

АЛГЕБРА

I. Вычисление значений числовых выражений:

1. $19\frac{8}{9} \cdot \left(4\frac{4}{7} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}\right) : \left(3\frac{1}{12} + 4,375\right)$.

2. $\left(3\frac{7}{12} + 4\frac{7}{12} : \left(2\frac{1}{3} - 5\frac{1}{12}\right)\right) : \left(3,25 : 5\frac{7}{22} - 8\frac{5}{18}\right)$.

3. $\frac{2\frac{5}{6} - 1,2 \cdot 1\frac{1}{9} + 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{7}}{(4 - 2,5 \cdot \frac{3}{5}) : 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}$

4. $\left(17\frac{1}{5} \cdot 0,125 - \left(2\frac{32}{45} - 1\frac{7}{60}\right)\right) : \frac{1}{\frac{11}{40} \cdot 4\frac{7}{12} + 2,64}$

5. $\frac{(-2)^4 + (-2)^3 - \frac{3}{4}}{(-1)^{2021} - 9,5^0 + 3}$

6. Найти значение числового выражения

$$\frac{19,6 \cdot 2\frac{1}{2} - 2,0625 : \frac{1}{8} + 1\frac{5}{12} : \frac{1}{6}}{6,3 \cdot (-5,6) + 34,28}$$

и определить, принадлежит ли оно множеству $A = \{x / |x| < 42\}$.

Найдите число, если 2,5% его равны значению выражения

7. $\frac{\left(9\frac{3}{4} : 5,2 + 3,4 \cdot 2\frac{7}{34}\right) : 1\frac{9}{16}}{0,31 \cdot 8\frac{2}{5} - 5,61 : 27\frac{1}{2}}$.

8. Найдите соотношение между A и B , если:

а) $A = \left(0,8 \cdot 7 + 0,8^2\right) \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25\right) + 31,64$,

$$B = \frac{(11,81 + 8,19) \cdot 0,02}{9 : 11,25};$$

9. Найдите X из пропорции

$$\frac{\frac{11}{7} : 12,5}{2\frac{1}{7} - 1,2} = \frac{5}{18 \cdot \left(X - 4\frac{2}{3}\right)}$$

II. Действия со степенями с натуральным показателем

1. а) $\frac{36^3 \cdot 15^2}{18^4 \cdot (-10)^2}$ б) $\frac{(-9)^4 \cdot 49^2}{63 \cdot (-21)^3}$ в) $\frac{5^5 \cdot (-8)^4}{4^6 \cdot (-25)^3}$ д) $\frac{625 \cdot (18)^2 \cdot 3^3 \cdot 150}{5^2 \cdot 3^6 \cdot 2^2}$

е) $\frac{(-36^2)^3 \cdot (-18^6)^4}{(12^6)^3 \cdot (-81)^{10}}$ ф) $\frac{(-54^2)^2 \cdot (-32^2)^3}{16^2 \cdot (-12)^{12}}$

2.a Запишите выражение $3 + 3 + 3 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3 + 3^4 + 3^4 + \dots + 3^{12} + 3^{12}$ в виде степени числа 3.

2.b Запишите выражение $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^4 + 3^4 + 3^5 + 3^5 + 3^6 + 3^6 + \dots + 3^{25} + 3^{25}$ в виде степени числа 3.

3. Представьте число 43 в виде суммы степеней числа 2.

4. Вычислить $\frac{3^2 \cdot 3^8}{3^9} - \frac{5^7 \cdot 11^7}{55^6}$ и выяснить, принадлежит ли найденное значение области допустимых значений выражения $\frac{17x-4}{(x+32)^2-400}$

5. Вычислить $\frac{21 \cdot 21^7}{21^6} - \frac{3^5 \cdot 6^5}{18^3}$ и выяснить, принадлежит ли найденное значение

области допустимых значений выражения $\frac{5x-7}{|3x-21|-159}$

6. Представить одночлен в стандартном виде, укажите коэффициент и степень одночлена

a) $\left(-\frac{13}{15} x^4 y^2\right)^2 \cdot \left(\frac{15}{26} x^3 y^4\right)^3$; б) $\left(\frac{25}{11} a x^2\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5} a^2 x\right)^4$.

7. Выполните действия

a) $\frac{4^4 - 5^3 - 3^4 - 20}{3 \cdot 2^5 - 3^4}$ б) $\frac{3 \cdot 5^3 - 5 \cdot 2^6}{4 \cdot 3^2 + 2^4 + 3}$

III. Решение линейных уравнений и уравнений, сводящихся к линейным.

1. $\frac{(2x-1)(x+1)}{2} - \frac{(3x+1)(x-2)}{3} = -2$.

2. $\frac{(5x-3)(2x-4)}{5} = 2x^2 - \frac{6x-7}{2}$.

3. $\frac{(x-1)(3x+1)}{3} - \frac{(x+2)(6x-1)}{6} = 5$.

4. $\frac{(5x+2)(x-1)}{5} - \frac{(3x-5)(x+2)}{3} = 2$.

5. $\frac{3+2x^3}{2} = \frac{(5x^2-2)(x+1)}{5} + 2 - x^2$.

6. $\frac{5+4x^3}{4} - \frac{(3-5x^2)(1-x)}{5} = x^2 + 1$.

7. $x(2x-3)(x+1) = x^2(x+1)$.

8. $x(x+2)(2x-5) = x^2(x+2)$

9. $\frac{(x^2)^7 \cdot (x^3)^9}{x^{37}} = 3289$.

10. $5|x + 2| - 4 = 3 - 2|x + 2|$.

11. $2|x - 1| - 3 = 6 - |x - 1|$.

12. $7|x - 16| - 3|16 - x| = 96$.

13. $7|x - 15| - 2|15 - x| = 105$.

14. $3|8 - x| + 112 = 7|x - 8|$.

15. $(x^2 + x - 2)^2 + 3|6x + 12| = 0$.

16. $(x^2 - 5x + 4)^2 + 3|3x - 12| = 0$.

IV. Выражения и значения выражений.

1. Упростите выражение $(2a^2 + b^2)(5 - a) - (2a^2 - b^2)(5 + a) - 10b^2$ и найдите его значение при $a = -2$, $b = 2021$.

2. Упростите выражение $(3a + 1)(a^2 - 5b) - (3a - 1)(a^2 + 5b) - 2a^2$ и найдите его значение при $a = -2021$, $b = 2$.

3. Упростите выражение $3(0,7x + 0,4y) - 5(0,6x - 0,2y)$ при $x = 1\frac{1}{9}$, $y = \frac{10}{11}$ и найдите его значение.

V. Решение текстовых задач с помощью линейных уравнений и уравнений, сводящихся к линейным.

1. Даны три числа, из которых каждое следующее на 3 больше предыдущего. Найдите эти числа, если известно, что произведение меньшего и большего на 54 меньше произведения большего и среднего.

2. Найдите три последовательных натуральных числа, если квадрат большего из них на 22 больше произведения двух меньших чисел.

3. Найдите три последовательных натуральных числа, если произведение двух больших чисел на 14 больше квадрата меньшего числа.

4. Найдите три последовательных натуральных числа, если произведение двух больших чисел на 20 больше произведения двух меньших чисел.

5. Докажите, что разность двузначного числа и суммы его цифр кратна 9.

6. Если в записи данного пятизначного натурального числа приписать справа цифру 2, и полученное таким образом, число разделить на число, полученное из данного, приписыванием цифры 2 слева, то получится 3. Найдите это число.

7. Найдите три натуральных числа, если второе число больше первого на 1, но меньше третьего на 4. Известно, что произведение среднего арифметического этих чисел на меньшее из них меньше квадрата большего числа на 49.

8. Найдите три натуральных числа, если второе число больше первого на 7, но меньше третьего на 1. Известно, что произведение среднего арифметического этих чисел на большее из них превышает квадрат меньшего числа на 92.

9. Ширину прямоугольника увеличили на 5 см и получили квадрат, площадь которого больше площади прямоугольника на 40 см². Найдите площадь квадрата.

10. Длину прямоугольника уменьшили на 4 см и получили квадрат, площадь которого меньше площади прямоугольника на 12 см². Найдите площадь квадрата.

11. На двух полках было одинаковое количество книг. После того как с первой полки 5 книг переставили на вторую, на второй полке стал в 3 раза больше книг, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке первоначально?
12. В двух коробках одинаковое количество конфет. После того как из первой коробки взяли 14 конфет, а в другую добавили 26, в первой коробке стало в 3 раза меньше конфет, чем во второй. Сколько конфет было в каждой коробке первоначально?
13. В двух папках было одинаковое количество тетрадей. После того как из второй папки переложили в первую 6 тетрадей, в первой папке тетрадей стало в 3 раза больше чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой папке первоначально?
14. В двух коробках лежит поровну кусков мыла. Если из первой коробки вынуть 25 кусков, а из второй 10, то в первой коробке останется в два раза меньше, чем во второй. Сколько кусков в каждой коробке?
15. За первый месяц школьник решил 25% всех задач летнего задания, во второй - 20% оставшихся. После чего выяснилось, что за август ему предстоит решить еще 42 задачи. Сколько задач в летнем задании?
16. Три группы школьников посадили деревья вдоль дороги. Первая группа посадила 25% всех имевшихся деревьев, вторая – 60% оставшихся, а третья группа – остальные 63 дерева. Сколько всего деревьев посадили школьники?
17. Группа из 13 туристов хочет отправиться в путешествие по реке. В их распоряжении имеются двух и трёхместные байдарки. Сколько и каких байдарок нужно взять туристам, чтобы все поместились и не осталось свободных мест. Укажите все возможные варианты.
18. Маша задумала двузначное число. Если поменять в нём местами цифры десятков и единиц и к полученному числу прибавить 1, то получится двузначное число в три раза большее, чем задуманное. Какое число задумала Маша?
19. Из пунктов A и B расстояние между которыми 290 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля, скорость одного из которых была на 5 км/ч больше скорости другого. Спустя 2 ч оказалось, что автомобили встретились и, продолжая движение, находятся на расстоянии 20 км друг от друга. С какой скоростью ехал каждый автомобиль?
20. От станции к посёлку, удаленному на 96 км, отправились одновременно мотоциклист и автомобилист. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости мотоцикла. Прибыв в посёлок, автомобиль сразу повернул обратно и встретил мотоциклиста через 1 ч 24 мин после его выезда со станции. На каком расстоянии от станции произошла встреча?
21. Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 мин после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 40 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 40 км. Ответ дайте в км/ч.
22. Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 20 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 4 минуты после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 6 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 10 км. Ответ дайте в км/ч.
23. Катер за 3 ч по течению и 5 часов против течения проходит 76 км. Найдите скорость течения и собственную скорость катера, если за 6 ч по течению катер проходит столько же, сколько за 9 ч против течения.
24. От пристани A вниз по течению реки к пристани B направился теплоход. В это же время от пристани B к пристани A отправился другой теплоход, собственная скорость которого на 4 км/ч меньше собственной скорости первого теплохода. Спустя 5 часов выяснилось, что теплоходы встретились и, продолжая движение, оказались на расстоянии 40 км друг от друга. На каком расстоянии от пристани A находился в это время второй теплоход, если расстояние между пристанями равно 140 км, а скорость течения реки 2 км/ч?

25. От пристани А вниз по течению реки направился теплоход. В это же время навстречу ему от пристани В отправился катер на воздушной подушке, собственная скорость которого в 3 раза больше собственной скорости теплохода. Спустя 3 часа выяснилось, что теплоход и катер встретились и, продолжая движение, оказались на расстоянии 210 км друг от друга. На каком расстоянии от пристани А был в это время катер, если расстояние между пристанями равно 42 км, а скорость течения реки 3 км/ч?

26. Велосипедисты Антон и Василий одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя один час, когда Антону оставалось проехать 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что Василий проехал первый круг 18 минут назад. Найдите скорости велосипедистов, если известно, что скорость Василия на 10 км/ч больше, чем у Антона.

27. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 20 минут назад. Найдите скорости бегунов, если известно, что скорость первого бегуна на 7 км/ч меньше скорости второго.

VI. Понятие множества, диаграмма Эйлера-Венна

1. Задайте с помощью характеристического свойства множества $A = \{3; 7; 11; 15; 19\}$, $B = \{3; 15\}$, $C = \{3; 6; 9; 12; 15\}$. Проиллюстрируйте их взаимное расположение с помощью кругов Эйлера.
2. Задайте с помощью характеристического свойства множества $A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$, $C = \{6; 12\}$. Проиллюстрируйте их взаимное расположение с помощью кругов Эйлера.
3. Задайте с помощью характеристического свойства множества $A = \{5; 20\}$, $B = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20\}$, $C = \{0; 5; 10; 15; 20\}$. Проиллюстрируйте их взаимное расположение с помощью кругов Эйлера.
4. Задайте с помощью характеристического свойства множества $A = \{4; 8; 12; 16; 20\}$, $B = \{4; 16\}$, $C = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$. Проиллюстрируйте их взаимное расположение с помощью кругов Эйлера.

VII. Линейные уравнения с параметром и уравнения с параметром, сводящиеся к линейным.

1. Решите уравнение при всех значениях параметра a :
 $(a-3)(a+5)x - a + 2a^2 = 3a^2 - 4a$.
2. Решите уравнение при всех значениях параметра a :
 $(a-3)(a+5)x - 1 + 2a = 3a - 4$.
3. Решите уравнение при всех значениях параметра a :
 $(a+2)(a-3)x + a - 3a^2 = 3a - 2a^2$.
4. Решите уравнение при всех значениях параметра a :
 $(a+1)(a-7)x - 2a + 2a^2 = 3a^2 - 9a$.
5. Решите уравнение при всех значениях параметра a :
 $ax - a^2 + 7(x-2) = 9a$.

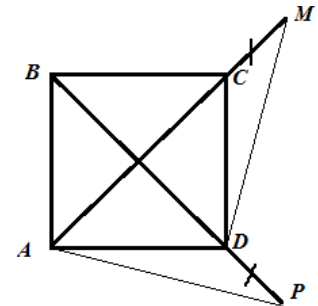
6. Решите уравнение при всех значениях параметра a
 $a^2 + 5(x + 3) = ax + 8a$
7. При каких значениях параметра a уравнения $6a + 12ax + 13 = 5x$ и $\frac{5+x}{3} - 1 = \frac{11-7x}{4}$ будут иметь одинаковые корни?
8. При каких значениях параметра a уравнения $10ax - 14a + 3 = 7x$ и $\frac{x+7}{4} - 1 = \frac{7x-1}{6}$ будут иметь одинаковые корни?
9. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 7)(a - 5)x = a - 5$ не имеет решений?
10. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 9)(a - 4)x = a + 9$ имеет бесконечно много решений?
11. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 1)(a - 6)x = a^2 - 4a - 12$ имеет бесконечно много решений?
12. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 5)(a + 1)x = a^2 + 5a + 4$ имеет бесконечно много решений?

ГЕОМЕТРИЯ

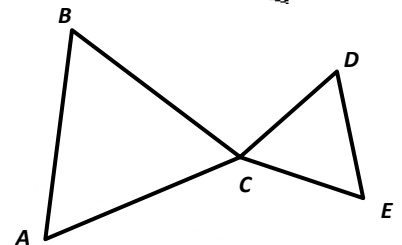
1. Прямые AB и CD пересекаются в точке O . Внутри угла AOD взята точка K так, что луч OK – биссектриса угла AOD . Найдите угол KOC , если угол BOC равен 26° .
2. Углы AOC и BOC – смежные, луч OD – биссектриса угла AOC . Найдите угол BOD , если угол AOC равен 108° .
3. Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на 280° больше четвертого угла. Найдите эти четыре угла.
4. Сумма вертикальных углов в 2 раза меньше угла, смежного с каждым из них. Найдите эти вертикальные углы.
5. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в пять раз меньше суммы двух других. Найдите все образовавшиеся углы.
6. При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов в семь раз меньше разности двух других углов. Найдите каждый из этих углов.
7. При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов равен $\frac{5}{7}$ суммы остальных углов.

Найдите каждый из этих углов.
8. В некоторый момент времени Маша измерила угол между часовой и минутной стрелками своих часов. Ровно через два часа она снова измерила угол между стрелками. Угол оказался таким же. Каким мог быть этот угол?
9. Первый раз после 12:00, часовая и минутная стрелки исправных часов лежат на одной прямой. Что в этот момент показывает секундная стрелка?
10. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AM и A_1M_1 являются медианами этих треугольников. Известно, что $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
11. Прямая AD , перпендикулярная медиане BM треугольника ABC , делит ее пополам. Найдите сторону AC , если сторона AB равна 4 см.
12. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 15 см. Перпендикуляр MN , проведенный к стороне AB через ее середину – точку N , пересекает основание AC в точке M . Найдите основание AC треугольника ABC , если периметр треугольника BMC равен 35 см.

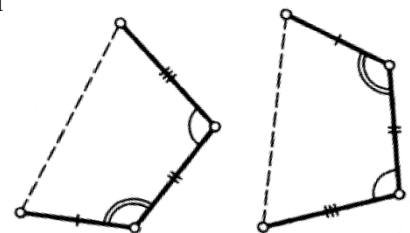
13. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и F соответственно так, что $\angle CDA = \angle AFC$. Отрезки DC и AF пересекаются в точке O , причем $OD = OF$. Найдите BC , если $AD = 4$ см, $BD = 3$ см.
14. Сторона AB в треугольнике ABC в двое больше стороны BC . Медиана CM пересекает биссектрису BD в точке O . Угол $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = 35^\circ$. Найти углы треугольника DOC .
15. Сторона BC в треугольнике ABC в двое меньше стороны AB . Медиана CM пересекает биссектрису BD в точке O . Угол $\angle B = 64^\circ$, $\angle ACM = 22^\circ$. Найти углы четырехугольника $ADOM$.
16. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM . На ней взята точка D . Докажите, что треугольник AMD равен треугольнику CMD .
17. В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза меньше его боковой стороны, а периметр равен 15 см. Найти стороны этого треугольника.
18. Периметр равнобедренного треугольника равен 37 см. Основание меньше боковой стороны на 5 см. Найти стороны этого треугольника.
19. В равнобедренном треугольнике KLN с основанием KN проведена медиана LM . Найдите периметр треугольника KLN , если длина медианы равна 5 см, а периметр треугольника LMN равен 14 см.
20. Медиана BM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе AD . Найдите AB , если AC равно 12 см.
21. В квадрате $ABCD$ на луче AC и луче BD отмечены точки M и P так, как показано на рисунке. Докажите, что если $CM = DP$, то равны и отрезки MD и AP .



22. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что отрезки AD и BE равны.



23. У двух четырехугольников соответственно равны три стороны и два угла между этими сторонами. Докажите, что у них равны и четвертые стороны.



24. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны, $AB = ED$, $BC = CD$. Докажите, что равны отрезки AD и BE .

