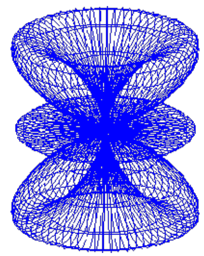
数学物理方程
Mathematical Physics

任永志
物理与光电工程学院
哈尔滨工程大学
renyongzhi@hrbeu.edu.cn



Dirac Delta 函数

Dirac Delta函数:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$$

$$\int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

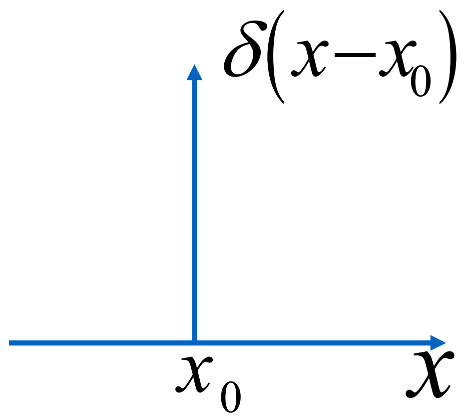
可以用来表示单个或离散质点的密度分布

$$\rho_l(x)=m\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)dx=m$$

$$\rho_l(x)=\sum_i m_i\delta(x-x_i)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)dx=\sum_i m_i$$



Dirac Delta 函数

Dirac Delta函数：

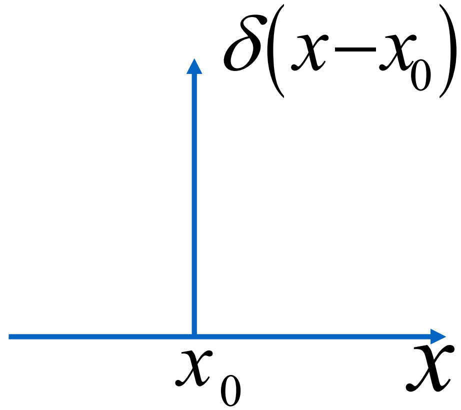
$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}\qquad \int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

1） Dirac Delta 函数是一种特殊的分布函数（也称为广义函数），只有在积分下才有意义。

2） Dirac Delta 函数只在发散点附近的积分值不为零。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\int_{x0-}^{x0+}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sum_i\delta(x-x_i)dx=\sum_i\int_{x_{i-}}^{x_{i+}}\varphi(x)\delta(x-x_i)dx=\sum_i\varphi(x_i)$$



3) 特殊情况，若取 $\varphi(x)=1$ $\int_{x0-}^{x0+}\delta(x-x_0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1$

Dirac Delta 函数性质

1）偶函数： $\delta\left(-x\right)=\delta\left(x\right)$

2） $f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$ $\quad x\delta(x)=0$

3） $x\delta'(x)=-\delta(x)$

$$\int_{0-}^{0+}\varphi(x)\delta^{n}(x)dx\equiv-\int_{0-}^{0+}\varphi'(x)\delta^{n-1}(x)dx$$

4） $x^2\delta''(x)=2\delta(x)$

5） T（x）连续且只有单根x$_n$，则 $\delta\left[T\left(x\right)\right]=\sum_{n}\frac{\delta\left(x-x_n\right)}{\left|T'\left(x_n\right)\right|}$ $\quad T'\left(x_n\right)\neq0$

$$\delta\left(\sin x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-n\pi\right) \qquad \delta\left(\left|x\right|-1\right)=\delta\left(x+1\right)+\delta\left(x-1\right)$$

习题

1 $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(\sin x) dx = ?$$

1解 $$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(\sin x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(x - n\pi) dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(x) dx + \sum_{n \neq 0}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(x - n\pi) dx$$

$$= \cos 0 = 1$$

习题

1 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\delta(\sin x)dx=?$

2解换元　　　　换元的时候注意T(x)是否在区间内单调

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\delta(\sin x)dx=\int_{-1}^{1}\cos(\arcsin y)\delta(y)d\arcsin y$$

$$=\int_{-1}^{1}\cos(\arcsin y)\delta(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\cos(\arcsin 0)\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}=\cos 0=1$$

习题

2 $\int_0^3 (5x-2)\delta(2-x)dx = ?$

$$\int_0^3 (5x-2)\delta(2-x)dx = \int_0^3 (5x-2)\delta(x-2)dx = 5\times 2 - 2$$

习题

3 $$\int_{-1}^{1} e^{3x}\delta'(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} e^{3x}\delta'(x)dx = -\int_{-1}^{1} 3e^{3x}\delta(x)dx = -3e^{3*0} = -3$$

习题

4 $$\int_0^{\infty} \phi(x)\delta\left(x^2-a^2\right)dx, a\neq 0$$

由复合函数公式 $\delta[T(x)]=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|T'(x_n)|}$ 其中 $T(x)=x^2-a^2$ $T'(x)=2x$

Dirac Delta函数变形为 $\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2|a|}\delta(x-a)+\frac{1}{2|a|}\delta(x+a)$

$a>0$ $$\frac{1}{2|a|}\int_0^{\infty}\phi(x)\delta(x-a)+\phi(x)\delta(x+a)\,dx=\frac{1}{2|a|}\phi(a)$$

$a<0$ $$\frac{1}{2|a|}\int_0^{\infty}\phi(x)\delta(x-a)+\phi(x)\delta(x+a)\,dx=\frac{1}{2|a|}\phi(-a)$$

$$\int_0^{\infty}\phi(x)\delta\left(x^2-a^2\right)dx=\frac{1}{2|a|}\phi(|a|)$$

习题

5 $$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx, a\neq b$$

由复合函数公式 $\delta\left[T(x)\right]=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{\left|T'(x_n)\right|}$ 其中 $T(x)=(x-a)(x-b)T'(x)=2x\text{-}(a+b)$

Dirac Delta函数变形为 $\delta\left[(x-a)(x-b)\right]=\frac{1}{|a-b|}\delta(x-a)+\frac{1}{|a-b|}\delta(x-b)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx=\frac{1}{|a-b|}\phi(a)+\frac{1}{|a-b|}\phi(b)$$

习题

6 $$\int_0^\infty \phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx, a\neq b$$

由复合函数公式 $\delta\left[T(x)\right]=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{\left|T'(x_n)\right|}$ 其中 $T(x)=(x-a)(x-b)T'(x)=2x\text{-}(a+b)$

Dirac Delta函数变形为 $\delta\left[(x-a)(x-b)\right]=\frac{1}{|a-b|}\delta(x-a)+\frac{1}{|a-b|}\delta(x-b)$

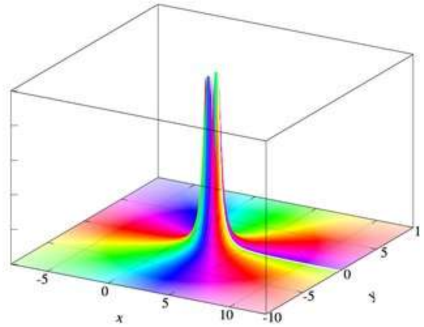
$$a>b>0 \quad \int_0^\infty \phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx=\frac{1}{|a-b|}\phi(a)+\frac{1}{|a-b|}\phi(b)$$

$$a>0>b \quad \int_0^\infty \phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx=\frac{1}{|a-b|}\phi(a)$$

$$0>a>b \quad \int_0^\infty \phi(x)\delta\left[(x-a)(x-b)\right]dx=0$$

多维Dirac Delta 函数

$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ 表示二维平面上单个质点的位置



二维Dirac Delta函数定义

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \text{ and } y = y_0 \\ 0 & x \neq x_0 \text{ or } y \neq y_0 \end{cases}$$

$$\int_{x0-}^{x0+}\int_{y0-}^{y0+} \varphi(x,y)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)dxdy = \varphi(x_0, y_0)$$

二维 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \equiv \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ 表示二维空间中单个质点的密度函数

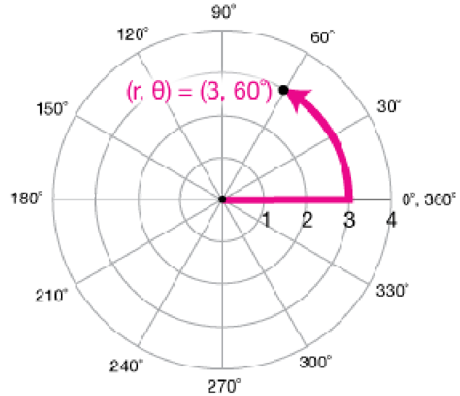
二维Dirac Delta 函数极坐标

二维 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

可否用极坐标表示成？ $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\overset{?}{=}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$



设 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=C_0\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$

$$\int_{x0-}^{x0+}\int_{y0-}^{y0+}\varphi(x,y)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)dxdy=\int_0^{r_0+}dr\int_0^{2\pi}d\theta C_0\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\varphi(r,\theta)r=C_0r_0\varphi(r_0,\theta_0)$$

因此，令 $C_0r_0=1$ $\qquad \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)/r_0$

注：不可以用极坐标表示原点 $r_0\neq 0$

多维Dirac Delta 函数

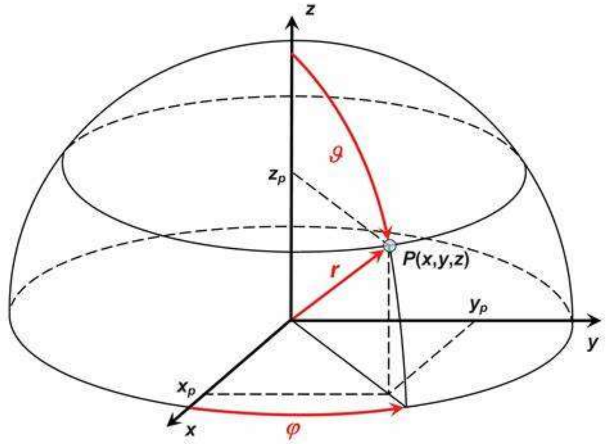
三维 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \equiv \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$表示三维空间中单个质点的密度函数

$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 表示三维空间中单个质点的位置

三维Dirac Delta函数定义

$$\left\{\begin{array}{l} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \,\&\, y = \mathrm{y}_0 \& \mathrm{z} = z_0 \\ 0 & others \end{cases} \\ \int_{x0-}^{x0+} \int_{y0-}^{y0+} \int_{z0-}^{z0+} \varphi(x,y,z)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)dxdy = \varphi(x_0, y_0, z_0) \end{array}\right.$$

多维 Dirac Delta 函数



$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

或者在球坐标下改写为

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)/r^2\sin\theta$$

$$x=r\cos\varphi\cos\theta$$

$$y=r\sin\varphi\cos\theta$$

$$z=r\sin\theta$$

分布函数的导数

7) 阶梯函数的导数： $H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

按照求导定义 $\begin{cases} x\neq 0, & H'(x)=0 \\ x=0, & \text{H(x) 在0点处是阶跃点，左右导数不相等，因此导数不存在。} \end{cases}$

模仿Dirac Delta 函数求导的方法

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=\varphi(0)$$

阶梯函数的导数是Dirac Delta 函数 $H'(x)\equiv\delta(x)$

例题

具有第一类间断点，分段连续可导函数 $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x<x_0 \\ f_2(x) & x>x_0 \end{cases}$

求证，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x} & x<x_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x} & x>x_0 \end{cases}+h\delta(x-x_0)$ 其中，$h=f_2(x_0)-f_1(x_0)$

证明： 设x_0=0, 设 $f(x)\equiv f_2(x)H(x)+f_1(x)H(-x)$

$$f'(x)=f_1'(x)H(-x)+f_1(x)H'(-x)+f_2'(x)H(x)+f_2(x)H'(x)$$

$$=f_1'(x)H(-x)+f_2'(x)H(x)+f_1(x)H'(-x)+f_2(x)H'(x)$$

$$=f_1'(x)H(-x)+f_2'(x)H(x)+\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\delta(x)$$

$$=f_1'(x)H(-x)+f_2'(x)H(x)+\left[f_2(0)-f_1(0)\right]\delta(x)$$

$$=f_1'(x)H(-x)+f_2'(x)H(x)+h\delta(x)$$

习题

1 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$ 求 $f'(x), f''(x), f'''(x)$

解：

$$\frac{df}{dx}=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{df^2}{dx^2}=\begin{cases} 2 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}-\delta(x)$$

$$\frac{df^3}{dx^3}=2\delta(x)-\delta'(x)$$

傅里叶级数

傅里叶级数展开： 将周期函数展开成用sin和cos函数表示。

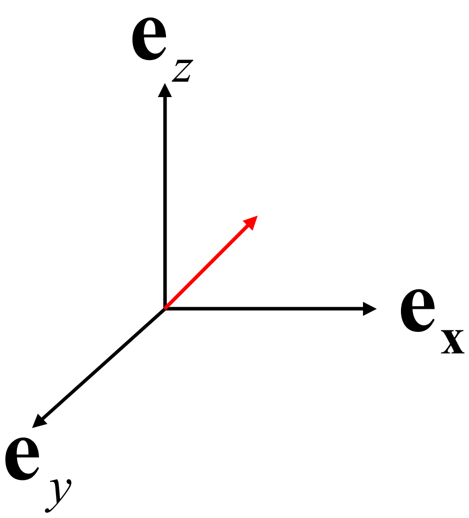
若 $f(x)=f(x+T)$ 可以用下面集合中的函数

$$\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{4\pi}{T}x,\cos\frac{4\pi}{T}x,\ldots,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cos\frac{2\pi n}{T}x\ldots,\right\}$$

展开成右边形式 $f(x)=a_0+\sum_{n=1} a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$

$\cos\frac{2\pi n}{T}x,\sin\frac{2\pi n}{T}x$ 是周期为 T/n 的周期函数

空间矢量



矢量：有方向，有长度的量。

$$\mathbf{v}=(v_x,v_y,v_z)=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_\mathbf{y}+v_z\mathbf{e}_\mathbf{z}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

内积： $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=v_x u_x+v_y u_\mathbf{y}+v_z u_\mathbf{z}=\sum_{i,j\in\{x,y,z\}} v_i u_j\delta_{ij}$

分量： $v_x=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x$

长度： $|v|=\sqrt{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}$

夹角： $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|u||v|}$ $\qquad$ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=|u||v|\cos\theta$

$\{\mathbf{e}_\mathbf{x},\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$ 是一组完备正交基。 $\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$

完备正交函数族

若定义函数的内积为:

$$\left(f,g\right)\equiv\int_0^T f^*(x)g(x)dx$$

则函数符合正交性的定义

$$\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{4\pi}{T}x,\cos\frac{4\pi}{T}x,\ldots,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cos\frac{2\pi n}{T}x\ldots,\right\}$$

参考矢量的正交性: $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

$$\int_0^T \sin\frac{2\pi n'}{T}x\cos\frac{2\pi n}{T}xdx=\int_0^T\frac{1}{2}\left\{\sin\left[\frac{2\pi}{T}(n'+n)\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{T}(n'-n)\right]\right\}dx=0$$

完备正交函数族

参考矢量的正交性： $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

$$\left\{1, \sin\frac{2\pi}{T}x, \cos\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{4\pi}{T}x, \cos\frac{4\pi}{T}x, \ldots, \sin\frac{2\pi n}{T}x, \cos\frac{2\pi n}{T}x \ldots, \right\}$$

$$\int_0^T \sin\frac{2\pi n'}{T}x \sin\frac{2\pi n}{T}x dx = \int_0^T -\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{T}(n'+n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{T}(n'-n)\right]\right\}dx = \begin{cases} T/2 & \text{if } n' = n \\ 0 & \text{if } n' \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos\frac{2\pi n'}{T}x \cos\frac{2\pi n}{T}x dx = \int_0^T \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{T}(n'+n)\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{T}(n'-n)\right]\right\}dx = \begin{cases} T/2 & \text{if } n' = n \\ 0 & \text{if } n' \neq n \end{cases}$$

傅里叶级数展开

$$\forall f, g \in \left\{1, \sin\frac{2\pi}{T}x, \cos\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{4\pi}{T}x, \cos\frac{4\pi}{T}x, \ldots, \sin\frac{2\pi n}{T}x, \cos\frac{2\pi n}{T}x \ldots, \right\}$$

可以得到 $$(f, g) \equiv \int_0^T f^*(x) g(x) dx = \delta_{fg} \frac{T}{2}$$

集合内的函数符合正交性的定义，类似矢量空间中的基矢 $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

完备性　函数f可以由这族函数展开。

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \sin\frac{2\pi n}{T}x + b_n \cos\frac{2\pi n}{T}x \qquad \mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_\mathbf{y} + v_z \mathbf{e}_\mathbf{z}$$

完备正交函数族可以类比矢量空间中的基矢量，任何函数都类似于矢量可以由基矢量展开

傅里叶级数的展开系数

类比空间矢量求各个方向分量的方法：　$v_x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x$

$$a_n \propto (f, \cos\frac{2\pi n}{T}x) \propto \int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$$b_n \propto (f, \sin\frac{2\pi n}{T}x) \propto \int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$

$$(f, \cos\frac{2\pi n}{T}x) = \int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx = \int_0^T\left[a_0 + \sum_{n'=1} a_{n'}\cos\frac{2\pi n'}{T}x + b_{n'}\sin\frac{2\pi n'}{T}x\right]\cos\frac{2\pi n}{T}xdx = \begin{cases} a_0 T & \text{if } n=0 \\ \sum_{n'=1}\delta_{nn'}a_{n'}\frac{T}{2} = \frac{T}{2}a_n & \text{if } n\neq 0 \end{cases}$$

$$(f, \sin\frac{2\pi n}{T}x) = \int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx = \int_0^T\left[a_0 + \sum_{n'=1} a_{n'}\cos\frac{2\pi n'}{T}x + b_{n'}\sin\frac{2\pi n'}{T}x\right]\sin\frac{2\pi n}{T}xdx = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ \sum_{n'=1}\delta_{nn'}a_{n'}\frac{T}{2} = \frac{T}{2}b_n & \text{if } n\neq 0 \end{cases}$$

傅里叶级数的展开系数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1} a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

傅里叶级数的展开系数

$$\boxed{\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx\\ a_0&=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \end{aligned}}$$

迪利克雷定理：函数f(x)满足（1）处处连续或只有有限个第一类间断点（2）每个周期只有有限个极值点。

矢量空间与函数空间对比

我们把函数比作欧式空间中的矢量

	欧式空间	函数空间
基矢	$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$	$G=\left\{1,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{4\pi}{T}x,\cos\frac{4\pi}{T}x,\ldots,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cos\frac{2\pi n}{T}x\ldots,\right\}$
内积	$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$	$\forall f,g\in G\qquad (f,g)\equiv\int_0^T f^*(x)g(x)dx=\delta_{fg}\frac{T}{2}$
基矢展开	$\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x$
展开系数	$x_i=\mathbf{r}\bullet\mathbf{e}_i$	$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}xdx,b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$ $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

例题

将H(x)在[-1/2, 1/2]区间内傅里叶级数展开，其中 $H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

求解：　为了简化计算，我们考虑展开奇函数H(x)-1/2

展开系数为　由于是奇函数，所以 $a_0=0, b_n=0$

$n>0$ 　$$a_n=\frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2}\left[H(x)-\frac{1}{2}\right]\sin(2\pi nx)\,dx$$

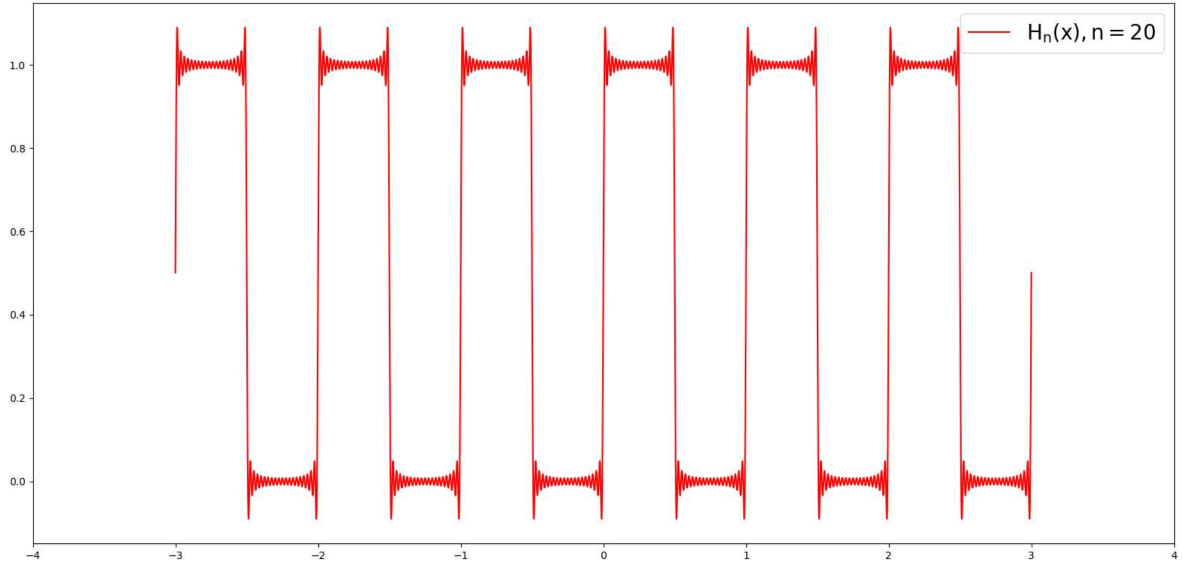
$$=2\int_0^{1/2}\sin(2\pi nx)dx=-2\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\Big|_0^{1/2}=-\frac{(-1)^n}{\pi n}+\frac{1}{\pi n}$$

展开式写为 $$H(x)-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}a_n\sin(2\pi nx)=\sum_{n=1}\left[1-(-1)^n\right]\frac{1}{n\pi}\sin(2\pi nx)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}\frac{1}{2k+1}\sin[2\pi(2k+1)x]$$

例题

$$H(x)-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}\left[1-(-1)^{n}\right]\frac{1}{n\pi}\sin\left(2\pi nx\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}\frac{1}{2k+1}\sin\left[2\pi(2k+1)x\right]$$

只展开前n项 $$H_n(x)-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\sin\left[2\pi(2k+1)x\right]$$



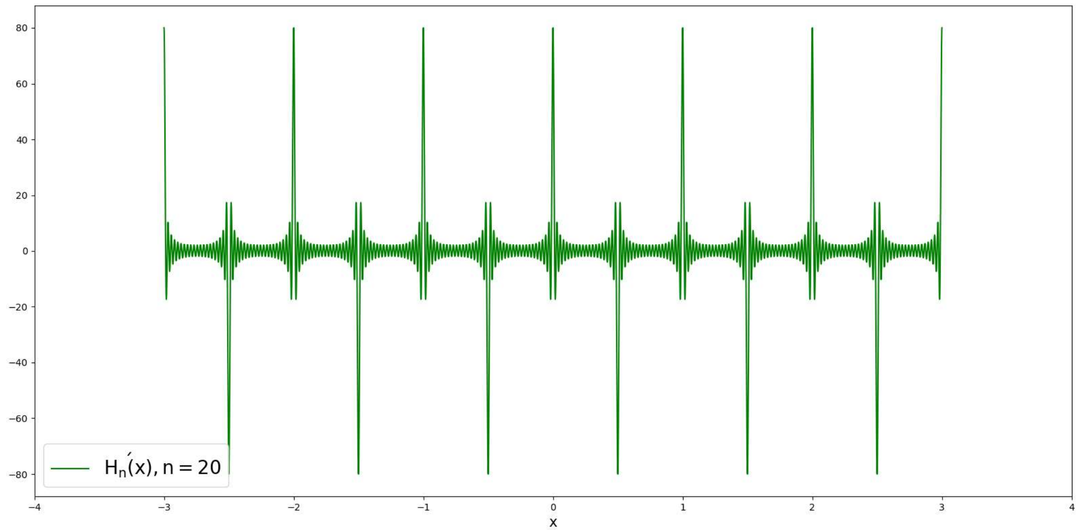
n越大 $H_n(x)$ 越接近 $H(x)$

例题

$$H(x)-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}\left[1-(-1)^{n}\right]\frac{1}{n\pi}\sin\left(2\pi nx\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}\frac{1}{2k+1}\sin\left[2\pi(2k+1)x\right]$$

导数为 $$H'(x)=\sum_{k=0}4\cos\left[2\pi(2k+1)x\right]$$

只展开前n项 $$H_n'(x)=4\sum_{k=0}^{n}\cos\left[2\pi(2k+1)x\right]$$



例题

将 $\delta(x)$在[-T/2, T/2]傅里叶级数展开，

展开系数为

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\delta(x)dx = \frac{2}{T}\cos 0 = \frac{2}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\delta(x)dx = \frac{2}{T}\sin 0 = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin x\delta(x)dx = \frac{1}{T}$$

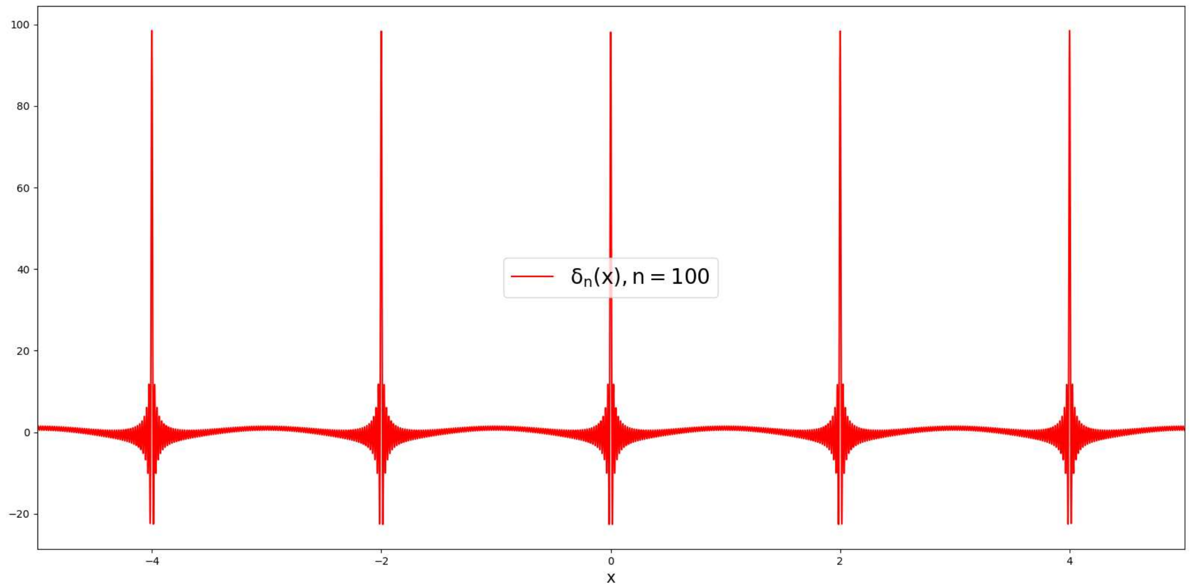
$$\delta(x) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}\frac{2}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

例题

将 $\delta(x)$在[-T/2, T/2]傅里叶级数展开，

取 $T=2$ $$\delta(x)=a_0+\sum_{n=1}a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x=\frac{1}{T}+\sum_{n=1}\frac{2}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$



练 习

将f(x)=x在[0, T]区间内傅里叶级数展开。

展开系数为

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= -\frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}\int_0^T xd\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= -\frac{1}{\pi n}x\cos\frac{2\pi n}{T}x\Big|_0^T + \frac{1}{\pi n}\int_0^T \cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= -\frac{T}{\pi n}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\cos\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}\int_0^T xd\sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= \frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}x\Big|_0^T x + \frac{1}{\pi n}\int_0^T \sin\frac{2\pi n}{T}xdx$$
$$= 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T xdx = \frac{T}{2}$$

展开式写为

$$x = \frac{T}{2} + \sum_{n=1} b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x = \frac{T}{2} - \sum_{n=1}\frac{T}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

练习

$$x = \frac{T}{2} + \sum_{n=1} b_n \sin\frac{2\pi n}{T} x = \frac{T}{2} - \sum_{n=1} \frac{T}{\pi n} \sin\frac{2\pi n}{T} x$$

代入 $x = \pi / 2, T = 2\pi$ 得到 $\frac{\pi}{2} = \pi - \sum_{n=1} \frac{2}{n} \sin\frac{n\pi}{2}$

n是偶数的项为0，因此取 $n = 2k+1$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0} \frac{2}{2k+1} \sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \sum_{k=0} \frac{2}{2k+1} (-1)^k$$

练习

习题：将f(x)=x在[-T/2, T/2]区间内傅里叶级数展开。

展开系数为

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x \sin\frac{2\pi n}{T} x dx$$

$$= -\frac{2}{T}\frac{T}{2\pi n}\int_{-T/2}^{T/2} x d\cos\frac{2\pi n}{T} x dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-T/2}^{T/2} x + \frac{1}{\pi n}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi n}{T} x dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\frac{2T}{2}\cos\left[\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right] = (-1)^{n+1}\frac{T}{\pi n}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x \cos\frac{2\pi n}{T} x dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x dx = 0$$

比较

$[0,T]$ $$x=\frac{T}{2}+\sum_{n=1}b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x=\frac{T}{2}-\sum_{n=1}\frac{T}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

$[-T/2,T/2]$ $$x=\sum_{n=1}b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x=\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\frac{T}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}x$$

作业

1:　将$f(x)=x^2$在[0, T]区间内傅里叶级数展开。

并计算 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$

2:　将$f(x)=x(T-x)$在[0, T]区间内傅里叶级数展开。