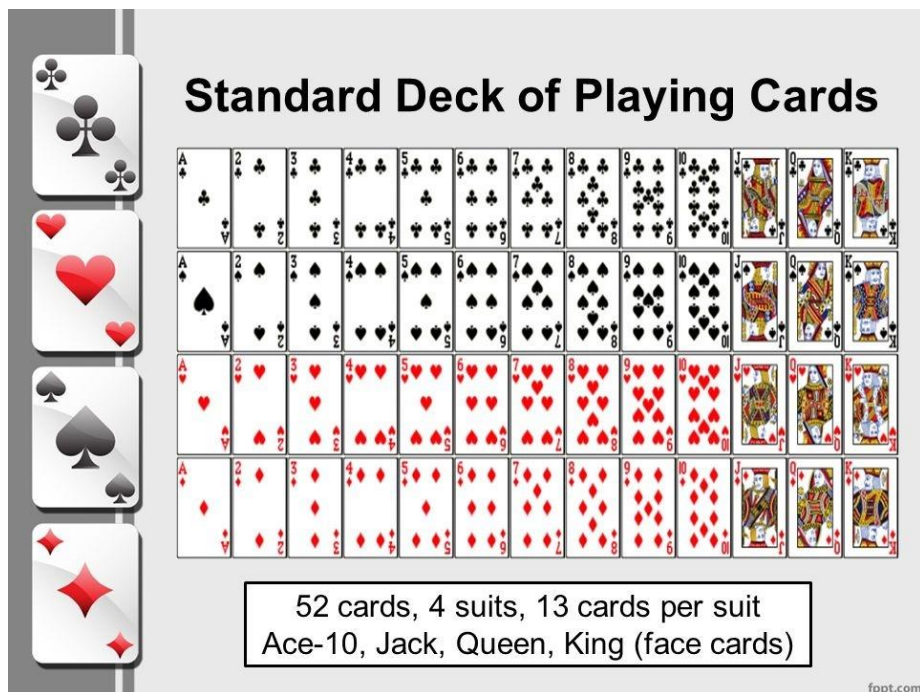


# ryProb01\_01

## Introduction to Statistics and Data Analysis ~ Poker Hand Probability

Renyuan Lyu  
ryTeach2019@cgu

# 1.1\_1 Poker Hand Probability



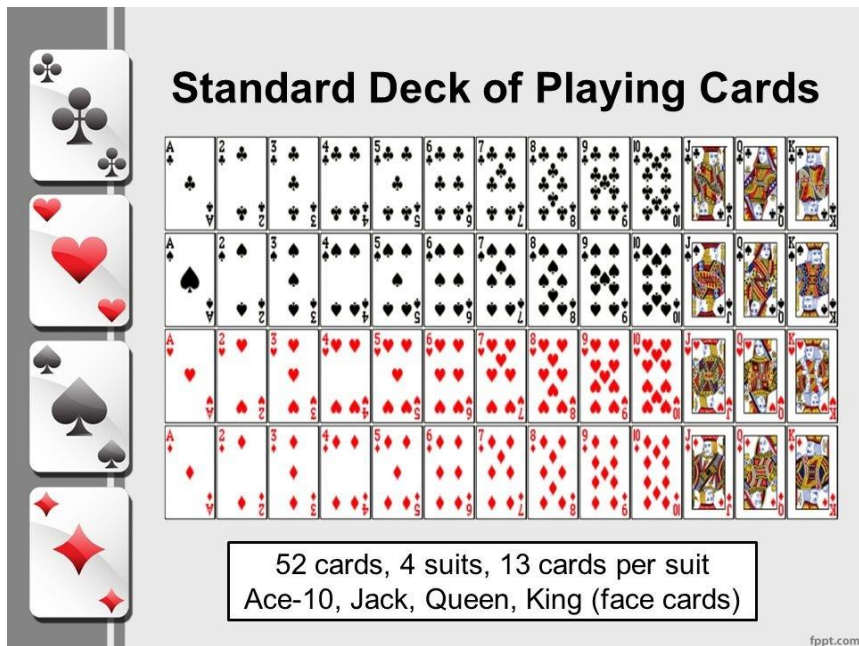
從52支牌，  
選5支牌，  
作為1手牌。



總共有  
 $C(52, 5)=2,598,960$   
個相異手牌。

分成 10 類牌型 (A00, A01, ..., A09)。

# 相異手牌 (Distinct hands) 總數



從52支牌，  
選5支牌，  
作為1手牌。



$$\begin{aligned} C_5^{52} &= \binom{52}{5} \\ &= \frac{52!}{5!(52-5)!} \\ &= \frac{52*51*50*49*48}{5*4*3*2*1} \\ &= 2,598,960. \end{aligned}$$



約 2.6 million (百萬)

$C_x^n$  : “n Choose x”

$C_x^{52}$

$$C_1^{52} = \left(\frac{52}{1}\right)$$

$$C_2^{52} = \left(\frac{52}{2}\right) \left(\frac{51}{1}\right)$$

$$C_3^{52} = \left(\frac{52}{3}\right) \left(\frac{51}{2}\right) \left(\frac{50}{1}\right)$$

$$C_4^{52} = \left(\frac{52}{4}\right) \left(\frac{51}{3}\right) \left(\frac{50}{2}\right) \left(\frac{49}{1}\right)$$

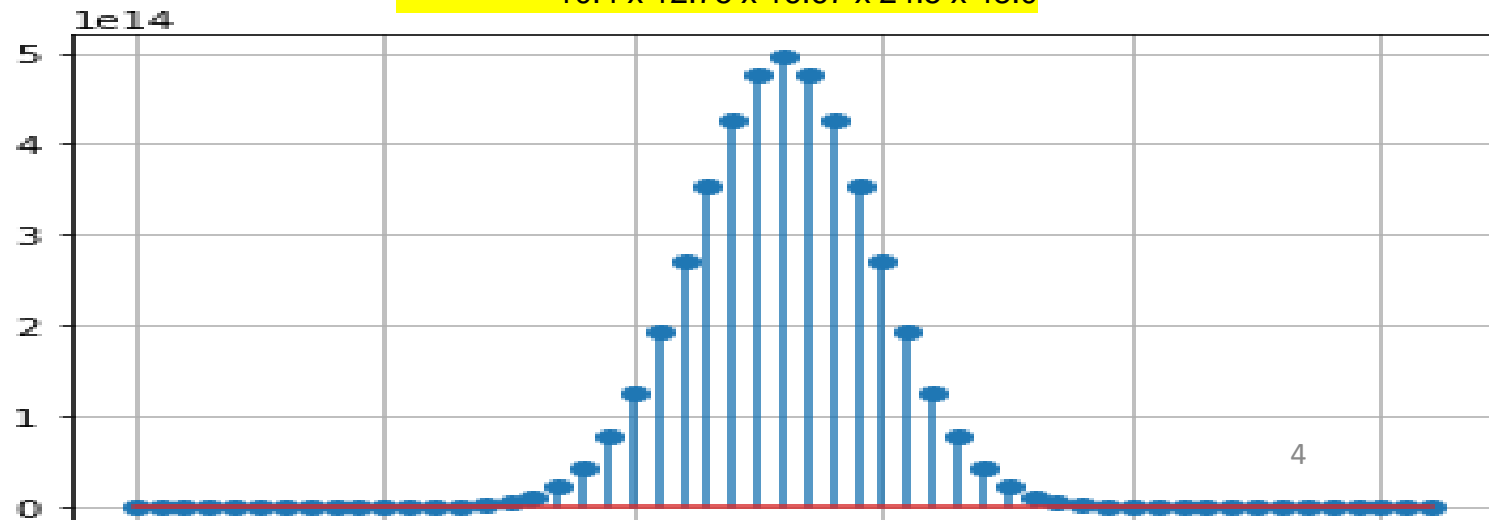
$$C_5^{52} = \left(\frac{52}{5}\right) \left(\frac{51}{4}\right) \left(\frac{50}{3}\right) \left(\frac{49}{2}\right) \left(\frac{48}{1}\right)$$

1,  $x = 0$   
 52,  $x = 1$   
 1,326,  
 22,100,  
 270,725,  
 2,598,960,  $x = 5$   
 20,358,520.

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \prod_{k=0}^{x-1} \left(\frac{n-k}{x-k}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right) \left(\frac{n-1}{x-1}\right) \left(\frac{n-2}{x-2}\right) \cdots \left(\frac{n-x+1}{1}\right)$$

$$= 10.4 \times 12.75 \times 16.67 \times 24.5 \times 48.0$$



Ref:

- **Combination**

- <https://en.wikipedia.org/wiki/Combination>

- **Binomial coefficient**

- [https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient)

- **Combinatorics**

- <https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics>



# C(n,x) 的一些恆等式

$$\begin{aligned} \binom{n}{x} &= \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1} \cdot \dots \cdot \frac{(n-x+2)}{2} \cdot \frac{(n-x+1)}{1} \\ &= \prod_{i=0}^{x-1} \left( \frac{n-i}{x-i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{x} + \binom{n}{x+1} \\ &= \binom{n+1}{x+1} \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq n :$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{x} &= \binom{n}{n-x}, \\ \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1, \end{aligned}$$

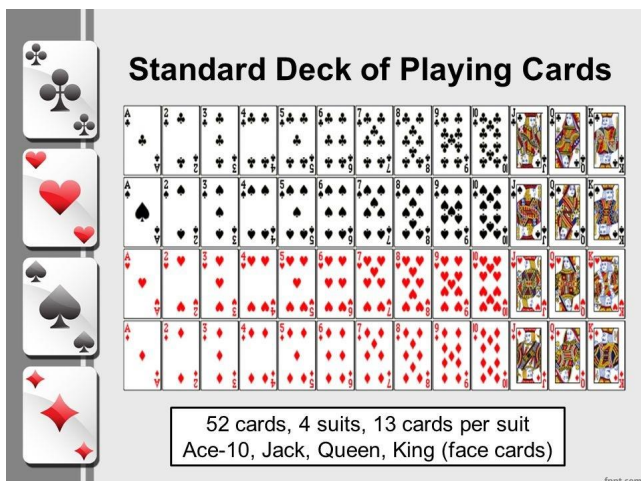
	$x=0$	$x=1$	$x$					$x=7$
n= 1 , nCx=	1.	1.						
n= 2 , nCx=	1.	2.	1.					
n= 3 , nCx=	1.	3.	3.	1.				
n= 4 , nCx=	1.	4.	6.	4.	1.			
n= 5 , nCx=	1.	5.	10.	10.	5.	1.		
n= 6 , nCx=	1.	6.	15.	20.	15.	6.	1.	
n= 7 , nCx=	1.	7.	21.	35.	35.	21.	7.	1.

$$\binom{n}{x+1} = \frac{n-x}{x+1} \binom{n}{x},$$

$$\binom{n+1}{x} = \frac{n+1}{n+1-x} \binom{n}{x},$$

$$\binom{n+1}{x+1} = \frac{n+1}{x+1} \binom{n}{x},$$

# Poker Hand 機率分析



任1手牌(5支牌)，  
皆可歸入10種牌型  
(A00, A01, ..., A09)。

A00_同花大順			
A01_同花順		A02_4支	A03_3支+2支
A04_同花		A05_順	A06_3支
A07_2 pair(2支)		A08_1 pair(2支)	A09_單支

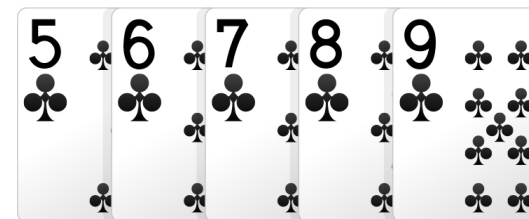


# A00\_大同花順

- 參見 A01\_同花順

# A01\_同花順

- 數字相連且花色相同的5張牌。



花色有4種，  
牌面從【A,2,3,4,5】到【10,J,Q,K,A】有10個順子。  
共有40種。

$$\binom{4}{1} \binom{10}{1} = 4 \times 10 = 40$$

A00\_大同花順，4種

A01\_同花順，40-4= 36種

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	(A)
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K	(♠A)
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K	(♥A)
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K	(♣A)
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K	(♦A)

# A02\_4支

- 【鐵支】，【4條】。
- 從A, ..., K 共13 (文)數字選1，為共同數字，4種花色共4支牌。
- 另外從剩餘(52-4)支非此數字的牌選1支。
- 共有624種情況。

$$\binom{13}{1} \binom{48}{1} = 13 \times 48 = 624$$

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	(A)
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K	(♠A)
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K	(♥A)
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K	(♣A)
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K	(♦A)

## A03\_3支+2支

- 【葫蘆】 (Full House) :
- 牌面有13選1為3條，花色4選3；
- 剩餘牌面12選1為對，花色4選2。
- 共有3744種情況。

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$$

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	(A)
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K	(♠A)
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K	(♥A)
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K	(♣A)
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K	(♦A)

# A04\_同花

- 花色4種，
- 牌面13選5，再減去順子10種。(排除順子，免得與同花順重複計算。)
- 共有5108種。

$$\binom{4}{1} \times \left( \binom{13}{5} - \binom{10}{1} \right) = 4 \times \left( \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - 10 \right) = 5108$$

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	(A)
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K	(♠A)
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K	(♥A)
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K	(♣A)
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K	(♦A)

# A05\_順

- 牌面從A2345到10JQKA有10種順子，
  - 每種順子的5個數字中，每個數字可替換花色4種，共 $4^5$ 種花色替換。
- $10 \times 4^5 = 10240$
- 要去除同花順的40種，免得重複計算。
- 共有10200種。

$$\binom{10}{1} \times (4^5 - 4) = 10 \times (1024 - 4) = 10200$$

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	(A)
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K	(♠A)
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K	(♥A)
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K	(♣A)
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K	(♦A)

## A06\_3支

- 牌面有13選一種為3條，花色4選3；
- 剩餘牌面12選2為單牌，
- 花色都有4種可能。
- 共有54912種情況。

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2 = 54912$$

## A07\_2 pair(2支)

- 兩對：
- 牌面有13選2為對子，
  - 花色都是4選2；
- 另外一張只要在其餘11選1，
  - 花色有4種。
- 共有123552情況。

$$\binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \times \binom{11}{1} \binom{4}{1} = 123552$$



## A08\_1 pair(2支)

- 一對：牌面有13選一為對，花色4選2；
- 另外從剩餘12選3，花色都有4種。
- 共有1098240種情況。

$$\binom{13}{1} \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3 = 13 \times 6 \times 220 \times 64 = 1098240$$

# A09\_單支

- 散牌：
  - (以上(A00,..., A08)皆非)
- 牌面13選5減去順子10種；
- 花色45減去同花4種。
- 共有1302540種情況

$$\left( \binom{13}{5} - \binom{10}{1} \right) (4^5 - 4) = (1287 - 10) \times (1024 - 4) = 1302540$$

# 9種牌型 每種個別手牌數之總和

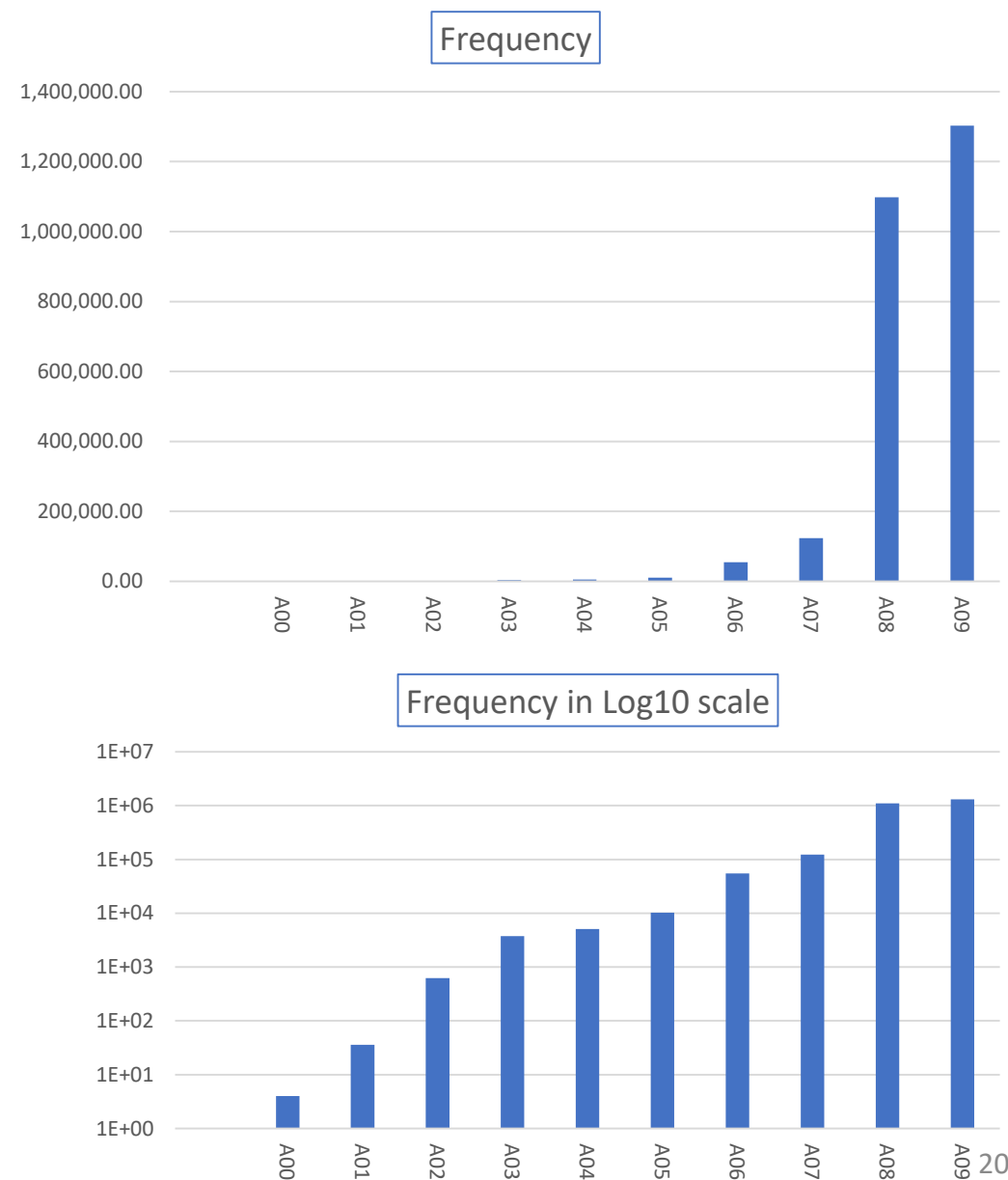
40 ....A01  
+ 624 ....A02  
+ 3,744 ....A03  
+ 5,108 ....A04  
+ 10,200 ....A05  
+ 54,912 ....A06  
+ 123,552 ....A07  
+ 1,098,240 ....A08  
+ 1,302,540 ....A09  
=====

= 2,598,960 ....Sum

$$\begin{aligned} C_5^{52} &= \binom{52}{5} \\ &= \frac{52!}{5!47!} \\ &= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 2,598,960 \end{aligned}$$

# Descriptive Statistics using Excel

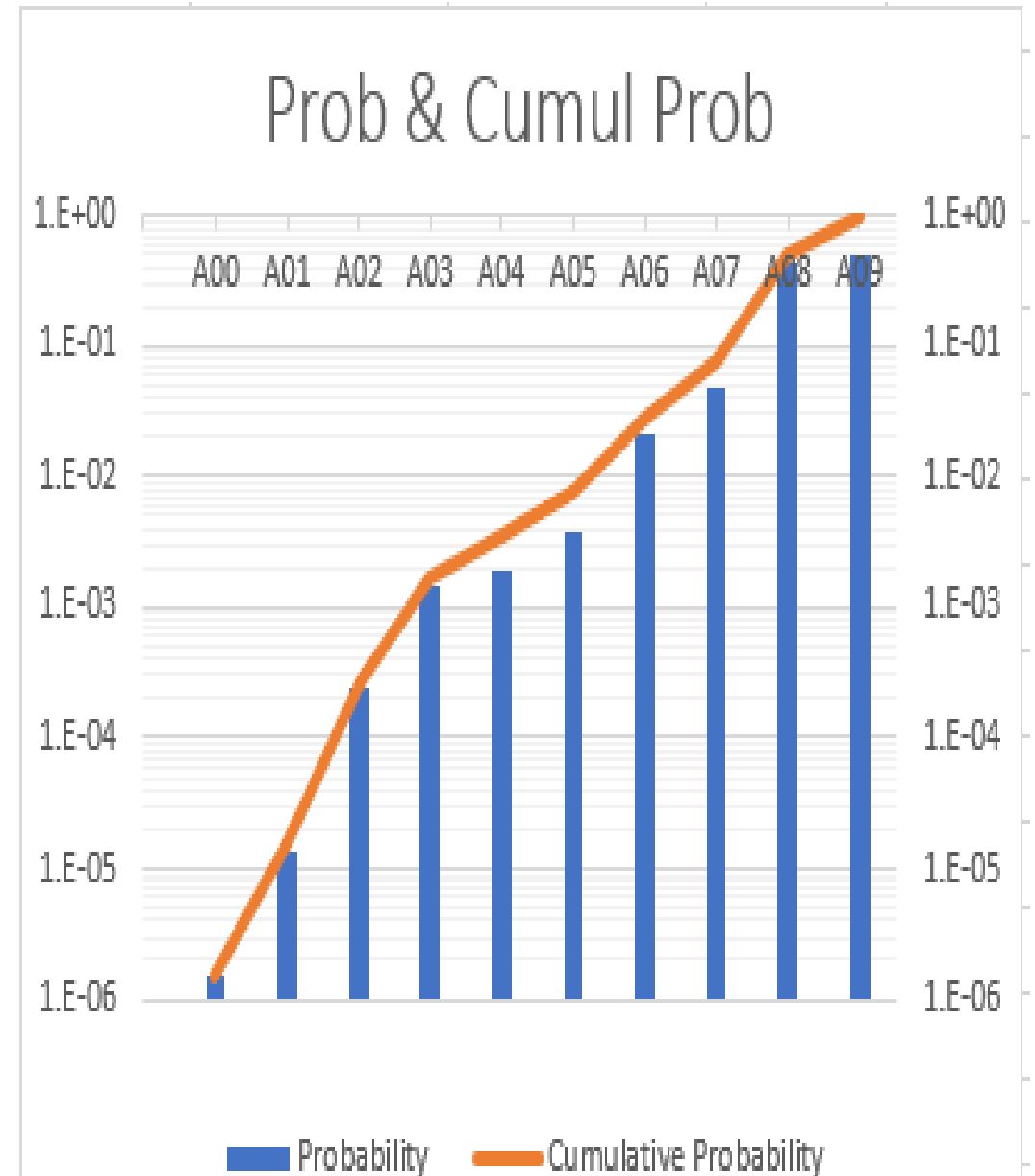
Poker Hands ...			
Pattern (of Hand)			Frequency
A00	大同花順	Royal_flush	4
A01	同花順(排除A00)	Straight_flush_(exc	36
A02	4支	Four_of_a_kind	624
A03	3支+2支	Full_house	3,744
A04	同花(排除A00,A01)	Flush_(excluding_	5,108
A05	順(排除A00,A01,A04)	Straight_(excluding	10,200
A06	3支	Three_of_a_kind	54,912
A07	2支+2支	Two_pair	123,552
A08	2支	One_pair	1,098,240
A09	單支	No_pair_/_High_c	1,302,540
		Total	2,598,960



# Prob & Cumul Prob

Poker Hands ...					
Pattern (of Hand)		Frequency		Probability	Cumulative Prob
A00	大同花順	Royal_f	4	1.5391E-06	1.53908E-06
A01	同花順(排	Straight_f	36	1.3852E-05	1.53908E-05
A02	4支	Four_of_	624	0.0002401	0.000255487
A03	3支+2支	Full_hous	3,744	0.00144058	0.001696063
A04	同花(排除	Flush_(ex	5,108	0.0019654	0.003661465
A05	順(排除A	Straight_(	10,200	0.00392465	0.007586111
A06	3支	Three_of	54,912	0.02112845	0.028714563
A07	2支+2支	Two_pair	123,552	0.04753902	0.076253578
A08	2支	One_pair	1,098,240	0.42256903	0.498822606
A09	單支	No_pair_	1,302,540	0.50117739	1
		Total	2,598,960		

for x in {'A00', 'A01', ..., 'A09'}:  
 Prob(x) = Frequency(x) / Total  
 CulmulProb(x) += Prob(x)



# 邀你來做莊家

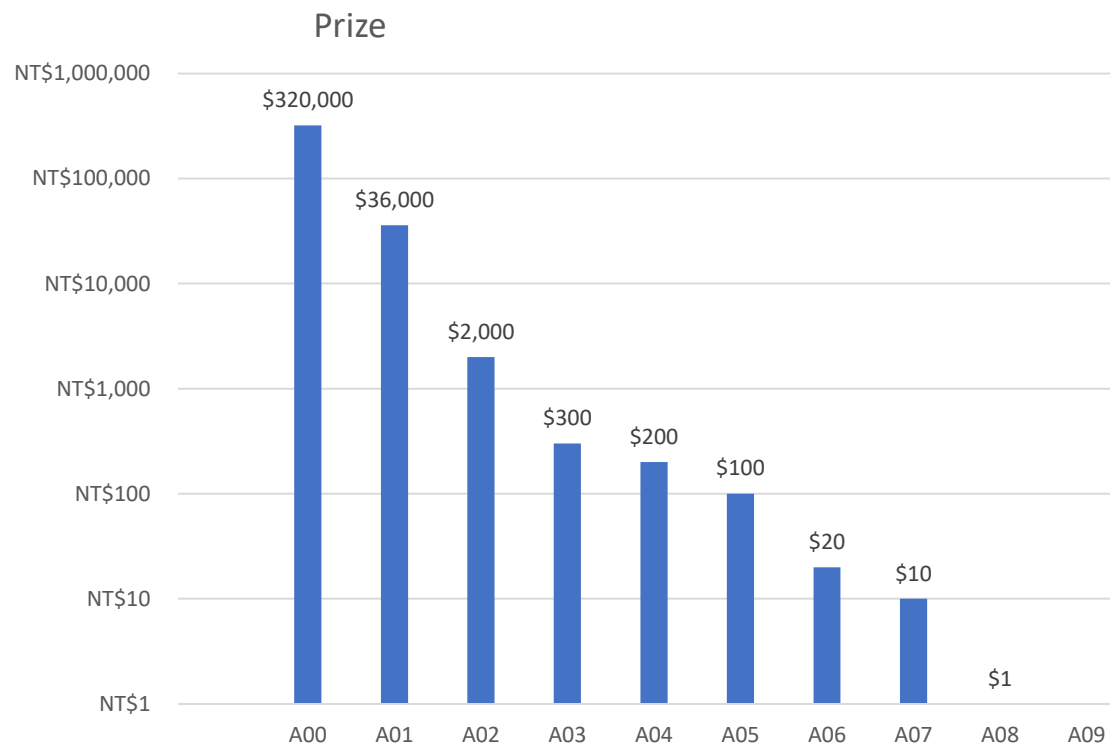
- 根據這張機率分析表，邀你來做莊家，設計一個中獎獎金分配表。
- 訂定抽一手牌(5支牌)的玩家須支付的費用。你要根據玩家抽中的牌型(A00, A01, ..., A09)，支付玩家獎金。
- 分析一下：若每天有100人來玩你的遊戲，100天下來，作為莊家的你，會賺多少錢？
- 寫一篇小報告來描述整個分析過程。

Poker Hands ...				
Pattern (o	Frequency	Probability	獎金	
A00	4	1.5391E-06	m00	
A01	36	1.3852E-05	m01	
A02	624	0.0002401	m02	
A03	3,744	0.00144058	m03	
A04	5,108	0.0019654	m04	
A05	10,200	0.00392465	m05	
A06	54,912	0.02112845	m06	
A07	123,552	0.04753902	m07	
A08	1,098,240	0.42256903	m08	
A09	1,302,540	0.50117739	m09	
			獎金期望值=?	
	2,598,960			

# ry公益撲克 .....

- 金豬年，玩家中獎發大財，沒中獎本公司也幫你做公益。
- 每抽1手牌(5支)，只要10元，就有機會中大獎 \$320,000元。
- 本公司每年營業額 10% 捐出來 給慈善機構 或政府機構 做公益。

Pattern (of Hand)		Prize
A00	大同花順	NT\$320,000
A01	同花順(排除A00)	NT\$36,000
A02	4支	NT\$2,000
A03	3支+2支	NT\$300
A04	同花(排除A00,A01)	NT\$200
A05	順(排除A00,A01,A04)	NT\$100
A06	3支	NT\$20
A07	2支+2支	NT\$10
A08	2支	NT\$1
A09	單支	NT\$0



# 1.2 Sampling Procedures

- Collection of Data



# 1.3 Measures of Location:

- The Sample Mean and Median

# Exercises

- 1.4 Measures of Variability. . . . . 14
- Exercises . . . . . 17

- 1.5 Discrete and Continuous  
Data. . . . . 17

- 1.6 Statistical Modeling, Scientific Inspection, and Graphical Diagnostics

- .....  
18

- 1.7 General Types of Statistical Studies: Designed Experiment, Observational Study, and Retrospective Study . . . . . 27
- Exercises . . . . . 30