

1.Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения.

1.1. Найдите значение числового выражения:

- 1) $\frac{53^2 + 22^2 - 47^2 - 16^2}{65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 59 + 59^2}$
- 2) $\frac{109^2 - 122 \cdot 109 + 61^2}{79^2 + 73^2 - 49^2 - 55^2}$
- 3) $\left(\frac{97^3 + 83^3}{180} - 97 \cdot 83 \right) : (35^2 - 28^2)$
- 4) $2^{32} - 3 \cdot (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
- 5) $\frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{6^2 \cdot 49^{19}}$

1.2. Найдите значение выражения:

- 1) $25a^2 - 40ab + 16b^2 + 5a - 4b$, если $a = \frac{4b-1}{5}$
- 2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если $x - \frac{1}{x} = -4$
- 3) $a^3b^2 + a^2b^3$, если $a + b = 5, ab = -3$
- 4) $a^2 + b^2 + c^2$, если $a + b + c = 7, ab + bc + ac = -5$
- 5) $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$, если $x^3 - y^2 = 2$

1.3. Разложить на множители:

- 1) $(x + 1)x + x^2 + 2x + 1$
- 2) $x^2 - (x + 5)^2$
- 3) $(a + b)^3 + (a - b)^3 - 3a$
- 4) $(x + 3y)^2 - y^2 + 2xy - x^2$
- 5) $a^4 + b^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3$

2. Функции и их графики

- 1) Задайте линейную функцию формулой, если ее график параллелен графику уравнения $y - 3x + 23 = 0$ и проходит через точку $B(2; 1)$. Укажите координаты точек пресечения этой прямой с осями координат.
- 2) Две различные прямые имеют уравнения: $ax + (3a - 1)y - b = 0$ и $bх + (3b + 1)y - a = 0$. Известно, что $M(1;1)$ – точка их пересечения. Найдите a и b .
- 3) Постройте график функции $y = kx + b$, если он перпендикулярен прямой $y = -x$ и проходит через точку $M(-1; 2)$
- 4) Постройте график функции: $y = \frac{|2-x|}{2-x} + 1 - 4x$. Определите количество решений уравнения $y = b$ при всех значениях параметра b

- 5) Постройте график функции: $y = \frac{(x^4 + 2x^3)(x+1)}{x^2 + 3x + 2}$. Определите количество решений уравнения $y = b$ при всех значениях параметра b .
- 6) Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -1,5x + 1, & \text{если } 0 \leq x < 2 \\ x - 4, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$ и определите, при каких значениях прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 7) При каких значениях параметра « m » прямые $3x + y = 3m + 2$ и $3x - y = 3m - 2$ пересекаются во II координатной четверти?
- 8) Задайте формулой линейную функцию и постройте её график. Известно, что график этой функции параллелен графику уравнения $3x - 5 + y = 0$ и пересекается с графиком уравнения $y - 2x - 7 = 0$ в точке, лежащей на оси ординат.

3. Системы линейных уравнений и способы их решений.

3.1. Решите систему уравнений

- 1)
$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{4x+5}{4} = \frac{7x-10}{8} \\ \frac{6x-5y}{2} + \frac{2x+y}{5} = x + 2y \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} (2x+1)^2 - (2x-y)(2x+y) = (y+8)(y-10), \\ 4x(x-5) - (2x-3)(2x-9) = 6y - 104 \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} 2xy - xy + yz = 2xyz, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 3, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ x + 2y + 4z = 17 \end{cases}$$
- 5)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1} \\ 3x - 2y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$$
- 6)
$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ y + z + t = 5 \\ z + t + x = -5 \\ t + x + y = 16 \end{cases}$$
- 7)
$$\begin{cases} |x| + y = 5 \\ 7x + 10y = -1 \end{cases}$$
- 8)
$$\begin{cases} |2x - 3| + |3y - 9| = 5 \\ |4x - 6| - |y - 3| = 3 \end{cases}$$
- 9)
$$\begin{cases} 3x + |y| = 10 \\ 7x - 2|y| = 6 \end{cases}$$
- 10)
$$\begin{cases} \frac{21}{3x+y} + \frac{46}{2x-3y} = 5 \\ \frac{98}{3x+y} - \frac{115}{2x-3y} = 9 \end{cases}$$
- 11)
$$\begin{cases} \frac{15}{x^2+3} - \frac{7}{|y-1|} = -0.5 \\ \frac{7}{x^2+3} + \frac{1}{3|y-1|} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
- 12)
$$\begin{cases} x + y - xy = 0 \\ x + z - 2xz = 0 \\ y + z - 5yz = 0. \end{cases}$$

3.2. Системы уравнений с параметром.

- 1) При каких значения параметра система уравнений

$$\begin{cases} 3x + (2a - 1)y = 7a + 1, \\ 6x + (a + 1)y = 11a + 5. \end{cases}$$
 имеет бесконечно много решений?
- 2) При каких значения параметра система уравнений

$$\begin{cases} (a - 1)x + (2a - 1)y = 7a - 1, \\ 2x + 5y = 3a + 2 \end{cases}$$
 не имеет решений?

- 3) При каких значения параметра система уравнений
- $$\begin{cases} 3x + (2a - 1)y = 7a + 1, \\ 6x + (a + 1)y = 11a + 5 \end{cases}$$
- имеет единственное решение?

4. Уравнения.

- 1) $\frac{3x-1}{4} - \frac{9x+1}{12} = -1 - \frac{x+3}{6}$
- 2) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
- 3) $(7x - 3)^2 + (7x + 3)^2 = 2(7x - 4)^2$
- 4) $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 9 = 0$
- 5) $|2x - 4y - 10| + (3x + y - 1)^2 = 0$
- 6) $(x - 1)^3(x + 3) = (x - 1)(x + 3)^3$.
- 7) $(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) = 0$.
- 8) $3^{|x+1|+|x-2|} = 9$
- 9) $5^{3|x+1|+2|3-4x+x^2|} = 1$
- 10) $5^{n+(4|x^2-4|-|-x-2|)} = \frac{5^n-5^{n+2}}{2^3 \cdot (1-2^2)}$

5. Решение задач.

- 1) Двигаясь 4 ч против течения и 5 ч по течению, теплоход прошел 380 км. Тот же теплоход за 10 ч по течению пройдет столько же, сколько он пройдет за 11 ч против течения. Найдите скорость теплохода и скорость течения.
- 2) Три шоколадки и леденец вместе стоят 140 рублей, а три шоколадки на 20 рублей дешевле, чем семь леденцов. Сколько стоят десять леденцов?
- 3) Школьник потратил 140 р. на покупку учебника, авторучки и дневника. Если бы учебник стоил в 5 раз дешевле, авторучка – в 2 раза дешевле, дневник – в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 40 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью учебник стоил в 3 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, дневник – в 2 раза дешевле, то за ту же покупку заплатили бы 50 р. Сколько стоят учебник, авторучка и дневник?
- 4) Магазин закупил конфеты двух сортов в упаковках по 240 г и 250 г, причем конфет первого вида было куплено на 600 г больше. Сколько купили конфет каждого вида, если упаковок с конфетами первого сорта было на 20 больше?
- 5) Если половину заказа выполнит мастер, а оставшуюся часть закончит ученик, то вся работа будет сделана за 10 ч. Если мастер выполнит $\frac{3}{4}$ работы, а оставшуюся часть выполнит ученик, то все будет сделано за 9 ч. За какое время мог бы выполнить работу каждый из них, работая один?
- 6) Петя и Дима собирают марки. Если Петя отдаст Диме 10 своих марок, то у мальчиков марок станет поровну. Если же Петя отдаст Диме 50 марок, то у него останется в 5 раз меньше марок, чем станет у Димы. Сколько марок есть у каждого мальчика?

6. Геометрические задачи.

- 1) Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них на 24° больше другого. Сколько решений имеет задача?
- 2) Прямые AB и DE параллельны. Найдите $\angle CDE$, если $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 100^\circ$.
- 3) Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K . Через середину отрезка AK – точку O проведена перпендикулярная к нему прямая NL . Определите взаимное расположение прямых AC и NK .
- 4) В равнобедренном треугольнике ABC к основанию AC проведена высота BH , равная 6 см, точка M – середина боковой стороны BC . Найдите отрезок MH , если $\angle ABC = 120^\circ$.
- 5) В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$. Биссектриса угла A пересекает катет BC в точке K . Найдите BK , если $AK - CK = 8$ см.
- 6) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15° , если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.
- 7) Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведен перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую AC в точке E . Найдите отрезок AE , если известно, что $CD = 4$.
- 8) Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника пересекает боковую сторону под углом, равным углу при основании. Найдите углы треугольника.
- 9) На продолжениях гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки K и M , такие, что $AK = AB$ и $CM = CB$. Найдите угол MBK .
- 10) Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.
- 11) На сторонах AF , BF и AB треугольника AFB выбраны точки C , D и H соответственно так, что $CD \parallel AB$, $AF \parallel DH$. Отрезки DH и BC пересекаются в точке E , а прямые AE и BD пересекаются в точке G . Найдите $\angle FCD$, $\angle EAH$, $\angle EBD$, $\angle DHB$, $\angle AEH$, $\angle DCE$, $\angle DEC$, если известно, что $\angle CFD = 70^\circ$, $\angle CDF = 48^\circ$, $\angle CAG = 35^\circ$, $\angle CBA = 29^\circ$.
- 12) Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.
- 13) Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.
- 14) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки F и D соответственно, а на стороне AC выбраны точки H и E так, что $FE \parallel BC$, $HD \parallel AB$, FE и HD пересекаются в точке G . Найдите $\angle FGH$, если известно, что $\angle A = 68^\circ$, $\angle C = 43^\circ$.
- 15) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

