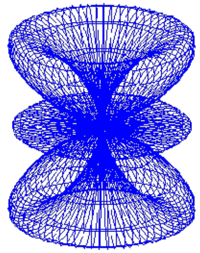
哈爾濱工程大學

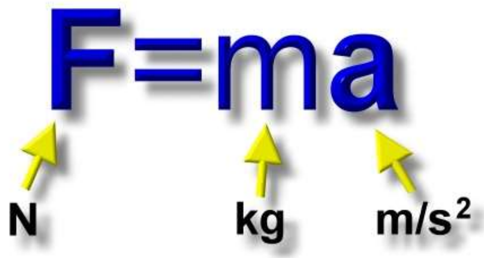
数学物理方程
Mathematical Physics

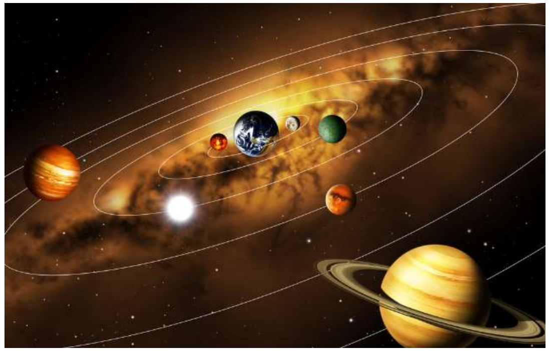
任永志
物理与光电工程学院
哈尔滨工程大学
renyongzhi@hrbeu.edu.cn



什么是数学物理方程?

1. 质点运动：遵循牛顿三定律





2. 电磁波：麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

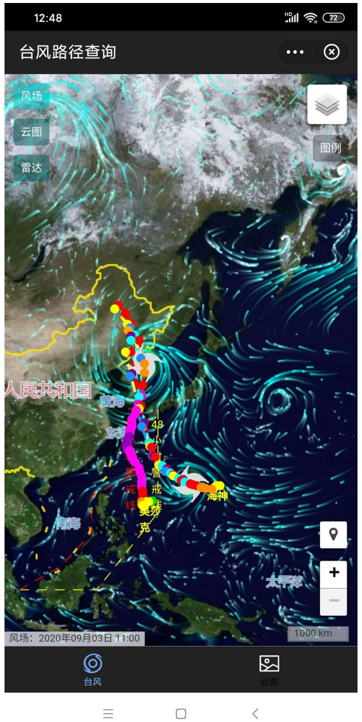
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

数学物理方程能做什么？

预测台风路径



NWP模型

疾病传播模型

SIR模型

金融定价模型

随机微分方程（SDE）模型
随机行走模型

本课程的解决的核心问题

学习三个方程的推导和求解

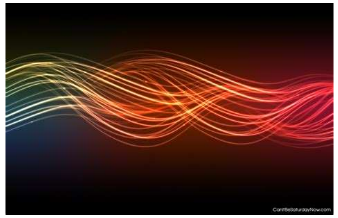
- 波动方程 $u_{tt} = a^2 \Delta u$
- 热传导方程 $u_t = a^2 \Delta u$
- 泊松方程 $\Delta u = \rho$

波动方程

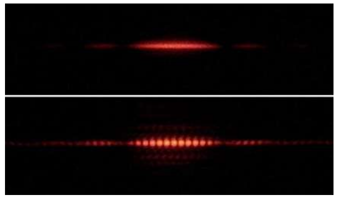
波动方程 $u_{tt} = a^2 \Delta u$

水波、声波

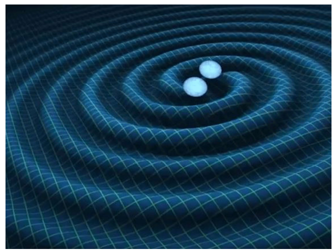
光波



物质波



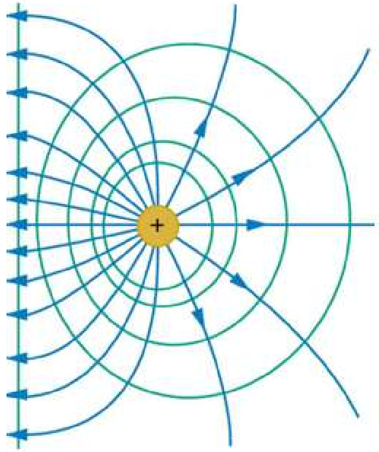
引力波



热传导方程以及泊松方程

热传导方程（扩散方程） $u_t = a^2 \Delta u$

泊松方程 $\Delta u = \rho$



数学物理方程的主要目的

本课程在高等数学和普通物理学基础上论述数学物理中一些常用的方法。为进一步学习理论课程和专业基础课程打下必备的数学基础，并为今后工作中求解数学物理问题提供有效的手段。学习本课程要求掌握基本概念、基本理论和基本方法；要求能够掌握怎样把物理问题转化为数学问题，以及运用数学来求解物理问题的的一些方法。

后续课程

量子力学

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}=\widehat{H}\phi$$

电动力学

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

统计力学

热力学涨落、量子涨落

如何学习数学物理

You can obtain a certain ***superficial knowledge*** of mathematics by listening to lectures, but you cannot obtain ***skill*** this way.

The only way to develop the skill necessary to use this material in your later courses is to practice by ***solving many problems***.

考评方法

- 考评方法：
  - 平时 40%（日常小作业、随堂测试、考勤）
  - 期末闭卷笔试 60%

参考书目

1. 梁昆淼. 数学物理方法（第四版）. 高等教育出版社, 2010年
2. 吴崇试. 数学物理方法(第二版). 北京大学出版社, 2003年
3. 胡嗣柱, 倪光炯. 数学物理方法(第二版). 高等教育出版社, 2002年

数学物理方程思维导图

- 数学物理方程求解
  - 按照数学物理方程类型
    - 波动方程
    - 热传导方程
    - 泊松方程
      - 亥姆霍兹方程
  - 按照方程的边界条件
    - 闭合边界
    - 无边界、半边界
      - 直角坐标系
      - 柱坐标、极坐标
      - 球坐标
  - 按照方程的求解方法
    - 行波法
    - 分离变量法
    - 积分变换法
    - 格林函数法

预备知识

一 Dirac Delta 函数
二 傅里叶级数
三 傅里叶变换
四 常微分方程及阶段复习

· I ·

第一部分

- 按照方程的边界条件
  - 闭合边界
  - 无边界、半边界
- 按照方程的求解方法
  - 行波法
  - 分离变量法

第二部分

按照方程的求解方法 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分变换法}\\ \text{格林函数法}\end{array}\right.$

第三部分

波动方程

热传导方程

泊松方程

亥姆霍兹方程

闭合边界

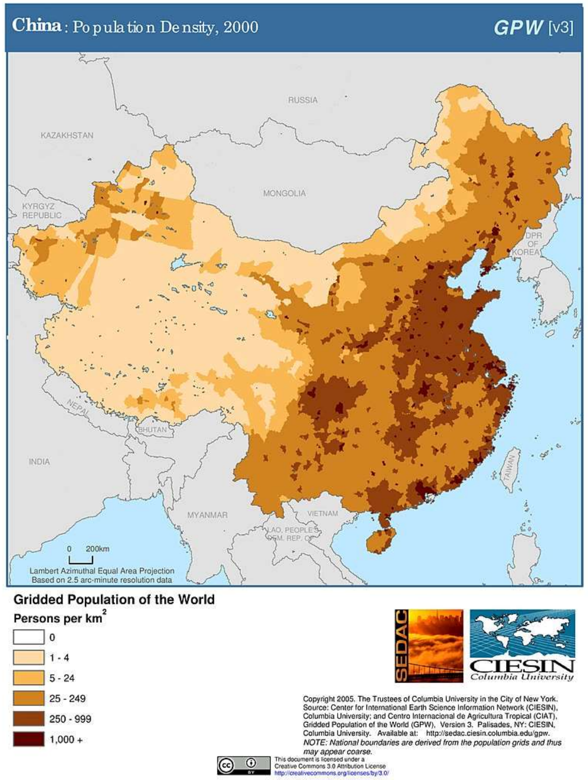
无边界、半边界

柱坐标、极坐标

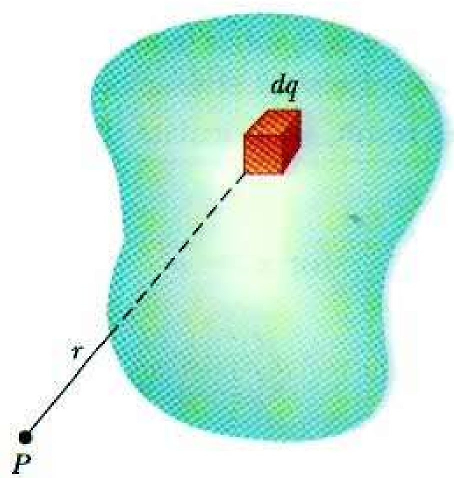
球坐标

分离变量法

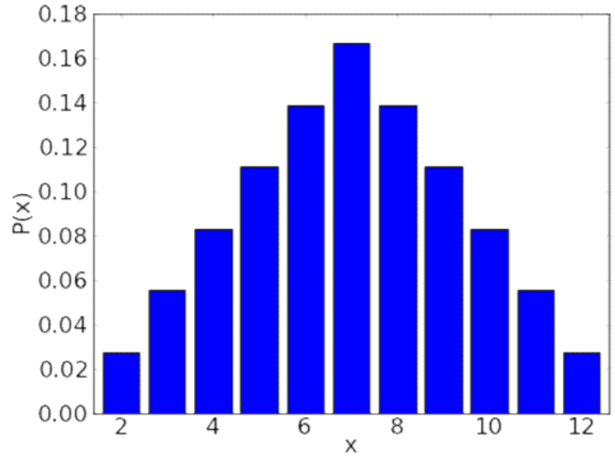
分布函数（Distribution function）



人口分布



电荷分布



概率分布

质量分布

质量m均匀分布在长为l的线段上，其线密度为 $\rho_l(x)=\begin{cases}0 & |x|>l/2\\ m/l & |x|\le l/2\end{cases}$

1. 线密度一定大于等于零 $\rho_l(x)\ge 0$

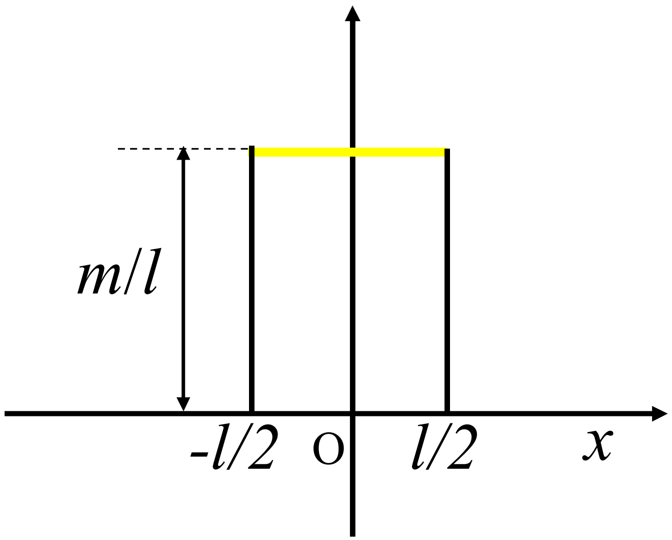
2. 线密度的积分等于质量 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)dx=m$

3. 线段动量为 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)v_0dx$

质点

质量m均匀分布在长为l的线段上，若$l \to 0$，得到了有质量无体积的质点。

$$\rho_l(x) = ?$$



1. 线密度一定大于等于零　$\rho_l(x) \geq 0$

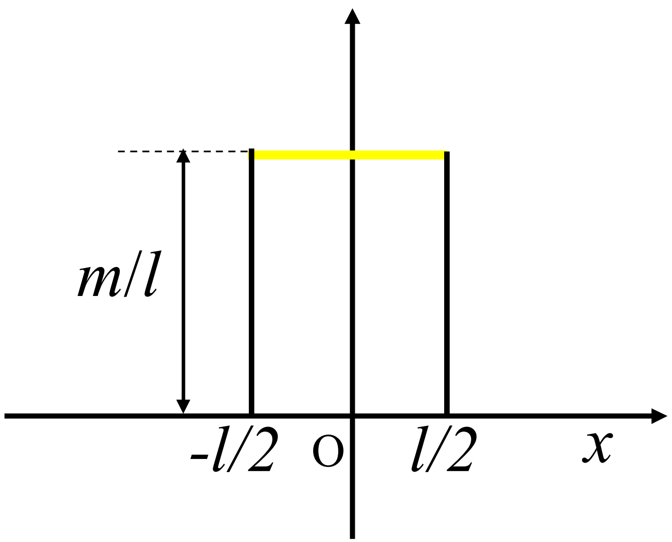
2. 线密度的积分等于质量　$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)dx = m$

3. 线段动量为　$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)v_0 dx$

质点

质量m均匀分布在长为l的线段上，若$l \to 0$, 得到了有质量无体积的质点。

$$\rho_l(x) = ?$$



1. 线密度一定大于等于零 $\rho_l(x) \geq 0$

$$\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

2. 线密度的积分等于质量 $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)dx = m$

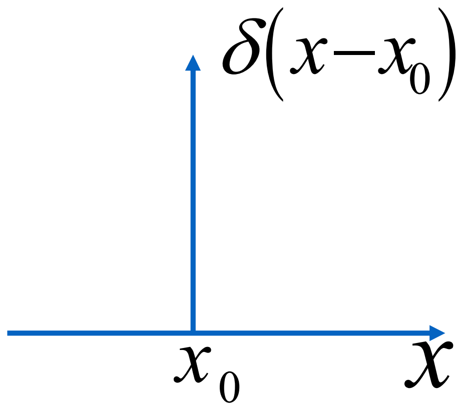
$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_l(x)dx = m$$

Dirac Delta 函数

Dirac Delta函数:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$$

$$\int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$



可以用来表示单个质点的密度分布

$$\rho_l(x)=m\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)dx=m$$

Dirac Delta 函数

表示多个质点的密度分布

$$\rho(x) = \sum_i m_i \delta(x - x_i) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \sum_i m_i = M$$

Dirac Delta 函数

例一：

写出质量密度函数，一个粒子在x=2, 质量为5，另一个粒子在x=−7, 质量为3

$$5\delta(x-2)+3\delta(x+7)$$

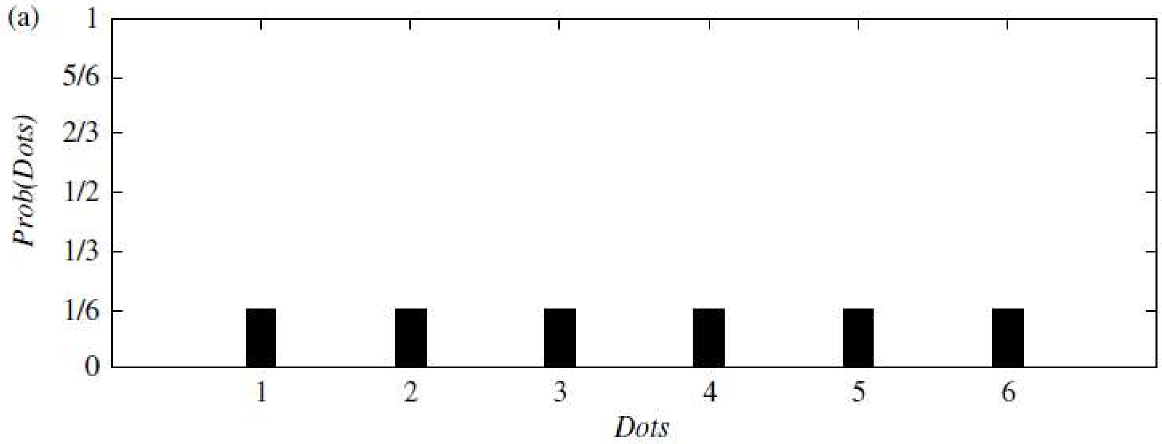
例二：

写出电荷密度函数，一个粒子在x=−5, 电荷量为3，另一个粒子在x=10, 电荷量为-4

$$3\delta(x+5)-4\delta(x-10)$$

离散概率分布

$$P(6) = \lim_{N\to\infty} N_6 / N = 1/6$$



掷色子得到的平均点数是 $$I = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 6 = 3.5$$

离散概率分布

$$P(x)=\begin{cases}1/6 & x\in\{1,2,3,4,5,6\}\\ 0 & others\end{cases}$$

1. 任何事件发生的概率一定大于等于零 $P(x)\geq 0$

2. 所有可能性的概率相加一定等于1. $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 0 \neq 1$

3. 测量的平均值为 $\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} P(x)xdx$

离散概率分布

$$P(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}\sum_i \delta(x-x_i) & x_i\in\{1,2,3,4,5,6\}\\ 0 & others\end{cases}$$

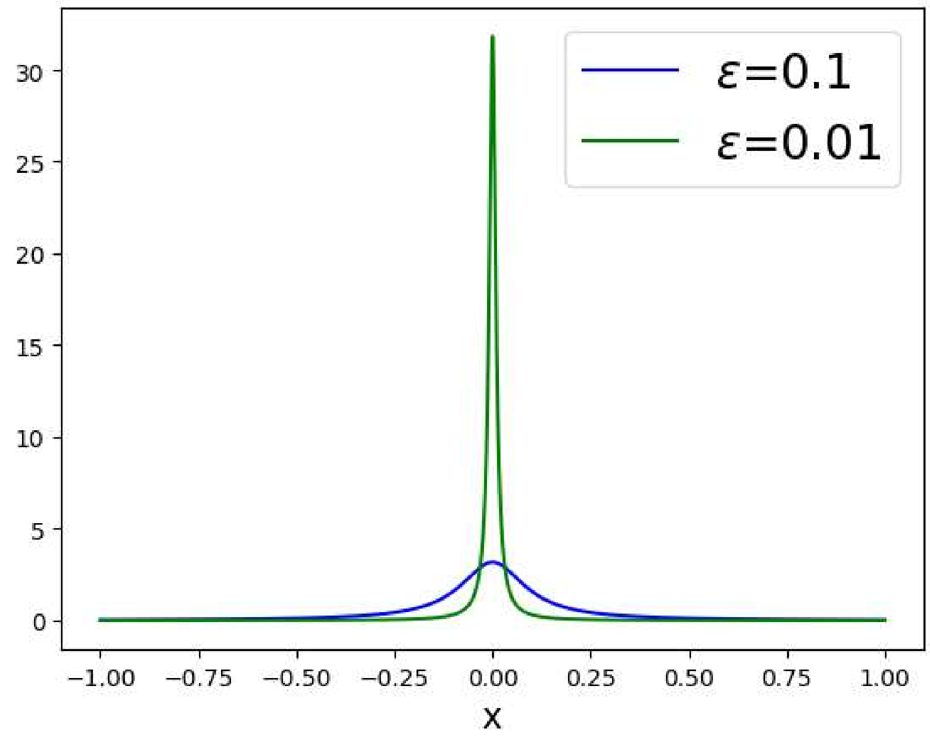
1. 任何事件发生的概率一定大于等于零 $P(x)\geq 0$

2. 所有可能性的概率相加一定等于1. $\int_{-\infty}^{\infty}P(x)dx=1$

3. 测量的平均值为 $\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}P(x)xdx$

Dirac Delta 函数

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}f_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$



Dirac Delta 函数性质

1) 偶函数: $$\delta(-x)=\delta(x)$$

证明 $f(x)=\delta(-x)$ 是Delta函数，只须证，

$$f(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases} \qquad \int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)f(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

$$\int_{-a}^{a}\phi(x)\delta(-x)dx=\int_{a}^{-a}\phi(-x)\delta(x)d(-x)=\int_{-a}^{a}\phi(-x)\delta(x)dx=\phi(0)$$

Dirac Delta 函数性质

2）： $$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

$$\int_{x0-}^{x0+} f(x)\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)f(x_0)$$

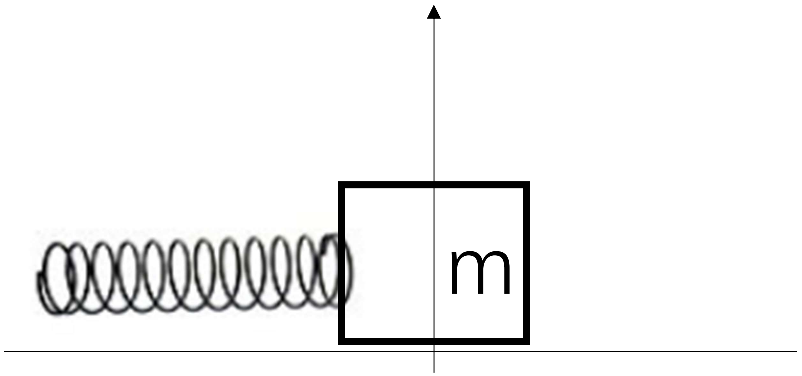
$$\int_{x0-}^{x0+} f(x_0)\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)f(x_0)$$

推论: $$x\delta(x)=0$$

$$\int_{x0-}^{x0+} xf(x)\delta(x-x_0)dx=0$$

Dirac Delta 函数性质

小木块做受迫运动，受到的力为f(t)，运动方程为 $mX''(t)+kX(t)=f(t)$



利用Delta函数，可以将小木块受力按照时间分解

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

求出小木块在τ时刻瞬时力的运动

$$m\widetilde{X}''(t)+k\widetilde{X}(t)=f(\tau)\delta(t-\tau)$$

所有时刻的产生的作用加起来 $X(t)=\int_{-\infty}^{t} \widetilde{X}(t;\tau)d\tau$

Dirac Delta 函数性质

3） $$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

Dirac Delta函数是分布函数（广义函数），导数运算需要定义新的运算规则。

$$\int_{0-}^{0+} \varphi(x)\delta^{n}(x)dx \equiv -\int_{0-}^{0+} \varphi'(x)\delta^{n-1}(x)dx$$

$$\delta'(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{0-}^{0+} f(x)\delta'(x)dx = -\int_{0-}^{0+} f'(x)\delta(x)dx$$

$$\int_{0-}^{0+} \varphi(x)x\delta'(x)dx = -\int_{0-}^{0+} [\varphi'(x)x + \varphi(x)]\delta(x)dx = -\varphi(0) = -\int_{0-}^{0+} \varphi(x)\delta(x)dx$$

Dirac Delta 函数性质

4）：　$x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$

$$\int_{0-}^{0+} f(x)x^2\delta''(x)dx = -\int_{0-}^{0+}\left[f'(x)x + 2f(x)\right]x\delta'(x)dx$$

$$= \int_{0-}^{0+}\left[f'(x)x + 2f(x)\right]\delta(x)dx = \int_{0-}^{0+} 2f(x)\delta(x)dx$$

Dirac Delta 函数性质

5) 复合函数运算：

T（x）连续且只有单根x_n，则 $\delta\left[T(x)\right]=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{\left|T'(x_n)\right|}$ $\quad T'(x_n)\neq 0$

假定T（x）在x_0附近单调增，且只有一个根x_0, 使得$T(x_0)=0$

证：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left[T(x)\right]f(x)dx=\int_{x_0-}^{x_0+}\delta\left[T(x)\right]f(x)dx\overset{y=T(x)}{=}\int_{0-}^{0+}\delta(y)f\left[T^{-1}(y)\right]dx$

$$=\int_{0-}^{0+}\delta(y)f\left[T^{-1}(y)\right]/T'(x)dy=f\left[x_0\right]/T'(x_0)$$

$\frac{dy}{dx}=T'(x)$ $\quad$ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{T'(x)}$

Dirac Delta 函数性质

5) 复合函数运算举例:

$$\delta\left(x^2-1\right)=?$$

$$T(x)=x^2-1$$

$$T'(x)=2x$$

$$|T'(1)|=|T'(-1)|=2,$$

$$\delta\left(x^2-1\right)=\delta\left[T(x)\right]=\sum_n\frac{\delta\left(x-x_n\right)}{\left|T'\left(x_n\right)\right|}=\frac{1}{2}\delta\left(x+1\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x-1\right)$$

Dirac Delta 函数性质

5) 复合函数运算:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi)$$

$$\delta(|x| - 1) = \delta(x+1) + \delta(x-1)$$