哈爾濱工程大學

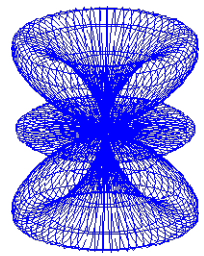
数学物理方程
Mathematical Physics

任永志

物理与光电工程学院

哈尔滨工程大学

renyongzhi@hrbeu.edu.cn



傅里叶级数变换

傅里叶级数

展开形式

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \quad k \equiv \frac{2\pi n}{T}$$

展开系数

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx \\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \end{aligned}}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-ikx} dx$$

傅里叶变换

$$
\begin{cases}
\tilde{f}(k) \equiv \mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
f(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk
\end{cases}
$$

注意：傅里叶变换是将自变量为实数x的函数f，变换成以波矢k为自变量的函数$\tilde{f}(k)$

傅里叶级数与傅里叶变换比较

	傅里叶级数	傅里叶变换
展开形式	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}$ $\tilde{f}(k)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ikx}dx$	$\begin{cases} f(x)\equiv\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk \\ \tilde{f}(k)\equiv\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx \end{cases}$
展开区间	f(x)是周期函数	f(x)定义在实数域上
波矢	波矢k取离散值 $k\equiv\frac{2\pi n}{T}$	波矢k取连续的实数

傅里叶变换

变换: $\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$ 将函数f(x) 变换到了一个函数 $\tilde{f}(k)$

几个例子:

$$\mathcal{F}[1]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx=\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx=\sqrt{2\pi}\,\delta(k)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx=\delta(k)$$

$$\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\delta(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik*0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-ikx}dx=\frac{1}{ik}+\pi\delta(k)$$

傅里叶变换的几个性质

性质1）： $\mathcal{F}[f'(x)] = ik\mathcal{F}[f(x)] = ik\tilde{f}(k)$ $\tilde{f}(k) \equiv \mathcal{F}[f(x)]$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}df(x)$$

$$= -(-ik)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx = ik\mathcal{F}[f(x)]$$

例子： $\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$ $\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\mathcal{F}[H'(x)] = ik\mathcal{F}[H(x)] = ik\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta(x)]$$

性质2）： $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = \frac{1}{ik}\tilde{f}(k)$

傅里叶变换的几个性质

性质3）：$$\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}\tilde{f}(k/a)$$

性质4）：$$\mathcal{F}[f(x-x_0)]=e^{-ikx_0}\tilde{f}(k)$$

性质5）：$$\mathcal{F}[f(x)e^{ik_0x}]=\tilde{f}(k-k_0)$$

傅里叶变换的几个性质

性质6）： $\mathcal{F}[f_1(x)*f_2(x)]=\sqrt{2\pi}\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$

卷积 $f_1(x)*f_2(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x-\xi)e^{-ikx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)e^{-i\xi k}d\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x-\xi)e^{-ik(x-\xi)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)e^{-i\xi k}d\xi f_2(k)=\sqrt{2\pi}\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$$

作业

1）： 函数f(x)=sin(x)傅里叶变换

$$F[\sin x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\sin xdx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(k-1)x}-e^{-i(k+1)x}dx$$

$$F[\sin x]=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(k-1)x}-e^{-i(k+1)x}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2i}[\delta(k-1)-\delta(k+1)]$$

作业

2）： 函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ikx}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ikx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{0}e^{ikx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ikx}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{ikx}dx$$

$$F[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}dxe^{-iqx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{iq}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(q)$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{ik}+\pi\delta(k)\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{ik}+\pi\delta(k)\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}$$

作业

2）： 函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 傅里叶变换

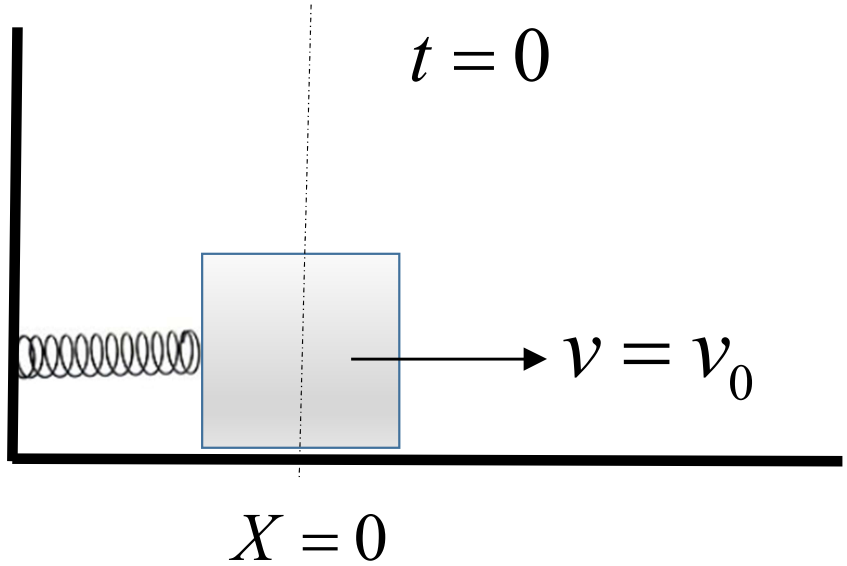
$$\mathcal{F}[H(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)$$

$$\operatorname{sgn}(x)=2H(x)-1$$

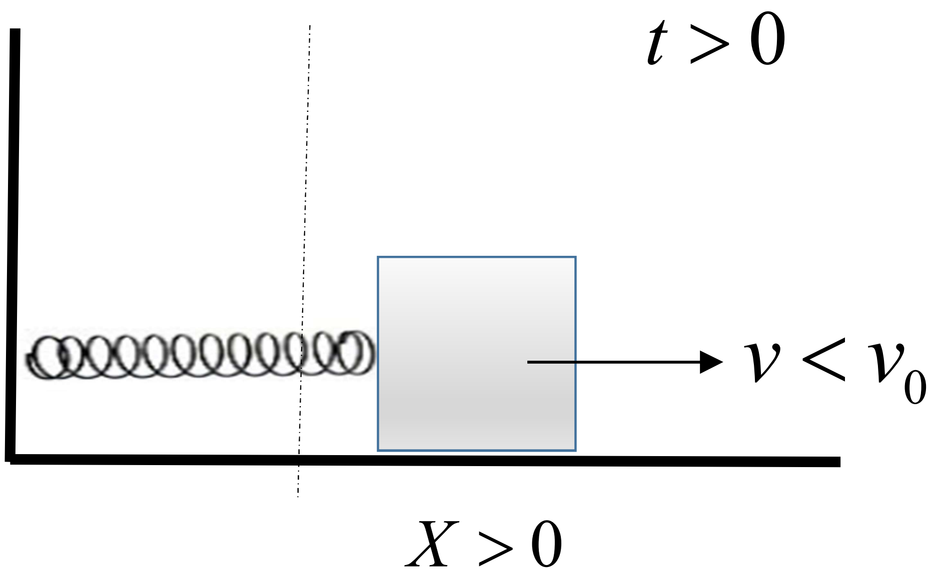
$$\mathcal{F}[2H(x)-1]=2\mathcal{F}[H(x)]-\mathcal{F}[1]=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}+2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\delta(k)-\sqrt{2\pi}\delta(k)=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}$$

经典简谐振动

一个质量为m的小木块被放置在一个无摩擦力的平面上，小木块的一端被绑在弹簧上，弹簧的另一端固定在墙上。假设小木块有向右初速度v0，接下来小木块将如何运动？



数学模型



a) 定义小木块在t时刻的位置为x(t)

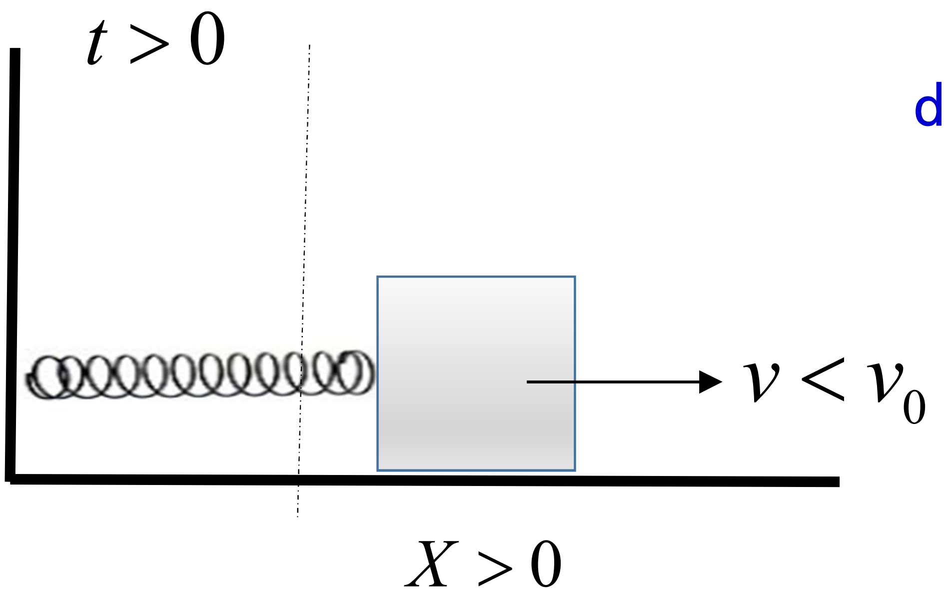
b) 则小木块偏离平衡位置的大小为

$$X(t) = x(t) - X_0$$

c) 小木块t时刻的速度为 $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = X'(t)$

d) 小木块t时刻的加速度为 $a(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = X''(t)$

数学模型



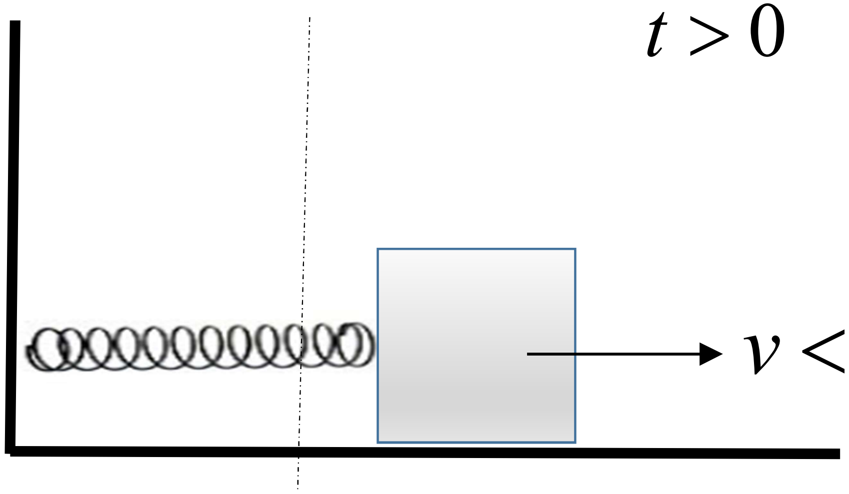
d) 小木块t时刻的加速度为 $a(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = X''(t)$

e) 小木块t时刻受弹簧的力 $F(t) = -kX(t)$

由牛顿第二定律，小木块t时刻运动方程

$$mX''(t) = -kX(t)$$

运动方程



$t > 0$

$v < v_0$

$X > 0$

小木块运动方程 $$X''(t) + \frac{k}{m} X(t) = 0$$

定义固有频率为 $$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

小木块的运动方程化为 $$X''(t) + \omega_0^2 X(t) = 0$$

$$\omega_0^2 \equiv k/m > 0$$

常微分方程

$$X''(t)+\omega_0^2 X(t)=0 \qquad \omega_0^2 \equiv k/m>0$$

微分方程的阶数指的是方程中最高阶的导数。

微分方程的解：将函数 $X(t)$ 代入方程，等号成立。

微分齐次方程：0阶项系数为0。

$X(t)=0$ 永远满足齐次方程，称为平庸解，一般不考虑

验证常微分方程的解

$$X''(t)+\omega_0^2 X(t)=0$$

验证下列函数是方程的解

$$X(t)=\cos\omega_0 t$$

$$X(t)=10\sin\omega_0 t$$

$$X(t)=c_1\sin\omega_0 t+c_2\cos\omega_0 t, c_1, c_2\text{是不同时为0的常数}$$

$$X(t)=e^{i\omega_0 t}$$

$$X(t)=c_1 e^{i\omega_0 t}+c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

常微分方程求解方法

1）： $y''=0$

解： 对等式两边x积分，得 $y'=A$

再对等式两边x积分，得 $y=Ax+B$

$y=Ax+B$ 是微分方程的通解。 A、B是任意的常数

常微分方程求解

2）： $y''=\lambda$

解： 对等式两边x积分，得 $y'=\lambda x+A$

再对等式两边x积分，得 $y=\lambda x^2/2+Ax+B$

常微分方程求解

3）： $y' = \cos x$

解：　对等式两边x积分，得 $\int_{-\infty}^{x} y' dx = \int_{-\infty}^{x} \cos x dx$

$$y = \sin x + C$$

常微分方程求解

4）： $xy' = y + 1$

解：

将y和其导数放在一边 $\dfrac{y'}{y+1} = \dfrac{1}{x}$

两边积分 $\ln(y+1) = \ln x + \text{constant} = \ln x + \ln a$

$$\ln(y+1) = \ln(ax)$$

$$y + 1 = ax$$

常微分方程求解

5）： $y'+\lambda y=0$ 一阶齐次常微分方程

解： 将y和其导数放在一边 $\dfrac{y'}{y}=-\lambda$

两边积分 $\ln(y)=-\lambda x+\mathrm{C}$

$$y=e^{-\lambda x+C}=e^{-\lambda x}e^{c}=Ce^{-\lambda x}$$

常微分方程求解

总结一下，简单的常微分方程求解

第一步，将x, y变量分别放在等式两边

第二步，两边同时对x变量积分，积分后不含y的导数项

一阶非齐次常微分方程求解

1）： $y'+2y=\lambda e^{-x}$ 包含非齐次项

解： 只考虑齐次方程 $\dfrac{y'}{y}=-2$ 解为 $y=Ce^{-2x}$

将解设为 $y=C(x)e^{-2x}$

将y代入非齐次方程中得到 $C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}+2C(x)e^{-2x}=\lambda e^{-x}$

其中 $\dfrac{d}{dx}\left(C(x)e^{-2x}\right)=C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}$

一阶非齐次常微分方程求解

1）： $y'+2y=\lambda e^{-x}$

$C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}+2C(x)e^{-2x}=\lambda e^{-x}$ 化简得到 $C'(x)e^{-2x}=\lambda e^{-x}$

即 $C'(x)=\lambda e^{x}$

解为 $C(x)=\lambda e^{x}+B$ B为一个待定的常数

前面将解设为 $y=C(x)e^{-2x}$

将C(x)代回到解中，得到 $y=\left(\lambda e^{x}+B\right)e^{-2x}=Be^{-2x}+\lambda e^{-x}$

一阶非齐次常微分方程求解

总结一下，一阶非齐次常微分方程求解方法 $y'+ay=f(x)$

第一步，求出对应齐次方程的解 $y=Ce^{-ax}$

第二步，将非齐次方程解设为 $y=C(x)e^{-ax}$

第三步，将解代入非齐次方程，求出 $C'(x)e^{-ax}=f(x)$

$$C(x)=\int^{x}e^{a\xi}f(\xi)d\xi$$

第四步，将C（x）代入 $y=C(x)e^{-ax}$

解为 $y=e^{-ax}\int^{x}e^{a\xi}f(\xi)d\xi$

练习

1）：

$$y'-2y=\lambda e^{2x}$$

$$y=e^{2x}\int^{x}\lambda e^{-2\xi}e^{2\xi}\xi=e^{2x}\left(\lambda x+C\right)$$

2）：

$$y'+6y=2$$

$$y=e^{-6x}\int^{x}e^{6\xi}2d\xi=2e^{-6x}(\frac{1}{6}e^{6x}+c)=\frac{1}{3}+ce^{-6x}$$

齐次常微分方程求解

二阶齐次常微分方程　$y''+ay'+by=0$　其中a, b是常数

例1　$y''+5y'+4y=0$

微分方程改写为　$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0$

因式分解　$\left[\left(\frac{d}{dx}+4\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right)\right]y=0$

如果y满足 $\left(\frac{d}{dx}+1\right)y=0$ 或 $\left(\frac{d}{dx}+4\right)y=0$　则 $\left[\left(\frac{d}{dx}+4\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right)\right]y=0$

因此原问题转化为求解两个一阶齐次常微分方程　$\left(\frac{d}{dx}+4\right)y=0$　$\left(\frac{d}{dx}+1\right)y=0$

齐次常微分方程

例1 $y''+5y'+4y=0$

$y'+4y=0$ 解为 $y=C_1e^{-4x}$

$y'+y=0$ 解为 $y=C_2e^{-x}$

解也可以写成 $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-4x}\\ e^{-x}\end{pmatrix}$

1. C_1, C_2相互独立，是可以取任意值的常数。

2. n阶微分方程的解包含n个可以任意取值的常数，通过这些常数可以构造出线性微分方程全部的解，这样的解也被称为通解。

3. 类比矢量空间，n阶方程全体解构成了n维的线性空间，基矢为通解$\begin{pmatrix}e^{-4x}\\ e^{-x}\end{pmatrix}$

齐次常微分方程

例2 $y''+4y=0$

因式分解 $\left[\left(\frac{d}{dx}+2i\right)\left(\frac{d}{dx}-2i\right)\right]y=0$ $\quad$ $y'+2iy=0$, $y'-2iy=0$ $\quad$ 解分别为 $y=C_1e^{2ix}$, $y=C_2e^{-2ix}$

解也可以写成 $y=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2ix}\\ e^{-2ix}\end{pmatrix}$

欧拉公式改写 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 微分方程改写为

$$y=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}=\left(C_1+C_2\right)\cos 2x+i\left(C_1-C_2\right)\sin 2x=\left(\tilde{C}_1,\tilde{C}_2\right)\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}$$

通解既可以是 $\begin{pmatrix}e^{2ix}\\ e^{-2ix}\end{pmatrix}$，也可以是 $\begin{pmatrix}\cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}$，他们代表同一个空间不同的基矢

齐次常微分方程

例3： $y''-4y'+4y=0$

因式分解 $\left[\left(\frac{d}{dx}-2\right)\left(\frac{d}{dx}-2\right)\right]y=0$ 定义 $z\equiv y'-2y$

如果 $z=y'-2y=0$， 一次方程的解y满足 $\left[\left(\frac{d}{dx}-2\right)\left(\frac{d}{dx}-2\right)\right]y=0$

如果 $z=y'-2y\neq 0$ ，但z满足 $\left(\frac{d}{dx}-2\right)z=0$

$z=y'-2y=0$ 解为 $y=C_1e^{2x}$

$\left(\frac{d}{dx}-2\right)z=0$ 解为 $z=C_2e^{2x}=y'-2y$ $y=e^{2x}\int^{x}C_2e^{-2\xi}e^{2\xi}\xi=e^{2x}\left(C_2x+C_3\right)$

合并解为 $y=\left(C_2x+C_1\right)e^{2x}$

齐次常微分方程

总结一下齐次常微分方程的解 $y''+ay'+by=0$

第一步，从微分方程得到代数式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$

第二步，求出代数式的两个根分别是 λ_1,λ_2

第三步，得到方程的通解为 若为单根 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

若为重根 $y=\left(C_1x+C_2\right)e^{\lambda x}$

练习

$$y''+9y=0$$

$$y=C_1e^{3xi}+C_2e^{-3xi}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$$

$$y''+2y'+y=0$$

$$y=\left(C_1x+C_2\right)e^{-x}$$

傅里叶变换角度理解

对方程两端做傅里叶变换 $$y''+ay'+by=0$$

得到 $$\left(-k^2+ika+b\right)\mathcal{F}[y]=0$$

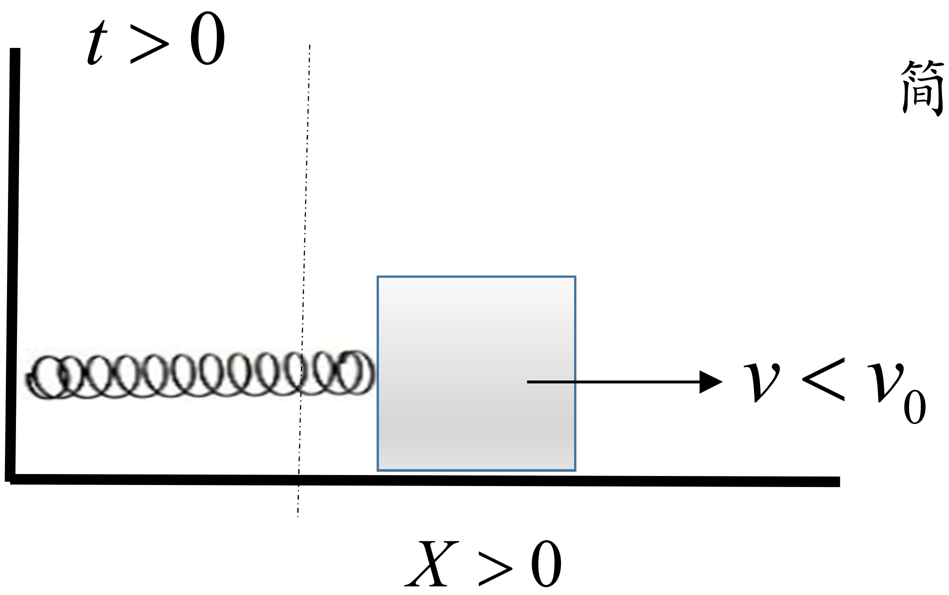
即 $$\left(k-\lambda_1\right)\left(k-\lambda_2\right)\mathcal{F}[y]=0$$

只有在特征值处F[y]不为0，猜测

$$\mathcal{F}[y]=\mathrm{c}_1\delta(k-\lambda_1)+\mathrm{c}_2\delta(k-\lambda_2)$$

对解傅里叶逆变换 $$X(t)=\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{c}_1\delta(k-\lambda_1)+\mathrm{c}_2\delta(k-\lambda_2)]=\mathrm{c}_1e^{\lambda_1 xi}+\mathrm{c}_2e^{\lambda_2 xi}$$

齐次常微分方程



简谐运动的运动方程 $X''(t)+\omega_0^2 X(t)=0$

$$\omega_0^2 \equiv k/m>0$$

$$X(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{pmatrix}$$

特解

方程的通解为 $$X(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\end{pmatrix}$$

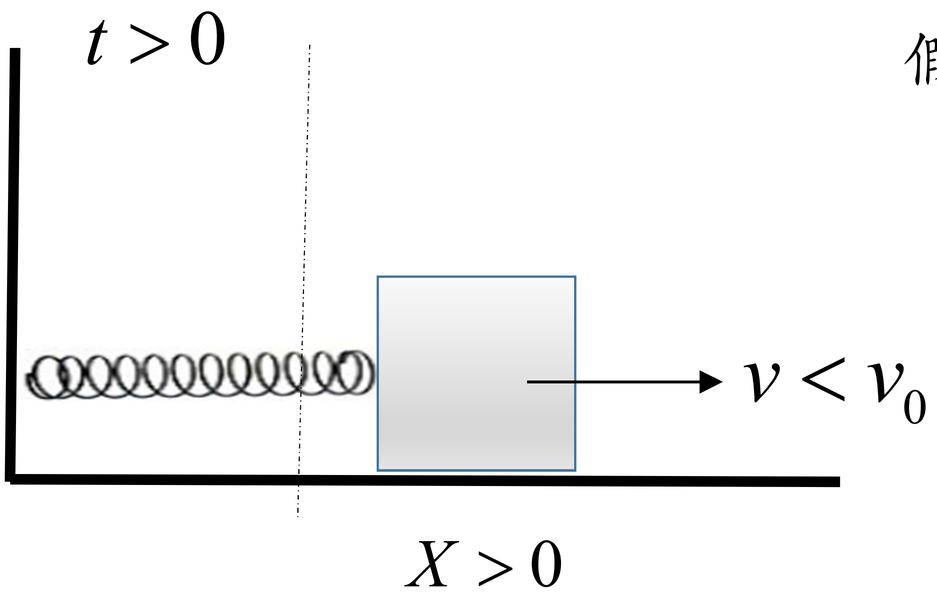
初始条件，假如初始位置和速度 $X'(0)=v_0$ $X(0)=x_0$

将初始条件代入通解
$$X(0)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t\,|_{t=0}=x_0$$
$$X'(0)=-c_1\omega_0\sin\omega_0 t+c_2\omega_0\cos\omega_0 t\,|_{t=0}=v_0$$

解得 $c_1=x_0, c_2=v_0/\omega_0$

特解 $$X(t)=x_0\cos\omega_0 t+(v_0/\omega_0)\sin\omega_0 t$$

非齐次二阶常微分方程



假如给小木块一个随时间变化的外力 $f(t)$

简谐运动的运动方程改写为

带有非齐次项的二阶常系数微分方程。

$$X''(t) + \omega_0^2 X(t) = f(t)$$

特解法

假如给小木块一个随时间变化的外力

例1 $$X''(t)+\omega_0^2 X(t)=\sin 2t$$

猜测解中包含周期为T=2π/2的振动频率

设 $v(t)=C\sin 2t$，代入方程中求解

$$-4C\sin 2t+\omega_0^2 C\sin 2t=\sin 2t$$

$$-4C+\omega_0^2 C=1$$

$$C=\frac{1}{\omega_0^2-4} \qquad v(t)=\frac{1}{\omega_0^2-4}\sin 2t$$

特解法

例1 $$X''(t)+\omega_0^2X(t)=\sin 2t$$

因此解 $v(t)=\dfrac{1}{\omega_0^2-4}\sin 2t$ 满足方程 $X''(t)+\omega_0^2X(t)=\sin 2t$

设 $X(t)=u(t)+\dfrac{1}{\omega_0^2-4}\sin 2t$，代入方程中

得到 $u''(t)+\omega_0^2u(t)=0$ 解得 $u(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t$

解为 $X(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t+\dfrac{1}{\omega_0^2-4}\sin 2t$

当外力的频率和简谐运动的固有频率相同，振动幅度会一直增大，最终结果发散（共振）

非齐次二阶常微分方程

总结一下特解法，求解非齐次常微分方程的解 $y''+ay'+by=f(x)$

第一步，猜测一个满足方程的解 $v(x)$

第二步，设 $y(x)=u(x)+v(x)$ 将y代入方程，得到关于u的二阶齐次常微分方程

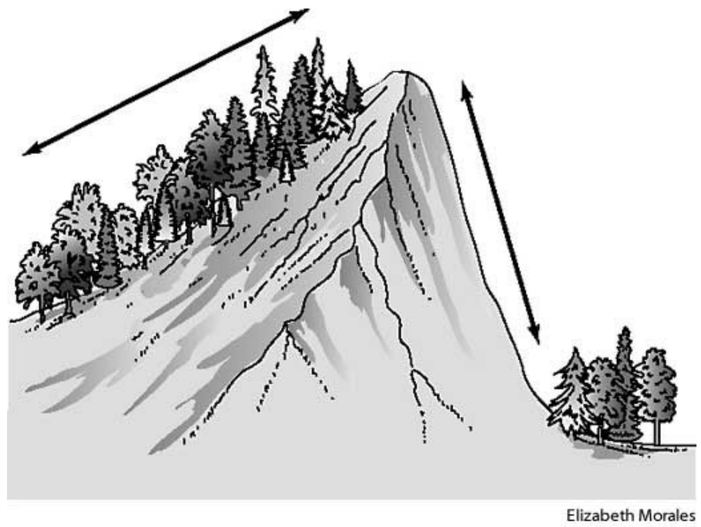
第三步，求解u，最后合并u和v得到最终解 $y(x)=u(x)+v(x)$

场算符简介

梯度算符 $$\nabla \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

梯度算符与函数运算 $$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} f \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} f \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} f \vec{e}_z$$ 得到某一点的梯度

因此梯度算符和函数运算得到矢量



场算符

1）计算函数 $f(x,y,z)=x^2y^3z$ 在点 $(1,2,-1)$ 的梯度。

$$\nabla f=\frac{\partial}{\partial x}f\overrightarrow{e_x}+\frac{\partial}{\partial y}f\overrightarrow{e_y}+\frac{\partial}{\partial z}f\overrightarrow{e_z}$$

$$=2xy^3z\overrightarrow{e_x}+3x^2y^2z\overrightarrow{e_y}+x^2y^3\overrightarrow{e_z}=\left(2xy^3z,3x^2y^2z,x^2y^3\right)=(-16,-12,8)$$

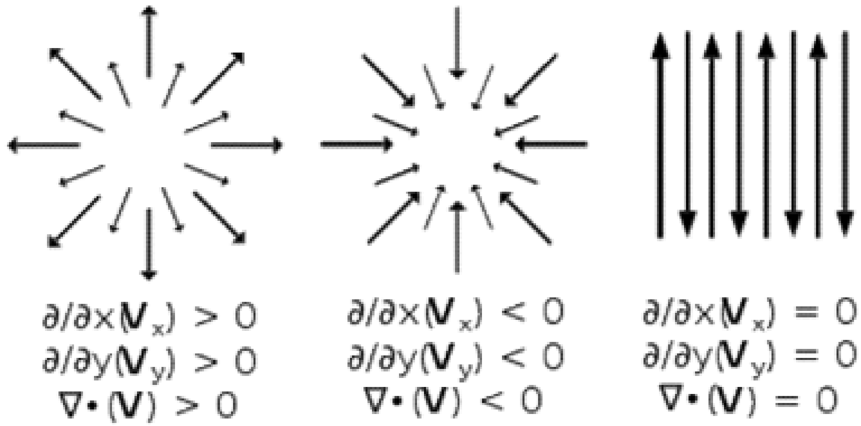
2）计算函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2xy$ 在点 $(1,1)$ 的梯度。

$$\nabla f=\left(2x+2y,-2y+2x\right)=(4,0)$$

场算符简介

梯度算符与矢量运算 $\nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$ 得到矢量场的散度

因此梯度算符和矢量运算得到
标量，也就是一个数



练 习

$$f(x,y,z)=x^2y^3z$$

1）计算 $\nabla\bullet(\nabla f)$

$$\nabla f=2xy^3z\overrightarrow{e_x}+3x^2y^2z\overrightarrow{e_y}+x^2y^3\overrightarrow{e_z}=\left(2xy^3z,3x^2y^2z,x^2y^3\right)$$

$$\nabla\bullet(\nabla f)=2y^3z+6x^2yz$$

拉普拉斯算符

拉普拉斯算符 $$\Delta \equiv \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

拉普拉斯算符与函数运算 $\Delta f = \nabla \bullet (\nabla f)$

$$\nabla f = 2xy^3 z\vec{e_x} + 3x^2 y^2 z\vec{e_y} + x^2 y^3 \vec{e_z} = \left(2xy^3 z, 3x^2 y^2 z, x^2 y^3\right)$$

$$\Delta f = \nabla \bullet (\nabla f) = 2y^3 z + 6x^2 yz$$

注意：梯度算符可以与矢量和标量运算，拉普拉斯算符只与标量运算

作业

1）： $y' = y + \sin x$

2）： $y'' + y' - 2y = 0$

3）： $y'' - 2iy' = 0$

4）计算函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(1,1,-1),(0,0,\sqrt{3})$ 的梯度，并计算 $\Delta f(x,y,z)$