I] = A = \frac{C}{s}$$

$$\vec{J} = \underbrace{n \cdot q}_{\rho} \vec{v} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Variablen:

$$\vec{J} = \text{Stromdichte } [J] = \frac{A}{m^2}$$

$$n = \text{Teilchendichte } [n] = \frac{1}{m^3}$$

$$q = \text{Ladungen der Teilchen } [q] = C = As$$

$$\vec{v} = \text{Driftgeschwindigkeit } [v] = \frac{m}{s}$$

$$\rho = \text{Raumladungsdichte } [\rho] = \frac{As}{m^3}$$

$$\kappa = \text{Elektrische Leitfähigkeit } [\kappa] = \frac{A}{V \cdot m}$$

Grundlage für den Strom sind bewegte Ladungsträger.

Im Falle eines Kupferkabel sind dies zum Beispiel Elektronen, die sich **gegen** das elektrische Feld bewegen. Da Elektronen jedoch eine negative Ladung besitzen und der Strom als Ladung pro Zeit die durch eine Fläche hindurchfliesst definiert ist, zählen negative Ladungen, die entgegen dem Strom fliessen, zum Strom hinzu.

$$J := n \cdot q \cdot \vec{v}_I = n \cdot (-e) \cdot (-\vec{v}_I)$$

In anderen Baustoffen (wie zum Beispiel Halbleitern), bewegen sich **positive Ladungsträger** (=Löcher) mit dem Elektrischen Feld.

Diese führen zu einem positiven Strom in dessen Bewegungsrichtung.

Je nach Material, ist es auch möglich, dass beide Ladungsträger zum Stromfluss beitragen, sich jedoch nicht gleich gut im Material bewegen können.

Aus diesem Grund, gibt es für positive wie negative Ladungen verschiedene Beweglichkeiten.

Definition Elektrische Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit (κ) beschreibt, wie gross die Stromdichte in einem Material, bei einem gegebenen E-Feld wird.

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} = \vec{J}_- + \vec{J}_+ = \underbrace{(n_- \cdot q_- \cdot \mu_- + n_+ \cdot q_+ \cdot \mu_+)}_{\kappa} \cdot \vec{E}$$

Dabei bezeichnen die Variablen μ_x die **Beweglichkeit** der einzelnen Ladungsträger und sind ein Mass dafür, wie schnell sich die Teilchen bei einem gegebenem E-Feld bewegen werden.

2.6 Verhalten des J- und E-Feldes an Materialübergängen

Trifft eine Stromdichte auf einen Materialübergang, so ändert sich der Betrag der Tangentialkomponente. Die **Normalkomponente bleibt gleich**.

Es gilt bei Materialübergängen:

Für das J-Feld:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}}$$
$$J_{n1} = J_{n2}$$

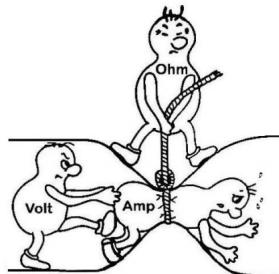
Für das E-Feld:

$$E_{t1} = E_{t2} \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}$$

3 Netzwerke

Definition Widerstand und Leitwert

Der **Widerstand** bestimmt, wieviel Strom fließen kann, wenn eine bestimmte Spannung angelegt wird.



$$R := \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{A}, \quad [R] = \Omega, \text{Ohm}$$

Als **Leitwert** bezeichnen wir die Inverse des Widerstandes. Er gibt an, wie groß die Spannung ist, wenn ein gewisser Strom fließt.

$$Y = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l}$$

Da das elektrische Feld wirbelfrei ist, erhalten wir unabhängig vom Weg den gleichen Wert für die Spannung U_{AB}

Dies bedeutet jedoch auch, dass wir für einen geschlossenen Weg die Spannung $0V$ erhalten müssen, da für jede geschlossene Kurve γ gilt:

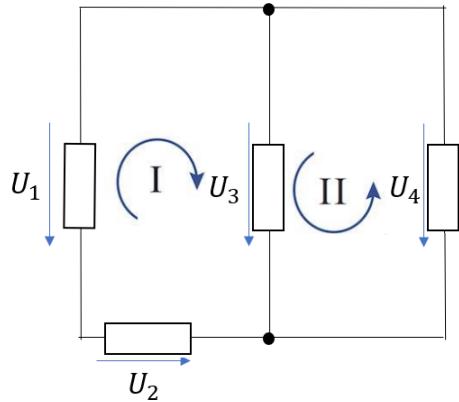
$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{01} + U_{10} = 0$$

Mit dieser Erkenntnis können wir die Maschenregel definieren:

Definition Maschenregel

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ergibt 0

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



Maschenregel

$$\text{I: } (-U_1) + U_3 + (-U_2) = 0$$

$$\text{II: } U_3 + (-U_4) = 0$$

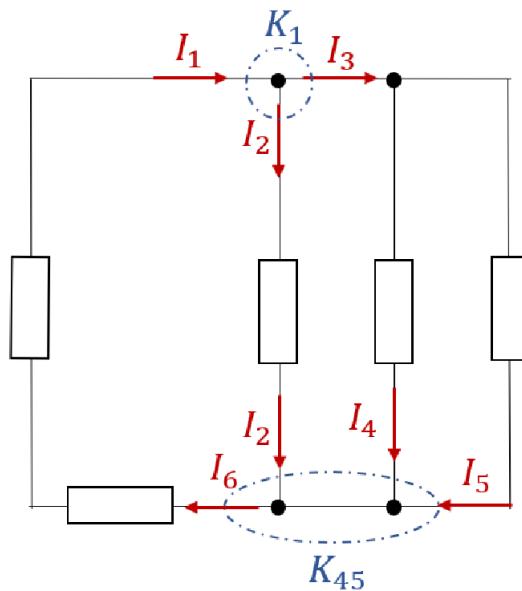
Analog können wir mithilfe der Ladungserhaltung argumentieren, dass sämtliche Ladungen, welche in ein Gebiet hineinfließen, auch wieder aus diesem hinausfließen müssen.

Definition Knotenregel

Die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein/hinausfließen muss 0 ergeben.

$$\sum_{i=0}^n I_n = 0$$

Wichtig Die Knotenregel kann auch auf ein Gebiet von Knoten angewandt werden.



Knotengleichungen

$$K_1: I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$K_{45}: I_2 + I_4 + I_5 - I_6 = 0$$

3.1 Grundlegende Netzwerkumformungen

Wir interessieren uns nun dafür, wie sich Widerstände verhalten, wenn wir sie seriell/parallel verknüpfen.

Definition Serienschaltung

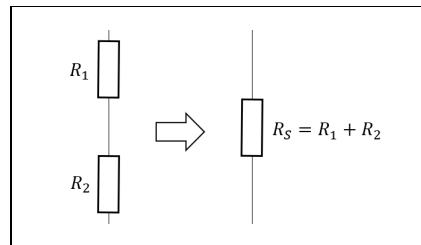
Werden mehrere Widerstände seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Widerstandswerte

$$R_{\text{serie}} = \sum_{i=0}^n R_i = R_1 + R_2 + \dots$$

Begründung

Mehrere Widerstände in Serie können als einen langen Widerstand mit konstanter Fläche angesehen werden. Da die Längenabhängigkeit des Widerstandes im Zähler steht, addieren sich die Werte.

$$R_s = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A} = \rho \cdot \frac{l_1}{A} + \rho \cdot \frac{l_2}{A} = R_1 + R_2$$



Definition Parallelschaltung

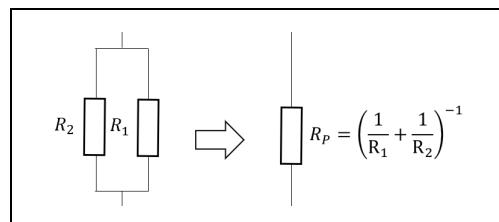
Werden mehrere Widerstände parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Leitwerte

$$Y_{\text{parallel}} = \sum_{i=0}^n Y_i \quad R_{\text{parallel}} = \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1} = \frac{(R_1 \cdot R_2)}{R_1 + R_2}$$

Begründung

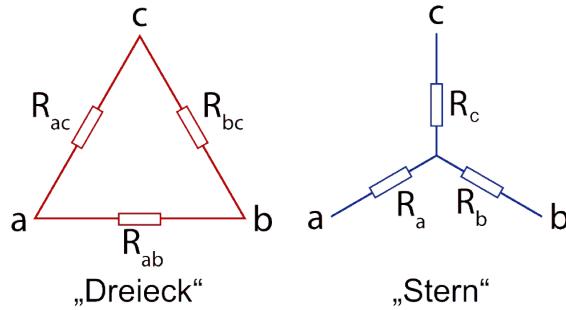
Mehrere Widerstände parallel können als einen Widerstand mit größerer Fläche und konstanter Länge angesehen werden. Da die Flächenabhängigkeit des Widerstandes im Nenner steht, addieren sich die Leitwerte.

$$Y_p = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1 + A_2}{l} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1}{l} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_2}{l} = Y_1 + Y_2$$



3.2 Stern Dreieck Umformung

Sind Widerstände weder seriell noch parallel geschaltet, sondern sind in einem Stern oder Dreieck angeordnet, können folgende Zusammenhänge verwendet werden, um eine Dreieckschaltung in eine Sternschaltung und umgekehrt umzuwandeln.



$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_B}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A}$$

$$R_A = \frac{R_{AC} R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

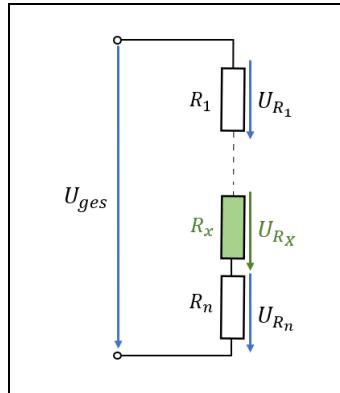
$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Gleichung Spannungsteiler

Die Spannungsteilerregel gibt an, wie sich eine Spannung über verschiedene Widerstände aufteilt, wenn diese in **Serie** geschaltet sind.

$$U_{R_x} = U_{ges} \cdot \frac{R_x}{\sum R_i}$$

2 Widerstände: $U_{R_1} = U_{ges} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$



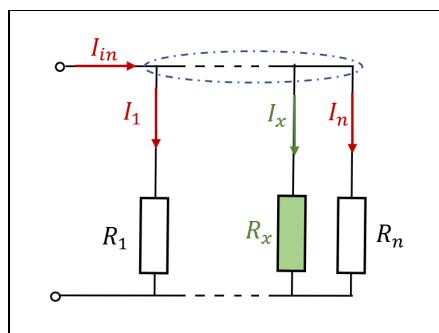
Begründung

Gemäss $U = R \cdot I$ und der Serienschaltung ist der Strom durch alle Widerstände gegeben als $I = \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$. Nun müssen wir nur noch den Strom mit dem gesuchten Widerstand multiplizieren um die Spannung zu erhalten: $U_{R_x} = R_x \cdot I = R_x \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$

Gleichung Stromteiler

Die Stromteilerregel gibt uns an, wie sich die Ströme in einem Knoten aufteilen, wenn die Widerstände **parallel** geschaltet sind.

$$I_x = I_{in} \cdot \frac{(R_1 || \dots || R_n)}{R_x}$$



Spezialfall 2 Widerstände

Falls der Stromteiler nur mit zwei Widerständen angewendet wird, vereinfacht sich die Formel:

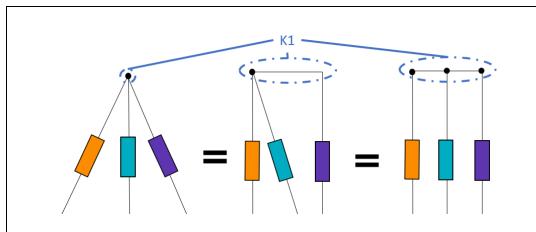
$$I_x = I_{in} \cdot \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

Der Widerstand, dessen Strom uns **nicht** interessiert, steht hierbei im Zähler!

3.3 Grundregeln bei Netzwerkumformungen

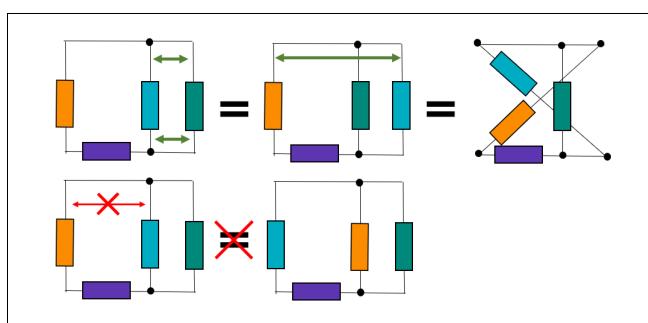
Regel 1 Expandieren von Knoten

Knoten können aufgeteilt und mit Verbindungslienien verbunden werden



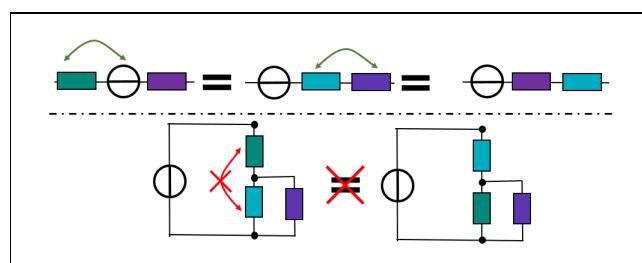
Regel 2 Verschieben von Elementen

Elemente können entlang von Verbindungslienien ohne Widerstände verschoben werden



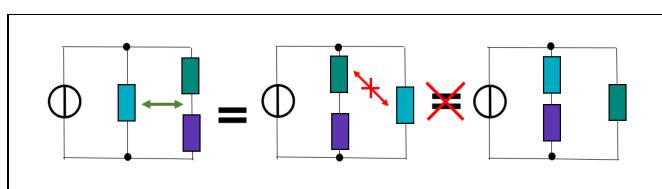
Regel 3 Vertauschen von Elementen in Serie

Elemente, die in Serie geschaltet sind, können vertauscht werden



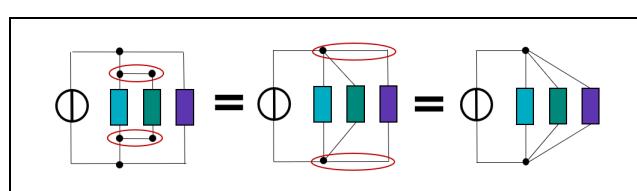
Regel 4 Vertauschen von parallel geschalteten Elementen

Elemente die parallel geschaltet sind, können vertauscht werden



Regel 5 Knoten kontrahieren

(Analog zu 1) Knoten können zusammengezogen werden, sofern sie nicht durch einen Widerstand verbunden sind.

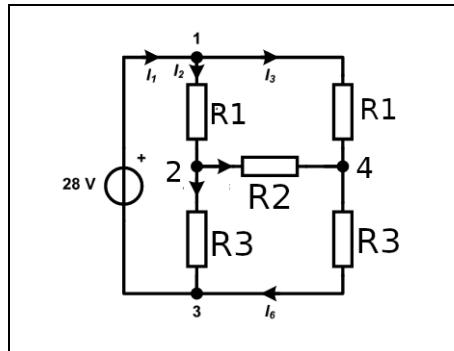


3.4 Vereinfachungen mithilfe Symmetrieüberlegungen

Besitzt ein Netzwerk verschiedene Punkte mit dem selben Potential, so können diese Punkte beliebig verbunden werden. Da die Potentialdifferenz immer 0 sein wird, wird niemals Strom zwischen diesen Punkten fliessen.

Beispiel 10 Vereinfachung eines Netzwerkes mit Symmetrie

Fassen sie alle Widerstände zu einem zusammen unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften



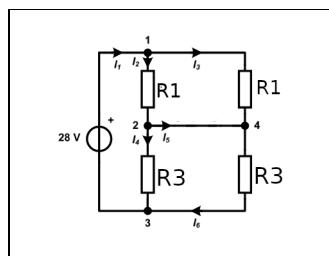
Lösung

Da das Widerstandsnetzwerk symmetrisch bezüglich R_2 ist, muss am Punkt 2 und am Punkt 4 das gleiche Potential existieren.

Dies bedeutet, dass über dem Widerstand R_2 niemals eine Spannung abfallen und somit auch nie Strom fliessen wird.

Lösung 1:

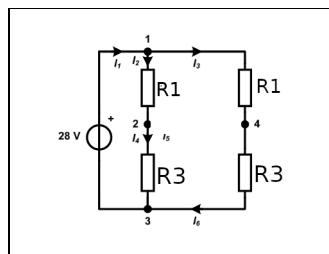
Wir verbinden die Punkte 2 und 4 mit einem Kurzschluss und erhalten



$$\underline{\underline{R_{ges}}} = (R_1 \parallel R_1) + (R_3 \parallel R_3) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(R_1 + R_3)}}$$

Lösung 2:

Wir verbinden die Punkte 2 und 4 mit einem Leerlauf und erhalte



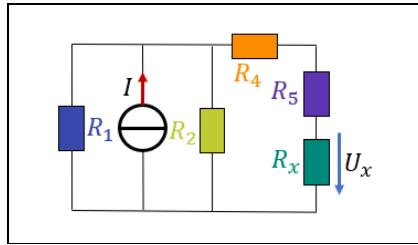
$$\underline{\underline{R_{ges}}} = ((R_1 + R_3) \parallel (R_1 + R_3)) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(R_1 + R_3)}}$$

3.5 Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen

1. Bringe Quelle auf die linke Seite
2. Forme mit Regel 1 - 5 das Netzwerk soweit um, bis nur noch Spannungs-/Stromteiler oder einfache Maschen vorhanden sind.
3. Expandiere nun das Netzwerk Schritt für Schritt, bis die Spannung über dem gesuchten Widerstand berechnet werden kann.

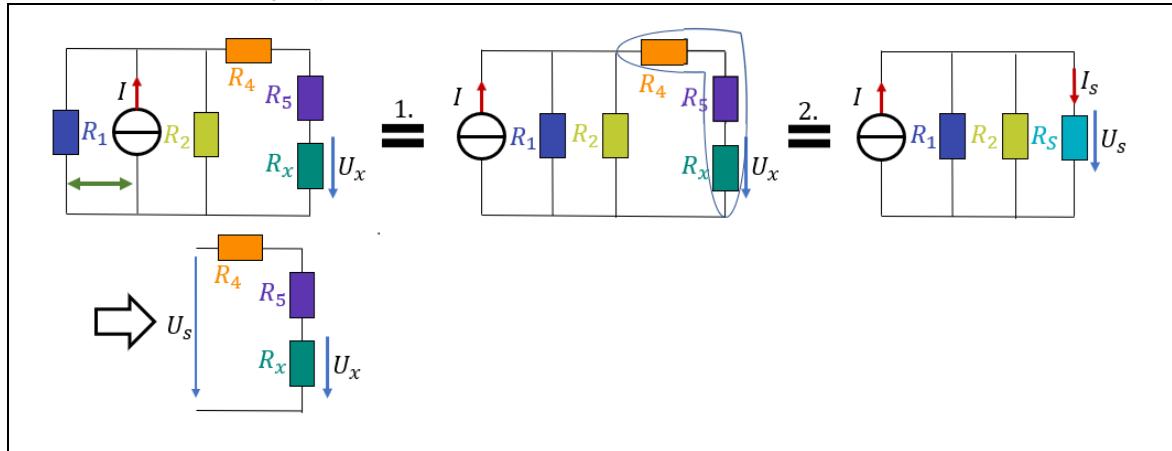
Beispiel 11

- 1) Berechnen Sie U_x in Abhängigkeit des Quellstromes I



Lösung

1. Gemäss Regel 2 können wir R_1 und die Stromquelle vertauschen.
2. Die Widerstände R_4, R_5 und R_x können zu $R_S = R_3 + R_4 + R_5$ zusammengefasst werden.
3. Mithilfe der Stromteilerregel erhalten wir $I_s = I \cdot \frac{(R_1 || R_2 || R_S)}{R_S}$ und somit $U_s = I \cdot (R_1 || R_2 || R_S)$
4. Die Spannung U_s liegt also über dem Widerstand R_s an. Wenn wir diesen wieder in die ursprünglichen 3 Widerstände aufteilen, erhalten wir mithilfe der Spannungsteilerregel $U_x = U_s \cdot \frac{R_x}{R_4 + R_5 + R_x}$



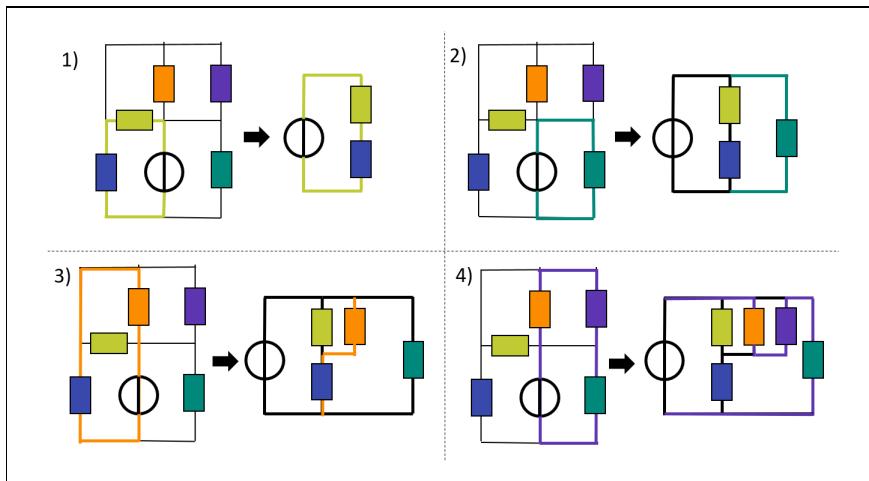
In manchen Fällen kann es schwierig sein, die Quelle auf die linke Seite zu bringen oder das Schaltbild nützlich umzuformen.

Um ein erstes Ersatzschaltbild zu erhalten, kann das "Flussverfahren" angewandt werden.

Beispiel Flussverfahren

Beim Flussverfahren überlegt man sich sämtliche Arten, wie der Strom von einem Ende der Quelle zum anderen fliessen kann, und zeichnet somit ein Ersatzschaltbild.

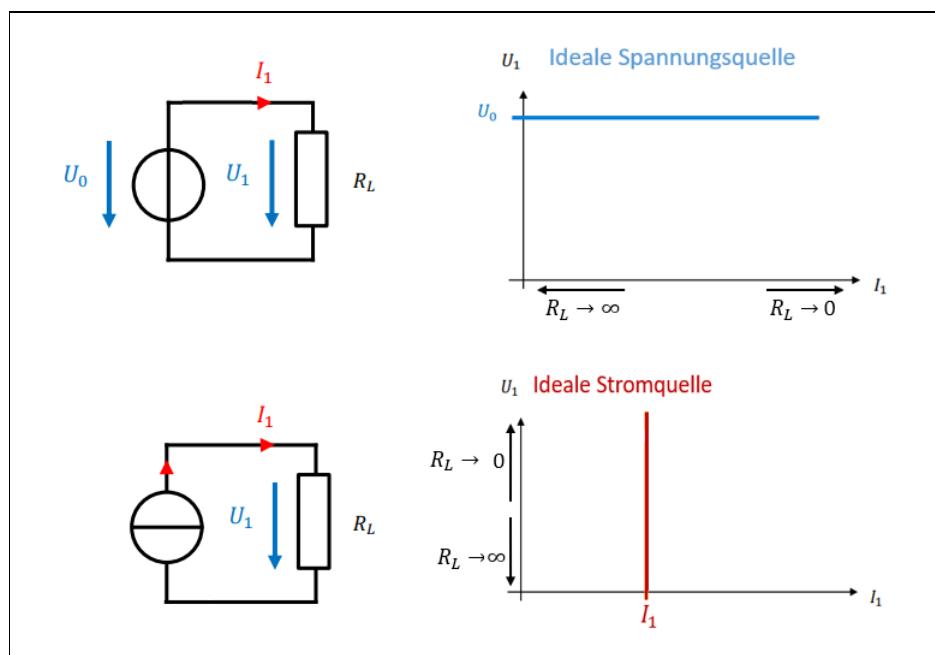
Beispiel



3.6 Quellen

Definition Ideale Quelle

Eine ideale Strom-/Spannungsquelle liefert immer denselben Strom/dieselbe Spannung, unabhängig von der Last, welche angehängt wird.



Mit idealen Strom-/Spannungsquellen können wir theoretisch unendlich viel Spannung/Strom über einen Lastwiderstand erzeugen.

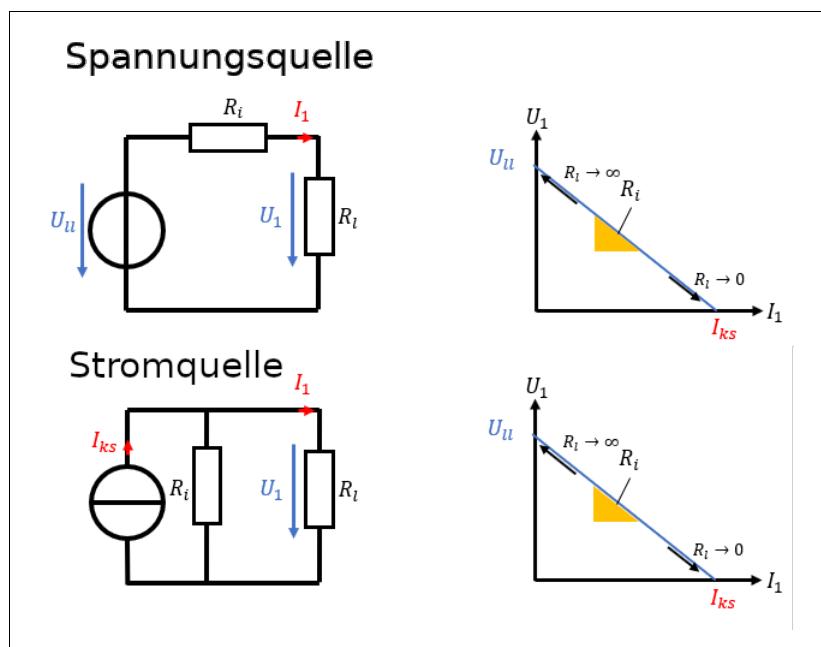
(Beispiel ideale Spannungsquelle im Kurzschluss/ideale Stromquelle im Leerlauf)

Bei einer realen Quelle kann jedoch nur eine endliche Spannung/Strom auftreten, weshalb wir Verluste innerhalb der Quelle mit einem Innenwiderstand R_i modellieren.

Definition Reale Quelle

Eine reale Quelle bezeichnet eine ideale Quelle mit Vorwiderstand.

Bei einer **Stromquelle** ist der Widerstand **parallel**, bei einer **Spannungsquelle** ist der Widerstand in **Serie**.

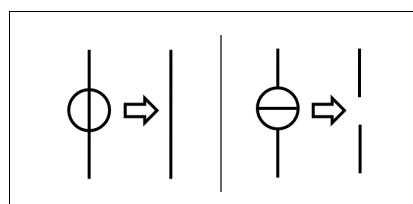


3.7 Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip besagt, dass wir bei einem Netzwerk mit mehreren Quellen einzelne Teillösungen in Abhängigkeit von nur einer Quelle berechnen und aufsummieren können.

Dies gilt jedoch nicht für die Leistung, da diese nicht linear ist!

Um das Superpositionsprinzip anzuwenden, müssen wir alle ausser einer Quelle auf "0" setzen. Spannungsquellen werden also mit **Kurzschlüsse** ersetzt und Stromquellen mit **Leerläufen**.



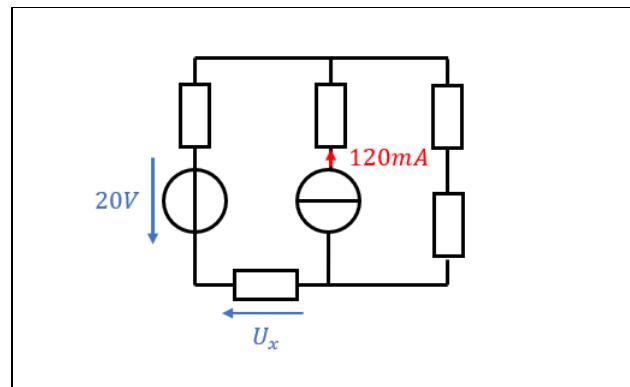
Wieso?

Eine Spannungsquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass über diesem Bauteil keine Spannung abfallen darf. Über einem Kurzschluss wird nie eine Spannung abfallen, da dieser als Widerstand mit Wert 0 modelliert werden kann.

Eine Stromquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass durch dieses Bauteil kein Strom fliessen darf. Dies entspricht gerade einem Leerlauf, da dieser als Widerstand mit Wert $\rightarrow \infty$ modelliert werden kann.

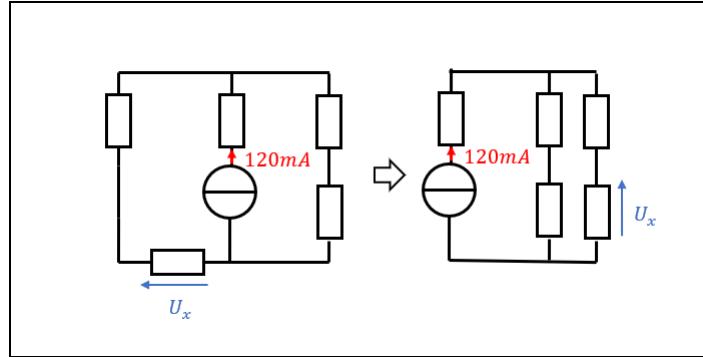
Beispiel 12

Berechnen Sie die Spannung U_x und die Leistung P_x im folgenden Netzwerk, wenn alle Widerstände $R = 100\Omega$ betragen.



Lösung

Zuerst setzen wir die Spannungsquelle zu 0 und erhalten das folgende ESB



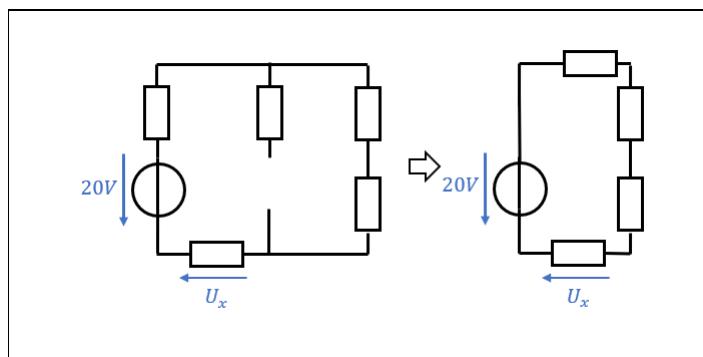
Nun berechnen wir den Strom I_{x_1} durch den Widerstand mithilfe eines Stromteilers:

$$I_{x_1} = 60mA$$

Die Spannung U_x ist entgegen der Stromrichtung eingezeichnet:

$$U_{x_1} = -R_x \cdot I_x = -100 \cdot 60mA = -6V$$

Nun setzen wir die Stromquelle zu 0:



Die Spannung U_{x_2} berechnet sich als Spannungsteiler:

$$U_{x_2} = 20V \cdot \frac{100\Omega}{400\Omega} = 5V, I_{x_2} = \frac{5V}{100\Omega} = 50mA$$

Superposition:

Schlussendlich berechnet sich die Spannung als Summe der Teilspannungen:

$$U_x = U_{x_1} + U_{x_2} = 5V - 6V = -1V$$

Und die Leistung:

$$P_x = \frac{U_x^2}{R_x} = 10mW$$

Welche **nicht** der Summe der Teilleistungen entspricht:

$$P_{sum} = P_1 + P_2 = U_{x_1} \cdot I_{x_1} + U_{x_2} \cdot I_{x_2} = 360mW + 250mW = 610mW$$

3.8 Ersatzquellen

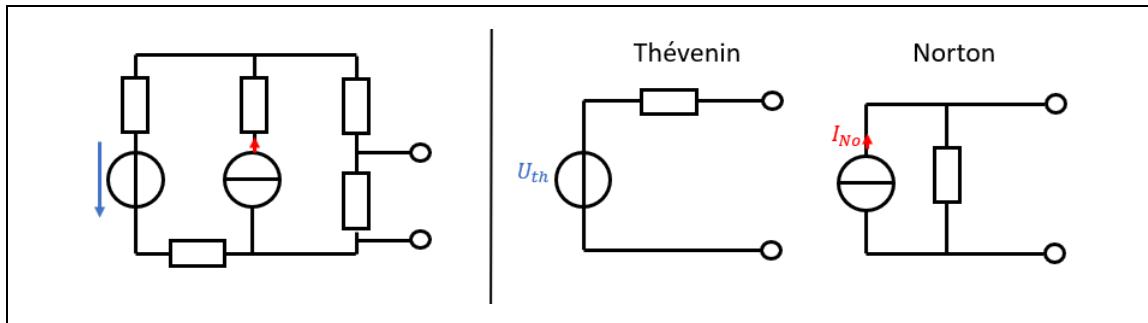
Definition Thévenin / Norton Äquivalent

Jedes Netzwerk mit **linearen** Bauelementen und 2 Klemmen lässt sich als reale Quelle darstellen.

Thévenin Äquivalent Darstellung als reale **Spannungsquelle** mit Leerlaufspannung, die an den Klemmen auftritt

Norton Äquivalent Darstellung als reale **Stromquelle** mit Kurzschlussstrom, der an den Klemmen auftritt

Der Innenwiderstand entspricht dem von außen gemessenen Widerstand, wenn alle Quellen zu 0 gesetzt werden.



✓ Vorgehen Ersatzquelle für gegebenes Schaltbild mit offenen Klemmen finden

1. Betrachte die Schaltung. Sind mehr Stromquellen vorhanden, so ist es häufig einfacher den Kurzschlussstrom zu berechnen. Bei mehr Spannungsquellen die Leerlaufsspannung. Wiederhole folgendes für alle Quellen i :
 2. Setze alle Strom / Spannungsquellen ausser einer zu 0. (Stromquelle → Leerlauf, Spannungsquelle → Kurzschluss)
 3. Versuche die einzelne Quelle auf die linke Seite zu bekommen. (Siehe Skript "Flussverfahren")
- 4.a) **Kurzschlussstrom**

1. Schliesse die Klemmen kurz und bezeichne den Strom, welcher durch diese Klemmen fliesst als $I_{ks}^{(i)}$.
2. Versuche mittels Stromteilern den gesuchten Strom zu berechnen. *Falls eine direkte Verbindung von Stromquelle über den Kurzschluss zur Quelle zurückführt, ist der Kurzschlussstrom gleich dem Strom der Quelle. (Bild)*
Ist die Quelle keine Stromquelle, so kann evt. ein serieller Widerstand verwendet werden, um die Quelle umzuformen.

4.b) **Leerlaufspannung**

1. Zeichne einen Spannungspfeil zwischen den Klemmen und bezeichne die Spannung als $U_{LL}^{(i)}$.
2. Versuche mittels Spannungsteiler die gesuchte Spannung zu berechnen. *Falls kein Strom von der Spannungsquelle fliessen kann (Leerlauf unterbricht die komplette Schaltung), so ist die Leerlaufspannung gleich der Spannung der Spannungsquelle. (Bild)*
Ist die Quelle keine Spannungsquelle, so kann evt. ein paralleler Widerstand verwendet werden, um die Quelle umzuformen.

5. Innenwiderstand

1. Setze **alle** Quellen auf 0. Versuche nun die Widerstände solange umzuformen, bis nur noch ein Ersatzwiderstand vorhanden ist. (Ggf. "Flussverfahren" mit offener Klemme anwenden)
2. Bezeichne den Wert des Widerstandes als R_i

6.a) **Thévenin Äquivalent** Spannungsquelle mit seriellem Innenwiderstand.

$$\text{Werte: } R = R_i, U_q = \sum_i U_{LL}^{(i)} = (\sum_i I_{ks}^{(i)}) \cdot R_i$$

6.b) **Norton Äquivalent** Stromquelle mit parallelem Innenwiderstand.

$$\text{Werte: } R = R_i, I_q = \sum_i I_{ks}^{(i)} = \frac{\sum_i U_{LL}^{(i)}}{R_i}$$

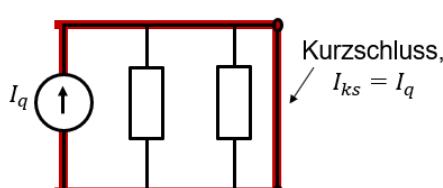


Bild zu 4.a)

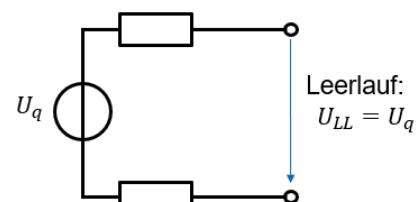
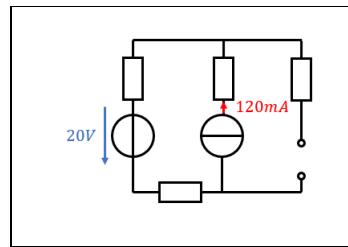


Bild zu 4.b)

Beispiel 13 Thévenin Äquivalente Schaltung

Geben Sie eine Thévenin Äquivalente Schaltung (Innenwiderstand R_i , U_{Th}) für folgende Klemmen an. Alle Widerstände haben Wert 100Ω



Lösung

Zuerst berechnen wir die Leerlaufspannung für die Stromquelle:

$$U_{LL_1} = 120\text{mA} \cdot 200\Omega = 24\text{V}$$

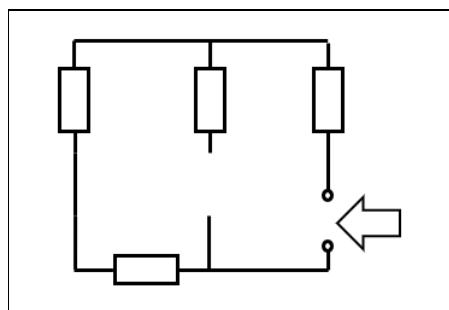
Danach die Leerlaufspannung für die Spannungsquelle:

$$U_{LL_2} = 20\text{V}$$

Die Gesamtspannung und somit die Spannung der Ersatzspannungsquelle beträgt:

$$\underline{\underline{U_{Th}}} = U_{LL_1} + U_{LL_2} = \underline{\underline{44\text{V}}}$$

Nun müssen wir noch den Innenwiderstand berechnen. Dazu setzen wir alle Quellen zu 0 und berechnen den von aussen gemessenen Widerstand:



$$\underline{\underline{R_i}} = 100\Omega + 100\Omega + 100\Omega = \underline{\underline{300\Omega}}$$

3.9 Leistungsanpassung

Definition Leistung

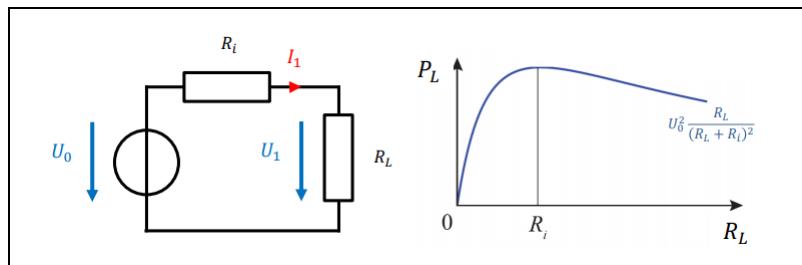
Als Leistung bezeichnen wir das Produkt von Strom und Spannung.
Sie bezeichnet die in einer Zeitspanne umgesetzte Energie an einem Bauteil.

$$P := U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Definition Maximale Leistung

Um bei einer realen Quelle maximale Leistung an einen Lastwiderstand abzugeben, muss der Lastwiderstand gleich gross sein wie der Innenwiderstand der Quelle.

$$R_i = R_L \Rightarrow P = P_{max}$$



Begründung

Die Leistung an einem Lastwiderstand in Serie ist gegeben als:

$$P_L = U_L \cdot I_L = \frac{U_L^2}{R_L} = \frac{(U_0 \frac{R_L}{R_L + R_i})^2}{R_L} = U_0^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2}$$

$$\frac{d}{dR_L}(P_L) = -U_0^2 \cdot \frac{R_L - R_i}{(R_L + R_i)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_i \Rightarrow P_L = P_{max}$$

✓ Vorgehen Leistung über einer Last maximieren

Falls möglich

1. Entferne Komponenten über denen die Leistung maximiert werden soll und ersetze sie mit offenen Klemmen (Fasse die entfernten Komponenten als einen Lastwiderstand zusammen).
2. Berechne von den Klemmen den Innenwiderstand.
3. Innenwiderstand $R_i \rightarrow R_L = R_i$
4. Falls maximale Leistung gefragt: Berechne Leerlaufspannung oder den Kurzschlussstrom.

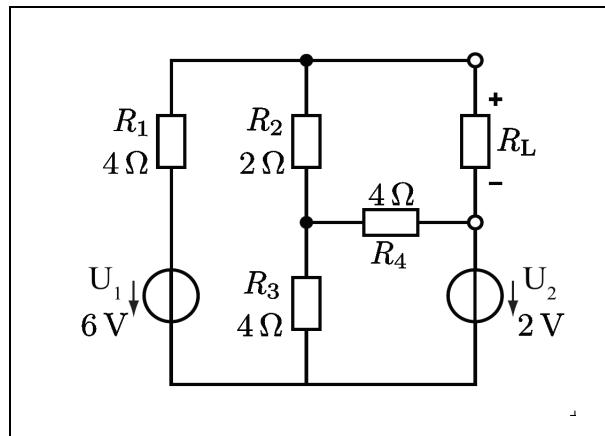
$$P_{max} = \frac{U_{LL}^2}{4 \cdot R_i}$$

Sonst

1. Finde einen Ausdruck für U_L und I_L
2. Berechne $P = U_L \cdot I_L$
3. Leite P nach dem veränderlichen Widerstand ab und setze zu 0 um ein Maximum zu finden

Beispiel 14 Leistungsanpassung

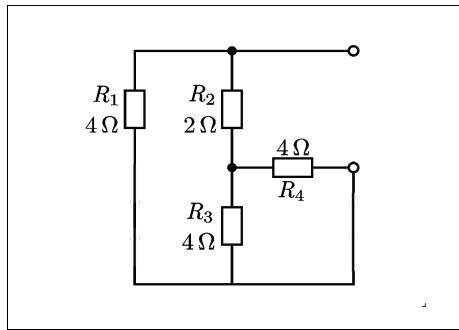
Berechnen sie für folgendes ESB den Wert für R_L bei dem R_L maximale Leistung aufnimmt.



Lösung

Um die Leistung über R_L zu maximieren, entfernen wir den Widerstand und berechnen den Innenwiderstand bezüglich den Klemmen.

Für die Berechnung des Innenwiderstandes, werden alle Spannungsquellen kurzgeschlossen.



Nun müssen nur noch alle Widerstände zu einem zusammengefügt werden:

$$R_i = (R_1 || R_2 + (R_3 || R_4)) = 2\Omega$$

$$\underline{\underline{R_L = R_i = 2\Omega}}$$

3.10 Analyse umfangreicher Netzwerke

Möchten wir in Netzwerken sehr viele Größen berechnen, oder ist das Netzwerk sehr komplex, so können andere (meist Computer basierende) Verfahren verwendet.

Sämtliche Verfahren bauen darauf auf, dass für ein beliebiges Netzwerk das Aufstellen sämtlicher Knoten und Maschengleichungen genügt, um alle gesuchten Größen zu berechnen.

Unabhängige Gleichungen

Seien z die Anzahl Zweige eines Netzwerkes (Verbindungen 2-er Knoten) und k die Anzahl Knoten, so müssen z linear unabhängige Gleichungen gefunden werden, um alle Größen im Netzwerk zu berechnen.

Die Gleichungen können folgendermassen gefunden werden:

(k-1) Gleichungen können aus Knotengleichungen gefunden werden.
($z - (k-1)$) übrige Gleichungen werden mithilfe von Maschengleichungen gefunden.

✓ Vorgehen Analyse von Umfangreichen Netzwerke

- Entferne alle Widerstände und Quellen und zeichne das Schaltbild neu.
- Nummeriere alle Konten. Die Anzahl der Knoten wird mit k bezeichnet.
- Alle Verbindungslinien, welche zwei Knoten verbinden, werden als Zweige bezeichnet.
 $\#$ Zweige = z
- Definiere Ströme für jeden Zweig und stelle $(k-1)$ Knotengleichungen auf. Schreibe diese am besten bereits in Matrix schreibweise:

Bsp: $I_1 + I_2 = I_3, I_3 - I_4 = 2A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \end{bmatrix}$$

- Finde $z - (k-1)$ unabhängige Maschengleichungen. (Mittels vollständiger Baum / Auftrennen der Maschen)
- Ersetze die Spannungen der Maschengleichung mit Strom mal Widerstand und ergänze das Gleichungssystem.

Bsp: $U_1 + U_2 = 5V, U_2 - U_3 = U_4$

$$\rightarrow R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 5V, R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0$$

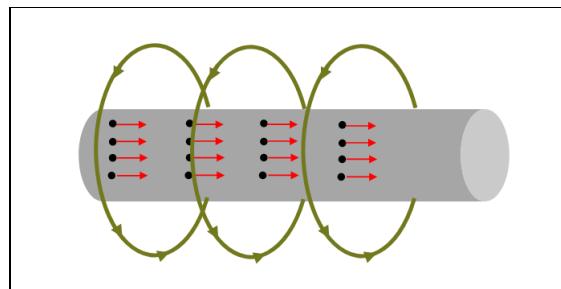
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_3 & -\mathbf{R}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \\ 5V \\ 0 \end{bmatrix}$$

4 Magnetostatik

4.1 Das Magnetische Feld und die Lorentzkraft

Analog zum elektrischen Feld definieren wir ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien Kräfte auf eine bewegte Ladung auswirken.

Auslöser für das magnetische Feld sind **bewegte Ladungen** welche gemäss der rechten Hand Regel ein Magnetfeld hervorrufen, das diese einschliesst.



Definition Magnetische Flussdichte B

Bewegte Ladungsträger welche sich in der Nähe anderer bewegter Ladungsträger befinden, verspüren eine Kraftwirkung welche senkrecht zur Bewegungsrichtung zeigt.

Analog zum elektrischen Feld definieren wir ein magnetisches Feld (= magnetische Flussdichte) welche diese Kraftwirkung beschreibt.

Die magnetische Flussdichte, weisst jedem Punkt im Raum einen Vektor zu. Die resultierende Kraft auf ein Ladungsträger, welcher sich mit Geschwindigkeit V bewegt, berechnet sich aus dem Kreuzprodukt von Geschwindigkeit und Ladung (\rightarrow **Lorentzkraft**)

Definition Rechte Hand Regel

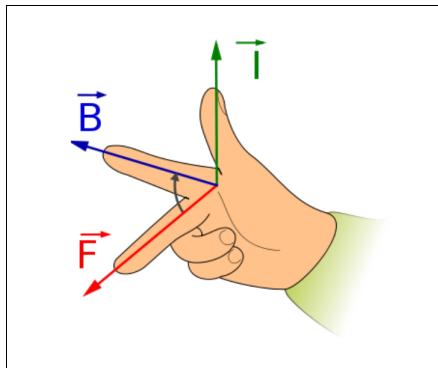
Die magnetische Flussdichte B um einen stromdurchflossenen Leiter baut sich stets gegen den Uhrzeigersinn auf und ist **immer geschlossen**.



Gleichung Lorentzkraft

Bewegte Ladungen in einem Magnetfeld verspüren eine Kraft, welche proportional zur Stärke des B-Feldes und der Geschwindigkeit ist.

Die Kraft steht senkrecht zu den Feld- und Geschwindigkeitsvektoren.



$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

Variablen:

F_m = Magnetische Kraft [F_M] = N

\vec{v} = Geschwindigkeit der Teilchen [v] = $\frac{m}{s}$

\vec{B} = Magnetische Flussdichte [B] = T (Tesla)

\vec{l} = Länge des Leiters im Magnetfeld [l] = m

Die Summe mit der Coulomb Kraft bezeichnet die **Lorentzkraft**

$$\vec{F}_L = \vec{F}_m + \vec{F}_c = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{l} \times \vec{B}) + q \cdot \vec{E}$$

In älteren Physikbüchern wird häufig nur die magnetische Kraftwirkung als Lorentzkraft bezeichnet.

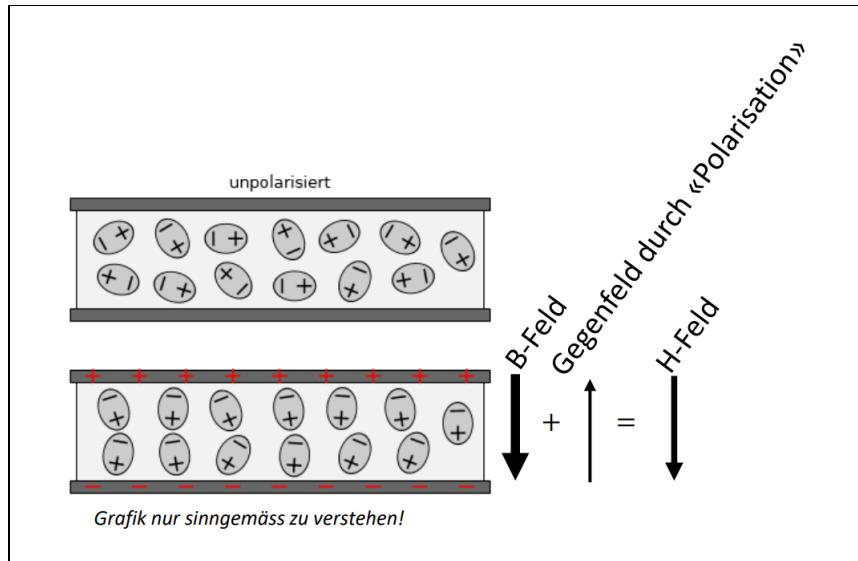
Definition H-Feld

Legen wir ein magnetisches Feld an eine Materie an, so richten sich die eingeschlossenen Teile entgegen dem angelegten Feld aus und "schwächen" dieses.

Das "abgeschwächte" Feld bezeichnen wir als magnetische Feldstärke (H-Feld) und entspricht dem Feld, welches real auf Ladungen wirkt.

Der "Abschwächungsfaktor" $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ wird als Permeabilität bezeichnet.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$



Gleichung Durchflutungssatz

Der Durchflutungssatz sagt etwas darüber aus, wie das magnetische Feld entsteht.

Es bringt die **Magnetische Feldstärke H** (Feld) und den **Strom I** (Quelle) in Verbindung. Die Aussage des Durchflutungssatz ist, dass das Wegintegral des H-Feldes über eine beliebige **geschlossene** Kurve gerade dem Wert des durch diese Fläche fließenden Stromes entspricht.

Diesen Wert definieren wir als Durchflutung Θ

$$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I_{eff}$$

Dabei ist es wichtig, dass nur der **effektiv durch eine Fläche hindurchfliessende Strom** die Magnetische Durchflutung auslöst. Fliest in einer Fläche gleich viel Strom hinein wie hinaus, ist die Durchflutung gleich 0.

Gleichung Vereinfachter Durchflutungssatz

Für den Fall, dass der Strom N mal durch eine Fläche hindurchfliesst und das H-Feld auf dem gesamten Weg konstant und parallel zum Weg ist, gilt folgende Vereinfachung:

$$\Theta = H \cdot l_s = N \cdot I \rightarrow H = \frac{N \cdot I}{l_s}$$

Beispiel 15

Berechnen Sie die Durchflutung Θ und das H-Feld \vec{H} um einen unendlich langen, mit Strom I durchflossenen Leiter. Der Radius des Leiters sei ρ .

Lösung

Wir wählen als geschlossenen Weg einen Kreis mit Radius R um unseren Leiter.

Da wir von einem perfekten Leiter ausgehen, treffen wir die Annahme, dass das Magnetfeld achsensymmetrisch und somit konstant entlang des Kreises ist.

Wir erhalten: für $R > \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \underline{\underline{I}}$$

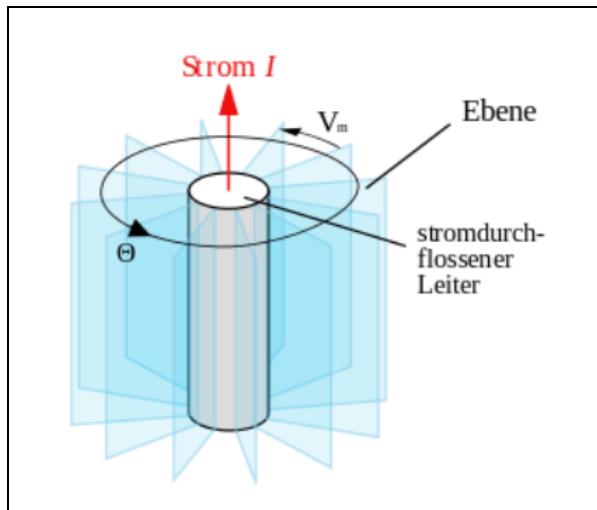
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = I \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R)}} = \frac{I}{2\pi R} \cdot \underline{\underline{\vec{e}_\phi}}$$

Für $R < \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta(R)}} = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi \rho^2} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{2 \cdot I}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \underline{\underline{\frac{R^2 \cdot I}{\rho^2}}}$$

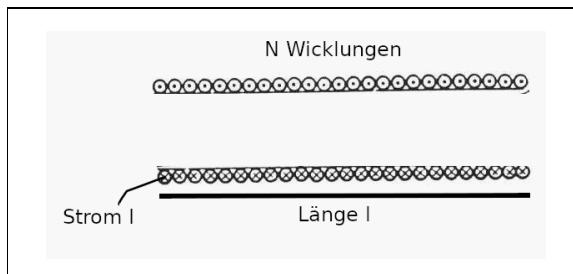
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = \frac{I \cdot R^2}{\rho^2} \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R)}} = \frac{I}{2\pi \rho^2} \cdot R \cdot \underline{\underline{\vec{e}_\phi}}$$

Skizze

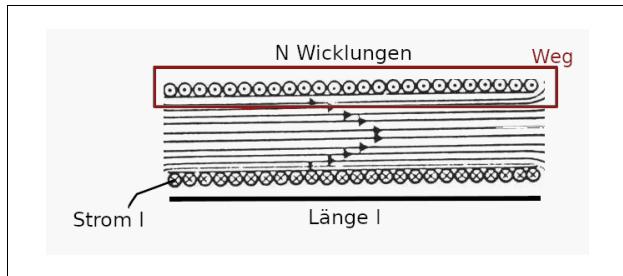


Beispiel 16 Magnetfeld einer Spule

Gegeben sei eine Spule mit N Wicklungen und der Länge l. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke \vec{H} in Abhängigkeit des Stromes I, Länge l und Wicklungen N.



Es gilt für die Durchflutung bezüglich des roten Weges:



$$\Theta_{Spule} = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{A_s} \vec{j} \cdot d\vec{A} = N \cdot I \simeq \int_0^b \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Da die Anordnung **symmetrisch zur X-Achse** ist, wird das H-Feld auf dem gesamten Weg konstant sein und in X-Richtung zeigen,

$$\Theta_{Spule} = N \cdot I = H \cdot l_s$$

Und somit gilt für das H-Feld mit Richtungsvektor:

$$H = \frac{N \cdot I}{l_s} = \frac{N \cdot I}{l}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{Ausserhalb der Spule} \\ \frac{N \cdot I}{l_s} \vec{e}_x & \text{Innerhalb der Spule} \end{cases}$$

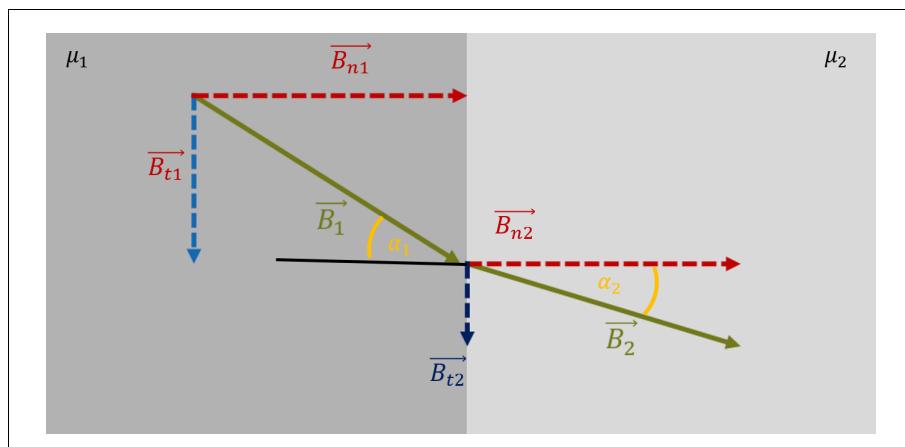
Aus der letzten Aufgabe folgt, dass das magnetische Feld einer Spule im Inneren Näherungsweise konstant ist. Ausserhalb der Windungen ist die Spule feldfrei.

Diese Eigenschaften entsprechen gerade denen eines **Stabmagneten**

4.1.1 Verhalten von B und H Feld an Randflächen

B-Feld

Fliesst ein B-Feld durch einen Materialübergang, so verändert sich die **Tangentialkomponente**. Die **Normalkomponente** bleibt gleich.

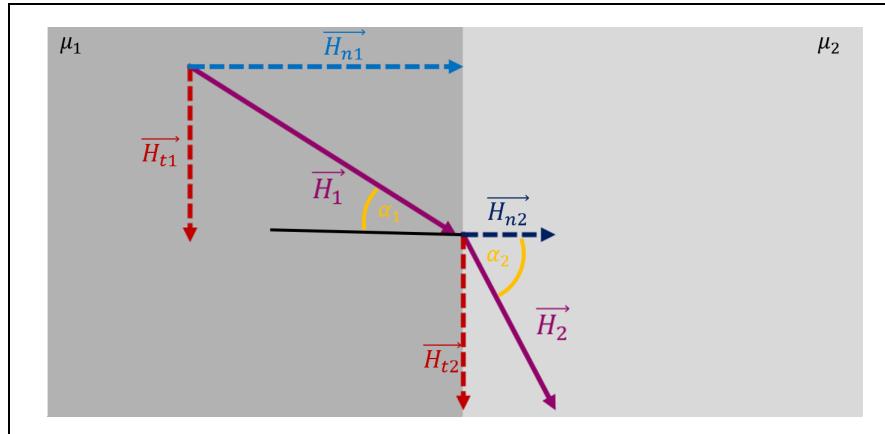


$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$B_{t2} = B_{t1} \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\tan(\alpha_1)}$$

H-Feld

Fließt ein H-Feld durch einen Materialübergang, so verändert sich die **Normalkomponente**. Die **Tangentialkomponente** bleibt gleich.



$$H_{n2} = H_{n1} \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

4.1.2 Das Reluktanzmodell

Definition Magnetische Spannung

Als magnetische Spannung bezeichnen wir das Wegintegral über die magnetische Feldstärke H.

$$V_{M_{AB}} := \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Die magnetische Spannung ist einzige eine Hilfsgrösse, um Werte zu berechnen.

Analog zum elektrischen Feld, lässt sich auch hier eine Maschengleichung definieren:

$$\oint_{Masche} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta_{Masche}$$

Falls wir nun die Durchflutung Θ als Quelle einfügen, gilt für ein magnetisches Netzwerk:

$$\oint_{Masche} \vec{H} \cdot d\vec{s} + \Theta_{Quellen} = 0$$

Definition Magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss Φ bezeichnen wir die "Menge B-Feld", welche durch eine gegebene Fläche fliesst.

$$\Phi := \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \simeq \pm B \cdot A, \quad [\Phi] = T \cdot m^2$$

Definition Magnetischer Widerstand

Als magnetischer Widerstand R_m bezeichnen wir das Verhältnis zwischen magnetischer Spannung und magnetischem Fluss

Er sagt etwas darüber aus, wie gross der magnetische Fluss bei einer gegebenen magnetischen Spannung ist.

$$R_m = \frac{V_M}{\Phi} \underset{\text{magn. Leiter}}{\underbrace{=}} \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Begründung

Wir gehen davon aus, dass die magnetische Spannung über einem Leiter mit Länge l anliegt, dessen Querschnittsfläche A ist.

$$\frac{V_M}{\Phi} = \frac{\int_0^l \vec{H} \cdot d\vec{s}}{\iint_a \vec{B} d\vec{A}} = \frac{l \cdot H}{\mu \cdot A \cdot H} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

magnetische Größen im Vergleich zu elektrischen

	Elektrisch	Einheit	Magnetisch	Einheit
Leitfähigkeit	κ	$[\frac{1}{\Omega \cdot m}]$	$\mu (= \mu_0 \cdot \mu_r)$	$[\frac{H}{m}]$
Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$[\Omega]$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$	$[\frac{1}{H}]$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$[S]$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$	$[H]$
Spannung	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$[V]$	$\Theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$[A]$
Strom / Fluss	$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$[A]$	$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$	$[Wb]$
Ohmsches Gesetz	$U = R \cdot I$		$\Theta = R_m \cdot \Phi$	
Maschenregel	$U_0 = \sum_{Masche} U_m$		$\Theta (= NI) = \sum_{Masche} V_m$	
Knotenregel	$\sum_{Knoten} I_k = 0$		$\sum_{Knoten} \Phi_k = 0$	

Definition Reluktanzmodell

Das Reluktanzmodell besagt, dass man eine magnetische Anordnung, als elektrisches Schaltbild beschreiben und berechnen kann.

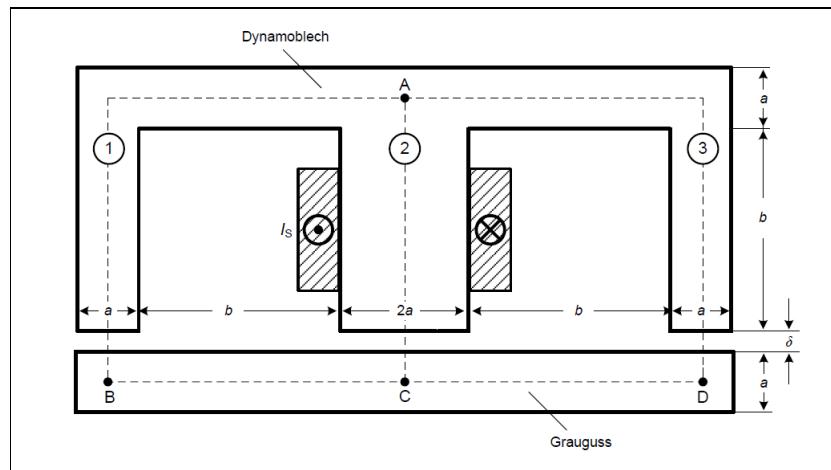
Vorgehen

- Spulen werden mit Spannungsquellen ersetzt $V_m = N \cdot I$
- Magnetkerne/Luftspalte etc. werden mithilfe der Länge und Querschnittsfläche als Widerstände modelliert. $R_m = \frac{l}{\mu A}$
- Für magnetische Widerstände gelten die gleichen Regeln wie bei elektrischen (Serienschaltung / Paralellschaltung).

Beispiel 17

Aufgabe Hubmagnet

Der mittlere Schenkel (2) eines E-Kernes aus Dynamoblech trägt eine Wicklung mit N Windungen. Über die drei Luftspalten mit gleicher Länge δ wird ein Anker aus Grauguss mit der Kraft F_A angezogen. E-Kern und Anker besitzen die gleiche Dicke d .



Gegeben sind folgende Parameter:

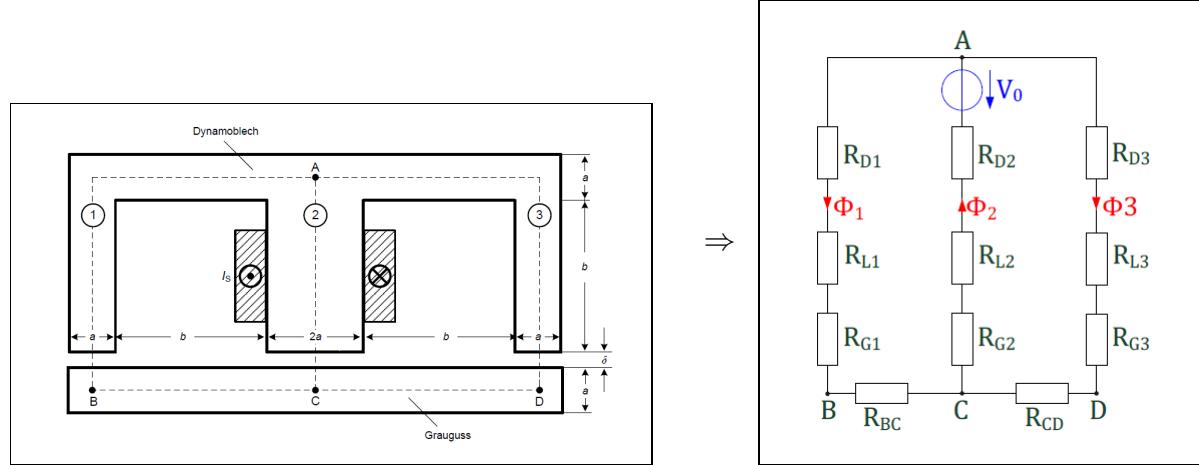
Windungszahl der Wicklung:	$N = 1000$
Magnetische Feldkonstante:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
Relative Permeabilität Dynamoblech:	$\mu_{rD} = 2000$
Relative Permeabilität Gusseisen:	$\mu_r = 250$
Luftspaltlänge:	$\delta = 0.1 \text{ mm}$
Anzugskraft Anker:	$F_A = 150 \text{ N}$
Breite E-Kern und Anker:	$a = 20 \text{ mm}$
Abstand der Schenkel:	$b = 80 \text{ mm}$
Dicke E-Kern und Anker:	$d = 50 \text{ mm}$

Berechnen sie die magnetische Spannung auf dem Weg ACD.

Lösung

Zuerst zeichnen wir ein Reluktanzmodell des Magneten.

Wobei R_L die Luftspalte, R_{Di} die Beine des Magneten und R_{Gi} sowie R_{BC} und R_{CD} das Gussein- senstück modellieren.



Für die Spannungsquelle erhalten wir:

$$V_0 = N \cdot I_s = 1000 \cdot 211.3 \text{mA} = 211.3 \text{A}$$

Für die Widerstände:

$$\begin{aligned} R_{D1} &= R_{D3} = \frac{2b+2a}{\mu_0 \mu_r D ad} = 79.6 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{D2} &= \frac{b+\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r D ad} = 17.9 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{L1} &= R_{L3} = \frac{\delta}{\mu_0 ad} = 79.6 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{L2} &= \frac{\delta}{2\mu_0 ad} = 39.8 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{G1} &= R_{G3} = \frac{\frac{a}{2}}{\mu_0 \mu_r G ad} = 31.8 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{G2} &= \frac{\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r G ad} = 15.9 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_{BC} &= R_{CD} = \frac{b+\frac{3}{2}a}{2\mu_0 \mu_r G ad} = 350.1 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \end{aligned}$$

Weiter können wir die einzelnen Widerstände seriell zusammenfassen:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{D1} + R_{L1} + R_{G1} = 191 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_2 &= R_{D2} + R_{L2} + R_{G2} = 73.7 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_3 &= R_{D3} + R_{L3} + R_{G3} = 191 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \\ R_E &= R_{BC} = R_{CD} = 350.1 \cdot 10^3 \text{H}^{-1} \end{aligned}$$

Die Spannung U_{AC} lässt sich als Spannungsteiler berechnen:

$$U_{AC} = U_0 \cdot \frac{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E))}{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E)) + R_2} = 166 \text{A}$$

Und somit die Spannung U_{AD} :

$$\underline{\underline{U_{AD}}} = 166 \text{A} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_E} = \underline{\underline{58.6 \text{A}}}$$

4.2 Spule und Induktivität

Definition Induktivität

Die Induktivität L beschreibt, wieviel magnetischer Fluss Φ sich bei einem Strom I im Inneren eines Bauteiles aufbaut.

$$L := \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$

Der Faktor N im Nenner kommt daher, dass der Fluss bei einer Spule durch N Windungen hindurchfließt. Somit ist die effektive Fläche des Flusses N mal grösser, weshalb er N mal gezählt wird.

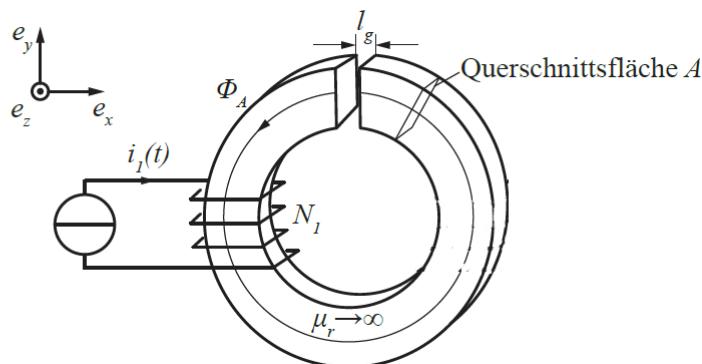
Die in einer Induktivität gespeicherte Energie berechnet sich zu

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Beispiel 18 Berechnen einer Induktivität

Auf einem Ringkern mit der Querschnittsfläche A und der Permeabilität $\mu_r \rightarrow \infty$ ist eine Wicklungen mit N_1 Windungen angebracht. Der Ringkern besitzt einen Luftspalt mit der sehr kleinen Breite l_g . Das magnetische Feld kann im Luftspalt als homogen angenommen werden.

- 1) Berechnen sie die magnetische Flussdichte im Luftspalt.
- 2) Berechnen sie den magnetischen Fluss ϕ_A im Kern.
- 3) Berechnen sie die Induktivität L



Lösung

- 1) Es gilt für die Durchflutung bezüglich dem Kreisring:

$$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = N_1 \cdot i_1(t)$$

Da die Permeabilität des Magneten gegen unendlich strebt und das B-Feld bei senkrechten Materialübergängen konstant ist gilt:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \underbrace{\int_M \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot \mu_r} d\vec{s}}_{=0} + \int_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{s} = \int_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{s}$$

Da das B-feld parallel zum Weg ist und über dem ganzen Weg konstant ist gilt:

$$\begin{aligned} N_1 \cdot i_1(t) &= \oint_s \vec{H} d\vec{s} = \frac{B}{\mu_0} \cdot l_g \\ \rightarrow \vec{B} &= \underline{\underline{\frac{N_1 \cdot i_1(t) \mu_0}{l_g} (-\vec{e}_x)}} \end{aligned}$$

- 2) Für den magnetischen Fluss gilt:

$$\phi_A = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot A = \underline{\underline{\frac{N_1 \cdot i_1(t) \mu_0}{l_g} \cdot A}}$$

- 3) Da die Spule N_1 Wicklungen aufweist, muss der Fluss ϕ_A genau N_1 mal gezählt werden. Es gilt für die Induktivität:

$$L := \phi i = N_1 \cdot \frac{N_1 \cdot i_1(t) \mu_0}{l_g} \cdot A \cdot \frac{1}{i_1(t)} = \underline{\underline{\frac{N_1^2 \cdot \mu_0}{l_g} \cdot A}}$$

Definition Serien und Parallelschaltung

Induktivitäten verhalten sich analog zu Widerständen:

Serienschaltung

$$L_{serie} = \sum_{i=0}^n L_i$$

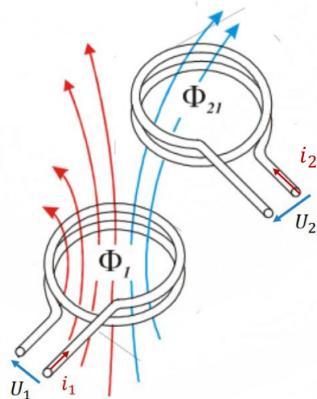
Parallelschaltung

$$\frac{1}{L_{par}} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{L_i} \quad \left| L_{par} = (L_1 || L_2) \right.$$

Definition Gegeninduktivität

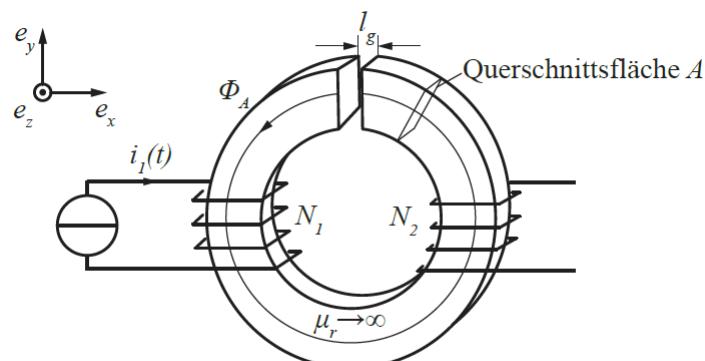
Die Gegeninduktivität beschreibt, wie viel magnetischer Fluss durch eine **andere** Leiterschleife durchfliesst, abhängig des Stromes in der ersten Schleife.

$$L_{21} = N_2 \cdot \frac{\Phi_{21}}{i_1}$$



Beispiel 19 Berechnen einer Gegeninduktivität

Beim Ringkern aus dem vorherigen Beispiel wird nun eine 2. Spule mit N_2 Wicklungen hinzugefügt. Berechnen sie die Gegeninduktivität L_{21} bezüglich der Spule mit den N_2 Windungen.



Lösung

Die Gegeninduktivität beschreibt, wieviel magnetischer Fluss durch die 2. Spule fliesst abhängig des Stromes der ersten Spule:

$$L_{21} := \frac{\Phi_{21}}{i_1}$$

Da der Fluss im Magneten selbst gerade Φ_A beträgt und dieser durch N_2 Leiterschleifen fliesst, gilt:

$$L_{21} := \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_A \cdot N_2}{i_1} = \underline{\underline{\frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \mu_0 \cdot A}{l_g}}}$$

5 Zeitlich veränderliches Magnetfeld

5.1 Induktion

Bis jetzt haben wir elektrische und magnetische Größen angeschaut, die sich zeitlich nicht ändern. Sind beide Größen konstant, so beeinflussen sie sich nicht.

Sobald sich jedoch der magnetische Fluss ϕ **zeitlich ändert**, besteht einen Zusammenhang zwischen Magnetfeld und elektrischem Feld.

Wie magnetischer Fluss und elektrisches Feld zusammenhängen beschreibt das **Induktionsgesetz**

Gleichung Induktionsgesetz

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \Phi(t) = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{A_s} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

Variablen

B = Magnetische Flussdichte $[B] = T$

A_s = Vom Weg S aufgespannte Fläche. $[A_s] = m^2$

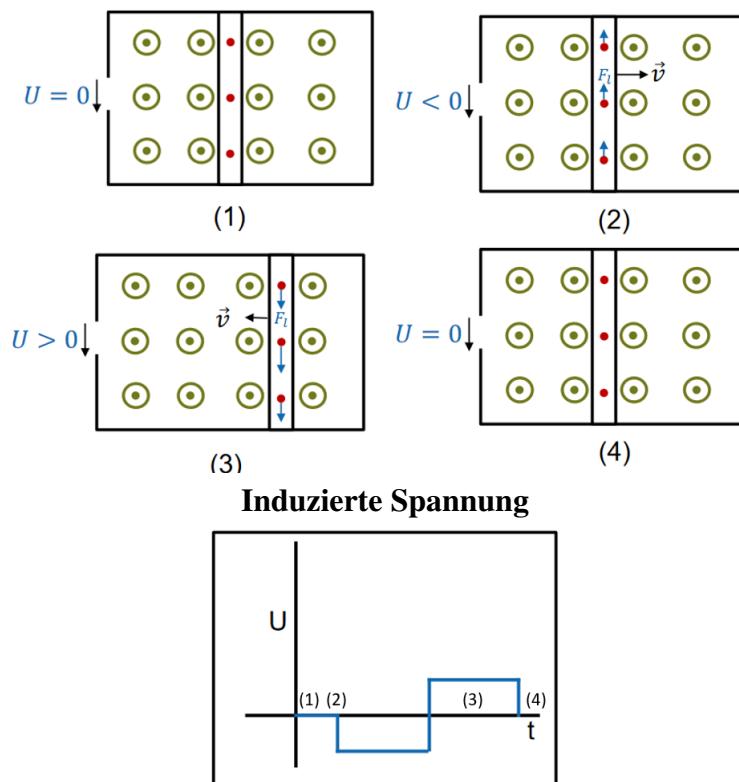
Falls B Feld konstant auf Fläche und senkrecht:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} (B_{eff} \cdot A_s)$$

Bewegen wir einen Leiter mit Ladungsträger in einem Magnetfeld, so wirkt eine magnetische Kraft auf die Ladungsträger im Leiter.

Die Ladungsträger werden sich deshalb in Richtung der Kraftwirkung bewegen.

Aufgrund dieser Bewegung, werden Ladungsträger **getrennt**. Diese Trennung der Ladungsträger lässt ein elektrisches Feld aus, welches wir als Spannung messen können.



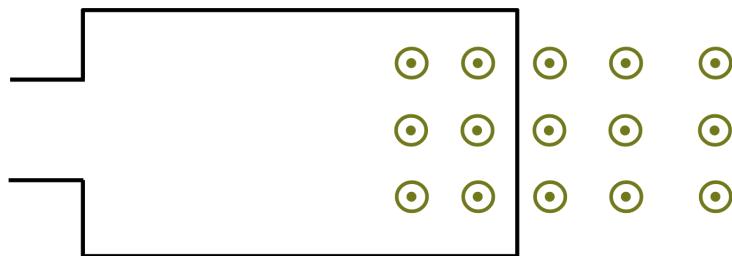
Die Lenzsche Regel gibt uns Informationen darüber, in welche Richtung sich Ladungsträger bei der Induktion bewegen werden.

Definition Lenzsche Regel

"Der induzierte Strom ist stets so gerichtet, dass er der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt."

Beispiel Lemzsche Regel

Gegeben sei folgende Leiterschleife, welche sich nach Rechts in ein Magnetfeld bewegt. Ziel dieser Aufgabe ist es, herauszufinden, in welche Richtung Spannung und Strom zeigen werden.

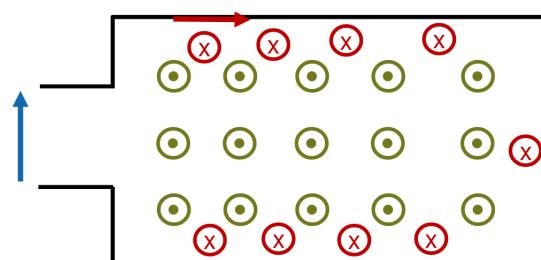


Bewegen wir unsere Leiterschleife nach Rechts weiter in unser Feld hinein, so schliessen wir **Magnetfeld** welche in unsere Richtung zeigt ein.

Das System selbst, möchte jedoch im Gleichgewicht bleiben, weswahlf es versucht ein Magnetfeld aufzubauen, welches der Änderung entgegenwirkt. (Siehe rotes Magnetfeld)

Um dieses Magnetfeld aufzubauen, ist ein Strom, der im Uhrzeigersinn fliesst, nötig.

Dieser Strom bringt positive Ladungsträger auf die untere Seite, weshalb eine Spannung in Richtung des eingezeichneten Pfeiles entsteht.



Gleichung Bewegungsinduktion

Bewegen wir einen Leiter mit einer Geschwindigkeit in ein Magnetfeld , so wird ein elektrisches Feld induziert.

$$d\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \cdot dl$$

Variablen:

$d\vec{E}_i$ = Induziertes E-Feld auf dem kleinen Wegstück dl

\vec{v} = Geschwindigkeit des Leiterstückes dl

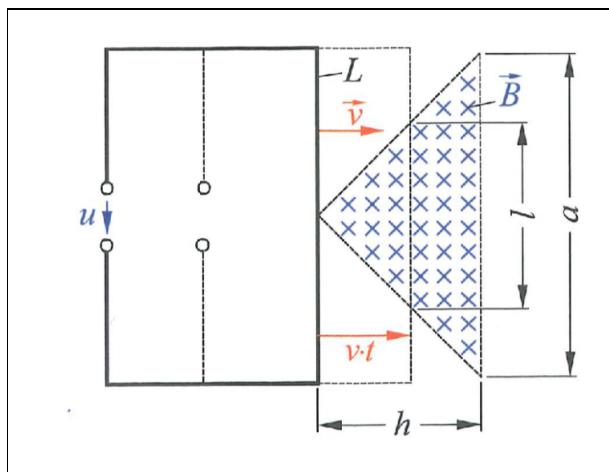
\vec{B} = B-Feld

Um die induzierte Spannung zu berechnen, muss $d\vec{E}_i$ über die wirksame Leiterlänge im Magnetfeld l integriert werden:

$$U_i = \int_l d\vec{E}_i = \int_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot dl \underset{B \perp V}{\simeq} B \cdot V \cdot l_{eff}$$

Beispiel 20 Bewegungsinduktion

Wie gross ist die im Leiter induzierte Spannung u in Abhängigkeit der Zeit t , wenn der Leiter im Zeitpunkt $t=0$ entsprechend dem Bild in das Magnetfeld eintaucht?



Lösung

Lösung 1 Bewegungsinduktion

Mithilfe des Umlaufintegrals $\oint_s \vec{E} d\vec{s}$ erhalten wir folgenden Zusammenhang für das induzierte E-Feld und die gemessene Spannung:

$$u = \int_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Da Geschwindigkeit und B-Feld immer senkrecht stehen, vereinfacht sich das Kreuzprodukt zu einer Multiplikation.

Da Leiterlänge und E-Feld parallel sind, vereinfacht sich das Integral zu einer Multiplikation

$$u = B \cdot V \cdot l_{eff}$$

Wobei l_{eff} die **effektive Leiterlänge** = die Leiterlänge im Magnetfeld beschreibt.

Diese Leiterlänge ist zeitlich abhängig. Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{l_{eff}(t)}{v \cdot t} = \frac{a}{h} \\ \rightarrow l_{eff}(t) = \frac{a}{h} \cdot vt$$

Somit gilt für die induzierte Spannung

$$u = B \cdot V \cdot l_{eff}(t) = B \cdot v \cdot \frac{a}{h} \cdot vt = B \cdot v^2 \frac{a}{h} \cdot t$$

Lösung 2 Induktionsgesetz

Wir verwenden das Induktionsgesetz

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}(\phi(t))$$

Da Feld und Fläche senkrecht stehen gilt für den Fluss ϕ

$$\phi(t) = A_{eff}(t) \cdot B(t)$$

Die Fläche welche vom Leiter umschlossen und vom Magnetfeld durchflossen wird berechnet sich zu

$$A_{eff}(t) = \frac{1}{2} \left(vt \cdot \frac{a}{h} \cdot vt \right) = \frac{1}{2} v^2 t^2 \frac{a}{h}$$

Somit gilt für den Fluss

$$\phi(t) = B \cdot A_{eff}(t) = B \cdot \frac{1}{2} v^2 t^2 \frac{a}{h}$$

Und für das **rechtshändige Umlaufintegral** (Daumen zeigt in Richtung Fluss, Finger Richtung des geschlossenen Weges)

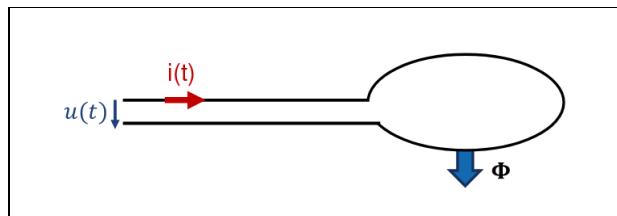
$$-u = -\frac{d}{dt}(\phi(t)) = -B v^2 t \frac{a}{h} \\ \rightarrow u = B v^2 \frac{a}{h} t$$

Gemäss dem Induktionsgesetz, löst ein sich **zeitlich ändernder** Fluss eine Spannung aus.

Fließt nun ein Strom durch eine Leiterschleife, so wird sich als Reaktion auf den Stromfluss ein magnetisches Feld innerhalb dieser Leiterschleife aufbauen.

Verändert sich also der Strom, welcher die Schleife durchfliesst zeitlich, so ändert sich auch das magnetische Feld zeitlich, was zu einer Spannung an den Klemmen der Leiterschleife führt.

Gleichung Selbstinduktion



$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(i(t))$$

Variablen

L = Selbstinduktivität der Schleife [L] = H

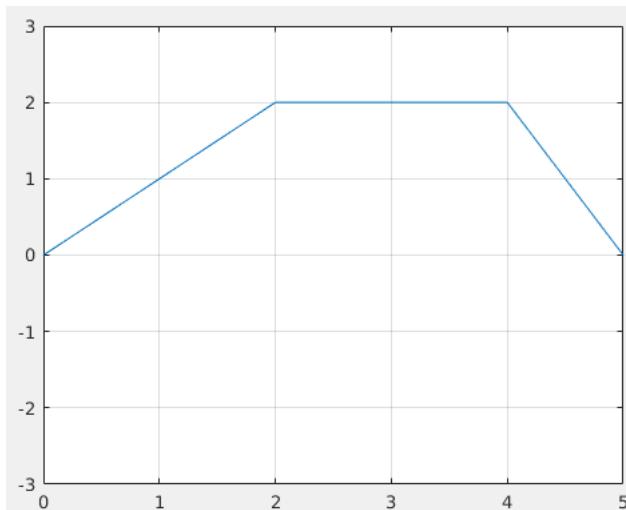
$i(t)$ = Strom durch die Leiterschleife [$i(t)$] = A

$u(t)$ = Spannung an der Leiterschleife [$u(t)$] = V

Beispiel 21 Selbstinduktion

Durch eine Spule mit Selbstinduktivität $L = 1H$ fließt der Strom $i(t)$ (Siehe Bild).

Zeichnen Sie graphisch die induzierte Spannung $u(t)$



Lösung

Wir teilen den Strom in 3 Teilbereiche auf:

1. $t < 2$

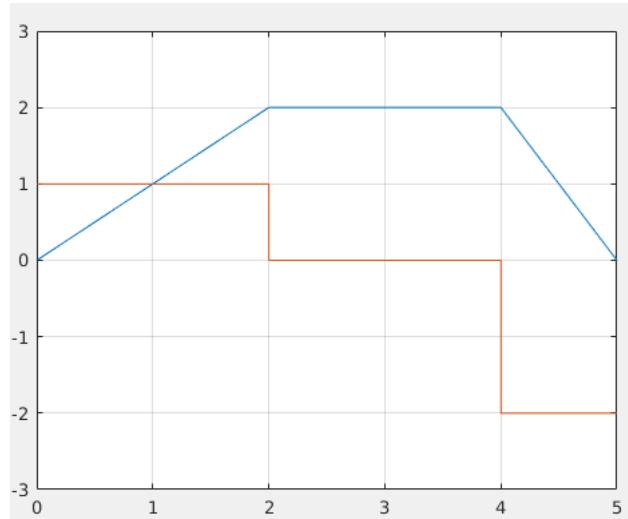
$$i_1(t) = t \rightarrow u_1(t) = L \cdot \frac{d}{dt}t = 1V$$

2. $4 > t > 2$

$$i_2(t) = 2A \rightarrow u_2(t) = L \cdot \frac{d}{dt}2A = 0V$$

3. $t > 4$

$$i_3(t) = -2 \cdot (t - 4) + 2A \rightarrow u_3(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(-2 \cdot (t - 4) + 2A) = -2V$$



5.2 Charakteristische Gleichungen von Kapazität und Induktivität

Gleichung Induktivität

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Induktivität ist wie folgt gegeben

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(i(t))$$
$$i_L(t) = i_l(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L \tau d\tau$$

Gleichung Kondensator

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator ist wie folgt gegeben

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau$$
$$i_c(t) = c \cdot \frac{d}{dt}(u_c(t))$$

Begründung

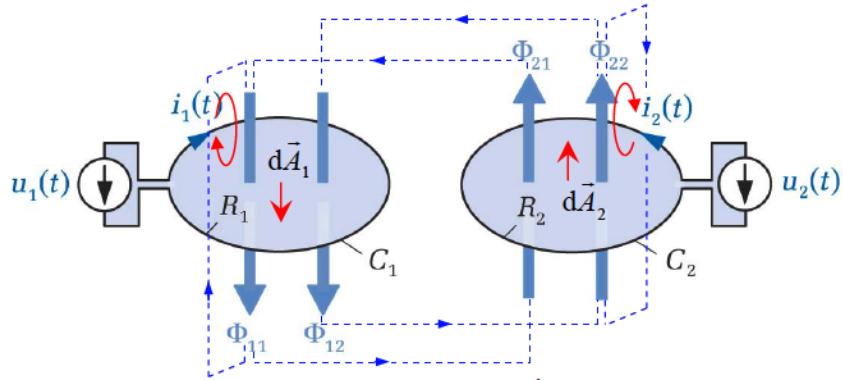
Mit dem Wissen, dass Strom definiert ist als die Ladung pro Zeit $\frac{dQ}{dt} = i$ folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C \cdot u) = \frac{\partial}{\partial t}(Q)$$
$$C \cdot \frac{du}{dt} = i \rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt$$

6 Übertrager

Dieses Kapitel wurde aus dem PVK Skript von Gian Marti übernommen

6.1 Gegeninduktion



Zwei Leiterschleifen werden von zeitlich abhängigen Strömen $i_1(t), i_2(t)$ durchflossen (angeregt durch die Spannungen $u_1(t), u_2(t)$). Dabei erzeugen sie Flüsse Φ_{11}, Φ_{22} in ihren jeweiligen Schleifen, aber auch Flüsse durch die jeweils gegenüberliegende Schleife, Φ_{12}, Φ_{21} . Nun kann man die Selbst- und Gegeninduktivitäten $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ definieren als

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1}, \quad L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2}, \quad L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}, \quad L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}$$

dann gilt nach dem Induktionsgesetz (das Argument der Zeit, t , wird jeweils nicht ausgeschrieben):

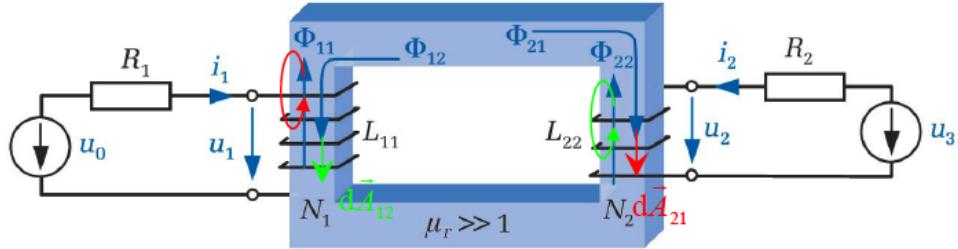
$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + \frac{d}{dt} (\Phi_{11} + \Phi_{12}) = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + \frac{d}{dt} (\Phi_{22} + \Phi_{21}) = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Die Zählrichtungen für die Flüsse Φ sind übrigens frei wählbar, die Vorzeichen der Induktivitäten L folgen dann daraus. Die Gleichungen hier gelten für die Flüsse wie eingezeichnet.

Es lässt sich zeigen, dass *immer* $L_{ik} = L_{ki}$, also definieren wir $M = L_{12} = L_{21}$ sowie den Koppelfaktor $k = \pm \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ (das Vorzeichen hängt von den gewählten Zählrichtungen ab) und schreiben

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + k \sqrt{L_{11}L_{22}} \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + k \sqrt{L_{11}L_{22}} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

6.2 Transformatoren



Ein Transformator besteht aus (mindestens) zwei Wicklungen, die auf einem hochpermeablen Kern gewickelt und somit magnetisch eng gekoppelt sind (man kann idealerweise von einem streuungsfreien Übertrager ausgehen).

Wie bei der Gegeninduktion formulieren wir die Induktivitäten aus:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1}, \quad L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2}, \quad M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}$$

(Die roten Größen stehen für den von der linken Seite (Primärseite) erzeugten Fluss, die grünen für den von der rechten Seite (Sekundärseite) erzeugten.) Das Induktionsgesetz sagt:

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1 i_1 + u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_3 &= R_2 i_2 + u_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Die negativen Vorzeichen kommen daher, dass hier bei der gewählten Zählrichtung die Sekundärflüsse Φ_{12}, Φ_{21} den Primärflüssen Φ_{11}, Φ_{22} entgegengesetzt sind.

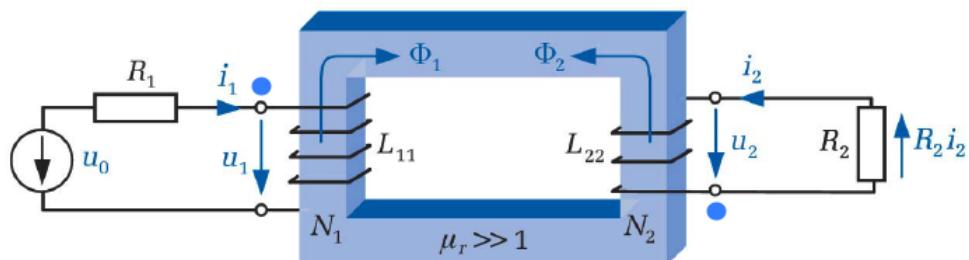
Im Fall eines streuungsfreien Übertragers (aller Fluss bleibt im Magnetkern) gilt für die Induktivitäten:

$$L_{11} = N_1^2 \frac{\mu A}{l}, \quad L_{22} = N_2^2 \frac{\mu A}{l}, \quad M = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l}$$

Und die Verhältnisse der Spannungen direkt am Transformator sind

$$u_2 = -\frac{N_2}{N_1} u_1$$

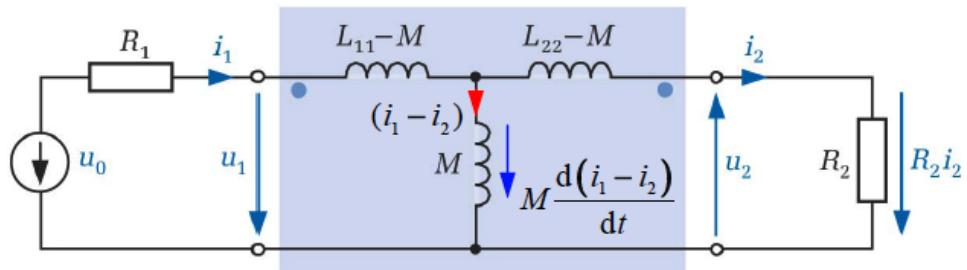
Nun betrachten wir den Fall, wo $u_3 = 0$:



In dem Fall können wir unsere Spannungsgleichungen auch schreiben als

$$\begin{aligned} u_0 &= R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + (L_{11} - M) \frac{di_1}{dt} - M \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} \\ 0 &= R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 - M \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + (L_{22} - M) \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Aber das entspricht ja genau folgendem Ersatzschaltbild (das *kein* physikalisch realisierbares Netzwerk darstellen muss, weil die eingezeichneten Induktivitäten ggf. negative Werte annehmen können):



Zur Punktconvention:

Die Punkte sollen den Wicklungssinn im ESB verdeutlichen, der sonst nicht ersichtlich wäre. Auf der Primärseite kann der Punkt noch frei gewählt werden, auf der Sekundärseite muss er dann so sein, dass die Potentialdifferenz zwischen dem Wicklungsanschluss mit Punkt und dem ohne Punkt gleichzeitig positiv bzw. negativ ist wie auf der Primärseite.

In der dreidimensionalen Anordnung überlegt man sich die Punkte mit der Lenz'schen Regel: i_1 verursacht den rechtswendig zugeordneten Fluss Φ_1 . Dann ist der induzierte Strom i_2 so gerichtet, dass sein rechtswendig zugeordneter Fluss Φ_2 dem ersten Fluss Φ_1 entgegenwirkt. Aus der Richtung von i_2 folgt über $u_2 = R_2 i_2$ die Richtung von u_2 .

6.3 Der ideale Übertrager

Wir haben oben schon gesehen, dass im streufreien Übertrager

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{N_1}{N_2} - \ddot{u}$$

gilt. Das Spannungsverhältnis von u_1 und u_2 entspricht also dem Übersetzungsverhältnis von N_1 und N_2 (Vorzeichen hängt von Zähl- und Wicklungsrichtungen ab). Wenn jetzt ausserdem noch die Permeabilität des Magneten gegen unendlich geht ($\mu_r \rightarrow \infty$), dann sprechen wir vom idealen Übertrager, und aus dem Durchflutungsgesetz folgt:

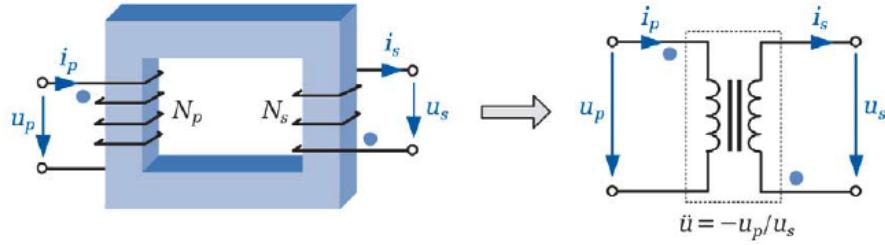
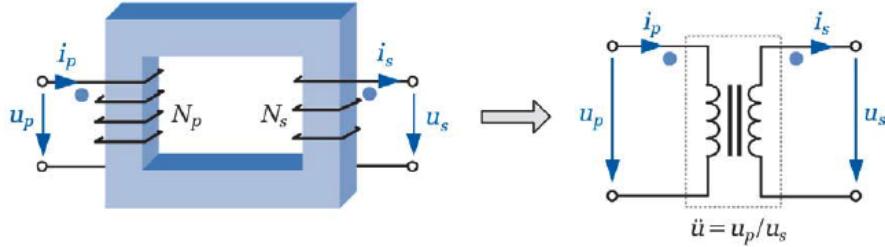
$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}}$$

Das Stromverhältnis von i_1 und i_2 entspricht also gerade dem Kehrwert des Wicklungsverhältnisses (Vorzeichen wieder abhängig von Zähl- und Wicklungsrichtung).

Daraus folgt auch, dass die links abgegebene Leistung p_1 gerade der rechtsseitig aufgenommenen Leistung p_2 entspricht, was intuitiv sofort Sinn macht:

$$p_1 = u_1 i_1 = -\ddot{u} u_2 \frac{i_2}{\ddot{u}} = -u_2 i_2 = p_2$$

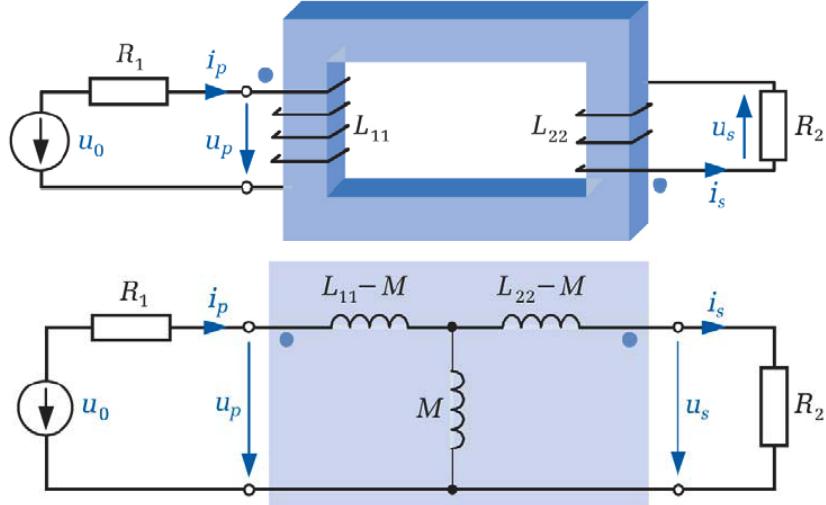
Ab jetzt schreiben wir für primärseitige Größen den Index p statt 1 und für sekundärseitige Größen s statt 2. Für den idealen Übertrager führen wir folgendes Schaltbild ein:



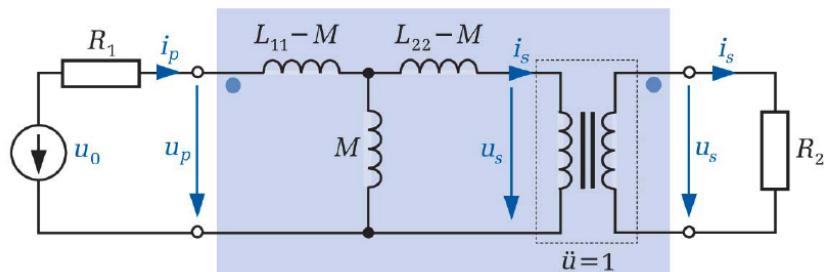
Wir haben nochmal zusammengefasst:

$$\ddot{u} = \frac{N_p}{N_s}, \quad \frac{u_p}{u_s} = \frac{i_s}{i_p} = \pm \ddot{u}, \quad p_p = u_p i_p = u_s i_s = p_s$$

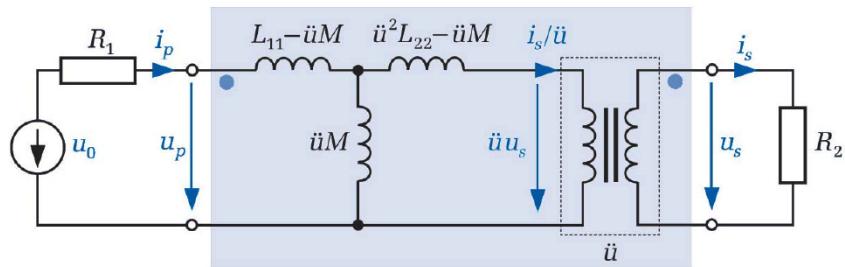
Wir betrachten nochmal die frühere Anordnung, aber in der neuen Notation:



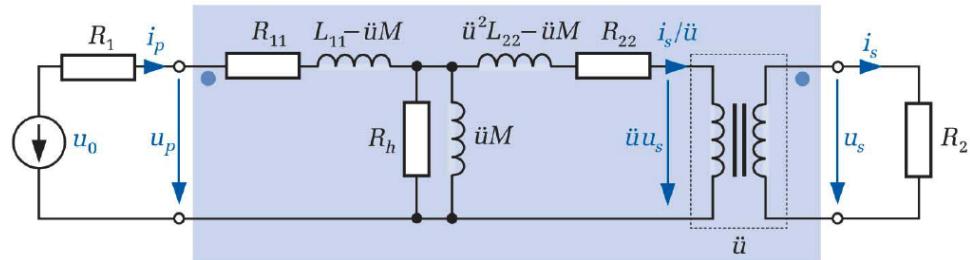
Um die galvanische Trennung zwischen Ein- und Ausgangsseite zu verdeutlichen, führen wir einfach einen idealen Übertrager mit Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 1$ ein. Das hat auf das Verhalten des Netzwerks keinen Einfluss:



Wie müssen wir aber jetzt das ESB anpassen, wenn wir ein Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} \neq 1$ haben möchten? So:

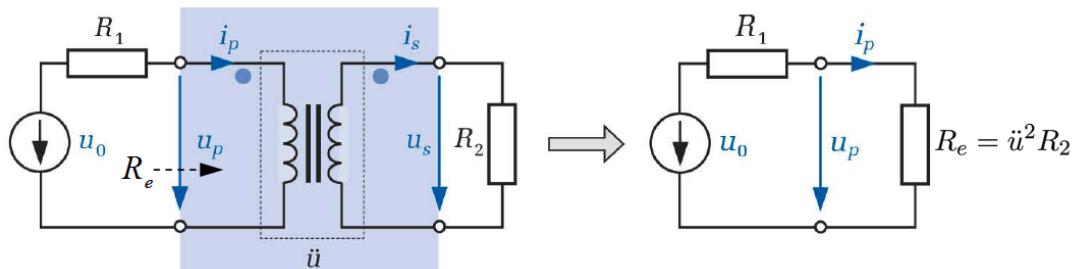


Falls nun unser Transformator nicht ideal ist, können wir dem durch hinzufügen von parasitären Widerständen, welche die Verluste repräsentieren, Rechnung tragen:



Widerstandstransformation

Wie sieht ein Widerstand auf der Sekundärseite eines idealen Übertragers von der Primärseite betrachtet aus?



Es ist

$$R_e = \frac{u_p}{i_p} = \frac{\dot{u} u_s}{\dot{u} i_s} = \dot{u}^2 \frac{u_s}{i_s} = \dot{u}^2 R_2$$