



哈爾濱工程大學

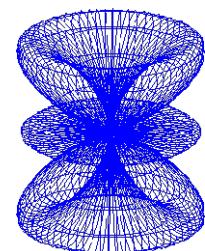
数学物理方程  
**Mathematical Physics**

任永志

物理与光电工程学院

哈尔滨工程大学

[renyongzhi@hrbeu.edu.cn](mailto:renyongzhi@hrbeu.edu.cn)



# 什么是数学物理方程？

1. 质点运动：遵循牛顿三定律

$$F=ma$$

$N$        $kg$        $m/s^2$



2. 电磁波：麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

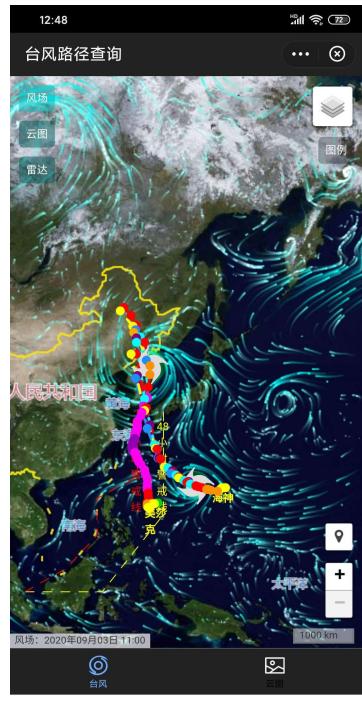
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



# 数学物理方程能做什么？

预测台风路径



NWP模型

疾病传播模型



SIR模型

金融定价模型



随机微分方程（SDE）模型  
随机行走模型

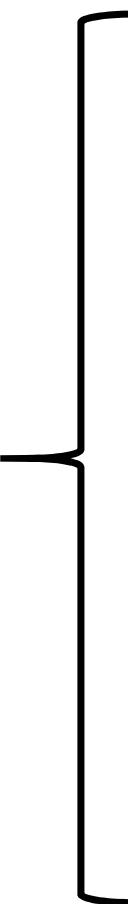
# 本课程的解决的核心问题

学习三个方程的推导和求解

$$\left[ \begin{array}{ll} \text{波动方程} & u_{tt} = a^2 \Delta u \\ \text{热传导方程} & u_t = a^2 \Delta u \\ \text{泊松方程} & \Delta u = \rho \end{array} \right]$$

# 波动方程

$$\text{波动方程 } u_{tt} = a^2 \Delta u$$



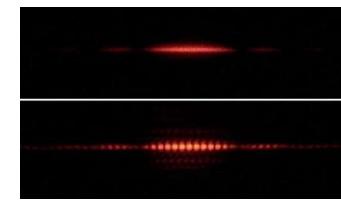
水波、声波



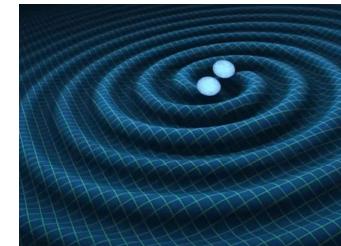
光波



物质波



引力波

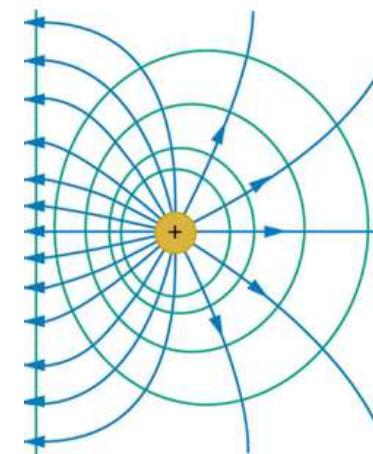


# 热传导方程以及泊松方程

热传导方程  $u_t = a^2 \Delta u$   
(扩散方程)



泊松方程  $\Delta u = \rho$



# 数学物理方程的主要目的

---

本课程在高等数学和普通物理学基础上论述数学物理中一些常用的方法。为进一步学习理论课程和专业基础课程打下必备的数学基础，并为今后工作中求解数学物理问题提供有效的手段。学习本课程要求掌握基本概念、基本理论和基本方法；要求能够掌握怎样把物理问题转化为数学问题，以及运用数学来求解物理问题的一些方法。

# 后续课程

---

量子力学

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{H}\phi$$

电动力学

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

统计力学

热力学涨落、量子涨落

## 如何学习数学物理

---

You can obtain a certain *superficial knowledge* of mathematics by listening to lectures, but you cannot obtain *skill* this way.

The only way to develop the skill necessary to use this material in your later courses is to practice by *solving many problems*.

# 考评方法

---

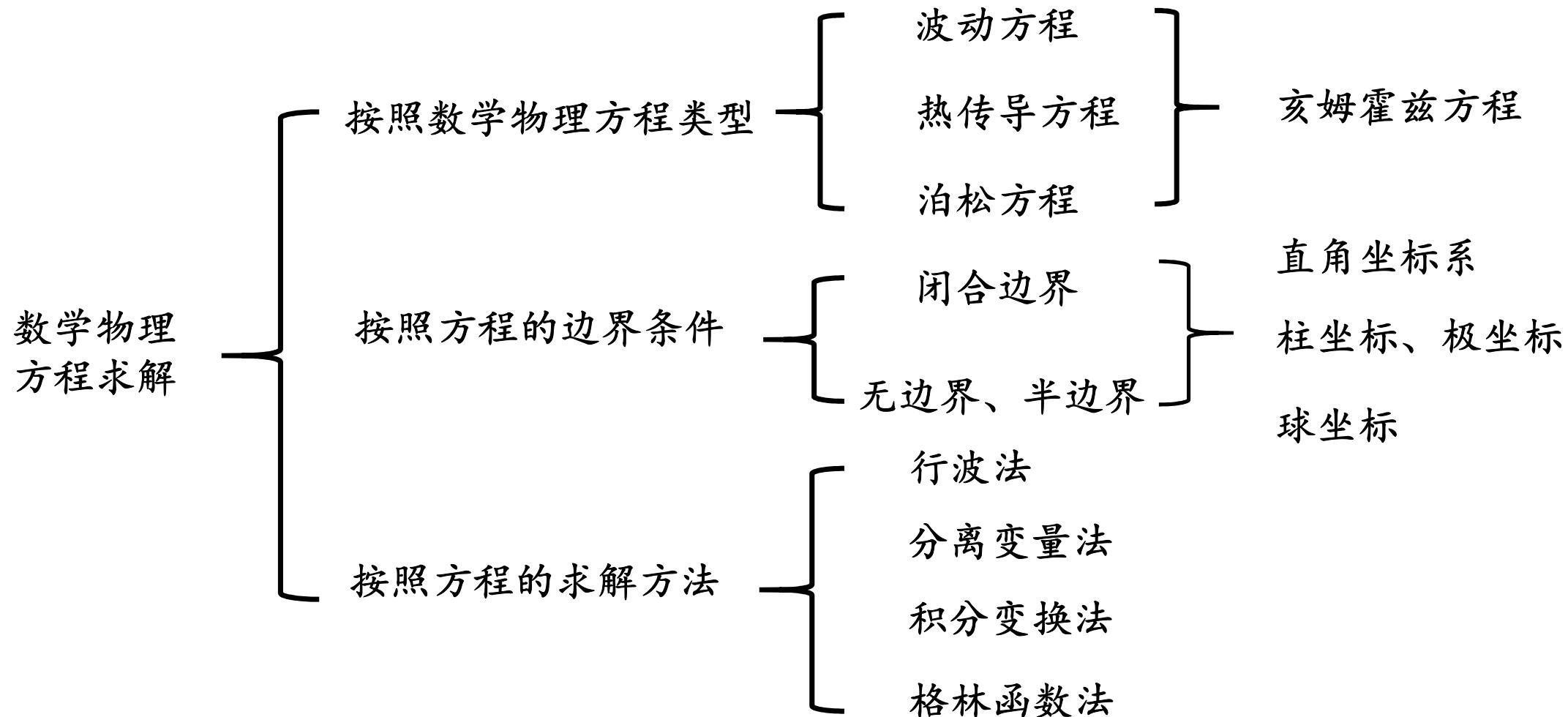
- 考评方法：
  - 平时 40% (日常小作业、随堂测试、考勤)
  - 期末闭卷笔试 60%

## 参考书目

1. 梁昆淼. 数学物理方法 (第四版). 高等教育出版社, 2010年
2. 吴崇试. 数学物理方法 (第二版). 北京大学出版社, 2003年
3. 胡嗣柱, 倪光炯. 数学物理方法 (第二版). 高等教育出版社, 2002年



# 数学物理方程思维导图



# 预备知识

- 一 Dirac Delta 函数
- 二 傅里叶级数
- 三 傅里叶变换
- 四 常微分方程及阶段  
复习

第五章 傅里叶变换 .....	69
§ 5.1 傅里叶级数 .....	69
§ 5.2 傅里叶积分与傅里叶变换 .....	73
§ 5.3 δ 函数 .....	82

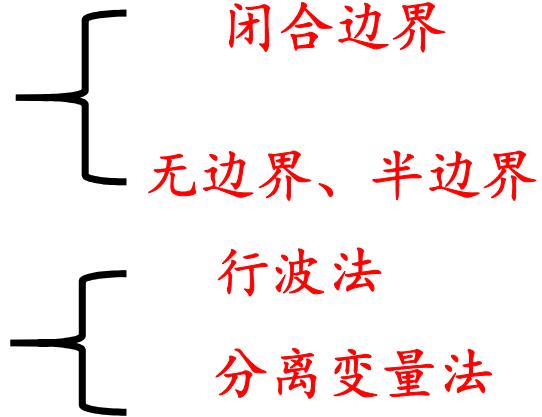
· I ·

---

第六章 拉普拉斯变换 .....	90
§ 6.1 拉普拉斯变换 .....	90
§ 6.2 拉普拉斯变换的反演 .....	96
§ 6.3 应用例 .....	100

# 第一部分

按照方程的边界条件

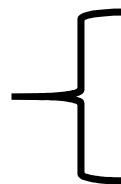


按照方程的求解方法

第七章 数学物理定解问题 .....	107
§ 7.1 数学物理方程的导出 .....	108
§ 7.2 定解条件 .....	122
§ 7.3 数学物理方程的分类 .....	128
§ 7.4 达朗贝尔公式 定解问题 .....	135
第八章 分离变数法 .....	143
§ 8.1 齐次方程的分离变数法 .....	143
§ 8.2 非齐次振动方程和输运方程 .....	162
§ 8.3 非齐次边界条件的处理 .....	172
§ 8.4 泊松方程 .....	175
§ 8.5 分离变数法小结 .....	178

# 第二部分

按照方程的求解方法



- 积分变换法
- 格林函数法

第十二章 格林函数法 ..... 303

§ 12.1 泊松方程的格林函数法 ..... 303

II .

§ 12.2 用电像法求格林函数 ..... 308

§ 12.3 含时间的格林函数 ..... 313

§ 12.4 用冲量定理法求格林函数 ..... 317

\* § 12.5 推广的格林公式及其应用 ..... 321

第十三章 积分变换法 ..... 329

§ 13.1 傅里叶变换法 ..... 329

§ 13.2 拉普拉斯变换法 ..... 338

# 第三部分

波动方程

热传导方程

泊松方程

闭合边界

无边界、半边界

分离变量法

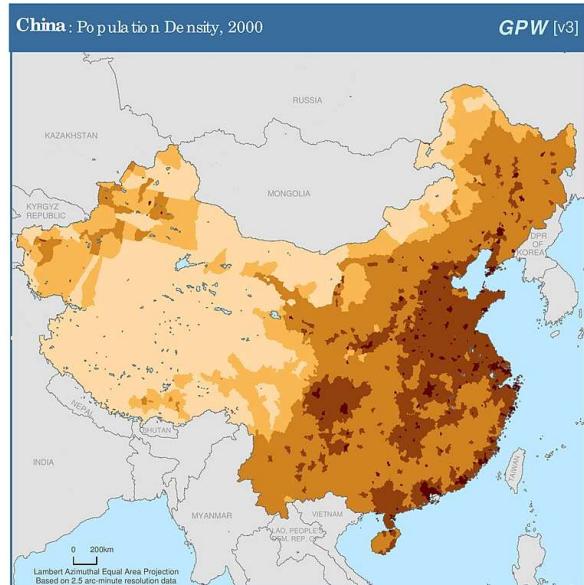
亥姆霍兹方程

柱坐标、极坐标

球坐标

第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题 .....	181
§ 9.1 特殊函数常微分方程 .....	181
§ 9.2 常点邻域上的级数解法 .....	190
§ 9.3 正则奇点邻域上的级数解法 .....	195
§ 9.4 施图姆 - 刘维尔本征值问题 .....	212
第十章 球函数 .....	222
§ 10.1 轴对称球函数 .....	222
§ 10.2 连带勒让德函数 .....	241
§ 10.3 一般的球函数 .....	249
第十一章 柱函数 .....	263
§ 11.1 三类柱函数 .....	263
§ 11.2 贝塞尔方程 .....	265
* § 11.3 柱函数的渐近公式 .....	281
§ 11.4 虚宗量贝塞尔方程 .....	287
§ 11.5 球贝塞尔方程 .....	293
* § 11.6 可化为贝塞尔方程的方程 .....	302

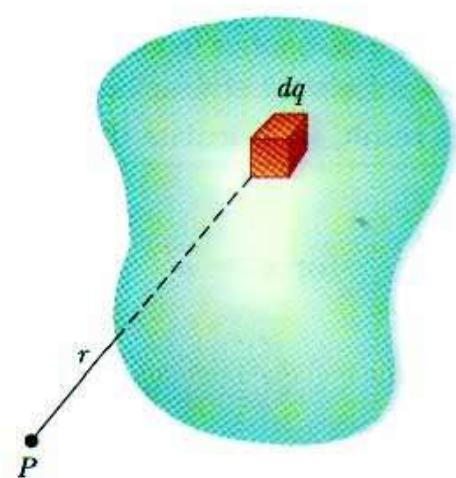
# 分 布 函 数 (Distribution function)



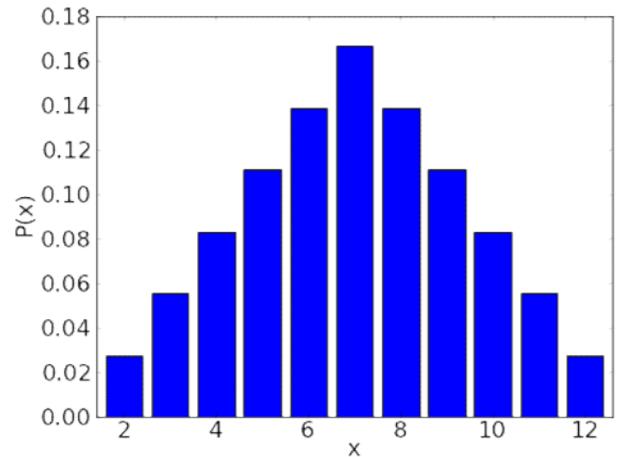
Copyright 2005. The Trustees of Columbia University in the City of New York.  
Source: Center for International Earth Science Information Network (CIESIN),  
Columbia University; and Centro Internacional de Agricultura Tropical (CIAT).  
Gridded Population of the World (GPW), Version 3. Palisades, NY: CIESIN,  
Columbia University. Available at <http://sedac.ciesin.columbia.edu/gpw>.  
NOTE: National boundaries are derived from the population grid and thus  
may appear coarse.

SEDAC CIESIN Columbia University

人口分布



电荷分布



概率分布

# 质量分布

质量 $m$ 均匀分布在长为 $l$ 的线段上，其线密度为  $\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & |x| > l/2 \\ m/l & |x| \leq l/2 \end{cases}$

1. 线密度一定大于等于零  $\rho_l(x) \geq 0$

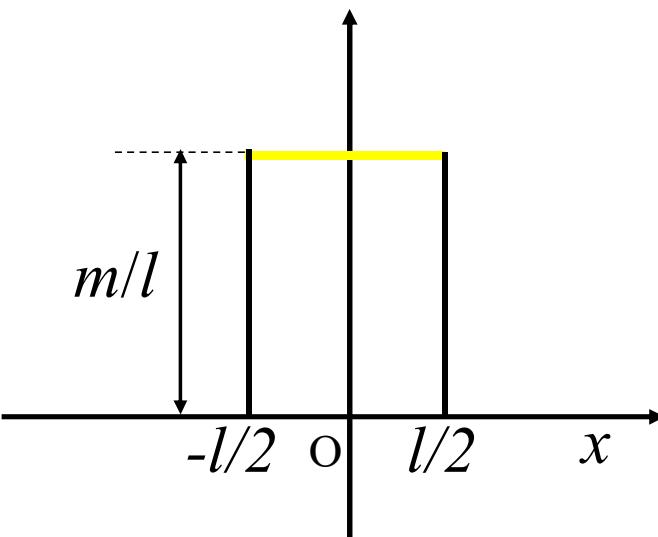
2. 线密度的积分等于质量  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x) dx = m$

3. 线段动量为  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x) v_0 dx$

# 质点

质量 $m$ 均匀分布在长为 $l$ 的线段上，若 $l \rightarrow 0$ ，得到了有质量无体积的质点。

$$\rho_l(x) = ?$$



1. 线密度一定大于等于零  $\rho_l(x) \geq 0$

2. 线密度的积分等于质量  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x) dx = m$

3. 线段动量为

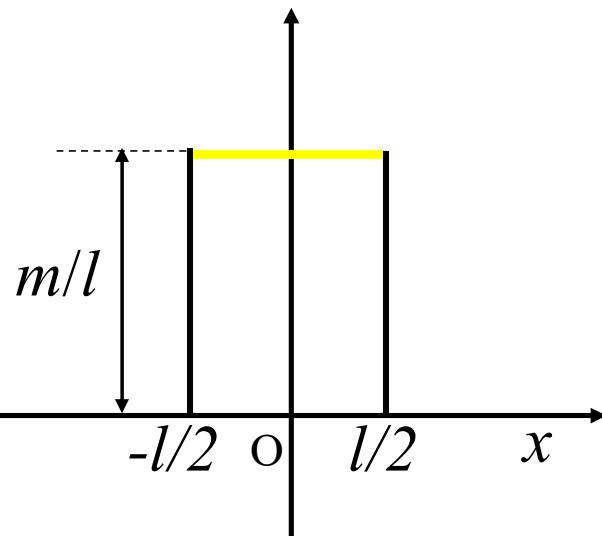
$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x) v_0 dx$$

# 质点

质量 $m$ 均匀分布在长为 $l$ 的线段上，若 $l \rightarrow 0$ ，得到了有质量无体积的质点。

$$\rho_l(x) = ?$$

1. 线密度一定大于等于零  $\rho_l(x) \geq 0$



$$\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

2. 线密度的积分等于质量  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)dx = m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)dx = m$$

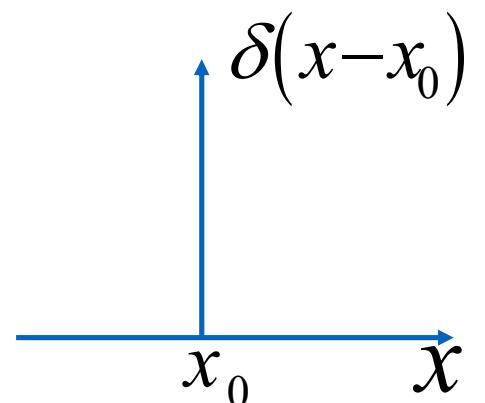
# Dirac Delta 函数

Dirac Delta函数：

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \quad \int_{x_0^-}^{x_0^+} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0)$$

可以用来表示单个质点的密度分布

$$\rho_l(x) = m\delta(x) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x) dx = m$$



# Dirac Delta 函数

---

表示多个质点的密度分布

$$\rho(x) = \sum_i m_i \delta(x - x_i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \sum_i m_i = M$$

# Dirac Delta 函数

---

例一：

写出质量密度函数，一个粒子在 $x=2$ , 质量为5, 另一个粒子在 $x=-7$ , 质量为3

$$5\delta(x - 2) + 3\delta(x + 7)$$

例二：

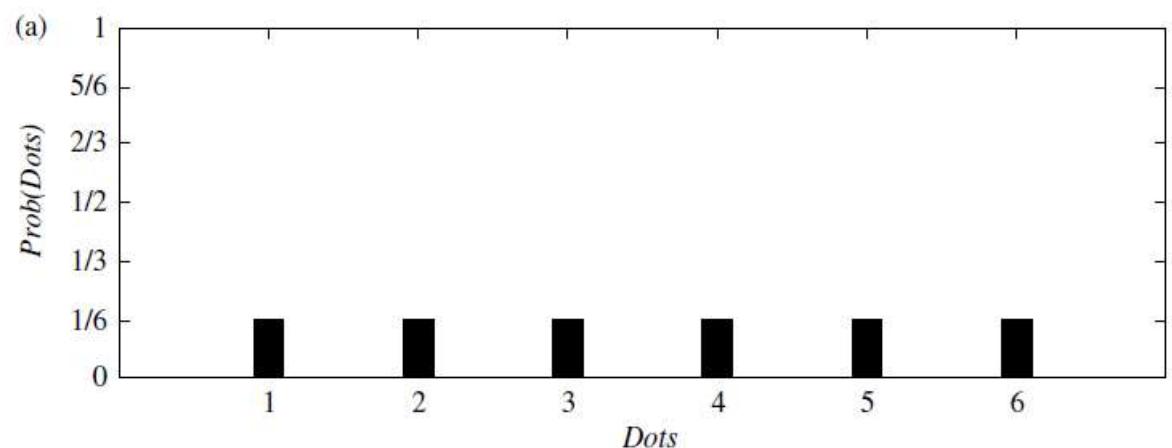
写出电荷密度函数，一个粒子在 $x=-5$ , 电荷量为3, 另一个粒子在 $x=10$ , 电荷量为-4

$$3\delta(x + 5) - 4\delta(x - 10)$$

# 离散概率分布



$$P(6) = \lim_{N \rightarrow \infty} N_6 / N = 1 / 6$$



掷色子得到的平均点数是

$$I = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$$

# 离散概率分布



$$P(x) = \begin{cases} 1/6 & x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & others \end{cases}$$

1. 任何事件发生的概率一定大于等于零  $P(x) \geq 0$

2. 所有可能性的概率相加一定等于1.  $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 0 \neq 1$

3. 测量的平均值为  $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)x dx$

# 离散概率分布



$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \sum_i \delta(x - x_i) & x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & others \end{cases}$$

1. 任何事件发生的概率一定大于等于零  $P(x) \geq 0$

2. 所有可能性的概率相加一定等于1.

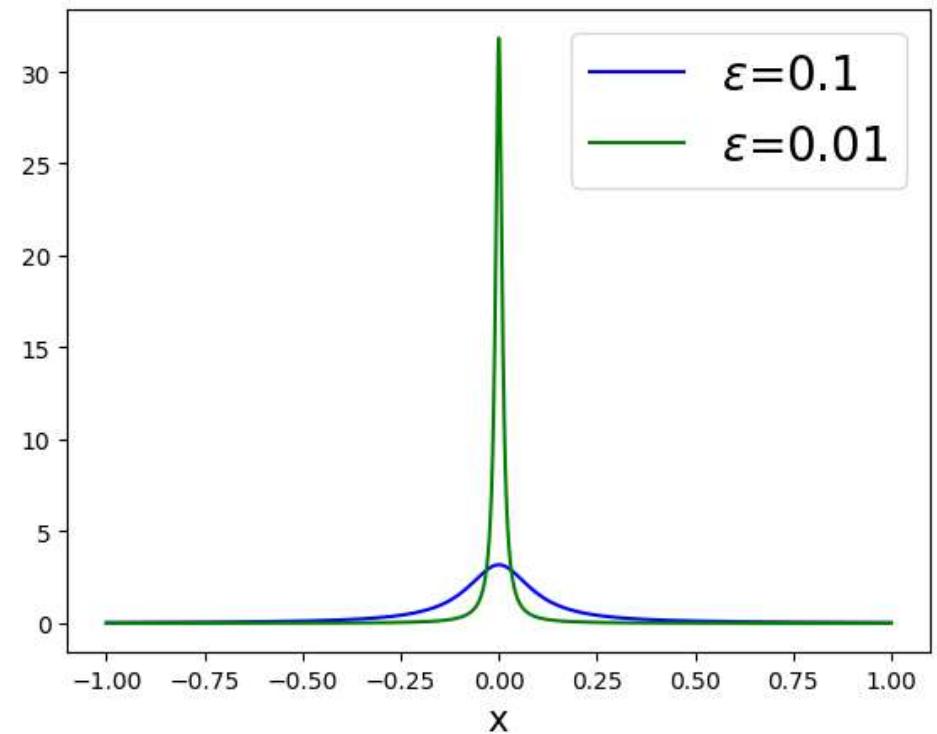
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

3. 测量的平均值为

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) x dx$$

# Dirac Delta 函数

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$



# Dirac Delta 函数性质

---

1) 偶函数:  $\delta(-x) = \delta(x)$

证明  $f(x) = \delta(-x)$  是Delta函数, 只须证,

$$f(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \quad \int_{x_0-}^{x_0+} \varphi(x) f(x - x_0) dx = \varphi(x_0)$$

$$\int_{-a}^a \phi(x) \delta(-x) dx = \int_a^{-a} \phi(-x) \delta(x) d(-x) = \int_{-a}^a \phi(-x) \delta(x) dx = \phi(0)$$

## Dirac Delta 函数性质

---

$$2) : f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$$

$$\int_{x_0-}^{x_0+} f(x)\varphi(x)\delta(x - x_0)dx = \varphi(x_0)f(x_0)$$

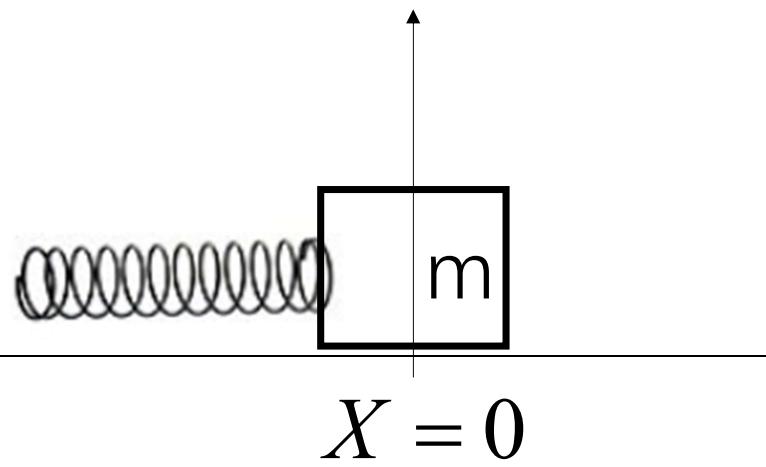
$$\int_{x_0-}^{x_0+} f(x_0)\varphi(x)\delta(x - x_0)dx = \varphi(x_0)f(x_0)$$

$$\text{推论: } x\delta(x) = 0$$

$$\int_{x_0-}^{x_0+} xf(x)\delta(x - x_0)dx = 0$$

# Dirac Delta 函数性质

小木块做受迫运动，受到的力为  $f(t)$ ，运动方程为  $mX''(t) + kX(t) = f(t)$



利用Delta函数，可以将小木块受力按照时间分解

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

求出小木块在  $\tau$  时刻瞬时力的运动

$$m\tilde{X}''(t) + k\tilde{X}(t) = f(\tau) \delta(t - \tau)$$

所有时刻的产生的作用加起来  $X(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{X}(t; \tau) d\tau$

## Dirac Delta 函数性质

$$3) \quad x\delta'(x) = -\delta(x)$$

Dirac Delta函数是分布函数（广义函数），导数运算需要定义新的运算规则。

$$\int_{0-}^{0+} \varphi(x)\delta^n(x)dx \equiv -\int_{0-}^{0+} \varphi'(x)\delta^{n-1}(x)dx$$

$$\delta'(x) = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{0-}^{0+} f(x)\delta'(x)dx = -\int_{0-}^{0+} f'(x)\delta(x)dx$$

$$\int_{0-}^{0+} \varphi(x)x\delta'(x)dx = -\int_{0-}^{0+} [\varphi'(x)x + \varphi(x)]\delta(x)dx = -\varphi(0) = -\int_{0-}^{0+} \varphi(x)\delta(x)dx$$

## Dirac Delta 函数性质

---

$$4) : x^2 \delta''(x) = 2\delta(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{0+} f(x)x^2 \delta''(x) dx &= - \int_{0-}^{0+} [f'(x)x + 2f(x)] x \delta'(x) dx \\ &= \int_{0-}^{0+} [f'(x)x + 2f(x)] \delta(x) dx = \int_{0-}^{0+} 2f(x) \delta(x) dx \end{aligned}$$

## Dirac Delta 函数性质

5) 复合函数运算:

$$T(x) \text{ 连续且只有单根 } x_n, \text{ 则 } \delta[T(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|T'(x_n)|} \quad T'(x_n) \neq 0$$

假定  $T(x)$  在  $x_0$  附近单调增, 且只有一个根  $x_0$ , 使得  $T(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{证: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta[T(x)] f(x) dx &= \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta[T(x)] f(x) dx \stackrel{y=T(x)}{=} \int_{0-}^{0+} \delta(y) f[T^{-1}(y)] dy \\ &= \int_{0-}^{0+} \delta(y) f[T^{-1}(y)] / T'(x) dy = f[x_0] / T'(x_0) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = T'(x) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{T'(x)}$$

# Dirac Delta 函数性质

5) 复合函数运算举例:

$$\delta(x^2 - 1) = ?$$

$$\begin{aligned} T(x) &= x^2 - 1 \\ T'(x) &= 2x \end{aligned} \quad |T'(1)| = |T'(-1)| = 2,$$

$$\delta(x^2 - 1) = \delta[T(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|T'(x_n)|} = \frac{1}{2} \delta(x+1) + \frac{1}{2} \delta(x-1)$$

# Dirac Delta 函数性质

---

5) 复合函数运算:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi)$$

$$\delta(|x|-1) = \delta(x+1) + \delta(x-1)$$