日置 場の量子論 I.7 to II.2

川合玲央

2025 年 5 月 13 日

$\hat{A}$ と A が混ざっています．ごめんね．

I.7 量子系の時間発展の記述

3. 相互作用表示（朝永–Dirac 描像）[1] [2]

相互作用の寄与が小さく，自由状態にほとんど近いような場合の運動は**摂動（Perturbation）**計算で知ることができる．これに適した表示を導入しよう．

Schrödinger 描像では状態のみが（時刻 $t = t_0$ で量子化した量子状態 $|\Psi_0\rangle$ を用いて）

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi_0\rangle \tag{1}$$

のように時間発展を担い，Heisenberg 描像では演算子のみが（時刻 $t = t_0$ で量子化した演算子 $Q(t_0)$ を用いて）

$$Q_{\mathrm{H}}(t) = e^{iH(t-t_0)} Q(t_0) e^{-iH(t-t_0)} \tag{2}$$

と時間発展を担った．どちらで計算しても結果（確率振幅）は

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{H}}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{H}}\langle\Psi_f|\Psi_0\rangle \\ &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f| e^{-iH(t_f-t_i)} |\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f| e^{-iH(t_f-t_0)} |\Psi_0\rangle\end{aligned} \tag{3}$$

と不変であった．もちろんこれは（量子化した時刻における状態 $|\Psi_0\rangle$ から時間発展した後の）始状態 $|\Psi_i\rangle$ から系が時間発展して終状態 $|\Psi_f\rangle$ となるときの確率振幅を表している．

ただこれらの表示は H の中に相互作用項 H_{I} が含まれる場合，上手い表示ではない．演算子の時間依存性は全 Hamiltonian で決定されるため，これが自由場の場合と異なり不明（相互作用項の入れ方により様々）だからである．そこで

$$\hat{H} |\Psi(t)\rangle = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Psi(t)\rangle \,{}^{*1} \tag{4}$$

に立ち戻って考える．

定義 0.1：相互作用表示での時間発展

時刻 $t = t_0$ において，Hamiltonian を

$$H = H_0 + H_{\mathrm{I}} \tag{5}$$

と自由粒子の Hamiltonian H_0 と相互作用項 H' に分ける．このとき時間発展を

$$\begin{gathered}A_{\mathrm{I}}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} A(t_0) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)},\ i\frac{\partial A_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t} = [A_{\mathrm{I}}(t), H_0] \\ i\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} = \hat{H}'_{\mathrm{I}}(t) |\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}},\ \hat{H}'_{\mathrm{I}}(t) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}\end{gathered} \tag{6}$$

と表すことにする．

---

*1 このまま進めると，Lorentz 不変で無くなるらしい [2, p.128]．なぜ？

もちろん状態は期待値が表示に依らないことから

$$\begin{aligned}{}_{\mathrm{I}}\langle\Phi(t)|A_{\mathrm{I}}(t)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Phi(t)|A(t_0)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Phi(t)|e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}A_{\mathrm{I}}(t)e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}\end{aligned} \tag{7}$$

で比較して

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\Psi_0\rangle. \tag{8}$$

これを時間で微分すると

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= -H_0e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} + e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= -H_0e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} + e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}H|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}{}^{*2} \\ &= -H_0e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} + e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}(H_0+H')|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}H'e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}\end{aligned} \tag{9}$$

となって式 (6) の後者二式を満足する．相互作用の入った摂動計算で基本的な役割を果たす式である．

このように演算子は自由 Hamiltonian H_0 による時間依存性をもつ．このとき自由粒子に対する展開がそのまま使え[*3]，式 (6) の第一式を時間微分する[*4]と第二式（自由粒子に対する Heisenberg の運動方程式）が得られることは明らかだろう．状態は相互作用項 H' による時間依存性をもつ．つまり $H' \to 0$ では自由粒子の Heisenberg 描像になり，また相互作用表示は先の二表示の中間的な表示となっていることがわかる．これが，特に場の量子論における，摂動論と上手く適合する．

この描像における始状態と終状態を構成しよう．もちろん Heisenberg 描像と同様にして

$$\begin{aligned}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{I}} &= a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t_i)a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2,t_i)\cdots a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n,t_i)|0\rangle \\ |\Psi_f\rangle_{\mathrm{I}} &= a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t_f)a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2,t_f)\cdots a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_m,t_f)|0\rangle \\ a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{k},t) &= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}\end{aligned} \tag{10}$$

とかける．そこで式 (3) の確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)$ を考えると

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{I}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{I}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{I}} \\ &= {}_{\mathrm{I}}\langle\Psi_f|e^{iH_0(t_f-t_0)}|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= {}_{\mathrm{I}}\langle\Psi_f|e^{iH_0(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi(t_i)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= {}_{\mathrm{I}}\langle\Psi_f|e^{iH_0(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0(t_i-t_0)}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{I}} \\ &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= \mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)\end{aligned} \tag{11}$$

となり，やはり表示に依らないことがわかる．

生成消滅演算子の時間発展をみてみよう．

$$a_{\mathrm{I}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k},t) = e^{iH_0(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{-iH_0(t-t_0)} = a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{\pm ik^0(t-t_0)} \sim a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}) \tag{12}$$

位相差は確率振幅の二乗には寄与しないから $a_{\mathrm{I}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k},t)$ と $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ は同じ演算子として扱う．これより場も

$$\phi_{\mathrm{I}}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{k},t)e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right] \tag{13}$$

とかける．

[*2] 式 (4) を使ったことに注意する．$\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = -iHe^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ はまずい気がしますが，どうでしょう？ $\frac{\partial}{\partial t}H = \frac{\partial}{\partial t}H' \neq 0$ では？
[*3] 自由粒子に対する Heisenberg 描像の展開係数（生成消滅演算子）が，相互作用を入れたときも同様に使えることは大きな利点である．
[*4] ただし A が t に陽に依存しないことを仮定する．

注意 0.2

Hamiltonian の相互作用項は明らかに自由粒子に対する Heisenberg 表示の演算子だけでかける．

三つの表示の比較

三つの法事における時間発展の記述について比較してみる．

Schrödinger 描像

状態を構成するために用いられる演算子は時刻に対して不変であり，時刻 $t = t'$ における量子状態 $|\psi(t')\rangle$ を構成した後は Schrödinger 方程式に従って系の状態が時間発展する．

Heisenberg 描像

各時刻 $t = t'$ における量子状態 $|\psi(t')\rangle$ は時刻 t が変化しても変わることはなく，$|\psi(t')\rangle$ のままである．ただし（観測・比較するために）新たな時刻 $t = t''$ で状態を構成するために用いられる演算子は $a^\dagger(t'') \neq a^\dagger(t')$ と変化している．ただし $a^\dagger(t')$ とは $t = t'$ で状態構成に用いた演算子である．

相互作用表示

Tips 0.3：各表示における場と確率振幅

場の演算子

$$
\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} \\
\phi_{\mathrm{H}}(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{k},t)e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} \\
a_{\mathrm{H}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k},t) &= e^{iH(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{-iH(t-t_0)} \\
\phi_{\mathrm{I}}(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{k},t)e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right] \\
a_{\mathrm{I}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k},t) &= e^{iH_0(t-t_0)}a^{(\dagger)}e^{-iH_0(t-t_0)}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

確率振幅

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f|\, e^{-iH(t_f-t_i)}\,|\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} \\
\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{H}}\langle \Psi_f|\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}} \\
\mathcal{A}_{\mathrm{I}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{I}}\langle \Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{I}} \\
&= {}_{\mathrm{I}}\langle \Psi_f|\, e^{iH_0(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0(t_i-t_0)}\,|\Psi_i\rangle_{\mathrm{I}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

量子状態

$$
\begin{aligned}
|\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} &= a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)\,|0\rangle \\
|\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}} &= a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t_i)a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2,t_i)\cdots a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n,t_i)\,|0\rangle \\
|\Psi_i\rangle_{\mathrm{I}} &= a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t_i)a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2,t_i)\cdots a_{\mathrm{I}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n,t_i)\,|0\rangle
\end{aligned}
\tag{16}
$$

II.1 摂動論で計算する量

素粒子現象では主に散乱（scattering），衝突（collision）の過程と束縛状態（bound state）を取り扱う．I.6 では $t \to \pm\infty$ で相互作用が消えるという条件を仮定したが，束縛状態（定常でポテンシャルが消えないような状態）が絡むような場合はこれが許されないためより複雑になる．本ゼミでは簡単のために，主として始状態と終状態に束縛されない自由状態をとるものとする．

実験では，始状態として運動量が確定した粒子群を用意し，終状態においても運動量が確定した生成粒子を調べるのが一般的である．これを解析するには，運動方程式の解の完全系（展開に用いる状態）として運動量確定状態（平面波など）をとり，それからすべての状態を対応する生成演算子と真空 $|0\rangle$ を使って構成し，その時間発展と他状態への遷移確率振幅

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f) \tag{17}$$

などを計算すればよい．

散乱理論 [3]

ここでは散乱理論，特に散乱による状態の遷移を表す S(cattering) 行列の理論についてに記述する．多くの粒子からなる散乱過程は複雑であり，特にその中間状態をいちいち特定して計算するのは骨が折れる．そこで散乱による始状態から終状態の遷移を行列の形でまとめて記述する．これを S 行列とよぶ．

量子力学における S 行列

Hamiltonian を

$$H = H_0 + V(x),\ \ H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{18}$$

とする．ポテンシャル $V(x)$ は遠方で消え，例としてパリティ不変な場合を考える：

$$V(x) = 0 \ (|x| > x_0),\ V(x) = V(-x). \tag{19}$$

運動量 $\hat{p}$，自由粒子のハミルトニアン H_0 の固有状態 $\psi_k(X) \coloneqq e^{ikx}$ を考えると

$$\hat{p}\psi_k(x) = k\psi_k(x),\ H_0\psi_k(x) = E_k\psi_k(x)\ \left(E_k = \frac{k^2}{2m}\right) \tag{20}$$

が成り立つ．$H = H_0$ のとき，$t = 0$ で $\psi_k(x)$ であるような系の時間発展は

$$\psi_k(x,t) = e^{-iE_kt}\psi_k(x) \tag{21}$$

とかけて，ψ_k は $k > 0$ で x 正方向，$k < 0$ で x 負方向に伝播する平面波を表す．

$|x| > x_0$ では $V(x) = 0$ なので，この領域で Schrödinger 方程式の解は

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < -x_0) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (x > x_0) \end{cases} \tag{22}$$

$(k > 0)$ とかける．Ae^{ikx}, De^{-ikx} で表される自由粒子がポテンシャルで散乱され，Be^{-ikx}, Ce^{ikx} で表される自由粒子として遠方へ向かう．$t \to \pm\infty$ で粒子はポテンシャルの影響を受けない定常状態にあるはずだから，その基底を $e^{\pm ikx}$ とすると，この散乱過程は 散乱前の状態 (A, D) $\to$ 散乱後の状態 (B, C) という状態の遷移で記述される．これを

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \tag{23}$$

と表した時の行列 S が S 行列となる．もちろん S 行列はユニタリ行列である．

II.2 場の理論での S 行列

II.3 伝播関数と時間順序積

Weyl cones are usually rotationally symmetric and their opening angles are equal.

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda} + 2M\bar{\Psi}\gamma_5\Psi. \tag{24}$$

参考文献

[1] 日置善郎. 場の量子論–摂動計算の基礎–. 吉岡書店, 第 3 版, 2022.

[2] Ian J.R. Aitchison and Anthony J.G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Volume 1 : From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. CRC Press, 2024.

[3] 佐藤勇二. 弦理論と可積分性 h. SGC ライブラリ, No. 165. サイエンス社, 第 2 版, 2021.