

ホログラフィック超伝導の進展から

広島大学 素粒子ハドロン研究室 川合玲央

概要

本記事ではホログラフィー原理による超伝導現象の解析の試みと、特にその近年の進展について紹介します。ホログラフィー原理とは重力理論とゲージ理論が等価であるという主張であり、量子重力理論の構築への足がけとして期待されている枠組みです。そんな熱い期待^{*1}がかけられているホログラフィー原理は、実はその端緒を弦理論にもちます。にもかかわらず弦理論がよく言われる検証不可能性^{*2}にとらわれず、実際に現実の観測量と結びつける研究が多数行われています。よく挙げられる例としてはクォーク・グルーオン・プラズマ [1, 2] や超伝導 [3, 4] があります。特に超伝導に関しては近年大きな発展があり、ホットトピックと言えると思います^{*3}，ということで今回は超伝導（正確には超伝導っぽいもの）のホログラフィー原理を用いた解析を見ていきましょう。

1 ホログラフィー原理

皆さんはホログラフィー原理，もしくは AdS/CFT 対応という言葉聞いたことがあるでしょうか？ AdS/CFT 対応ともよばれ、 $d+2$ 次元の重力理論と $d+1$ 次元のゲージ理論が等価になるという主張です。これは光学における 2 次元平板に 3 次元像の情報が埋め込まれているホログラムにちなみこう呼ばれています。1997 年に

^{*1} 筆者の主観です。

^{*2} 弦理論の典型的なエネルギースケールは 10^{19} GeV 程度であり、現在稼働している加速器のエネルギースケールは 10^4 GeV 程度です。かなりの差がありますね。この事実をもってして弦理論は現実的な観点から検証不可能であると言われたりすることがあります。ただ高エネルギースケールの弦理論から示唆される結果は、弦理論それ自体の検証ができなくとも我々がよく知っている現実的なスケールの物理も含んでいると期待しているわけですから、それら低エネルギー有効理論に対する制限を与えるなど多くの場面で有用です。ホログラフィー原理もその一種だと筆者は思っています。また string phenomenology という分野もあると聞きますが、筆者はその有用性と詳細を知らないなのでこれには言及しません。

^{*3} 筆者の主観です。

Maldacena により最初の例 [5] が示され、以降多くの論文が弦理論の主戦場である hep-th に限らず様々な分野で投稿されています。ここではそのホログラフィー原理に関して簡単に概観していこうと思います*4.

ホログラフィー原理とはバルクと呼ばれる $d+2$ 次元の反 de Sitter (AdS) 時空*5 上の重力理論が、その時空の境界にある $d+1$ 次元の共形場理論 (CFT)*6 と等価であるという主張です。この対応の強力な点は、対応する 2 つの理論の結合の強さが逆転する点にあります。境界の場の量子論が計算が非常に難しい強結合の状態にあるとき、バルクの重力理論は、我々がよく知っている弱結合（つまり古典重力）の状態に対応します。つまり我々がこれまで歯が立たなかった強結合な量子多体系の問題を、より簡単な一般相対性理論の計算に「翻訳」して解くことができます*7. ホログラフィー原理に対する証明はないものの、多くの例が計算して確かめられており、hep-th の文脈ではいくぶん信じられている推測だと思います。

ここで理論が等価であることの意味を具体的に述べておくと、これは 2 つの理論における分配関数が一致していることを指します。具体的にはよく GKP–Witten 関係式 [10, 6]

$$\exp(iS_{\text{tot}}[J]) = \left\langle \exp \left[i \left(S_{\text{YM}} + \int d^{d+1}x J|_{\text{boundary}}(x) \mathcal{O}(x) \right) \right] \right\rangle \quad (1.1)$$

が使われ、2 つの理論の物理量を結びつけます*8. バルク中の場合 $\mathcal{J}(x)$ が境界上の物

*4 ページ数と筆者の力不足によりほとんどお話になっています。真面目に議論と計算を追うなら [6, 7, 8, 9] あたりを参照してください。

*5 AdS 時空とは、負の定曲率を持つアインシュタイン方程式の真空解です。一方で我々の宇宙は 0 より少し大きい曲率をもつと考えられています。

*6 共形場理論とは、スケール変換に対して対称性をもつ場の量子論のことです。素粒子物理学だけでなく、物性物理学における相転移など様々な場面に現れる普遍的な理論です。

*7 量子重力理論の構築に向けた研究ではこの関係を逆に使い、重力が十分強いときの重力理論を弱結合の場の量子論を使って解析します。

*8 ホログラフィー原理や GKP–Witten のような関係式は超弦理論における閉弦と開弦の間にある双対性から示唆されます。弦理論はその名の通り、1 次元の自由度をもつ弦を基本的対象とする理論のことで、0 次元の質点からなる従来の素粒子理論から自由度が増えている分、様々なことを表現できるようになります。素粒子物理学における一つの目的はすべての事象を説明するような統一理論の構築にあります。現状の理論では 4 つある基本相互作用のうち重力とそれ以外の相互作用についての理論をうまく整合して組み合わせることができていません。これは重力の量子化がこれまでの手法ではうまくいかないことに起因します。（ここではこれ以上触れませんが、歴史を含めたこれに関する話題は [11] が詳しいと思います。）現在明確な実験事実等はないものの、これを解決する統一理論として超弦理論は期待されています。ということは我々の知っている物理は弦理論に低エネルギー有効理論として含まれているはずで、弦理論の基本構成要素である弦には両端がつか

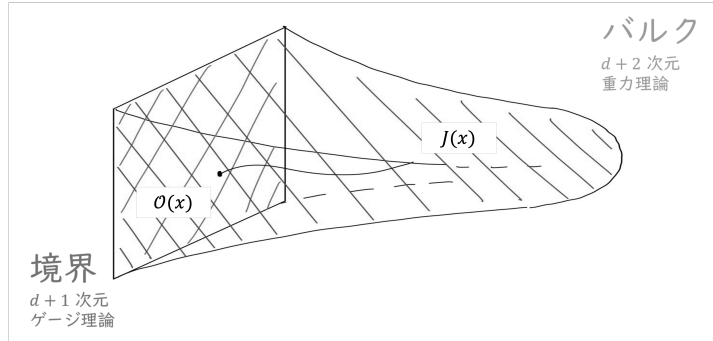


図1 ホログラフィー原理の概念図. バルクの重力理論が境界の場の量子論と等価になる. その際, バルクにおける場が境界上の物理量に対するソースとして対応する.

理量 $\mathcal{O}(x)$ のソースとなって対応しています.

1.1 具体例：クォーク・グルーオン・プラズマ

ここでホログラフィー原理が話題になる契機となった代表的な例の話をしておきましょう. Brookhaven National Laboratory が開発した Relativistic Heavy Ion Collider という加速器があります. この中ではすごい速さで重イオン同士をぶつけるという実験がされており, その目的はクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) の生成とその性質の解析です. QGP とは陽子や中性子の中にある, 普段単体で外には出てこないクォークが高温高压化では単体で自由に動けるようになった状態です. クォークを基本自由度とする理論から見るとこれは強結合になっていて, 解析が困難です. そのためこの実験で実際に生成される以前は QGP の振る舞いが理想気体に近いのか, それとも完全流体に近いのかははっきりしませんでした. そんな中ホログラフィーを用いた弦理論による計算では QGP は完全流体であると予想されていました [1, 2]. そして実験結果では実際に完全流体に近い振る舞いをする¹と報告されています [12]. 実際にその実験レポートでは粘性の「予言」が整合しているとしてホログラフィー原理, もとい超弦理論の論文 [2] を引用しています.

がっている閉弦と両端がつながっていない開弦があり, これらの低エネルギー有効理論はそれぞれ重力理論とゲージ理論です. そして閉弦と開弦は D プレーンという対象を通じて等価な物理を見ていると考えられており, ここから低エネルギー有効理論どうしの対応関係が示唆されます.

実験結果 $\frac{\eta}{s} \approx 0.1$,

ホログラフィーによる計算 $\frac{\eta}{s} = \frac{1\hbar}{4\pi k_B} \approx 0.08$.

これは実験検証から程遠いとされていた弦理論にとって驚きの結果と言えます。このようにクォーク・グルーオン・プラズマにおける「成功」があり、他の例への応用もより精力的に研究されるようになりました。その一例が今回紹介する超伝導です。

2 ホログラフィック超伝導

以降ではまずは強結合量子多体系の一例としてホログラフィーで再現することになる、高温超伝導自体の説明をしたあと、ホログラフィック超伝導の走りとなる Hartnoll らによる模型 [3, 4] を説明します。そして最後に、近年の進展として夏梅らによる模型 [13] を紹介します。

2.1 高温超伝導について軽く

皆さんご存知の通り超伝導は普段は有限の値となる電流や熱流に対する抵抗値が温度以下でゼロとなる現象のことであり、MRI などの医療や加速器などの科学実験など様々な場面で活用されています。ただし高温状況下ではもちろんのこと、高磁場下でもその特性は失われるなど、産業規模で超伝導を利用するにはいくつかの障壁があります。ただ積み重なる研究により、銅酸化物超伝導体などをはじめとする高温超伝導体が発見され、これらは 100K 程度の高温下でも超伝導状態を維持します。一方で高温超伝導を理論的な側面から見ると、いまだその機構は不明であり、難問となっています。従来型の超伝導の機構を説明する模型として BCS 理論が有名です。格子振動により電子間に有効的な引力が働き電子 2 つが対となることでボース粒子のキャリアが生まれる、このように BCS 理論は超伝導のゼロ抵抗を説明していますが、40K を超えたあたりで格子振動が激しくなるため、この描像は成り立たないことが知られています。こうなると他の機構を考えるしかないわけですが、電子同士が対になって凝縮するわけですから、電子電子間相互作用をそこそこ真面目に考えてやる必要が出てきます。これが高温超伝導の強結合の部分です。ホログラフィック超伝導は強結合で解析が難しいとされる高温超伝導を簡単に計算できうる希望を持っています。

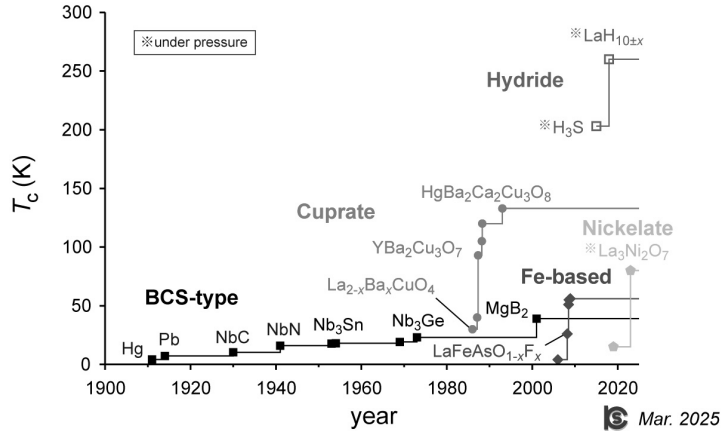


図2 超伝導転移温度の記録 【引用】 東京大学 大学院総合文化研究科 広域科学専攻 関連基礎科学系 橋高研究室 [<https://park.ityc.u-tokyo.ac.jp/kittaka/contents/others/tc-history/index.html>]

2.2 模型の構築

ということでホログラフィー原理を利用して超伝導を再現するような模型を作しましょう．ただし高温超伝導を直接的に記述するゲージ場の理論を我々は知らないの
で，理論全体で超伝導っぽい振る舞いをするようなものを構築します．用意するのは
こちらです．

有限温度系 ブラックホール解

電荷保存則 Maxwell 場 A_M

電子対生成 複素スカラー場 Ψ

説明していきます．ホログラフィーとは重力理論とゲージ理論が等価であり，バルク
の場と境界の物理量が一対一に対応していたのでした．境界の理論は，高温超伝導に
類似した性質を持つわけですから，有限温度系であり，電流（カレント）をもち，超
伝導転移（2次相転移）を起こすことが期待されます．ホログラフィーにおいて有限
温度の系を再現する際に用いるのはブラックホールです．これはブラックホール自体
が温度をもつ有限温度系であるためです．重力理論側の計量をブラックホール解に
しておくことで Hawking 温度をもつ有限温度系とみなせます．また，カレント J^μ
を生成するソースが必要となります．これは Maxwell 場 A_M でいいでしょう．最後

に相転移を起こすために秩序変数 $\langle \mathcal{O} \rangle$ を導入してやりましょう。これに結合する場として複素スカラー場 Ψ を導入します。するとバルクが $d+2$ 次元時空中のアインシュタイン・マクスウェル・スカラー理論

$$\begin{aligned} S_{\text{bulk}} &= \int d^{d+2}x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{\text{matter}}) \\ \mathcal{L}_g &= R - 2\Lambda \\ \mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} + |D_M \Psi|^2 + m^2 |\Psi|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし

$$\begin{aligned} F_{MN} &= \partial_M A_N - \partial_N A_M, \\ D_M &= \nabla_M - iA_M, \\ \Lambda &= -\frac{3}{L^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

でかけることになります。これはホログラフィック超伝導体を記述する標準的なモデルです。以降はバルクが $(3+1)$ 次元の模型を考えます。このままでは重力場がいくつかの物質場と結合していて、解析が難しそうなので、こういった場合はよくプローブ極限 ($g \gg 1$) をとってやって物質場からの寄与を無視します。するとバルクの背景時空として Schwarzschild-AdS₄ 解を素直に入れることができます。

$$\begin{aligned} ds_4 &= r^2 (-f^2 dt^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{dr^2}{r^2 f} \\ &= \left(\frac{r_0}{u} \right)^2 (-f^2 dt^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{du^2}{u^2 f} \\ f &= 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 = 1 - u^3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

このブラックホールの Hawking 温度 $2\pi T = \frac{3r_0}{2L^2}$ が境界の $(2+1)$ 次元時空の温度に対応します。AdS 時空の半径 L とホライズン半径 r_0 をそれぞれ 1 に固定して議論します。このもとで各場についての運動方程式から漸近形を決定し、GKP-Witten から境界上の物理量と対応づけるのですが、諸事情^{*9}により細かい計算は省略して書い

^{*9} 申告したページ数が少なすぎたようです。計算例は [14] に載っています。

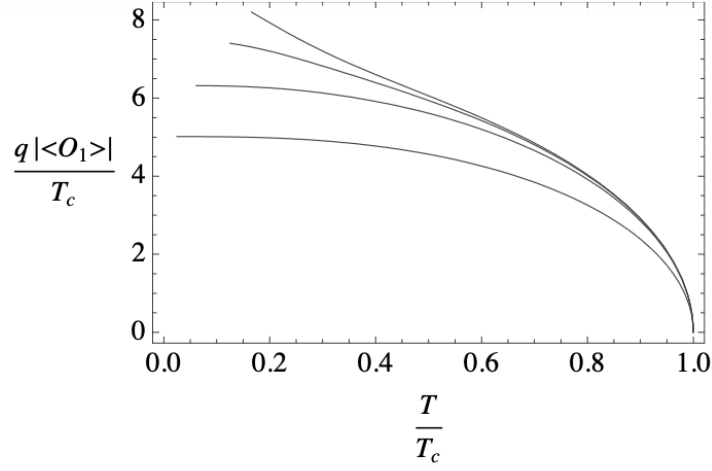


図3 $\Psi(u)$ の数値計算結果 ([4] から引用)

ていきます。物質場の漸近的振る舞いは

$$\begin{aligned}
 A_\mu &\sim \mathcal{A}_\mu + A_\mu^{(+)}u, \\
 \Psi &\sim \Psi^{(-)}u^{\Delta_-} + \Psi^{(+)}u^{\Delta_+}, \\
 \Delta_\pm &:= \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

とかけます。ここでバルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値が境界のベクトルポテンシャル \mathcal{A}_μ , A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に、バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$, $\Psi^{(-)}$ がそのソースに対応します：

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{J}_\mu \rangle &= \frac{1}{g^2} F_{u\mu} \Big|_{u=0} \\
 \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{g^2} 2\nu \Psi^{(+)}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

図 3 からオーダーパラメータが転移温度近傍で

$$\langle \mathcal{O} \rangle \propto (T_c - T)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

と振る舞うことがわかります。どうも相転移は起きていそうです。

2.3 より現実的なモデルにするために

上で作った模型は現実の超伝導の解析という目的からすると多くの問題があります。

- Meissner 効果を確認していない
- 境界上の秩序変数 $\langle \mathcal{O} \rangle$ の微視的病像が不明である
- 対応する境界の理論が U(1) ゲージ理論ではなくラージ N ゲージ理論になっている^{*10}

ここでは一つ目の Meissner 効果について考えましょう。Meissner 効果は超伝導であると断定するために必要な、超伝導体の重要な特徴です。しかし従来のホログラフィック超伝導の模型では $A_\mu = A_\mu|_{u=0}$ という形の境界条件を課していいため、境界でバルクのゲージ場が固定され、境界上には動的な Maxwell 場そのものは存在しません。そこで Maxwell 場のダイナミクスを回復してやるために、次のような新たな境界条件を考えましょう。

$$\partial_j \mathcal{F}^{ij} = e^2 (\langle \mathcal{J}^i \rangle + \mathcal{J}_{\text{ext}}^i) \quad (2.7)$$

非自明な解をとるためにソース $\mathcal{J}_{\text{ext}}^i$ を加えています。

ゲージ場を解析的に解くために Fourier 変換

$$A_y = \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \tilde{A}_y \quad (2.8)$$

を考えます。このときバルクの静的な運動方程式 (2.10)

バルクの運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= D^2 \Psi - m^2 \Psi \\ 0 &= \nabla_N F^{MN} - J^M \\ J_M &= -i \left[\Psi^\dagger D_M \Psi - \Psi (D_M \Psi)^\dagger \right] \\ &= 2\Im(\Psi^\dagger D_M \Psi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

^{*10} 古典重力理論を使って解析しているために対応する理論はラージ N 極限と呼ばれる仮定がなされており、単純な U(1) ゲージ理論とは異なります。ただしここでは割愛して話を進めます。真っ当な電磁場を対象としているわけではないことだけ注意してください。

$A_u = 0$ のゲージをとると、静的なバルクの運動方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= (-f\partial_u^2 - \Delta^2 + 2|\varphi|^2) A_t \\
0 &= [-\partial_u(f\partial_u) - \Delta^2 + 2|\varphi_0|^2] \tilde{A}_y - 2\Im(\varphi^\dagger \partial_i \varphi) + \partial_i(\delta^{jk} \partial_j A_k) \\
0 &= [-\partial_u(f\partial_u) - \Delta^2 + 2|\varphi_0|^2] \tilde{A}_y - 2(\varphi^\dagger \partial_i \varphi) + \partial_i(\delta^{jk} \partial_j A_k) \\
0 &= \partial_u(\delta^{ij} \partial_i A_j) - 2\Im(\varphi^\dagger \partial_u \varphi)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ただし $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ は

$$0 = [-\partial_u(f\partial_u) + q^2 + 2|\varphi_0|^2] \tilde{A}_y \tag{2.11}$$

このもとで境界上の Maxwell 場は

$$q^2 \tilde{A}_y = \frac{e^2}{1 + e^2} \tilde{\mathcal{J}}_y^{\text{ext}} := \mu_m \tilde{\mathcal{J}}_y^{\text{ext}} \tag{2.12}$$

とかけて、透磁率がわかります。帯磁率を求めて、あわせて温度に対応するホライズン半径を陽に描いてやると

$$\begin{aligned}
\mu_m &= \frac{e^2}{1 + e^2/r_0} \\
\chi_m &= -\frac{e^2/r_0}{1 + e^2/r_0}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

これは低温で完全反磁性になりますね。

3 まとめと展望

本記事ではホログラフィー原理を用いた超伝導の記述について、その基礎的なモデルから Meissner 効果を直接的に示す新規的な模型までを駆け足で紹介しました。まず荷電ブラックホールに複素スカラー場を導入することで超伝導相転移が起きることを確認しました。つぎに近年の夏梅と岡村による、ゲージ場のダイナミクスを回復するような境界条件を課して磁場侵入長や GL パラメータといった具体的な物理量を解析的に導出し、より現実の超伝導体に近い模型となりました。これはホログラフィー原理が単なる概念的な対応関係に留まらず、物性物理学の具体的な問題に対する強力な計算手段になりうる可能性をより強く知らしめる結果です。もちろん、これらのモデルはまだ理想的な状況下での計算であり、現実の高温超伝導体と比較するには、先述のように秩序変数 $\langle \mathcal{O} \rangle$ の微視的な描像や、具体的に対応する境界のゲージ

理論の実態など、多くの不明点が残されています。しかし現状明確な理論的説明が与えられていない高温超伝導に対して、ホログラフィーを通した簡単な模型構築によりいくつかの計算ができることは大きな利点であり、その詳細がわかっていないホログラフィー原理と高温超伝導の両者に対する理解を深める上で重要な研究と言えるでしょう。

参考文献

- [1] G. Policastro, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. The Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, p. 081601, 2001.
- [2] P. Kovtun, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 94, p. 111601, 2005.
- [3] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Building a Holographic Superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 101, p. 031601, 2008.
- [4] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Holographic Superconductors. *JHEP*, Vol. 12, p. 015, 2008.
- [5] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 231–252, 1998.
- [6] Edward Witten. Anti de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 253–291, 1998.
- [7] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, Vol. 323, pp. 183–386, 2000.
- [8] Raphael Bousso. The Holographic principle. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, pp. 825–874, 2002.
- [9] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/gravity duality: Foundations and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 4 2015.
- [10] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett. B*, Vol. 428, pp. 105–114, 1998.

- [11] 民明米谷. 究極理論への道：力・時空・物質の起源を求めて. 岩波書店, 2021.
- [12] A. Adare, et al. Energy Loss and Flow of Heavy Quarks in Au+Au Collisions at $s(\text{NN})^{1/2} = 200\text{-GeV}$. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 172301, 2007.
- [13] Makoto Natsuume and Takashi Okamura. Holographic meissner effect. *Phys. Rev. D*, Vol. 106, p. 086005, Oct 2022.
- [14] 夏梅誠. 超弦理論の応用. SGC ライブラリ, No. 93. サイエンス社, 2012.
- [15] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 217, pp. 595–622, 2001.

温度に対応するホライズン半径を陽に描いてやると、

$$\begin{aligned}\mu_m &= \frac{e^2}{1 + e^2/r_0} \\ \chi_m &= -\frac{e^2/r_0}{1 + e^2/r_0} \\ \lambda^2 &= \frac{1 + e^2/r_0}{2e^2I} \frac{1}{r_0}\end{aligned}\tag{3.1}$$

各種表式を代入してやり、Fourier 変換などをいろいろして解く（方程式を出す）

この新規模型は、従来模型では Dirichlet 境界条件を課していたために「外部ソース」という制限を取り払い、電磁場のダイナミクスを直接組み込むことで、従来は間接的にしか示唆できなかったマイスナー効果を、モデル内で直接的かつ解析的に示すことに成功した

こし、London 方程式を導出しました．しかし電磁場がダイナミカルでなかったため、超伝導において重要な Meissner 効果の直接的な記述には至りませんでした．

計算: バルクのマクスウェル方程式 (3.2) を解くと、境界での電流 $\langle \tilde{J}_y \rangle$ は、境界のベクトルポテンシャル \tilde{A}_y を用いて次のように書けることを導出します (q は運動量)。

$$\begin{aligned}\langle \tilde{J}_y \rangle &= \partial_u \tilde{A}_y \Big|_{u=0} \\ &= \tilde{A}_y \left(-q^2 - 2 \int_0^1 du |\varphi_0|^2 + \dots \right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

電流は2つの部分からなる超電流 $-2 \int |\varphi_0|^2$ の項は、超伝導電子による電流ですこれはロンドン方程式に対応束縛電流 $-q^2$ の項は超伝導凝縮がない ($\varphi_0 = 0$) 通常の状態でも存在する電流論文ではこれが物質の磁化による束縛電流として解釈できると指摘境界のマクスウェル方程式（アンペールの法則）が存在しないため（境界条件として電流が存在するだけで、Maxwell 場はダイナミカルに存在はしない）超電流が磁場を押し返すことができず、マイスナー効果は起こりません磁場は超伝導体内部に自由に侵入できてしまいます

が起こらないについて考えてみましょう．ここまで読んでくださったありがたい方々は作用には Maxwell 場が入っているじゃないかと思われるかもしれませんが、この Maxwell 場はバルクの構成要素であることを思い出してください．そして境界条件として導入した

A. Dirichlet Boundary Condition (通常の境界条件) まず、従来の手法、つまり境界の電磁場 A_μ を固定するディリクレ境界条件で計算するとどうなるかを見ています。

ここでバルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値 \mathcal{A}_μ が境界のベクトルポテンシャル, A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に対応します. バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ に対応する

$A_t = \mu$ は化学ポテンシャルを $A (+)_t$ は荷電密度 $\langle \rho \rangle$ を同様に \mathcal{A}_i はベクトルポテンシャルを $A_i^{(+)}$ はカレント密度 $\langle \mathcal{J} \rangle$ を $\Psi^{(+)}$ はオーダーパラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ を $\Psi^{(-)}$ はオーダーパラメータの外場ソースを表す

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}_\mu \rangle &= \frac{1}{g^2} F_{u\mu} \Big|_{u=0} \\ \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{g^2} 2\nu \Psi^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

とかけます.

バルクの中の境界近く ($u \rightarrow 0$) での振る舞いが境界の物理量に対応するのでした.

バルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値 \mathcal{A}_μ が境界のベクトルポテンシャル A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に対応する

バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ に対応する

$A_t = \mu$ は化学ポテンシャルを $A (+)_t$ は荷電密度 $\langle \rho \rangle$ を同様に \mathcal{A}_i はベクトルポテンシャルを $A_i^{(+)}$ はカレント密度 $\langle \mathcal{J} \rangle$ を $\Psi^{(+)}$ はオーダーパラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ を $\Psi^{(-)}$ はオーダーパラメータの外場ソースを表す

Maxwell 場およびスカラー場が重力場と結合しない. 解析を簡単にするためにプローブ近似 $g \gg 1$ (or $q \rightarrow \infty$) をとることで物質場から重力への影響・バックリアクションを無視できるようにする.

運動方程式はどうこう

$A_u = 0$ のゲージをとる運動方程式はどうこう

物質場の漸近的振る舞いは

$$\begin{aligned} A_\mu &\sim \mathcal{A}_\mu + A_\mu^{(+)} u, \\ \Psi &\sim \Psi^{(-)} u^{\Delta_-} + \Psi^{(+)} u^{\Delta_+}, \\ \Delta_\pm &:= \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}_\mu \rangle &= \frac{1}{g^2} F_{u\mu} \Big|_{u=0} \\ \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{g^2} 2\nu \Psi^{(+)}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

AdS/CFT 辞書: バルクの場の境界近く ($u \rightarrow 0$) での振る舞いが、境界の物理量に対応します。

バルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値 A_μ が境界のベクトルポテンシャル A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に対応する

バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ に対応する

$A_t = \mu$ は化学ポテンシャルを $A (+)_t$ は荷電密度 $\langle \rho \rangle$ を同様に A_i はベクトルポテンシャルを $A_i^{(+)}$ はカレント密度 $\langle \mathcal{J} \rangle$ を $\Psi^{(+)}$ はオーダーパラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ を $\Psi^{(-)}$ はオーダーパラメータの外場ソースを表す

厳密にはマイスナー効果は起こらないがマイスナー効果を引き起こすための本質的な物理 London 方程式は導出されている

なぜ厳密には起こらないのか？

HHH 論文自身が明確に述べている通り、このモデルでは電流が電磁場を生み出さないため、厳密な意味でのマイスナー効果は存在しえませんマイスナー効果とは、超伝導体内部に生じた電流が、外部磁場を打ち消すような逆向きの磁場を「自ら」作り出すことで磁場を排除する現象電流が磁場を生み出せない設定である以上、この現象は起こり得ません。

HHH 論文の非常に重要な功績は、このモデルを用いてロンドン方程式 $J_i = -n_s A_i$ を導出したことですロンドン方程式は、ベクトルポテンシャル A_i が存在するだけで（つまり磁場が存在するだけで）電流 J_i が流れることを示す、超伝導の根幹をなす関係式です。著者らは、このロンドン方程式が成立することを示した上で、「もしこの理論を（後から）弱くゲージ化して、電流がマクスウェル方程式に従って磁場を生み出すようにすれば、磁場は排除されるだろう」と論じています。

つまり、HHH 論文のモデルは、マイスナー効果という「現象」そのものは示しませんがその現象を引き起こす原因である「ロンドン方程式」が、このホログラフィックなセットアップから自然に導出されることを初めて示したのです。

境界での $U(1)$ 対称性はグローバル対称性境界の電磁場（光子）が力学（ダイナミ

クス)を持たず外部から固定された**「外部ソース」**としてのみ存在

このモデルでは、外部からかけた電磁場に対して物質(超伝導体)がどのように応答し、どんな電流 $\langle J \rangle$ が流れるかを計算します。しかし、その電流が電磁場自体にフィードバックを与える効果は、モデルの内部では考慮されません。

新規模型 (Natsuume 論文): 境界での電磁場をダイナミカルな場として扱います。これを実現するために、「半古典的なマクスウェル方程式 ($\nabla F = e^2 \langle J \rangle$)」そのものを境界条件として課します。これにより、物質が生み出す電流 $\langle J \rangle$ が、電磁場 F を変化させるというバックリアクションがモデルに最初から組み込まれています。

従来模型が「固定された磁場に物質がどう応答するか」を見るのに対し、新規模型は「磁場と物質が互いに影響を及ぼしあう、自己無撞着な状態」を直接解いている

3.1 ホログラフィック Meissner 効果

3.2 5次元模型

ホログラフィック繰り込みの考えから境界に対数項 S_{ct} が必要となる。オンシェル超重力作用 S_{sugra} の発散は、バルク時空の境界(カットオフ $\rho = \epsilon$ または $r^2 = \epsilon$)で評価されますが、その発散の構造は境界次元 d に依存します。・奇数次元の場合: 発散項は ϵ の逆べき乗 ($\frac{1}{\epsilon^k}$) の形で出現します。・偶数次元の場合: ϵ の逆べき乗の項に加えて、対数発散項 $\log \epsilon$ が出現します

対数発散は、ホログラフィック繰り込みにおいて特殊な対処を必要とします。

作用を有限化するためには、この \log の発散も打ち消すように、境界対項 S_{ct} を含めなければなりません [15].

夏梅のレビュー!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Section III: Small Magnetic Field (小さい磁場をかけた場合) ここがこの論文の最初の核心部分です。一定の超伝導状態に、弱い磁場をかけてみて、その応答を調べることでマイスナー効果を解析します。

結果の話

Meissner 効果

$$\mathcal{A}_y \propto e^{-x/\lambda} \tag{3.6}$$

λ は磁場侵入長

境界での電流には、超伝導電子による超電流の他に、物質の磁化に由来する束縛電

流 (bound current) が存在する束縛電流の効果により、物質の透磁率 μ_m が真空の値からずれ、物性が変化

極端な第一種超伝導体にはなれない:

通常のギンツブルグ・ランダウ (GL) 理論では、結合定数 e を大きくすると $e \rightarrow \infty$ で磁場侵入長がゼロ $\lambda \rightarrow 0$ となり、磁場を完全に排除する極端な第一種超伝導体になりますしかし、このホログラフィックなモデルでは、束縛電流の効果により $e \rightarrow \infty$ としても λ が有限の値を保ち、極端な第一種にはなれないことが示されました

GL パラメータの導出 (5 次元バルクの場合): 特に解析的な解が得られる 5 次元バルクのモデルにおいて、磁場侵入長 λ とコヒーレンス長 ξ を具体的に計算し、超伝導体の種類 (第一種か第二種か) を決定する GL パラメータ $\kappa^2 = \lambda^2/\xi^2$ を解析的に導出超伝導体の性質が温度や結合定数にどう依存するかが明らかになりました

4 ホログラフィック超伝導の従来模型

ホログラフィック超伝導の最初の具体的なモデルは、Hartnoll, Herzog, Horowitz によって 2008 年に提案されました [3, 4]. 彼らは、超伝導という現象をホログラフィーで記述するための、いわば「最小構成 (ミニマルモデル)」を考えました.

4.1 モデルの構成要素

まず、我々が住む世界の超伝導体 (境界の理論) で必要なものは何でしょうか. それは、電荷を担う電子対 (クーパー対) が一斉に同じ量子状態に落ちる「凝縮」という現象です. これを記述するためには、

- U(1) グローバル対称性 (電荷の保存に対応)
- 電荷をもち、凝縮する演算子 \mathcal{O}

の 2 つがあれば十分です. AdS/CFT 辞書によれば、これらはバルクの重力理論において、

- マクスウェル場 A_a
- 電荷 q を持つスカラー場 ψ

にそれぞれ対応します. これらをアインシュタイン重力と組み合わせた「アインシュ

「タイン・マクスウェル・スカラー理論」が、ホログラフィック超伝導の舞台となります。

4.2 超伝導への相転移

このモデルでは、バルクに電荷を持つブラックホールを考えます。ブラックホールのホーキング温度が、境界の超伝導体の温度に対応します。高温状態では、ブラックホールはスカラー場をまとうておらず、「毛のない (bald)」状態です。これは境界の理論が常伝導状態にあることに対応します。

ところが、温度を下げていくと、ある臨界温度 T_c でブラックホールは不安定になり、スカラー場 ψ がブラックホールの周りに発生します。これを「スカラーの毛が生えた (hairy)」ブラックホールと呼びます [3]。このスカラー場の凝縮が、境界の理論における演算子 ϕ の凝縮、すなわち超伝導相転移に対応するのです。

4.3 従来模型の成果と限界

この HHH 模型の素晴らしい点は、超伝導の本質的な性質である**ロンドン方程式**を導出できたことです [4]。ロンドン方程式は、

$$\vec{J} = -n_s \vec{A}$$

と書かれ、ベクトルポテンシャル \vec{A} (つまり磁場) が存在すると、それに応じた超伝導電流 \vec{J} が流れることを示しています。これはマイスナー効果の微視的な起源を説明する重要な関係式です。

しかし、この従来模型には大きな限界がありました。モデル内で境界の U(1) 対称性はあくまでグローバル対称性であり、マクスウェル場 (光子) はダイナミカルではありません。つまり、このモデルで計算される電流 \vec{J} は、境界の電磁場に影響を与えることができません。マイスナー効果とは、超伝導電流が外部磁場を打ち消すような逆向きの磁場を「自ら」作り出すことで磁場を排除する現象です。電流が磁場を生み出せない以上、この模型でマイスナー効果そのものを直接見ることはできませんでした。

5 Meissner 効果を示す新規模型

従来模型の限界を克服し、マイスナー効果をホログラフィーの枠組みで直接的に示したのが、Natsuume と Okamura による 2022 年の論文 [13] です。彼らのアイデアは、非常にシンプルかつ強力なものでした。

5.1 核心的アイデア：境界条件の変更

彼らは、従来「外部ソース」として固定されていた境界の電磁場を、**ダイナミカルな場**として扱うことにしました。そのために、バルクの運動方程式を解く際の境界条件そのものを変更したのです。具体的には、境界において

$$\nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = e^2 \langle \mathcal{J}^\mu \rangle \quad (5.1)$$

という**「半古典的なマクスウェル方程式」**を新たな境界条件として課しました。これは、バルクの計算から AdS/CFT 辞書を通じて得られる電流 $\langle \mathcal{J}^\mu \rangle$ が、境界の電磁場 $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ を力学的に生み出す、という自己無撞着な条件を課することに他なりません。これにより、電流と電磁場の間のフィードバックが初めてモデルに組み込まれました。

5.2 解析的な Meissner 効果の導出

この新しい境界条件のもとで計算を行うと、驚くべきことに、**磁場侵入長 λ **が解析的な形で導出されます [13]。例えば 4 次元バルクの場合、

$$\lambda^2 = \frac{1 + e^2}{2e^2 I}, \quad \left(I = \int_0^1 du |\varphi_0(u)|^2 \right)$$

と計算されます。磁場侵入長が有限の値を持つということは、磁場が超伝導体内部で指数関数的に減衰すること ($B \propto e^{-x/\lambda}$) を意味し、これこそがマイスナー効果に他なりません。

さらに、この計算から新たな物理的描像も得られました。境界の電流は、超伝導電子による「超電流」だけでなく、物質の磁化に由来する「**束縛電流**」の和で書けることが示されました。この束縛電流の効果により、ホログラフィックな超伝導体は真空とは異なる実効的な**透磁率 μ_m **を持つことが明らかになったのです。

5.3 5次元理論での発展

この手法は、より解析的な計算が可能な5次元バルクの理論において、さらにその威力を発揮します。5次元の場合、超伝導体の種類を決定する重要な無次元量である**ギンツブルグ・ランダウ (GL) パラメータ $\kappa^2 = \lambda^2/\xi^2$ (** ξ はコヒーレンス長) が、温度 T の関数として完全に計算できます [13]。

$$\kappa^2 = \frac{1 - e^2 \ln(\pi T)}{6e^2}$$

この式は、このホログラフィック超伝導体が、温度に応じて第一種 ($\kappa^2 < 1/2$) から第二種 ($\kappa^2 > 1/2$) へと相移りする可能性を示唆しており、従来モデルでは得られなかった具体的な物性の予測を可能にしました。

6 ホログラフィック超伝導

さて、前節で見たクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) におけるホログラフィー原理の「成功」は、研究者たちに大きな希望を与えました。特に、「計算が難しい強結合の場の量子論の問題を、古典重力理論で解く」という戦略が、他の分野にも応用できるのではないかと期待が高まります。そこで白羽の矢が立ったのが、物性物理学における長年の難問、**高温超伝導**です。

高温超伝導体は、その名の通り比較的高い温度で超伝導を実現する物質群ですが、その発現メカニズムは従来の BCS 理論では説明が難しく、電子が強く相互作用する「強結合系」であると考えられています。QGP と同じく強結合な系であることから、ホログラフィー原理が良い解析手段になるのではないかと期待されたのは、自然な流れと言えるでしょう。こうして始まったのが「ホログラフィック超伝導」の研究です。

6.1 従来模型とその限界 — HHH 論文

ホログラフィック超伝導の最初の具体的なモデルは、2008 年に Hartnoll, Herzog, Horowitz によって提案されました [3, 4] (以下, HHH 論文)。彼らは、超伝導という現象をホログラフィーで記述するための、いわば「最小構成 (ミニマルモデル)」を考えました。

バルクの理論として「アインシュタイン・マクスウェル・スカラー理論」を用意し、そこに電荷を持つブラックホールを置きます。このブラックホールのホーキング温度が、境界の物質の温度に対応します。このモデルの面白い点は、超伝導への相転移が、ブラックホールが「毛をむしられるか、生やすか」という問題に置き換えられることです。高温では、ブラックホールはスカラー場をまとも「毛のない (bald)」状態で、これは常伝導状態に対応します。しかし温度を下げていくと、ある臨界温度 T_c でブラックホールは不安定になり、スカラー場の「毛が自発的に生え」始めます。この「毛が生えた (hairy)」ブラックホールこそが、境界での超伝導状態に対応するのです。

成果と限界

この HHH 模型の素晴らしい点は、超伝導の本質的な性質であるロンドン方程式の導出に成功したことです [4]。ロンドン方程式は、 $\vec{J} = -n_s \vec{A}$ と書かれ、磁場 (ベク

トルポテンシャル \vec{A}) が存在すると、それに応じた超伝導電流 \vec{J} が流れることを示す、マイスナー効果の微視的な起源を説明する重要な関係式です。

しかし、この従来模型には大きな限界がありました。HHH 論文自身も明確に述べている通り、このモデルでは**厳密な意味でのマイスナー効果は起こりません**。マイスナー効果とは、超伝導電流が外部磁場を打ち消す逆向きの磁場を「自ら」作り出し、磁場を内部から完全に排除する現象です。ところが、HHH 模型では境界の電磁場は力学（ダイナミクス）を持たない「外部ソース」として扱われます。つまり、計算で得られた電流が、電磁場自体にフィードバックを与える効果が考慮されていないのです。電流が磁場を生み出せない設定である以上、磁場排除という現象は起こり得ません。

つまり HHH 論文は、マイスナー効果という「現象」そのものは示せなかったものの、その原因である「ロンドン方程式」がホログラフィーから自然に導出されることを初めて示した、画期的な研究でした。

6.2 新規模型によるマイスナー効果の実現

従来模型が残した「マイスナー効果を直接見たい」という課題を解決したのが、2022 年に発表された Natsuume と Okamura による新規模型です [13]。彼らのアイデアは、従来模型との違いを比較すると非常に明快です。

- **従来模型 (HHH):** 境界の電磁場は、力学を持たない**外部ソース**。固定された磁場に物質がどう応答するかを見る。
- **新規模型 (Natsuume):** 境界の電磁場を、力学を持つ**ダイナミカルな場**として扱う。磁場と物質が互いに影響を及ぼしあう、自己無撞着な状態を直接解く。

この「電磁場をダイナミカルにする」という目的を達成するために、彼らはバルクの運動方程式を解く際の**境界条件そのものを変更**しました。具体的には、境界において

$$\partial_j \mathcal{F}^{ij} = e^2 \langle \mathcal{J}^i \rangle \quad (6.1)$$

という「半古典的なマクスウェル方程式」を新たな境界条件として課したのです。これにより、物質が生み出す電流 $\langle \mathcal{J} \rangle$ が電磁場 \mathcal{F} を変化させるという、物理的に自然なバックリアクションがモデルに初めて組み込まれました。

解析的なマイスナー効果の実現

この新しい枠組みのもとでは、**磁場侵入長** λ が解析的な形で導出されます。

$$\mathcal{A}_y \propto e^{-x/\lambda} \quad (6.2)$$

これは磁場が超伝導体内部で指数関数的に減衰することを示しており、まさしくマイスナー効果に他なりません。さらに、この計算から、境界の電流は超伝導電子による「超電流」の他に、物質の磁化に由来する「束縛電流」が存在することが示され、その効果として物質の実効的な**透磁率** μ_m が真空からずれる、という新しい物理描像も明らかになりました。

5次元模型と GL パラメータ

この手法は、より解析的な計算が可能な 5 次元バルクの理論において、さらにその威力を発揮します。5 次元の場合^{*11}、超伝導体の種類（第一種か第二種か）を決定する重要な無次元量である**ギンツブルグ・ランダウ (GL) パラメータ** $\kappa^2 = \lambda^2/\xi^2$ を解析的に導出できます。

$$\kappa^2 = \frac{1 - e^2 \ln(\pi T)}{6e^2} \quad (6.3)$$

この式は、このホログラフィック超伝導体の性質が、温度や結合定数にどう依存するかを具体的に予言するものであり、従来模型では不可能だった定量的な解析への道を開きました。

^{*11} 厳密には、5 次元バルクの理論では計算の発散を取り除くための「ホログラフィック繰り込み」という手続きが必要になり、その結果として物理量に $\ln(\pi T)$ という対数的な温度依存性が現れます。