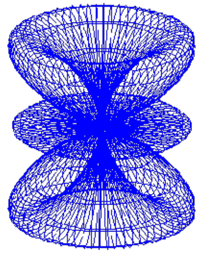
哈爾濱工程大學

数学物理方程

Mathematical physics

任永志
物理与光电工程学院
哈尔滨工程大学
renyongzhi@hrbeu.edu.cn



复习

狄拉克Delta函数：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}\qquad \int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

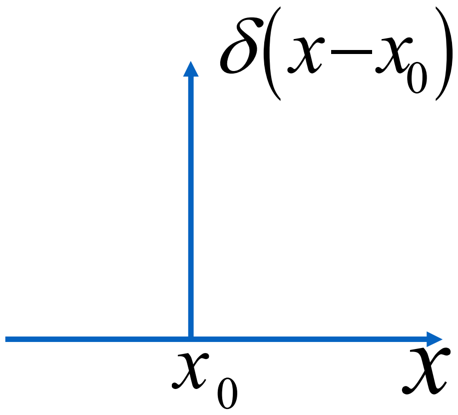
可以用来表示单个或离散质点的密度分布

Dirac Delta 函数只在发散点附近的积分值不为零。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sum_i\delta(x-x_i)dx=\sum_i\int_{x_{i-}}^{x_{i+}}\varphi(x)\delta(x-x_i)dx=\sum_i\varphi(x_i)$$

T（x）连续且只有单根x_n，则 $\delta\left[T(x)\right]=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{\left|T'(x_n)\right|}$



复习

二维 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0)$

三维 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$

导数： $\int_{0-}^{0+}\varphi(x)\delta^{n}(x)dx\equiv-\int_{0-}^{0+}\varphi'(x)\delta^{n-1}(x)dx$

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}\qquad H'(x)=\delta(x)$$

具有第一类间断点，分段连续可导函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x<x_0\\ f_2(x) & x>x_0\end{cases}$ 其中，$h=f_2(x_0)-f_1(x_0)$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x} & x<x_0\\ \dfrac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x} & x>x_0\end{cases}+h\delta(x-x_0)$$

习题

1 $$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$$ 求 $f'(x), f''(x), f'''(x)$

解：

$$\frac{df}{dx}=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{df^2}{dx^2}=\begin{cases} 2 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}-\delta(x)=2H(x)-\delta(x)$$

$$\frac{df^3}{dx^3}=2\delta(x)-\delta'(x)$$

傅里叶级数

傅里叶级数展开：将周期函数展开成用周期为T的sin和cos函数。

若 $f(x)=f(x+T)$ 可以用下面集合中的函数

$$\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{4\pi}{T}x,\cos\frac{4\pi}{T}x,\ldots,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cos\frac{2\pi n}{T}x\ldots,\right\}$$

展开成右边形式 $f(x)=a_0+\sum_{n=1} a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$

$\cos\frac{2\pi n}{T}x,\sin\frac{2\pi n}{T}x$ 是周期为 T/n 的周期函数

完备正交函数族

$$\left\{1, \sin\frac{2\pi}{T}x, \cos\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{4\pi}{T}x, \cos\frac{4\pi}{T}x, \ldots, \sin\frac{2\pi n}{T}x, \cos\frac{2\pi n}{T}x \ldots, \right\}$$

定义函数的内积为: $(f, g) \equiv \int_0^T f^*(x) g(x) dx$

类比空间矢量的正交性: $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

$$\int_0^T \cos\frac{2\pi n'}{T}x \cos\frac{2\pi n}{T}x dx = \begin{cases} T/2 & \text{if } n' = n \\ 0 & \text{if } n' \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin\frac{2\pi n'}{T}x \cos\frac{2\pi n}{T}x dx = 0$$

$$\int_0^T \sin\frac{2\pi n'}{T}x \sin\frac{2\pi n}{T}x dx = \begin{cases} T/2 & \text{if } n' = n \\ 0 & \text{if } n' \neq n \end{cases}$$

傅里叶级数的展开系数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1} a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

傅里叶级数的展开系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

迪利克雷定理：函数f(x)满足（1）处处连续或只有有限个第一类间断点（2）每个周期只有有限个极值点。

矢量空间与函数空间对比

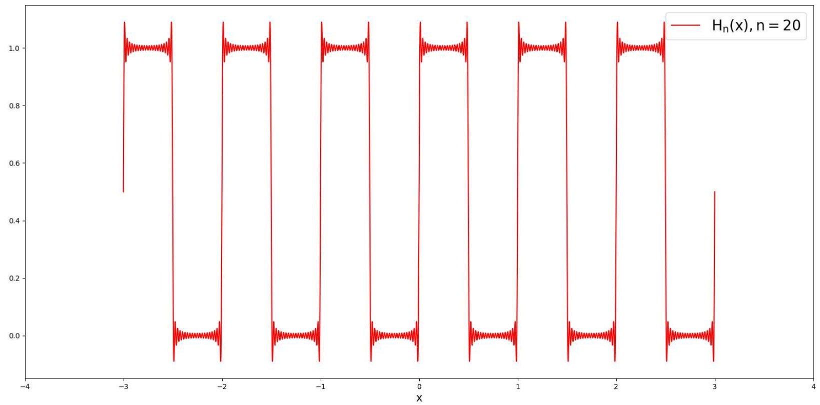
我们把函数比作欧式空间中的矢量

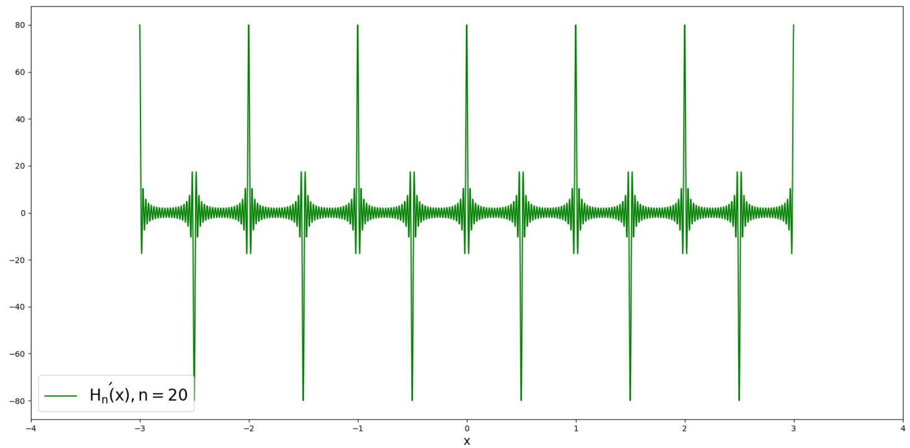
	欧式空间	函数空间
基矢	$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$	$G=\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{4\pi}{T}x,\cos\frac{4\pi}{T}x,\ldots,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cos\frac{2\pi n}{T}x\ldots,\right\}$
内积	$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$	$\forall f,g\in G\qquad (f,g)\equiv\int_0^T f^*(x)g(x)dx=\delta_{fg}\frac{T}{2}$
基矢展开	$\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$
展开系数	$x_i=\mathbf{r}\bullet\mathbf{e}_i$	$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx,b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$ $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

$$H'(x) = \delta(x)$$

$$H(x) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0} \frac{1}{2k+1} \sin\left[2\pi(2k+1)x\right]$$

$$H'(x) = \sum_{k=0} 4\cos\left[2\pi(2k+1)x\right]$$





作业

2：　将f(x)=x²在[0, T]区间内傅里叶级数展开。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx = \frac{T^2}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx = \frac{2}{T}\int_0^T x^2\sin\frac{2\pi n}{T}xdx = -\frac{T^2}{n\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T x^2dx = \frac{T^2}{3}$$

利用sin, cos函数整周期倍区域内，积分为0

$$x^2 = \frac{T^2}{3} + \sum_{n=1} \frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x - \frac{T^2}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

作业

$$x^2=\frac{T^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x-\frac{T^2}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

令 $T=2\pi,x=0$ $\qquad 0=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{4\pi^2}{n^2\pi^2}$

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}\overset{?}{=}-\frac{\pi^2}{3}$$

傅里叶级数的等号一般在周期函数端点处不成立，如果希望等号成立，需要人为选定a_0。

作业

$$x^2=\frac{T^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x-\frac{T^2}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

令 $T=2\pi, x=\pi$

$$\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{4\pi^2}{n^2\pi^2}\cos\pi n$$

$$1-1/2^2+1/3^2+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

作业

习题1：将f(x)=x²在[−T/2, T/2]区间内傅里叶级数展开。

并计算 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2\sin\frac{2\pi n}{T}xdx=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2\cos\frac{2\pi n}{T}xdx=\frac{2}{T}\frac{T^3(-1)^n}{2n^2\pi^2}=(-1)^n\frac{T^2}{n^2\pi^2}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)dx=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2dx=\frac{T^2}{12}$$

$$x^2=\frac{T^2}{12}+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x$$

作业

习题2: 将f (x)=x^2在[−T/2, T/2]区间内傅里叶级数展开。

并计算 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$

$$x^2=\frac{T^2}{12}+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x$$

令$T=2\pi, x=\pi$

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

$$1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

作业

习题3：将f(x)=x（T-x）在[0,T]区间内傅里叶级数展开。

$[0,T]$

$$x=\frac{T}{2}-\sum_{n=1}\frac{T}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$$x^2=\frac{T^2}{3}+\sum_{n=1}\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x-\frac{T^2}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$$f(x)=Tx-x^2=\frac{T^2}{6}-\sum_{n=1}\frac{T^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{T}x$$

复数

复数:

求解方程 $x^2 + 1 = 0$ 得到 $x = \pm i$

定义 $i^2 = -1$

复共轭: $(a + bi)^* = a - bi$ $a^* = a$ $(bi)^* = -bi$

$$v = a + bi$$

模: $$|v| = \sqrt{vv^*} = \sqrt{(a+bi)(a\text{-}bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

欧拉公式

$e^{i\pi}+1=0$

一般形式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

幂级数展开 $e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots$

幂级数中的奇数项 $\cos\theta=1-\frac{(\theta)^2}{2!}+\frac{(\theta)^4}{4!}+\cdots$

幂级数中的奇数项 $\sin\theta=\theta-\frac{(\theta)^3}{3!}+\cdots$

$$(e^{i\theta})^*=(\cos\theta+i\sin\theta)^*=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}$$

欧拉公式

$$e^{2\pi i}=?$$

$$e^{2\pi i}=1$$

$$e^{\pi i/3}=?$$

$$e^{\pi i/3}=\cos\pi/3+i\sin\pi/3=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{\pi i/4}=?$$

$$e^{\pi i/4}=\cos\pi/4+i\sin\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{\pi i/2}=?$$

$$e^{\pi i/2}=\cos\pi/2+i\sin\pi/2=i$$

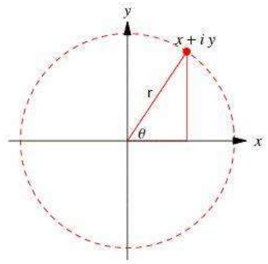
$$e^{9\pi i}=?$$

$$e^{9\pi i}=-1$$

欧拉公式

复共轭 $$(e^{i\theta})^* = (\cos\theta + i\sin\theta)^* = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

模 $$|e^{i\theta}| = \sqrt{e^{i\theta}(e^{i\theta})^*} = \sqrt{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \sqrt{e^{i\theta - i\theta}} = 1$$



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

周期性 $$e^{i(\theta+2\pi)} = \cos(\theta + 2\pi) + i\sin(\theta + 2\pi) = \cos\theta + i\sin\theta$$

傅里叶级数展开

傅里叶级数 $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$$\cos\frac{2\pi n}{T}x=\frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}x}+e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}}{2},\sin\frac{2\pi n}{T}x=\frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}x}-e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}}{2i}$$

改写为 $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}a_n\frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}x}+e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{2\pi n}{T}x}-e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}}{2i}=a_0+\sum_{n=1}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{2\pi n}{T}x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}$$

定义 $$\tilde{f}(n)=\begin{cases}\dfrac{a_n-ib_n}{2} & n>0\\ \dfrac{a_{-n}+ib_{-n}}{2} & n<0\\ a_0 & n=0\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

正交函数族

新的正交函数族： $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$

$f(x)$ 也可以看成由展开 $\left\{\cdots,\exp\left(-\frac{2\pi 2i}{T}x\right),\exp\left(-\frac{2\pi 1i}{T}x\right),\exp\left(\frac{2\pi 0i}{T}x\right),\exp\left(\frac{2\pi 1i}{T}x\right),\exp\left(\frac{2\pi 2i}{T}x\right),\cdots,\exp\left(\frac{2\pi ni}{T}x\right),\cdots\right\}$

函数的内积为：

$$(f,g)=\int_0^T f^*(x)g(x)dx=\int_0^T e^{i\frac{-2\pi n'}{T}x}e^{i\frac{2\pi n}{T}x}dx=\begin{cases}T & n=n'\\ 0 & n\neq n'\end{cases}\equiv\delta_{nn'}T$$

傅里叶级数的另一种表达形式。

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{i\frac{2\pi n}{T}x}\qquad \tilde{f}(n)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}dx$$

傅里叶级数变换

变换: $$\tilde{f}(n)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}dx$$ 将周期函数f(x) 变换到了一个数组 $\tilde{f}(n)$

逆变换: $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(n)e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$ 将数组 $\tilde{f}(n)$ 变换回f(x)

傅里叶变换

傅里叶级数的变换是针对周期为T的周期函数，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(n) e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \qquad \tilde{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} dx$$

如果f(x)不是周期函数，如何展开？

将周期函数的周期调到无穷大

令 $T \to \infty$ $\quad \frac{2\pi n}{T} \to k(\text{real number})$

得到傅里叶变换: $\boxed{\tilde{f}(k) \propto \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad f(x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dx}$

傅里叶级数与傅里叶变换比较

	傅里叶级数	傅里叶变换
变换公式	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}$ $\tilde{f}(k)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ikx}dx$	$\tilde{f}(k)\propto\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$ $f(x)\propto\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dx$
	f(x)是周期函数	f(x)定义在实数域上
	波矢k取离散值 $k\equiv\frac{2\pi n}{T}$	波矢k取连续的实数

傅里叶变换的完备正交基

傅里叶级数:

$$\left\{\exp\left(i\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\}$$

$$\int_0^T e^{i\frac{-2\pi n'}{T}x} e^{i\frac{2\pi n}{T}x} dx = \begin{cases} T & n = n' \\ 0 & n \neq n' \end{cases} \equiv \delta_{nn'} T$$

傅里叶变换:

$$\{\exp(ikx)\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x} e^{ikx} dx = ?$$

傅里叶变换的完备正交基

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k'-k)x}dx = 2\pi\delta(k-k')$$

不严格的证明：

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\mathrm{d}k\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-ikx}\mathrm{d}x\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}[\cos kx + i\sin kx]\mathrm{d}x\mathrm{d}k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\cos kx\,\mathrm{d}x\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\epsilon)}{k}\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\epsilon)}{k\epsilon}\mathrm{d}k\epsilon = ?$$

傅里叶变换的完备正交基

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k-k')$$

不严格的证明：

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$I'(a) = \int_0^{\infty} -xe^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx = -\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(x) dx = -\frac{1}{1+a^2}$$

$$I(a) = -\arctan a + C$$

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{a\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2} \qquad I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \mathrm{d}k = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\epsilon)}{k\epsilon} \mathrm{d}k\epsilon = 4\int_0^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \mathrm{dk} = 4I(0) = 2\pi$$

傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k'-k)x}dx = 2\pi\delta(k-k')$$

把$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dx$，代入到，$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$ ，预期等号依然成立

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k')e^{ik'x}dk'e^{-ikx}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk'\tilde{f}(k')\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i(k'-k)x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk'\tilde{f}(k')\delta(k-k')=\tilde{f}(k)$$

傅里叶变换

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{-ikx}dk \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx \\ f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{-ikx}dk \end{cases}$$

傅里叶变换

$$
\begin{cases}
\tilde{f}(k) \equiv \mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
f(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk
\end{cases}
$$

傅里叶变换例题

1）： 函数f(x)=1做傅里叶变换

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx=\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx=\sqrt{2\pi}\,\delta(k)$$

傅里叶变换例题

2）： 函数 $f(x)=\delta(x)$ 做傅里叶变换

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\delta(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik*0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

傅里叶变换例题

3）： $rect(x)=\begin{cases}1 & |x|<1/2\\ 0 & |x|\geq 1/2\end{cases}$ 傅里叶变换 $\begin{cases}\tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk\end{cases}$

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}rect(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-ikx}dx=\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$=\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-ik/2}-e^{ik/2}}{-ik}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi k}\frac{e^{ik/2}-e^{-ik/2}}{2i}=\sqrt{2\pi}\frac{\sin k/2}{\pi k}$$

傅里叶变换例题

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

4）： 函数f(x)=H(x)傅里叶变换

$$\mathcal{F}[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dxe^{-ikx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$$

$$\int_{0}^{\infty} dxe^{-ikx}=\frac{1}{ik}+\pi\delta(k)$$

傅里叶变换性质

$$\begin{cases} \tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\ f(x)=\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx}dk \end{cases}$$

性质1）： $\mathcal{F}[f'(x)]=ik\tilde{f}(k)$

$$\tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f'(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}df(x)$$

$$=-(-ik)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx$$

$$=ik\mathcal{F}[f(x)]=ik\tilde{f}(k)$$

傅里叶变换性质

$$\mathcal{F}[f''(x)] = ?$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = ?$$

傅里叶变换性质

注意：
$$\mathcal{F}[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$$

$$\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

验证性质一：

$$\mathcal{F}[H'(x)]=ik\mathcal{F}[H(x)]=ik\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=F[\delta(x)]$$

傅里叶变换性质

性质2）：
$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = \frac{1}{ik}\tilde{f}(k)$$

由性质1
$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = ik\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi]$$

傅里叶变换性质

性质3）： $$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}\tilde{f}(k/a)$$

$$\tilde{f}(k)=\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}dx$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikax/a} f(ax)dax$$

$$= \frac{1}{a}\tilde{f}(k/a)$$

傅里叶变换性质

性质4）： $\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0}\tilde{f}(k)$

$$\mathcal{F}[f(x-x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-ikx}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-ik(x-x_0)-ikx_0}dx = e^{-ikx_0}\tilde{f}(k)$$

性质5）： $\mathcal{F}[f(x)e^{ik_0x}] = \tilde{f}(k-k_0)$

傅里叶变换性质

性质6）： $\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \sqrt{2\pi}\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$

卷积 $$f_1(x) * f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi$$

作业

1）： 函数f(x)=sin(x)傅里叶变换

2）： 函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ 傅里叶变换