ESTIMACIONES INTERVALOS DE CONFIANZA

INFERENCIA ESTADISTICA

LIC. MIGUEL CANO.

ESTIMACION

SE TRATA DE EMPLEAR LOS ESTADÍSTICOS PARA ESTIMAR LOS PARÁMETROS.

VEREMOS DOS TIPOS DE ESTIMADORES:

a. **ESTIMACIÓN PUNTUAL**
b. **ESTIMACIÓN POR INTERVALOS**

LA ESTIMACIÓN PUNTUAL

- UN ESTIMADOR PUNTUAL ES SIMPLEMENTE UN ESTADÍSTICO QUE SE EMPLEA PARA ESTIMAR PARÁMETROS.
- ES DECIR, CUANDO OBTENEMOS UNA MEDIA ARITMÉTICA A PARTIR DE UNA MUESTRA, ESTA PUEDE SER EMPLEADO COMO ESTIMADOR PARA EL VALOR DE LA MEDIA POBLACIONAL.

ESTIMACIÓN POR INTERVALO

- **ES AQUEL EN EL QUE SE ESPERA ENCONTRAR EL PARÁMETRO POBLACIONAL.**
- **INTERVALO DE CONFIANZA**: ES EL INTERVALO DE LAS ESTIMACIONES PROBABLES SOBRE EL PARÁMETRO
- **LÍMITES DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA**: SON LOS DOS VALORES EXTREMOS DEL INTERVALO DE CONFIANZA

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA
CON VARIANZA CONOCIDA (n≥30).

- **INTERVALO DE CONFIANZA (IC):**

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\rightarrow N(Z,0,1)$$

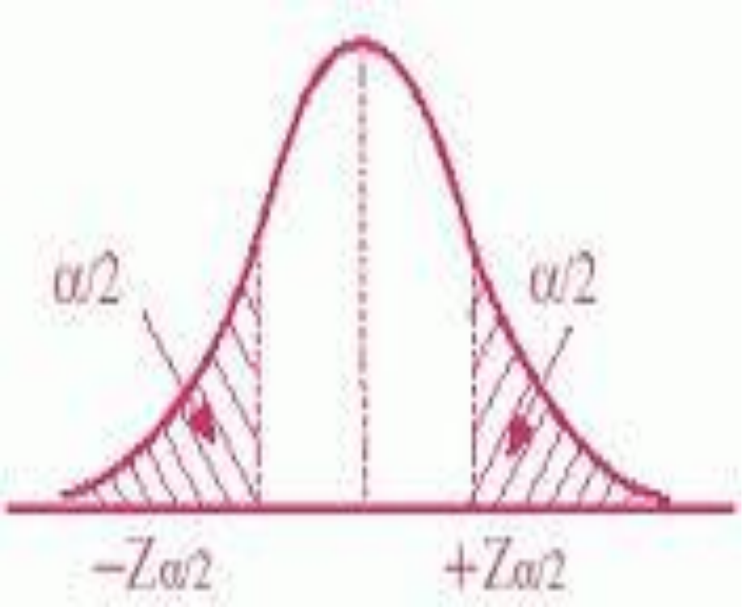
$$P(-Z_{\alpha/2}<Z<Z_{\alpha/2})=1-\alpha$$

$$-Z_{\alpha/2}<Z<Z_{\alpha/2}$$

$$-Z_{\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z_{\alpha/2}$$

LUEGO:

$$\text{IC:}\quad \overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



TAMAÑO DE LA MUESTRA (n):

$$n = \leq \left(\frac{Z_{\alpha/2} . \sigma}{\mathrm{e}} \right)^2$$

LONGITUD DEL INTERVALO (L):

$$L = 2\left(\frac{Z_{\alpha/2} . \sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \right)$$

ERROR ESTANDAR (σ_x) o $\mathrm{e}(\bar{\mathrm{x}})$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}$$

Ejemplo de Aplicación

Un fabricante produce focos que tienen un promedio de vida de distribución aproximadamente normal y una desviación estándar de 40 horas. Si una muestra de 30 focos tiene una vida promedio de 780 horas.

a) Encuentre el intervalo de confianza del 95%, 96%, 98% para la media de la población de todos los focos que produce la empresa.

Solución:

- X: variable aleatoria tiempo de vida de focos fabricados
- $X \rightarrow N(X, \mu, \sigma^2)$
- Población: $\mu = ?$

  $\sigma = 40$ horas
- Muestra: $n = 30$

  $\overline{X} = 780$ horas
- Confianza: $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

  $\alpha/_{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{0.025} = -1.96$

$$IC : \overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\alpha}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$780 - 1.96 \times \frac{40}{\sqrt{30}} < \mu < 780 + 1.96 \times \frac{40}{\sqrt{30}}$$

$$\boxed{\therefore 765{,}69 < \mu < 794.31}$$

Adicionalmente podemos calcular el error y el tamaño de muestra que aproximadamente será la misma.

Error: $e = \dfrac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow e\dfrac{1.96 \times 40}{\sqrt{30}} = 14.3138$

Tamaño muestra

$$e = \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2 = (5-48)^2 = 30$$

Adicionalmente determinar el IC (intervalo de confianza) para la media con el 96%, 98% 94% y error respectivo.

Ejemplo de Aplicación

Un supervisor intenta utilizar la media de una muestra aleatoria de tamaño n=150 para estimar la aptitud mecánica promedio (la cual se mide cierta prueba) de los obreros de la línea de ensamblado en una gran industria. Si por su experiencia puede suponer que $\sigma=6.2$ para tales datos, ¿Qué podemos asegurar con una probabilidad de 0.99 sobre la medida máxima de este error?

Solución:

- X: V.A. aptitud en la prueba
- $n = 150$
- $\sigma = 6.2$
- confianza

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01, \quad \alpha/2 = 0.005, \quad Z_{0.005} = -2.575 \rightarrow simetria Z_{0.995} = 2.575$$

$$e \leq Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow e = 2575 \times \frac{6.2}{\sqrt{150}} = 1.30$$

En consecuencia el supervisor puede asegurar con una probabilidad de 0.99 de que su error será a lo sumo 1.30

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA
CON VARIANZA DESCONOCIDA (n<30)

- Cuando la varianza poblacional no es conocida utilizamos la distribución de **"t" de "student**" , para tamaños de muestra **n<30.** el estadístico T será:

- Como σ^2 no se conoce se estima mediante S^2.
- La distribución se desvía en forma apreciable cuando los grados de libertad (v = n-1) son pequeños.

- El estadístico t definido resulta de una muestra aleatoria seleccionada de una población normal, con varianza σ^2 no conocida.

FORMULA

$$\text{IC:}\quad \overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{\text{n}}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{\text{n}}}$$

Ejemplo

Una compañía utiliza baterías en sus juegos electrónicos que según ellos duran un promedio de 30 horas, para confirmar esto se prueba 16 baterías siendo la media muestral de 27.5 horas y su desviación estándar S=5 horas. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media. Suponga que la distribución de las duración de las baterías es aproximadamente normal.

Solución:

X: V.A. duración de batería
Población: $u = 30$; $\sigma^2 = ??$
Muestra: $n = 16$; $X = 27.5$; $S = 5$

Confianza $1-\alpha = 0.95$; $\alpha/2 = 0.025$

$$v = 16 - 1 = 15$$

DE TABLAS: $t_{0.025} = 2.131$

REEMPLAZANDO EN LA FORMULA:

$$\mathbf{27{,}5-(2{,}131x5/4)<\mu< 27{,}5+(2{,}131x5/4)}$$

$$\mathbf{24{,}84<\mu<30{,}16}$$

LUEGO LA VIDA MEDIA DE LAS BATERIAS ESTARA ENTRE 24.84 Y30.16 HORAS CON UN 95% DE CONFIANZA.

Tabla 2. Distribución t de Student

gl \ $\alpha/2$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,192	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,259	0,851	1,303	1,648	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,256	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Ejemplo

En una muestra aleatoria de 20 porciones de cereal el contenido Promedio de azúcar fue de 11.3 gramos con desviación estándar de 2.45 gramos. Suponiendo que los contenidos de azúcar están distribuidos normalmente, determine el intervalo de confianza del 95% para el contenido promedio de azúcar en las porciones de dicho cereal.

Solución:

X: V.A. contenido de azúcar en el cereal pre endulzado

Población: $u = ?$

$\sigma = ?$

Muestra: $n = 20$

$X = 11.3$

$S = 2.45$

Confianza : $1 - \alpha = 0.95$;

$v = 20 – 1 = 19$

$t_{0.025} = 2.093$

Sabemos que :

Intervalo :

$11,3-(2,093X2.45/20^{0.5})<\mu< 11,3+(2,093x2.45/20^{0.5})$

$$10,153<\mu<12,446$$

EL CONTENIDO PROMEDIO DE ZUCAR SERA DE 10,153 A 12,446 GRAMOS CON UNA CONFIANZA DEL 95%