日置 場の量子論 I.7 to II.2

川合玲央

2025 年 5 月 11 日

I.7 量子系の時間発展の記述

3. 相互作用表示（朝永–Dirac 描像）

相互作用の寄与が小さく，自由状態にほとんど近いような場合の運動は**摂動（Perturbation）**計算で知ることができる．これに適した表示を導入しよう．

時刻 $t = t_0$ において，Hamiltonian を

$$H = H_0 + H_I \tag{1}$$

と分ける．Schrödinger 描像では状態のみが（時刻 $t = t_0$ で量子化した量子状態 $|\Psi_0\rangle$ を用いて）

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t-t_0)}\,|\Psi_0\rangle \tag{2}$$

のように時間発展を担い，Heisenberg 描像では演算子のみが（時刻 $t = t_0$ で量子化した演算子 $Q(t_0)$ を用いて）

$$Q_{\mathrm{H}}(t) = e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)} \tag{3}$$

と時間発展を担った．どちらで計算しても結果（確率振幅）は

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{H}}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{H}}\langle\Psi_f|\Psi_0\rangle = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|\,e^{-iH(t_f-t_i)}\,|\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|\,e^{-iH(t_f-t_0)}\,|\Psi_0\rangle \tag{4}$$

と不変であった．もちろんこれは（量子化した時刻における状態 $|\Psi_0\rangle$ から時間発展した後の）始状態 $|\Psi_i\rangle$ から系が時間発展して終状態 $|\Psi_f\rangle$ となるときの確率振幅を表している．

ただこれらの表示は H の中に相互作用項 H_I が含まれる場合，上手い表示ではない．演算子の時間依存性は全 Hamiltonian で決定されるため，これがそこで

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathrm{T}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{T}} \\
&= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|\,e^{iH_0(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH(t_i-t_0)}\,|\Psi_i\rangle_{\mathrm{T}} \\
&= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|\,e^{-iH_I(t_f-t_i)}\,|\Psi_i\rangle_{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{5}$$

三つの表示の比較

三つの法事における時間発展の記述について比較してみる．

II.1 摂動論で計算する量

素粒子現象では主に散乱（scattering），衝突（collision）の過程と束縛状態（bound state）を取り扱う．I.6 では $t \to \pm\infty$ で相互作用が消えるという条件を仮定したが，束縛状態（定常でポテンシャルが消えないような状態）が絡むような場合はこれが許されないためより複雑になる．本ゼミでは簡単のために，主として始状態と終状態に束縛されない自由状態をとるものとする．

実験では，始状態として運動量が確定した粒子群を用意し，終状態においても運動量が確定した生成粒子を調べるのが一般的である．これを解析するには，運動方程式の解の完全系（展開に用いる状態）として運動量確定状態（平面波など）をとり，それからすべての状態を対応する生成演算子と真空 $|0\rangle$ を使って構成し，その時間発展と他状態への遷移確率振幅

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f) \tag{6}$$

などを計算すればよい．

散乱理論

ここでは散乱理論，特に散乱による状態の遷移を表す S(cattering) 行列の理論についてに記述する．多くの粒子からなる散乱過程は複雑であり，特にその中間状態をいちいち特定して計算するのは骨が折れる．そこで散乱による始状態から終状態の遷移を行列の形でまとめて記述する．これを S 行列とよぶ．

ハミルトニアンを

$$H = H_0 + V(x),\ H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{7}$$

とする．ポテンシャル $V(x)$ は遠方で消え，例としてパリティ不変な場合を考える：

$$V(x) = 0\ (|x| > x_0),\ V(x) = V(-x). \tag{8}$$

運動量 $\hat{p}$，自由粒子のハミルトニアン H_0 の固有状態 $\psi_k(X) := e^{ikx}$ を考えると

$$\hat{p}\psi_k(x) = k\psi_k(x),\ H_0\psi_k(x) = E_k\psi_k(x)\ \left(E_k = \frac{k^2}{2m}\right) \tag{9}$$

が成り立つ．$H = H_0$ のとき，$t = 0$ で $\psi_k(x)$ であるような系の時間発展は

$$\psi_k(x, t) = e^{-iE_k t}\psi_k(x) \tag{10}$$

とかけて，ψ_k は $k > 0$ で x 正方向に伝播する平面波，$k < 0$ で x 負方向に伝播する平面波を表す．

$|x| > x_0$ では $V(x) = 0$ なので，この領域で Schrödinger 方程式の解は

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < -x_0) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (x > x_0) \end{cases} \tag{11}$$

$(k > 0)$ とかける．

II.2 場の理論での S 行列

II.3 伝播関数と時間順序積

Weyl cones are usually rotationally symmetric and their opening angles are equal.

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda} + 2M\bar{\Psi}\gamma_5\Psi. \tag{12}$$

参考文献

[1] 文献情報

[2] 文献情報