Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Económicas

Matemática II - Redictado

Unidad 1: Límites y Continuidad de funciones
Unidad 2: Derivada de una función de una variable real

Clase 3 - COMISIÓN: MOYANO

Año 2023

CONTINUIDAD: FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO X_0

Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = x_0$, sí y solo sí se verifican las siguientes condiciones:

1ª Condición: Exista la función valuada en el punto $y = f(x_0)$

2ª Condición: Exista el límite de la función L cuando x tiende al punto x_0

Debe comprobarse que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y sea un valor finito

3ª Condición: Que la función valuada en el punto x_0 sea igual al límite L

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Es decir, si no se verifica alguna de las condiciones anteriores, la función será **Discontinua.**

DISCONTINUIDADES

Siempre que en un punto al menos una de las condiciones no se cumpla, la función es discontinua. Existen muchos casos de gráficas discontinuas y según algunos autores las clasifican de diferentes maneras.

Nosotros las clasificaremos en:

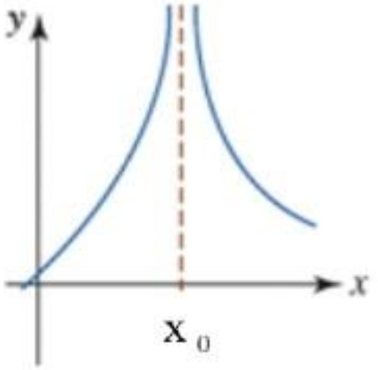
Evitables: Porque existe un límite y es un valor finito simbolizado por L. Exista o no $f(x_0)$

Esencial: Porque su límite no es un valor finito, pudiendo ser infinito o no existir.

- **De Salto Finito:** Porque existen los límites laterales finitos L_i y L_d, pero no son iguales
- **De Salto Infinito:** Porque al menos uno de los límites laterales es infinito, o ambos.

DISCONTINUIDADES

Esencial de Salto infinito

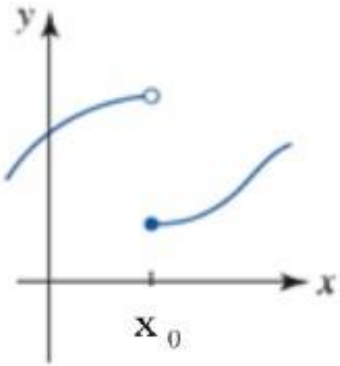


1ª) $f(x_0) = \nexists$

2ª) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

3ª) No se cumple

Esencial de Salto finito

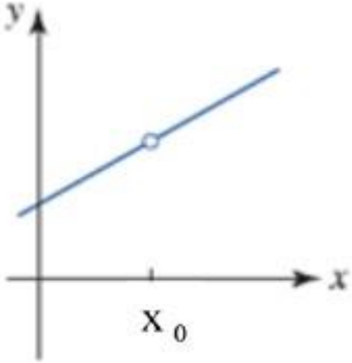


1ª) $f(x_0)$ Existe

2ª) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

3ª) $f(x_0) \neq L$

Discontinuidad Evitable

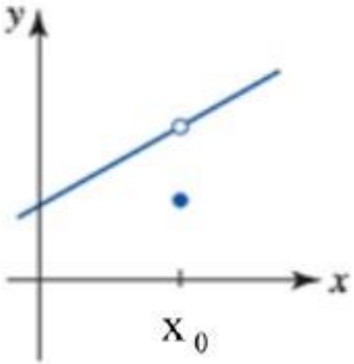


1ª) $f(x_0) = \nexists$

2ª) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

3ª) No se cumple

Discontinuidad Evitable



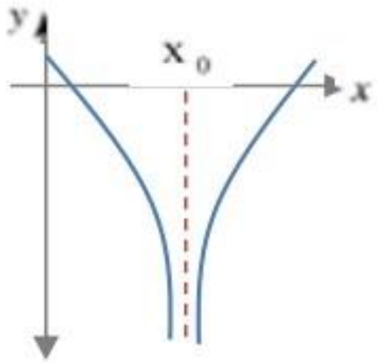
1ª) $f(x_0)$ Existe

2ª) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

3ª) $f(x_0) \neq L$

DISCONTINUIDADES

Esencial de Salto infinito

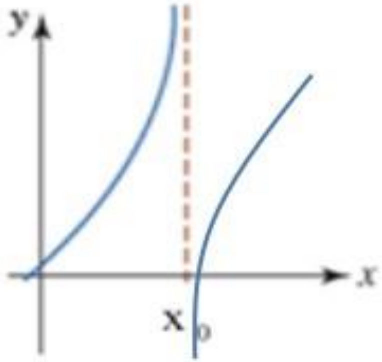


1ª) $f(x_0) = \nexists$

2ª) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

3ª) No se cumple

Esencial de Salto infinito

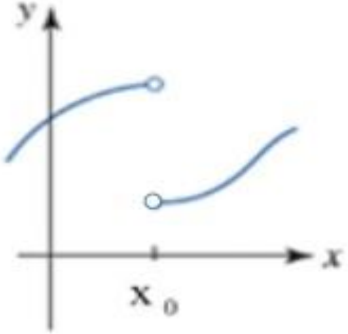


1ª) $f(x_0) = \nexists$

2ª) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

3ª) No se cumple

Esencial de Salto finito

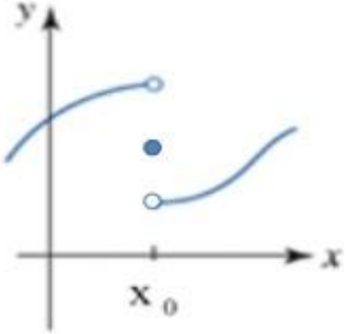


1ª) $f(x_0) = \nexists$

2ª) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

3ª) No se cumple

Esencial de Salto finito



1ª) $f(x_0) = \text{Existe}$

2ª) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$

3ª) No se cumple

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 1

Queremos determinar si la siguiente función definida por tramos es continua en $x_0 = 7$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \quad x<7 \\ x^2-27 & si \quad x>7 \end{cases}$$

Debemos verificar el cumplimiento de las condiciones para $x_0 = 7$

1ª) Condición : $f(x_0) = f(7) = \nexists$

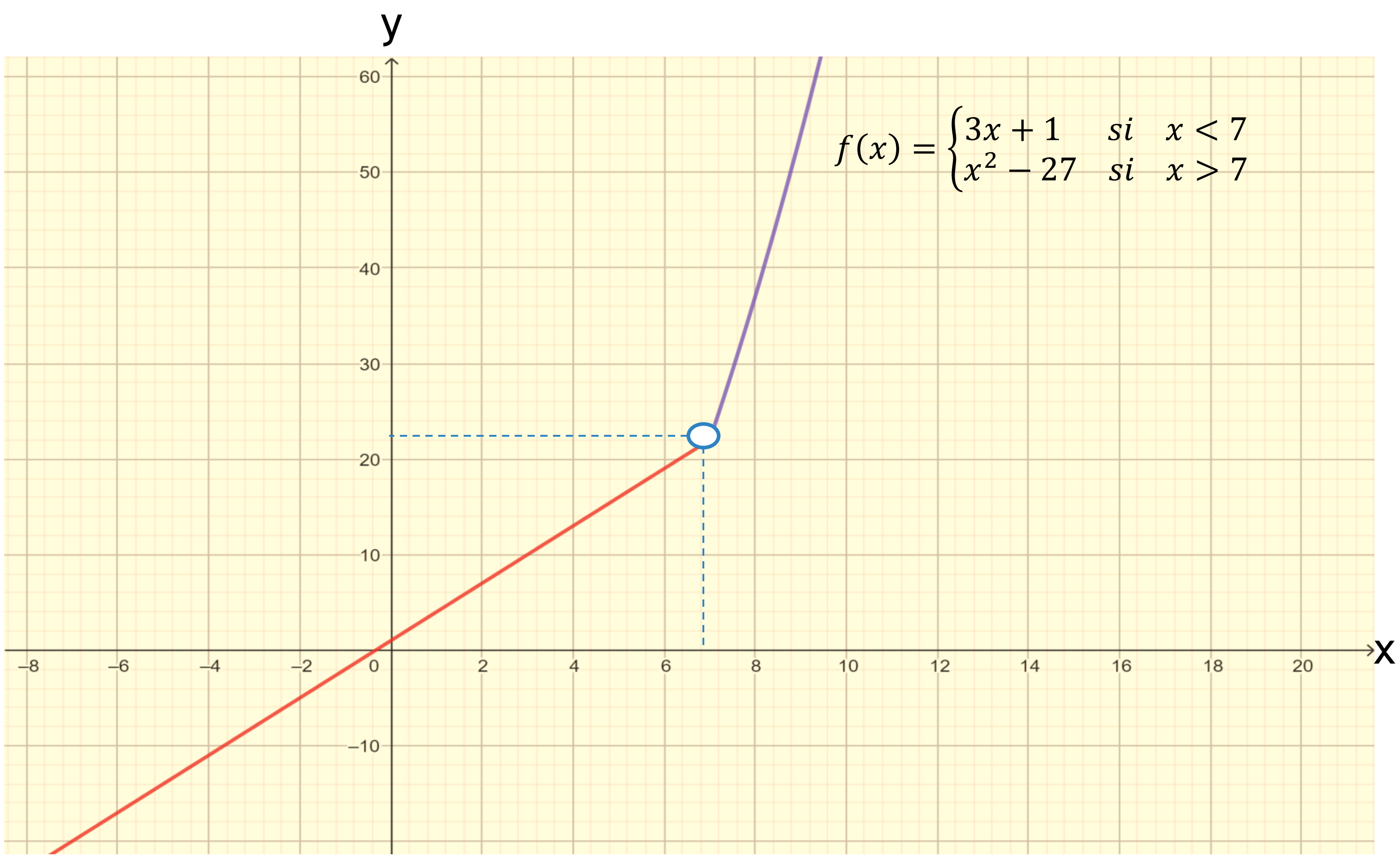
2ª) Condición

$$\left.\begin{array}{l} L_d = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} (x^2 - 27) = (7)^2 - 27 = 22 \\ L_i = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} (3x+1) = 3(7)+1 = 22 \end{array}\right\} L_d = L_1 = L = 22$$

3ª) No se cumple

Matemática II
Comisión: MOYANO

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 1 - Gráfico



En $x_0 = 7$ la función es discontinua evitable

Matemática II
Comisión: MOYANO

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 2

Queremos determinar si la siguiente función es continua en $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

Debemos verificar el cumplimiento de las condiciones para $x_0 = 0$

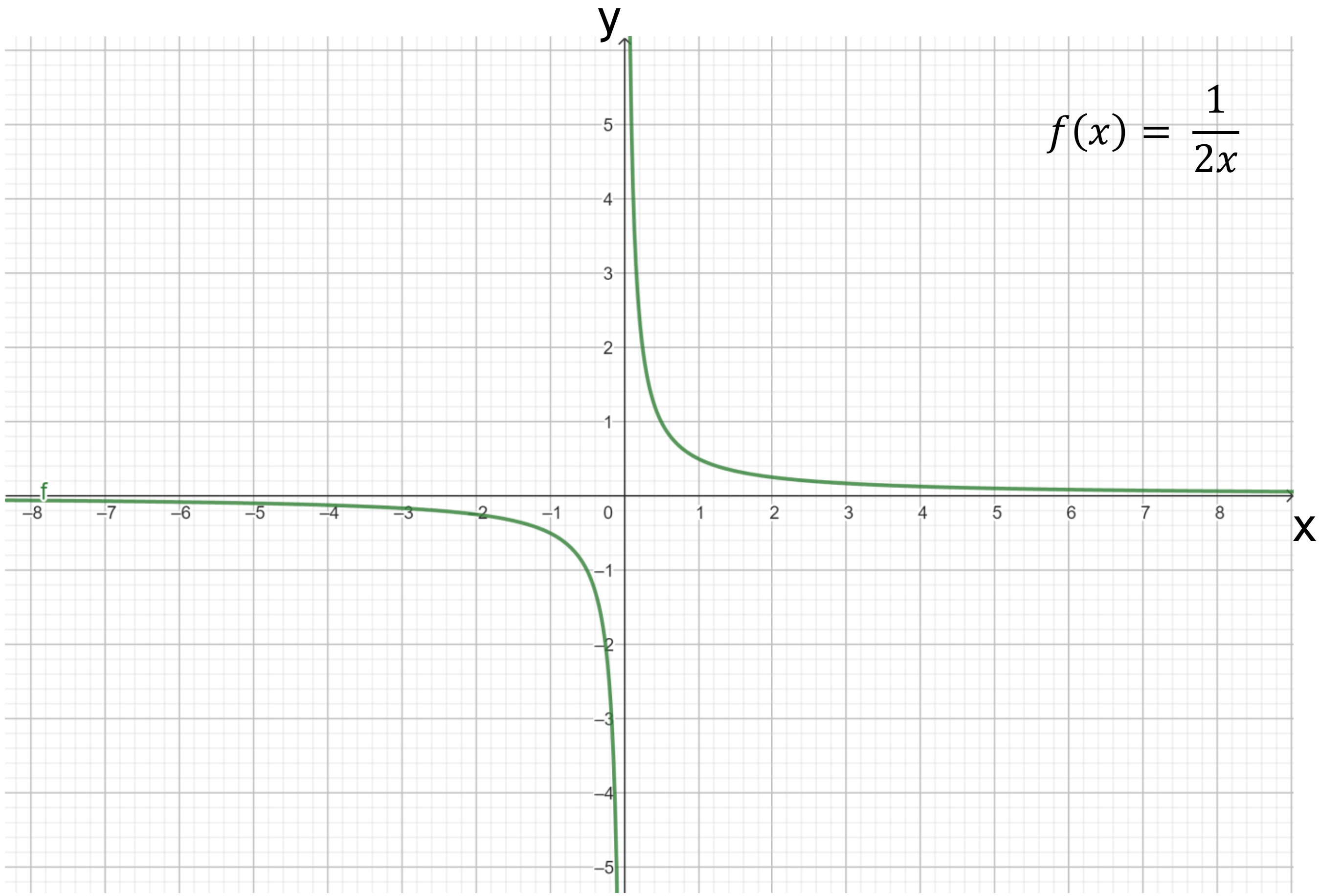
1ª) Condición : $f(x_0) = f(0) = \nexists$

2ª) Condición

$$\left.\begin{array}{l} L_d = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1/2x) = (1 / 0{,}00\ldots1) = +\infty \\ L_i = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1/2x) = (1 / -0{,}00\ldots1) = -\infty \end{array}\right\} L_d \neq L_1$$

3ª) No se cumple

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 2 - Gráfico



En $x_0 = 0$ la función es discontinua esencial de salto infinito

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 3

Queremos determinar si la siguiente función definida por tramos es continua en $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad x \leq 2 \\ -x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Debemos verificar el cumplimiento de las condiciones para $x_0 = 2$

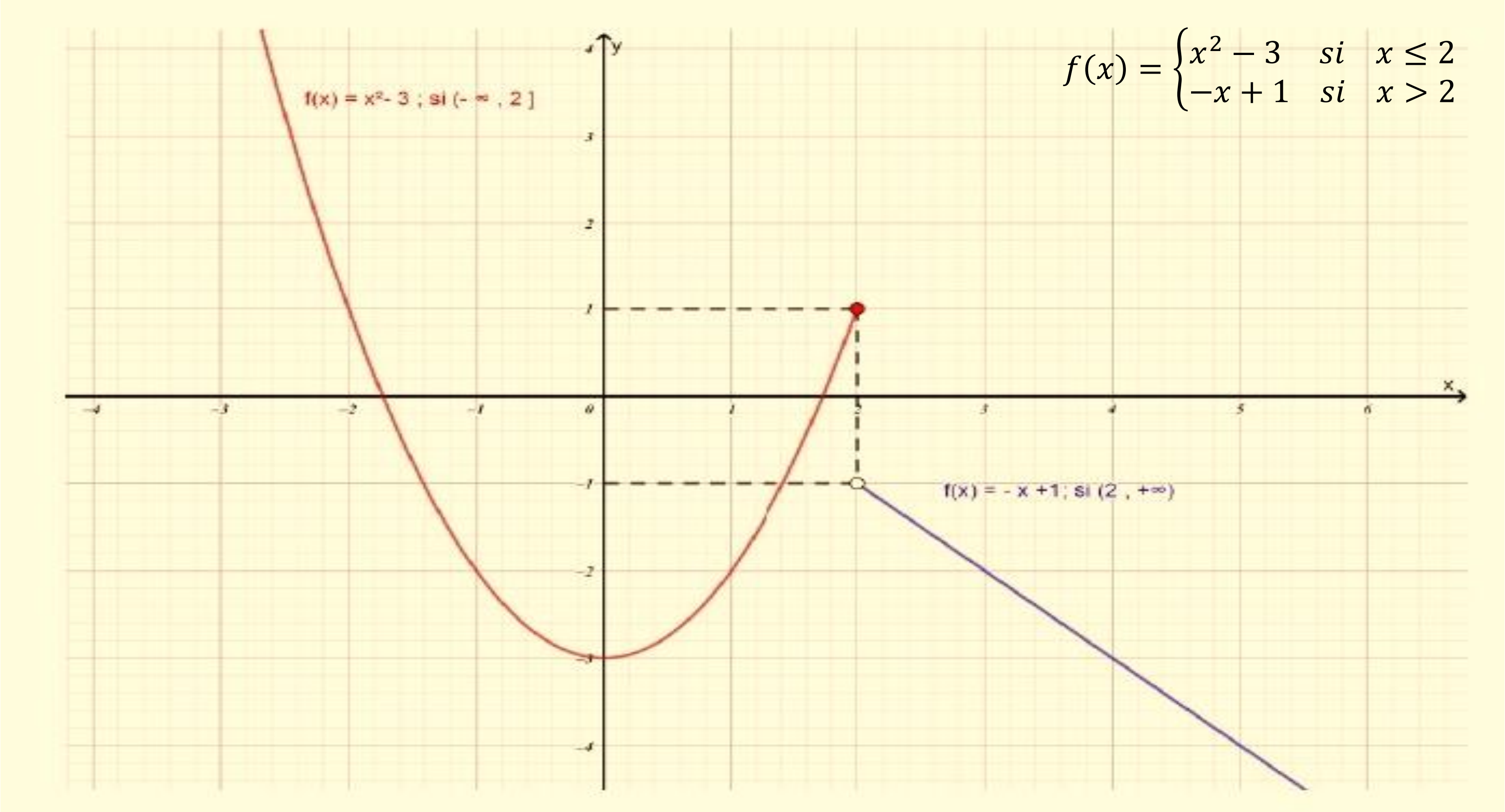
1ª) Condición: $f(x_0) = f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

2ª) Condición

$$\left.\begin{array}{l} L_d = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x+1) = -2+1 = -1 \\ L_i = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1 \end{array}\right\} L_d \neq L_i$$

3ª) No se cumple

FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO: Ejemplo 3 - Gráfico



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad x \leq 2 \\ -x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

En $x_0 = 2$ la función es discontinua esencial de salto finito

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO [a , b]

Se dice que y = f(x) es continua en un intervalo [a,b], si y solo si, es continua en todos los puntos de dicho intervalo cerrado.
En el caso de no ser continua en los extremos del intervalo, pero continua para todo punto x_0 perteneciente a (a,b) se dice que la función y = f(x) es continua para el intervalo abierto.

Casos de funciones continuas cuyo dominio es todo el conjunto de números reales:

Toda función polinómica entera es continua $R = (-\infty, \infty)$

Lineal	$f(x) = a.x + b$
cuadrática	$f(x) = a.x^2 + b.x + c$
cúbica	$f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$
grado n	$f(x) = a.x^n + b.x^{n-1} + c.x^{n-2} + \ldots + m.x^0$

Las funciones trigonométricas: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *y* $f(x) = \cos(x)$ son continuas

Las funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ *y* $f(x) = e^x$ son continuas

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO [a , b]

Las condiciones de continuidad deben definirse para todo punto $x=x_0$ del intervalo [a,b]

1ª Condición: Exista la función valuada en el punto $y = f(x_0)$; $\forall x_0 \in [a,b]$

2ª Condición: Exista el límite de la función L cuando x tiende al punto x_0 ; $\forall x_0 \in [a,b]$

Debe comprobarse que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y sea un valor finito

3ª Condición: Que la función valuada en el punto x_0 sea igual al límite L ; $\forall x_0 \in [a,b]$

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

APLICACIONES – Guía de actividades 2022

Actividad N° 8:

Plantear y resolver los siguientes problemas:

8.1 Se conoce que el costo total de elaboración de un producto en dólares es C(x)= 300+5x, donde x es la cantidad producida. Si se tuviera capacidad ilimitada de producción, ¿a qué valor tendería el costo promedio de producción?

$$CP(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{300 + 5x}{x} = \frac{300}{x} + 5$$

$$\lim_{x\to\infty} CP(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{300}{x} + 5\right) = \frac{300}{\infty} + 5 = 0 + 5 = 5$$

APLICACIONES – Guía de actividades 2022

Actividad N° 8:

Plantear y resolver los siguientes problemas:

8.2 De acuerdo con la estimación de una empresa, la utilidad U por la venta de su nuevo producto está relacionada con el gasto publicitario x mediante la siguiente fórmula: $U(x) = \frac{23x+15}{x+4}$, ¿a qué valor se acercará la utilidad cuando el gasto en publicidad tienda a infinito?

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{23x+15}{x+4}\right) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{23x}{x}+\frac{15}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{23+\frac{15}{x}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{23+0}{1+0} = 23$$

UNIDAD 2: DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Operador de Diferencia

Se denomina operador de diferencia al símbolo Δ (letra griega delta mayúscula) que representa la operación de resta entre dos números y dicha diferencia nos muestra un cambio (variación) que sufre una magnitud en relación a su valor inicial, dicha variación también recibe por nombre incremento arbitrario, pudiendo ser positivo o negativo, o incluso nulo cuando la magnitud permanece contante.

INCREMENTOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Incremento absoluto de la variable independiente X

El incremento absoluto de la variable (x) lo simbolizamos por (Δx). Si consideramos un valor o magnitud inicial para un determinado momento, tiempo, espacio o análisis, al que denominamos x_0 y una magnitud final para otro determinado momento, tiempo, espacio o análisis, al que denominamos x_1 el incremento absoluto se obtiene calculando la siguiente diferencia:

$\Delta x = x_1 - x_0$ *Por ejemplo si:* $x_1 = 12$ y $x_0 = 10 \Rightarrow \Delta x = 12 - 10 = 2$

Si despejamos tenemos: $x_1 = x_0 + \Delta x$ es decir, conociendo un valor inicial y su incremento absoluto, podemos hallar el valor final.

INCREMENTOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Incremento relativo de la variable independiente X

El incremento relativo de la variable (x) lo simbolizamos por ($\Delta x/x$). Es una proporción o tasa de cambio, y se calcula como su simbología lo indica, dividiendo el cambio de la magnitud sobre el valor inicial, o dividiendo el cambio de la magnitud sobre un valor final. En toda nuestra materia trabajaremos la proporción o tasa de cambio en relación al valor inicial. Por lo tanto se calcula:

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta x}{x} \quad \textit{Por ejemplo si:} \quad x_1 = 12 \;\; y \;\; x_0 = 10 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{12 - 10}{10} = 0{,}2$$

La tasa de cambio mide una proporción; cuánto representa el cambio en relación al valor inicial.

INCREMENTOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Incremento absoluto de la función

El incremento absoluto de la función o variable dependiente "y" lo simbolizamos por Δy. Es decir, es el incremento de la función provocado por el incremento de la variable x.

Dada la función $y = f(x)$, el incremento absoluto de la función se obtiene calculando la siguiente diferencia:

$$\text{Si, } y = f(x) \Rightarrow \Delta y = y_1 - y_0 \Rightarrow \Delta y = \Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Por ejemplo: $y = x^2 - 60$ siendo $x_1 = 12 \wedge x_0 = 10$

Realizamos una tabla de la siguiente manera:

Δx	x_i	$y_i = x_i^2 - 60$	Δy
$\Delta x = x_1 - x_0$ $\Delta x = 12 - 10 = 2$	$x_1 = 12$ $x_0 = 10$	$y_1 = (12)^2 - 60 = 84$ $y_0 = (10)^2 - 60 = 40$	$\Delta y = y_1 - y_0$ $\Delta y = 84 - 40 = 44$

Por lo tanto: si $\Delta x = 2$ entonces $\Delta y = \Delta f(x) = 44$

INCREMENTOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Incremento relativo de la función

El incremento relativo de la función o variable dependiente “y” lo simbolizamos por Δy/y. Es decir, es una proporción o tasa de cambio y se calcula como lo indica la simbología: dividiendo el cambio de la magnitud sobre el valor inicial o dividiendo el cambio de la magnitud sobre un valor final.

Se calcula:

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\Delta y}{y} \quad \textit{Por ejemplo si:} \quad y_1 = 84 \text{ y } y_0 = 40 \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{84 - 40}{40} = 1{,}1$$

También se lo suele expresar en porcentaje multiplicando por 100, en este caso sería el 110%

COCIENTE INCREMENTAL

El Cociente Incremental se define como el cociente o la división entre el cambio de la función (Δy) y el cambio en la variable independiente (Δx). Este cociente se expresa o simboliza por (Δy/Δx); obteniéndose por medio de cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Expresión que nosotros usaremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

COCIENTE INCREMENTAL

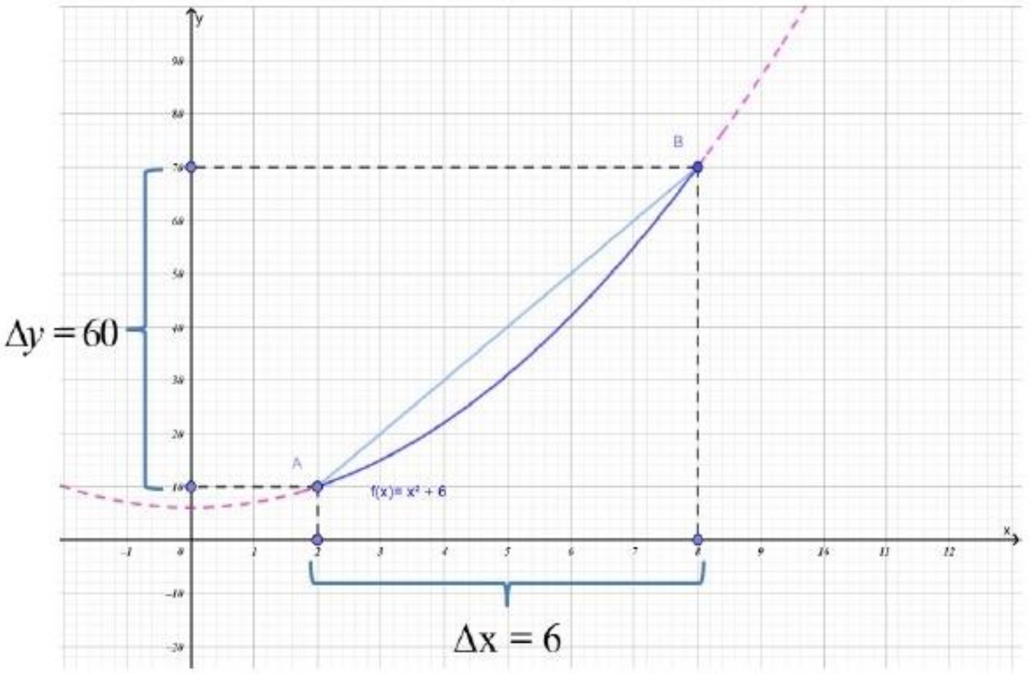
Sea la función $f(x) = x^2 + 6$ queremos calcular la tasa de cambio promedio entre los puntos $x_0 = 2$ y $x_1 = 8$

Tabla:

x	$y = x^2 + 6$
$x_1 = 8$	$y_1 = (8)^2 + 6 = 70$
$x_0 = 2$	$y_0 = (2)^2 + 6 = 10$
$\Delta x = 6$	$\Delta y = 60$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60}{6} = 10$$



Por lo tanto la tasa promedio o cambio promedio de la función, entre los puntos A y B, es 10.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO X_0

Sea $y = f(x)$, una función definida en un punto x_0 del intervalo (a,b).

Se define a la derivada de $y = f(x)$ en el punto x_0, como el límite del cociente incremental, si existe, cuando el incremento de la variable independiente (Δx) tiende a cero.

En símbolos:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

$$f'(x_0) = D[f(x_0)] = y'_0 = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Llegamos al final de la clase de hoy, en la próxima continuaremos con el estudio de las derivadas

Bibliografía obligatoria:

- Stewart, James (2007): “Cálculo Diferencial e Integral”. 2° Edición. Editorial Thompson. México.
- Casparri de Rodriguez, María T. (2001): “Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas”. Editorial Macchi. Argentina.

carina.moyano@unc.edu.ar