Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Económicas

Matemática II - Redictado

Unidad 1: Límites y Continuidad de funciones

Clase 1 - COMISIÓN: MOYANO

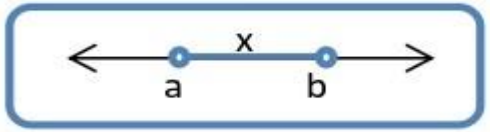
Año 2023

CONCEPTOS PREVIOS: Intervalos

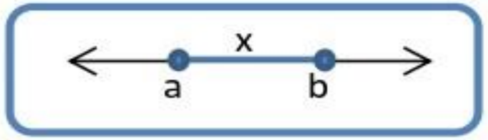
Sean dos números reales "a" y "b", siendo a menor que b (a < b), definimos como intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre a y b, donde a y b se denominan extremos del intervalo, el número "a" es el extremo inferior del intervalo y el número "b" es el extremo superior del intervalo. Y la diferencia (b-a) es la amplitud del intervalo.

La incógnita x, representa a todo número real comprendido entre a y b. De forma tal que pueden presentarse cualquiera de las siguientes situaciones:

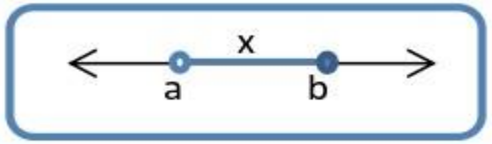
Intervalo Abierto = (a,b) $a < x < b$ Un conjunto



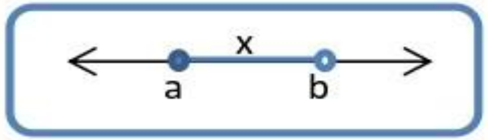
Intervalo Cerrado = [a,b] $a \leq x \leq b$ Un conjunto



Int. Semiabierto izquierda = (a,b] $a < x \leq b$ Un conjunto



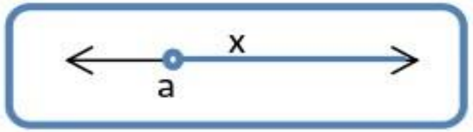
Int. Semiabierto derecha = [a,b) $a \leq x < b$ Un conjunto



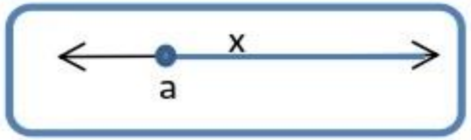
CONCEPTOS PREVIOS: Intervalos

Si uno de los extremos no es un número finito, lo simbolizamos por (∞) infinito. Se definen los intervalos infinitos de la siguiente manera:

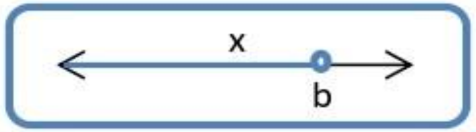
Intervalo = $(a,+\infty)$ $x > a$ Un conjunto



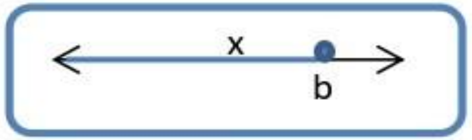
Intervalo = $[a,+\infty)$ $x \geq a$ Un conjunto



Intervalo = $(-\infty,b)$ $x < b$ Un conjunto



Intervalo = $(-\infty,b]$ $x \leq b$ Un conjunto



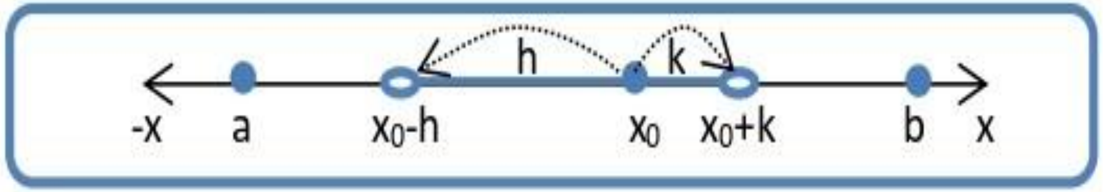
En el caso que tanto el extremo inferior y el extremo superior sean infinitos, se trata del conjunto de números reales $(-\infty,+\infty) = \Re$, si el conjunto está formado por un único punto "c" se lo simboliza utilizando llaves $\{c\}$ es un conjunto formado por un único punto. Este intervalo se denomina intervalo degenerado.

ENTORNO DE UN PUNTO: CONCEPTO

Entorno de un punto x_0

Un entorno de un punto $\mathbf{x = x_0}$ es un intervalo abierto de la forma $\mathbf{(x_0-h, x_0+k)}$ donde h y k son valores reales positivos distintos y muy pequeños que junto al punto definen los extremos del entorno. Simbolizamos a un entorno de un punto por: $\mathbf{E(x_0)}$

$$\boxed{E(x_0)= (x_0-h, x_0+k)}$$



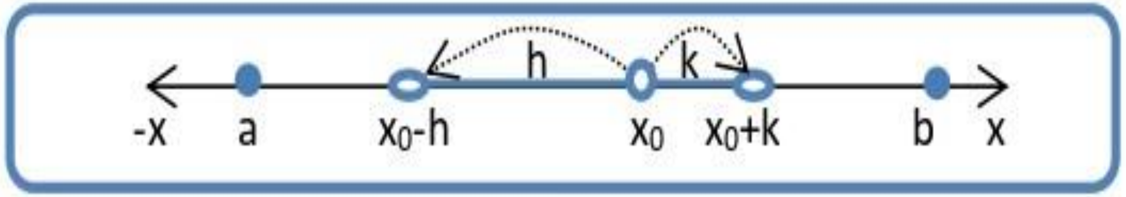
<u>Ejemplo:</u> Entorno de $x_0=3$ con $h=0.10$ y $k=0.15$ es igual a $E(x_0)= E(3)=(2.90 , 3.15)$

ENTORNO REDUCIDO: CONCEPTO

Entorno Reducido de un punto x_0

Un entorno reducido de un punto **$x = x_0$** es un entorno o intervalo cuya amplitud puede hacerse tan pequeña como se quiera y se excluye al punto. Es decir el punto no pertenece al entorno y lo marcamos como un punto hueco o sin sombrear. Se lo simboliza por **$E'(x_0)$**

$$E'(x_0)= (x_0-h,\ x_0) \cup (x_0\ ,\ x_0+k)$$



<u>Ejemplo:</u> Entorno de $x_0 = 3$ con $h=0.10$ y $k=0.15$ es igual a $E'(x_0) = E'(3)=(2.90\ ,\ 3\ ) \cup (3\ ,\ 3.15)$

ENTORNO SIMÉTRICO: CONCEPTO

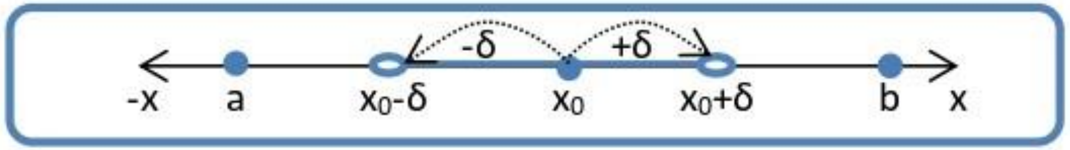
Entorno Simétrico de un punto x_0 y radio δ

Un entorno simétrico de un punto $\mathbf{x = x_0}$ y de **radio δ**, es un intervalo abierto de la forma $\mathbf{(x_0-\delta,\ x_0+\delta)}$ donde δ es un valor real positivo y muy pequeño, que junto al punto definen los extremos del entorno.

Simbolizamos a un entorno simétrico de x_0 de radio δ por: $\mathbf{E(x_0,\ \delta)}$

$$E(x_0, \delta) = (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

$$E(x_0, \delta):\ |x - x_0| < \delta$$



<u>Ejemplo:</u> Entorno de $x_0 = 3$ y radio $\delta = 0.01$ es igual a $E(x_0, \delta) = E(3, 0.01) = (2.99, 3.01)$

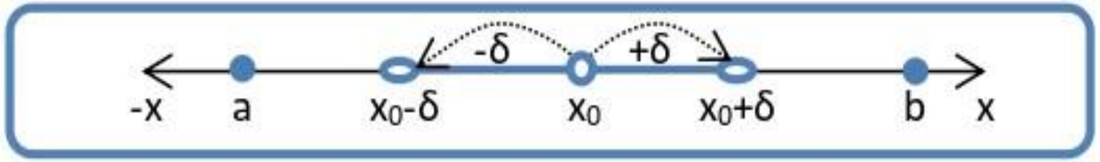
ENTORNO REDUCIDO Y SIMÉTRICO: CONCEPTO

Entorno Reducido y Simétrico de un punto x_0 y radio δ

Un entorno reducido y simétrico de un punto **$x = x_0$** y de **radio δ**, es un intervalo abierto de la forma **$(x_0-\delta, x_0+\delta)$** donde δ es un valor real positivo y muy pequeño, y se excluye al punto. Simbolizamos a un entorno reducido y simétrico de x_0 de radio δ por: **$E'(x_0, \delta)$**

$E'(x_0, \delta) = (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

$E'(x_0, \delta)$: $0 < |x - x_0| < \delta$

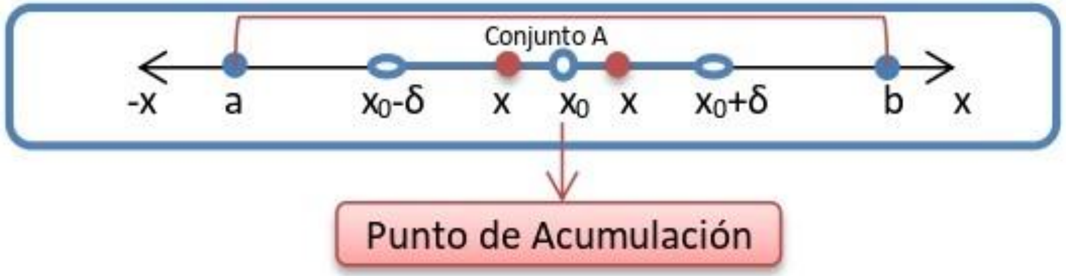


Ejemplo: *Entorno de $x_0 = 3$ y radio $\delta = 0.01$ es igual a $E'(x_0, \delta) = E'(3, 0.01) = (2.99, 3) \cup (3, 3.01)$*

PUNTO DE ACUMULACIÓN: CONCEPTO

Punto de Acumulación

Si A es un conjunto de puntos de la recta real, un punto x_0 **es un punto de acumulación** de A, si a todo entorno reducido de x_0 pertenece por lo menos un punto de A. El punto x_0 puede pertenecer o no al conjunto A. Pero la definición exige que en cualquier entorno del punto x_0 exista al menos otro punto. Observe el punto rojo en el gráfico.



En símbolos:

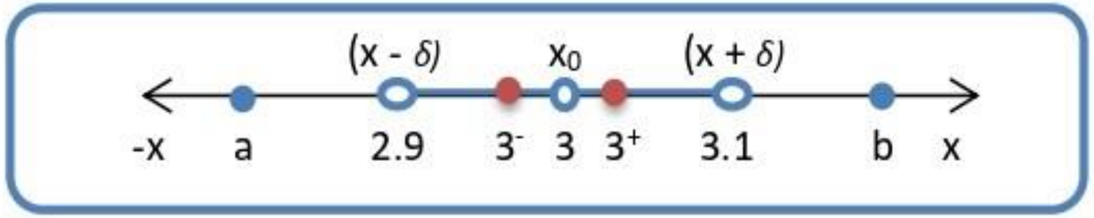
$$x_0 \text{ es un punto de Acumulación de A} \Leftrightarrow \forall E'(x_0, \delta) : \exists x / (x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta)$$

PUNTO DE ACUMULACIÓN: EJEMPLO

<u>Ejemplo:</u> Entorno de $x_0 = 3$ y radio $\delta = 0.1$ es igual a $E'(x_0, \delta) = E'(3, 0.1) = (2.9, 3) \cup (3, 3.1)$

Existe por lo tanto al menos un punto que pertenece al intervalo (2.9 , 3) y otro punto que pertenece al intervalo *(3 ,3.1)* muy cercanos al valor del punto de acumulación $x_0 = 3$, estos puntos son:

* **Uno por Derecha** = (3.00000…1) Lo simbolizaremos por **3^+ = 3.00000…1**
* **Uno por Izquierda** = (2.99999…9) Lo simbolizaremos por **3^- = 2.99999…9**



FUNCIÓN: CONCEPTO

Concepto de Función Real de Variable Real

*Una Función "**f**" es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento "**x**" de un conjunto Dominio, uno y solo un valor "**y**" de un conjunto Codominio. Donde el Dominio y el Codominio son subconjuntos del conjunto de números reales. En símbolos:*

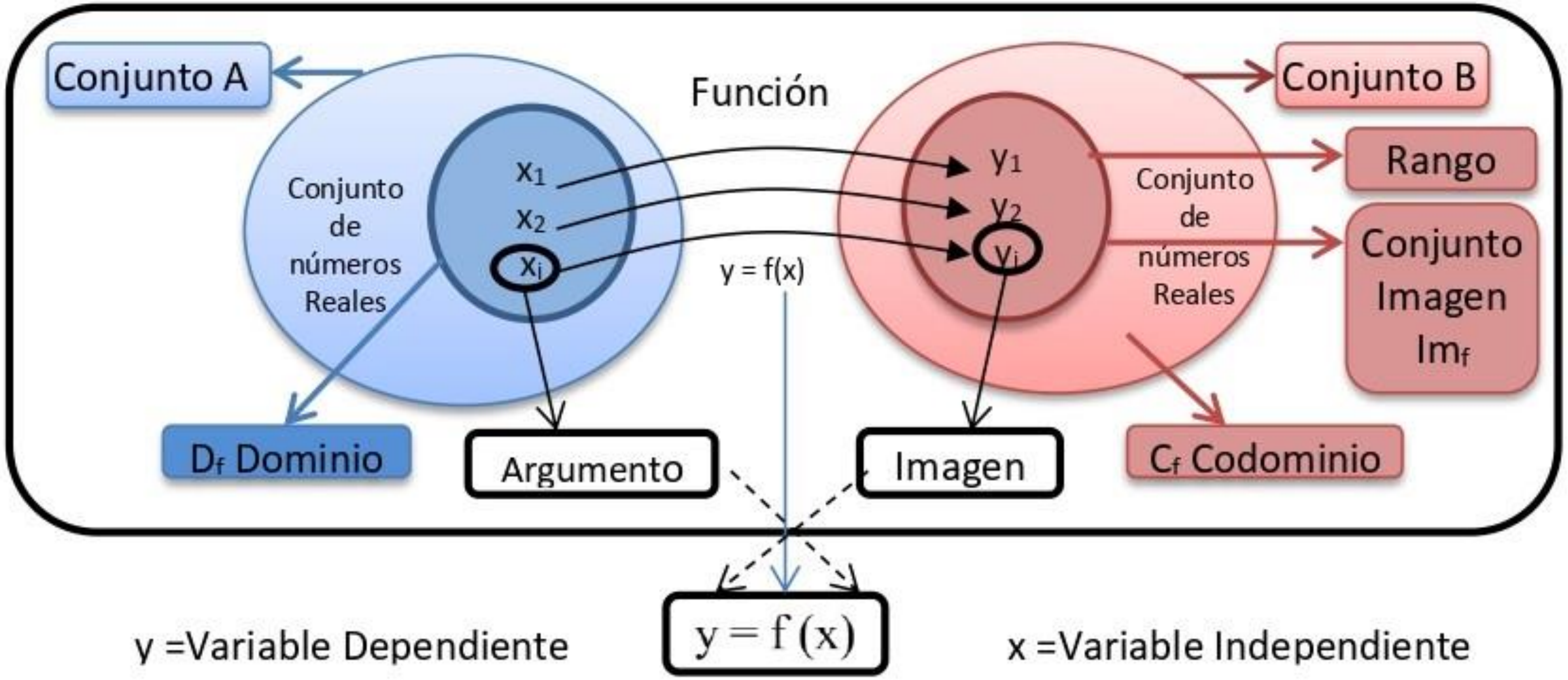
$$D_f = \{x/x \in R \wedge \exists\, y \in R \,/\, y = f(x)\}$$
$$C_f = \{y/y \in R \wedge \exists\, x \in R \,/\, y = f(x)\}$$

Trabajaremos únicamente con los números reales durante toda la asignatura. Por lo tanto definiremos una función real de variable real. Ello indica que el dominio y el Codominio serán:

$$\forall\, x \in (\text{Dominio } D_f \subset \text{Reales}),\ \exists\, y \in (\text{Codominio } C_f \subset \text{Reales})$$

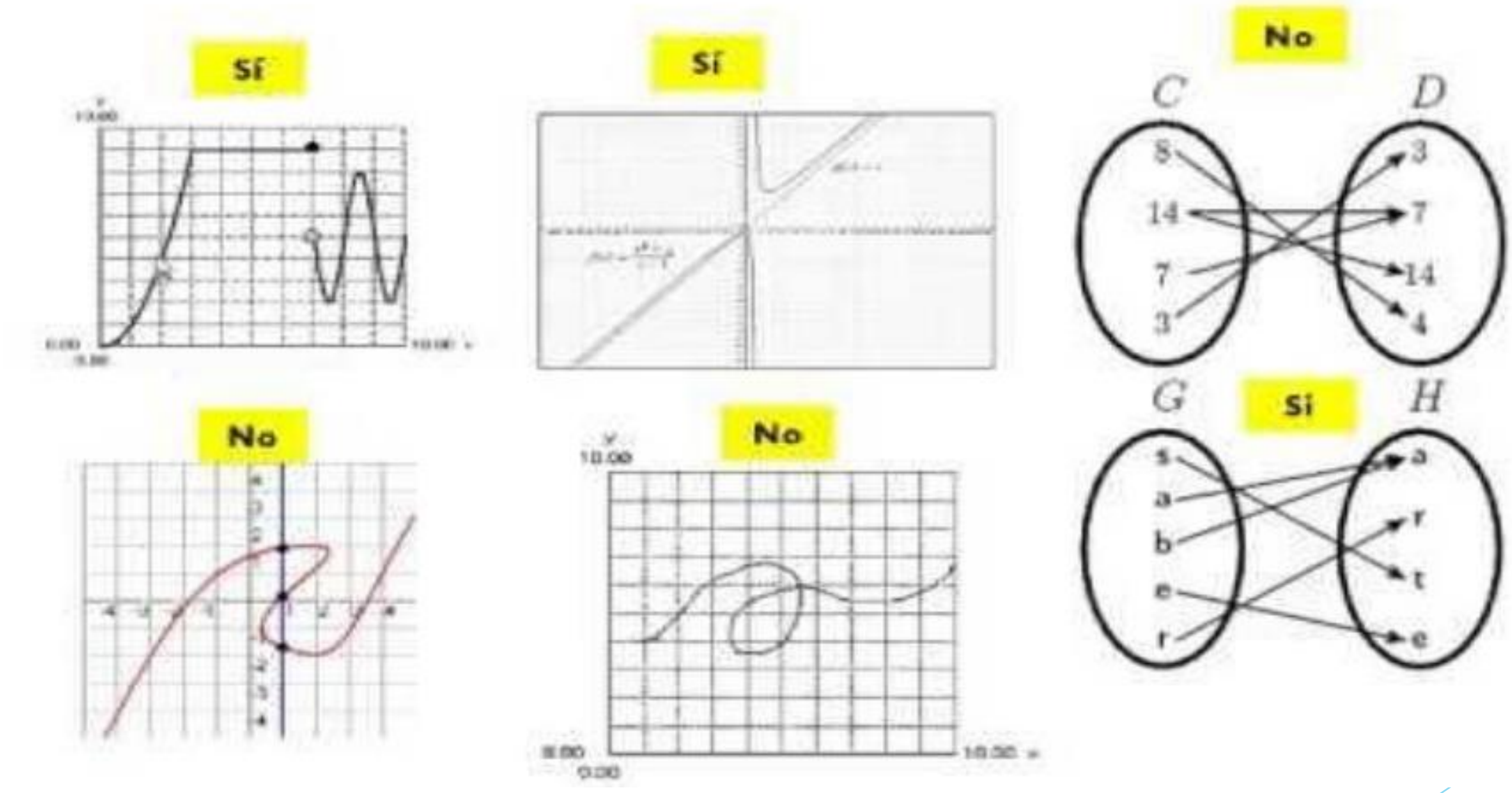
FUNCIÓN: CONCEPTO

El siguiente diagrama de Venn, nos permitirá recordar los conceptos que intervienen en una función real de variable real.



Matemática II
Comisión: MOYANO

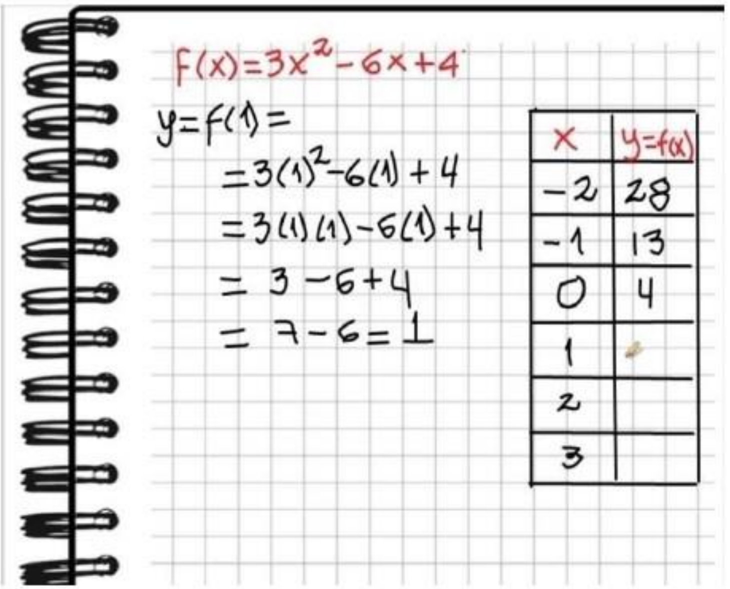
¿TODAS LAS RELACIONES SON FUNCIONES?

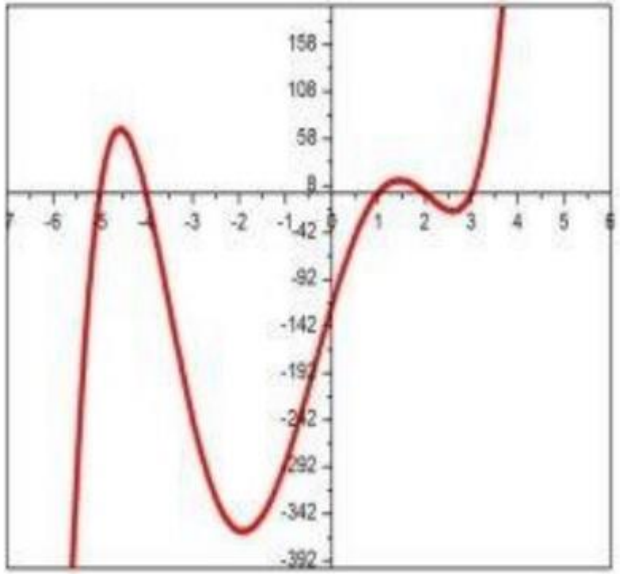


FUNCIÓN: REPRESENTACIÓN

Las funciones se pueden expresar de diferentes formas, a través de:

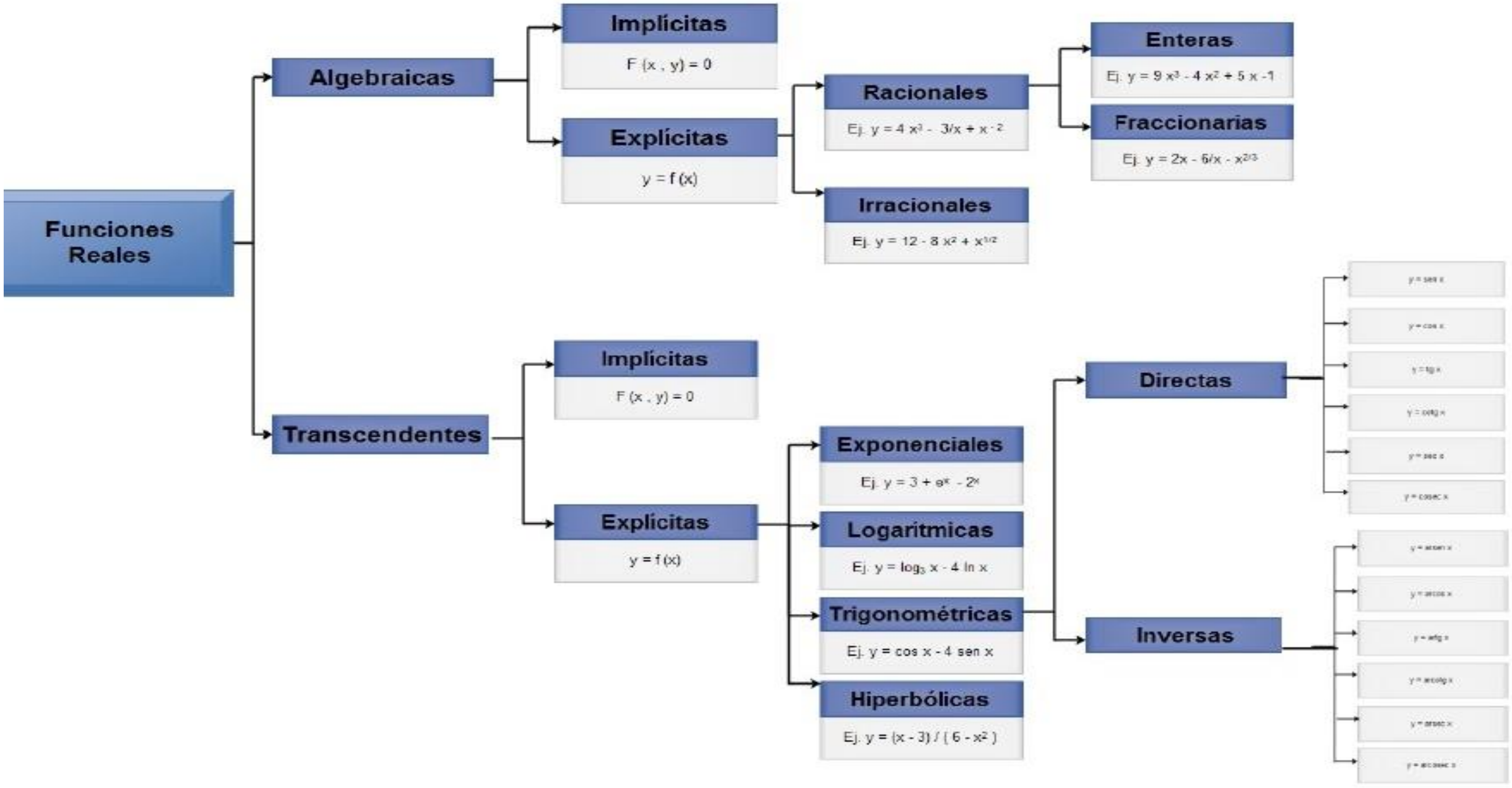
- Una ecuación (fórmula).
- Una tabla cartesiana.
- Un gráfico cartesiano.
- Con un diagrama, como los diagramas de Venn utilizados en el ejemplo anteriormente planteado.





Matemática II
Comisión: MOYANO

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES



LÍMITE FUNCIONAL

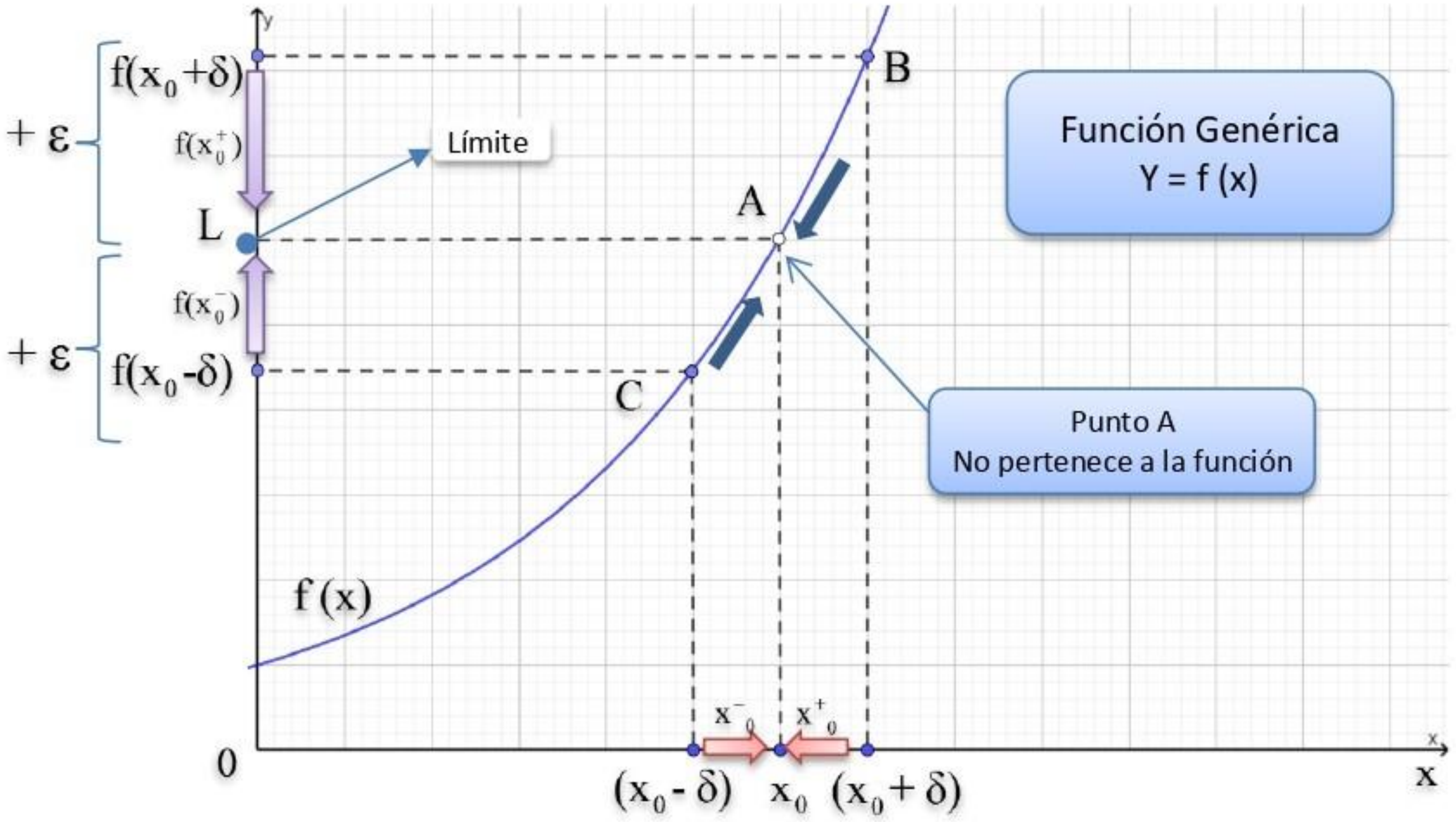
Se dice que la constante ***"L" es el límite*** *de la función y = f(x) cuando* ***"x tiende a al punto x_0"*** *si y solo si, para todo* ***"ε"*** *tan pequeño como se quiera, existe otro número* ***"δ"****, también positivo y arbitrariamente pequeño, tal que se verifique:*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad ; \text{para:} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Simbolizamos al límite de una función cuando x tiende al punto x_0 por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

LÍMITE FUNCIONAL



LÍMITES LATERALES

Límite Lateral por la Izquierda

Si el valor de (x_0^-) que se encuentra a la izquierda de x_0, asume una ordenada $f(x_0^-)$ y el mismo se aproximará en el eje de las ordenadas a un valor fijo que llamaremos (**L_i**).

$$L_i = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Límite Lateral por la Derecha

Si el valor de (x_0^+) que se encuentra a la derecha de x_0, asume una ordenada $f(x_0^+)$ y el mismo se aproximará en el eje de las ordenadas a un valor fijo que llamaremos (**L_d**).

$$L_d = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Si los límites laterales existen y el valor de $L_i = L_d$, entonces diremos que ese valor constante L es el límite de la función para cuando x tiende a x_0

$$L_i = L_d = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

LÍMITE FUNCIONAL: EJEMPLO

Si consideramos la función: $f(x) = x + 2$ donde el dominio de esta función son todos los números reales.

Veamos los valores que toma la función a medida que x toma valores cercanos a "*a*=2":

Si le damos a x valores menores a 2 muy cercanos:

x	**f(x)=x+2**
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999

Observamos que, a medida que nos acercamos a 2, la función se acerca cada vez más a 4.

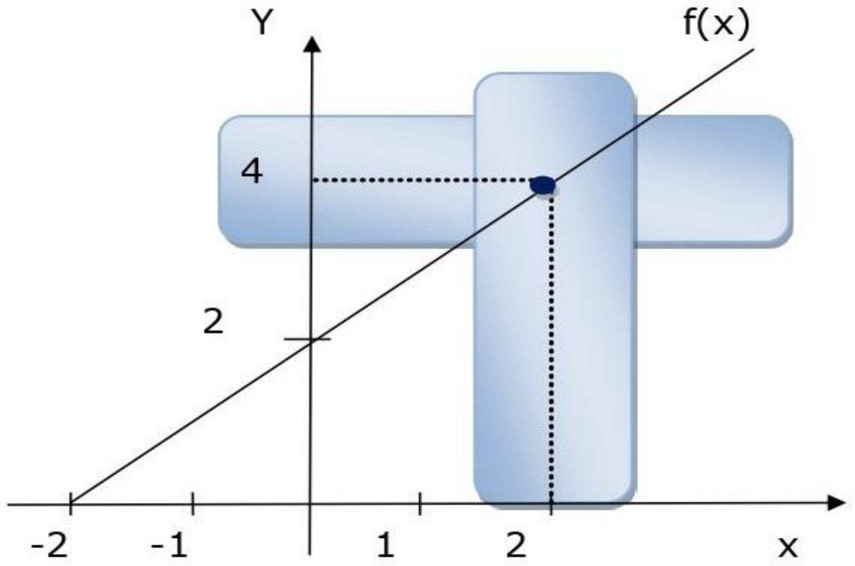
Ahora le damos valores a x mayores que 2 pero muy cercanos:

x	**f(x)=x+2**
3	5
2,5	4,5
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001

Observamos que, a medida que nos acercamos a 2, la función se acerca cada vez más a 4.

LÍMITE FUNCIONAL: EJEMPLO

Ahora veamos esto en el gráfico de la función:



Expresado de otra manera sería: $Lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

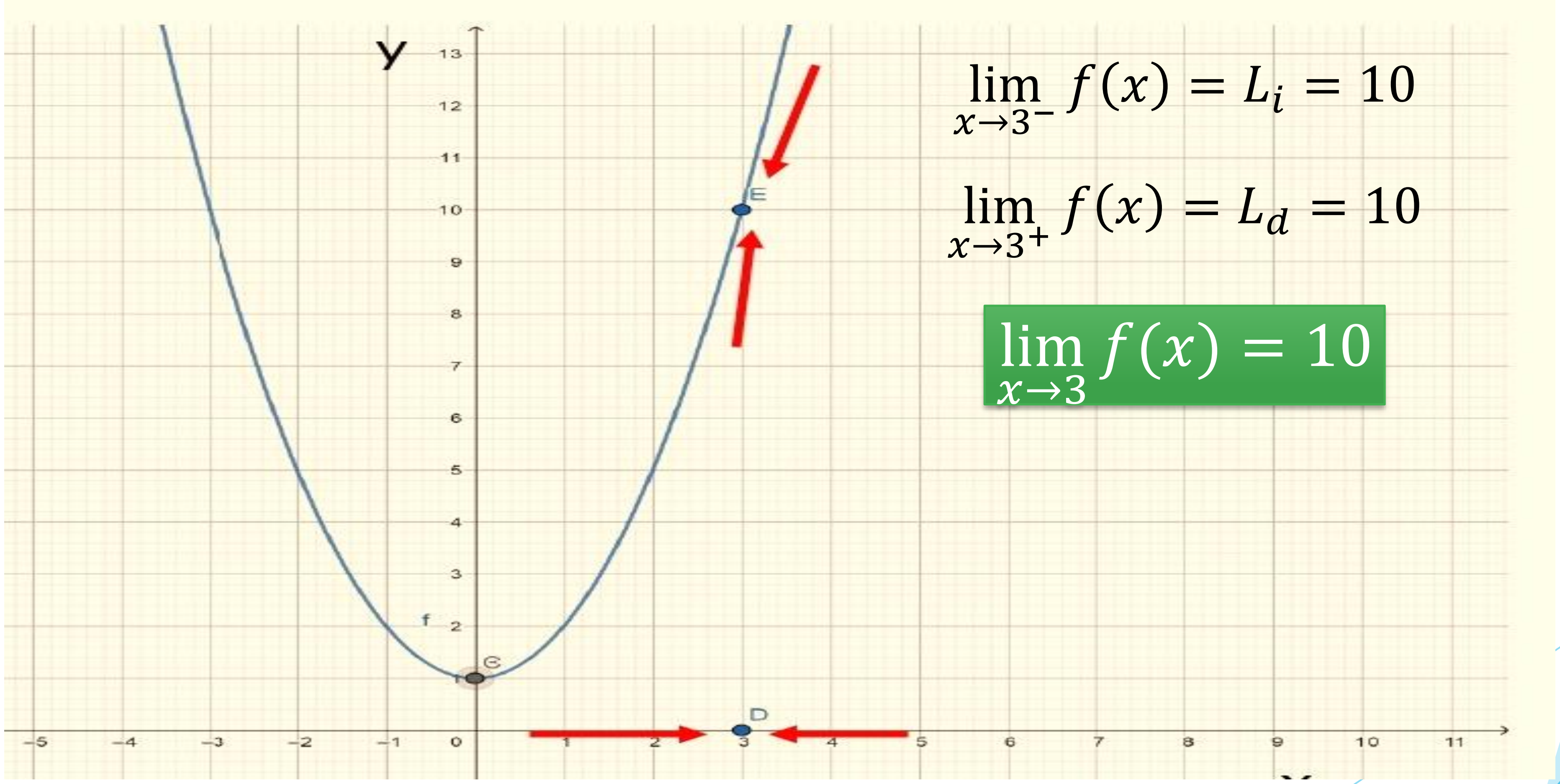
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

$$\boxed{L_i = L_d}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 4}$$

LÍMITE FUNCIONAL: EJEMPLO

$$f(x) = x^2 + 1$$

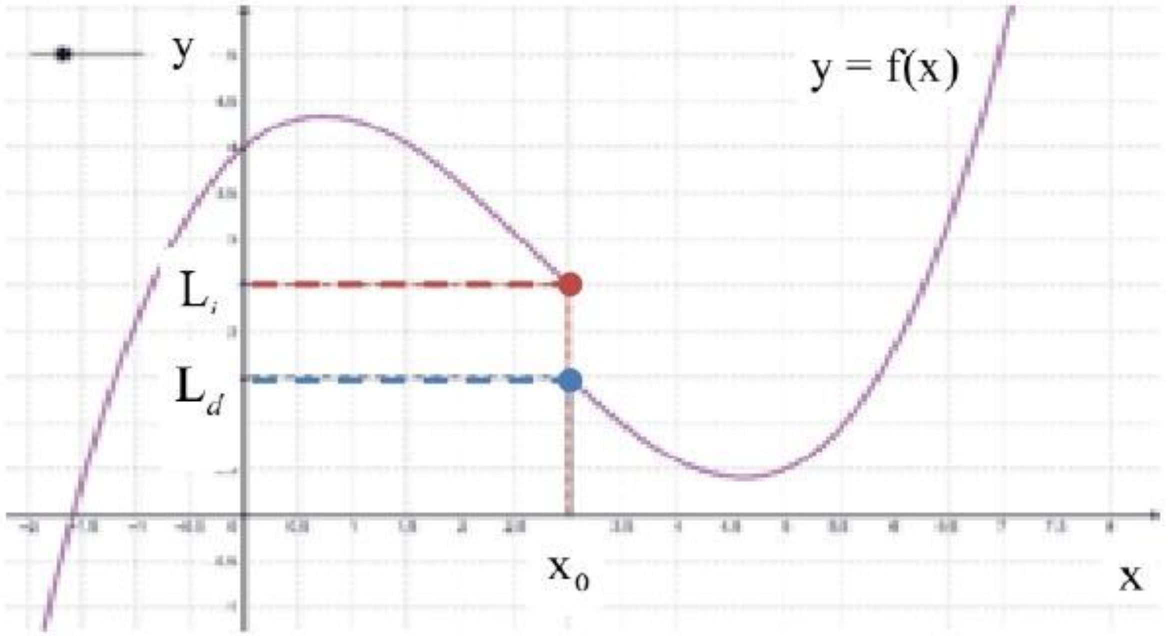


$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = L_i = 10$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = L_d = 10$$

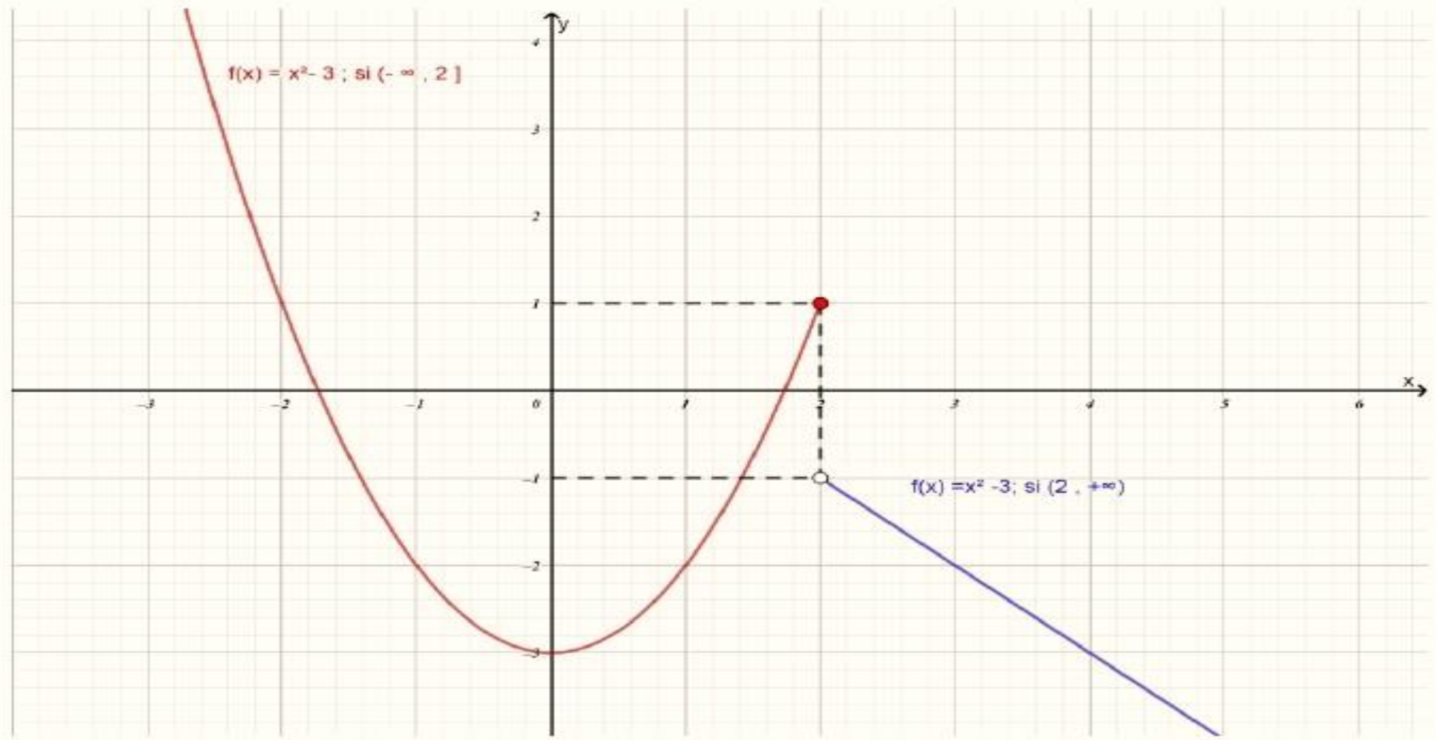
$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10$$

LÍMITES LATERALES



$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } (x \to x_0^+) \text{ por la derecha entonces } \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_d \\ \text{Si } (x \to x_0^-) \text{ por la izquierda entonces } \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_i\end{array}\right\} L_d \neq L_i \Rightarrow \nexists\ L$$

LÍMITES LATERALES: EJEMPLO



$$L_i = \lim_{x \to 2^-} f(x) = +1 \qquad L_d = \lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$$

$$L = \lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$$

LÍMITE EN EL INFINITO

Hemos definido el límite como aquella constante a la cual tiende la función cuando x tiende a un punto de acumulación x_0.
Pero ahora vamos a ampliar el concepto para cuando x tienda a un valor positivo sumamente grande o a un valor negativo sumamente grande.

Por lo tanto podemos calcular los siguientes límites sobre una función definida sobre todo el conjunto de números reales:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

En ambos casos definimos como el límite de la función cuando x tiende a infinito de la siguiente manera:

*Se dice que la constante **"L" es el límite** de la función y = f(x) cuando **"x tiende a al infinito"** si y solo si, para todo **"ε"** tan pequeño como se quiera, existe otro número **"N"**, también positivo y arbitrariamente grande, tal que se verifique:*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad ; \text{para:} \quad |x| > N$$

Simbolizamos al límite de una función cuando x tiende al infinito por:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

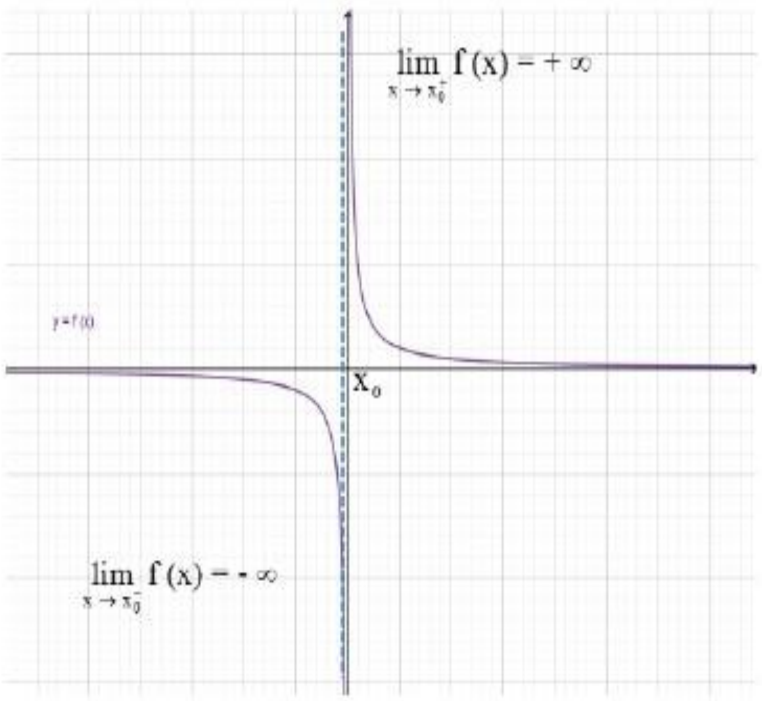
LÍMITE INFINITO

Se dice que la función y = f(x) tiene por límite a infinito cuando ***"x tiende a un punto x_0"*** *si y solo si, para todo número* ***"M"*** *positivo y tan grande como se quiera, existe otro número* ***"δ"***, *también positivo y arbitrariamente pequeño, tal que se verifique:*

$$|f(x)| > M \quad ; \text{para:} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Simbolizamos al límite de una función cuando x tiende al punto x_0 por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \infty$$



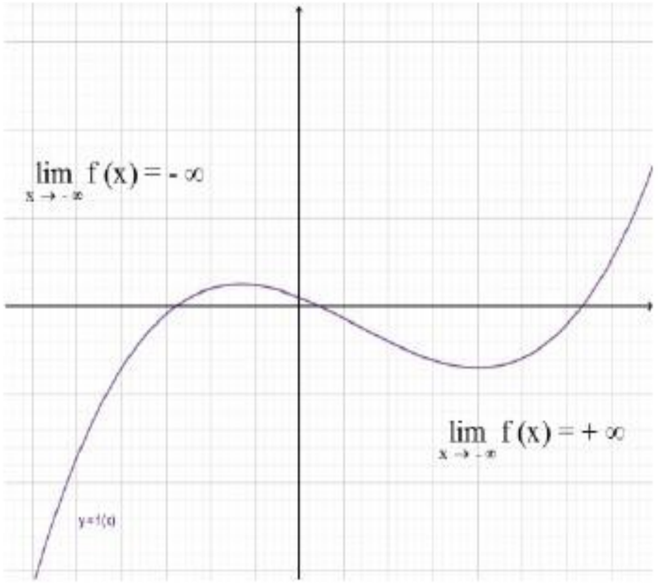
LÍMITE INFINITO

Se dice que la función y = f(x) tiene por límite a infinito cuando la variable ***"x tiende al infinito"*** *si y solo si, para todo número* ***"M"*** *positivo y tan grande como se quiera, existe otro número* ***"N"****, también positivo y arbitrariamente grande, tal que se verifique:*

$$|f(x)| > M \quad ; \text{para:} \quad |x| > N$$

Simbolizamos al límite de una función cuando x tiende al infinito negativo o positivo por:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty = \infty$$



Matemática II
Comisión: MOYANO

Llegamos al final de la clase de hoy, en la próxima continuamos con la Unidad 1

Bibliografía obligatoria:

- Stewart, James (2007): “Cálculo Diferencial e Integral”. 2° Edición. Editorial Thompson. México.
- Casparri de Rodriguez, María T. (2001): “Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas”. Editorial Macchi. Argentina.

carina.moyano@unc.edu.ar