ホログラフィック超伝導の進展から

川合玲央

2025 年 10 月 15 日

10 ページで書くホログラフィック超伝導というのがあるよ強結合、つまり高温超伝導を解決できるかもしれないよホログラフィーっていうのは場の理論の問題を重力を使って簡単に解くことができる手法だよ従来のホログラフィック超伝導はゲージ場がダイナミカルじゃないから問題だよ（例えば Meissner 効果が起きないよ？？？）最近提唱されたモデルでは Meissner 効果が起きるなど従来の問題を解決したよ

1　導入

1.1　ホログラフィック超伝導とは

ホログラフィー原理を知っているか？ここがすごい！ホログラフィー原理

1.2　ホログラフィー原理

1.2.1　QGP

BNL のレポート弦理論が役にたつ実験結果 $\frac{\eta}{s} \approx 0.1$, ホログラフィーによる計算 $\frac{\eta}{s} = \frac{1\hbar}{4\pi k_B} \approx 0.08$.

実験レポート Energy Loss and Flow of Heavy Quarks in Au+Au Collisions at $\mathrm{sqrt}(s_N N) = 200$ GeV PHENIX Collaboration: A. Adare, et al

引用されている粘性の予言 Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics P.Kovtun, D.T.Son, A.O.Starinets

QGP における「成功」があった他の例にも応用したいとりあえず同じような強結合の場に応用してみる物性においてはそのような強相関系

筆者の仕事で、時間依存する重力時空と流体力学の関係、および時空の正則性と流体

の輸送係数を論じた代表的な論文は S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, "Consistent Anti-de Sitter-Space/Conformal-Field-Theory Dual for a Time-Dependent Finite Tem- perature System," Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 031601 [arXiv:0901.4834 [hep- th]]; S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, "A Holographic Dual of Bjorken Flow," Prog. Theor. Phys. 121 (2009) 121 [arXiv:0807.3797 [hep-th]]. なお、これら一連の仕事の発端となった研究は、R. A. Janik and R. B. Peschanski, "Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT," Phys. Rev. D 73, 045013 (2006) [arXiv:hep-th/0512162].

2 従来の模型

Hartnoll のレビュー！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！

厳密にはマイスナー効果は起こらないがマイスナー効果を引き起こすための本質的な物理 London 方程式は導出されている

なぜ厳密には起こらないのか？

HHH 論文自身が明確に述べている通り、このモデルでは電流が電磁場を生み出さないため、厳密な意味でのマイスナー効果は存在しえませんマイスナー効果とは、超伝導体内部に生じた電流が、外部磁場を打ち消すような逆向きの磁場を「自ら」作り出すことで磁場を排除する現象電流が磁場を生み出せない設定である以上、この現象は起こり得ません 。

HHH 論文の非常に重要な功績は、このモデルを用いてロンドン方程式 $J_i = -n_s A_i$ を導出したことですロンドン方程式は、ベクトルポテンシャル A_i が存在するだけで（つまり磁場が存在するだけで）電流 J_i が流れることを示す、超伝導の根幹をなす関係式です 。著者らは、このロンドン方程式が成立することを示した上で、「もしこの理論を（後から）弱くゲージ化して、電流がマクスウェル方程式に従って磁場を生み出すようにすれば、磁場は排除されるだろう」と論じています 。

つまり、HHH 論文のモデルは、マイスナー効果という「現象」そのものは示しませんがその現象を引き起こす原因である「ロンドン方程式」が、このホログラフィックなセットアップから自然に導出されることを初めて示したのです。

新旧の違い！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！

従来模型 (HHH 論文):

境界での U(1) 対称性はグローバル対称性境界の電磁場（光子）が力学（ダイナミクス）を持たず外部から固定された**「外部ソース」**としてのみ存在

このモデルでは、外部からかけた電磁場に対して物質（超伝導体）がどのように応答し、どんな電流 $\langle J \rangle$ が流れるかを計算します。しかし、その電流が電磁場自体にフィードバックを与える効果は、モデルの内部では考慮されません 。

新規模型 (Natsuume 論文): 境界での電磁場をダイナミカルな場として扱います 。これを実現するために、「半古典的なマクスウェル方程式 $(\nabla F = e^2 \langle J \rangle)$」そのものを境界条件として課します 。これにより、物質が生み出す電流 $\langle J \rangle$ が、電磁場 F を変化させるというバックリアクションがモデルに最初から組み込まれています。

従来模型が「固定された磁場に物質がどう応答するか」を見るのに対し、新規模型は「磁場と物質が互いに影響を及ぼしあう、自己無撞着な状態」を直接解いている

夏梅のレビュー！！！！！！！！！！！！！！！！！

超伝導らしきものを再現するための作用 s 波ホログラフィック超伝導

理論モデル 4(5) 次元時空（バルク）中のアインシュタイン・マクスウェル・スカラー理論ホログラフィック超伝導体を記述する標準的なモデル背景時空バルクの時空は、ブラックホールが存在する Schwarzschild-AdS$_4$(5) 時空このブラックホールのホーキング温度が、境界の (2+1)(3+1) 次元時空の温度に対応

$$
\begin{aligned}
S_{\text{bulk}} &= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\,(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{\text{matter}}) \\
\mathcal{L}_g &= R - 2\Lambda \\
\mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{4}F^{MN}F_{MN} + |D_M\Psi|^2 + m^2|\Psi|^2\right)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
F_{MN} &= \partial_M A_N - \partial_N A_M, \\
D_M &= \nabla_M - iA_M, \\
\Lambda &= -\frac{3}{L^2}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Maxwell 場およびスカラー場が重力場と結合しない．解析を簡単にするためにプローブ近似 $g \gg 1$ (or $q \to \infty$) をとることで物質場から重力への影響・バックリアクションを無視できるようにする．

運動方程式はどうこう

$A_u = 0$ のゲージをとる運動方程式はどうこう

物質場の漸近的振る舞いは

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\sim \mathcal{A}_\mu + A_\mu^{(+)} u, \\
\Psi &\sim \Psi^{(-)} u^{\Delta_-} + \Psi^{(+)} u^{\Delta_+}, \\
\Delta_\pm &\coloneqq \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}_\mu \rangle &= \frac{1}{g^2} F_{u\mu} \Big|_{u=0} \\
\langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{g^2} 2\nu \Psi^{(+)}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

AdS/CFT 辞書: バルクの場の境界近く（$u \to 0$）での振る舞いが、境界の物理量に対応します。

バルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値 $\mathcal{A}_\mu$ が境界のベクトルポテンシャル A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に対応する

バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ に対応する

$\mathcal{A}_t = \mu$ は化学ポテンシャルを $A\ (+)_t$ は荷電密度 $\langle \rho \rangle$ を同様に $\mathcal{A}_i$ はベクトルポテンシャルを $A_i^{(+)}$ はカレント密度 $\left\langle \mathcal{J}_i \right\rangle$ を $\Psi^{(+)}$ はオーダーパラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ を $\Psi^{(-)}$ はオーダーパラメータの外場ソースを表す

Section III: Small Magnetic Field (小さい磁場をかけた場合) ここがこの論文の最初の核心部分です。一定の超伝導状態に、弱い磁場をかけてみて、その応答を調べることでマイスナー効果を解析します。

A. Dirichlet Boundary Condition (通常の境界条件) まず、従来の手法、つまり境界の電磁場 $\mathcal{A}_\mu$ を固定するディリクレ境界条件で計算するとどうなるかを見ています。

計算: バルクのマクスウェル方程式 (3.2) を解くと、境界での電流 $\left\langle \tilde{\mathcal{J}}_y \right\rangle$ は、境界のベクトルポテンシャル $\tilde{\mathcal{A}}_y$ を用いて次のように書けることを導出します（q は運動量）。

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\mathcal{J}}_y \right\rangle &= \partial_u \tilde{A}_y \Big|_{u=0} \\
&= \tilde{\mathcal{A}}_y \left(-q^2 - 2\int_0^1 du \, |\varphi_0|^2 + \cdots \right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

電流は 2 つの部分からなる超電流 $-2\int |\varphi_0|^2$ の項は、超伝導電子による電流ですこれはロンドン方程式に対応束縛電流 $-q^2$ の項は超伝導凝縮がない（$\varphi_0 = 0$）通常の状態でも存在する電流論文ではこれが物質の磁化による束縛電流として解釈できると指摘境界のマクスウェル方程式（アンペールの法則）が存在しないため（境界条件として電流が存在するだけで、Maxwell 場はダイナミカルに存在はしない）超電流が磁場を押し返すことができず、マイスナー効果は起こりません磁場は超伝導体内部に自由に侵入できてしまいます

元の境界条件 $\mathcal{A}_\mu = A_\mu|_{u=0}$

新たな境界条件非自明な解をとるために外場ソース $\mathcal{J}^i_{\mathrm{ext}}$ を加えてやる

$$
\partial_j \mathcal{F}^{ij} = e^2 \left(\langle \mathcal{J}^i \rangle + \mathcal{J}^i_{\mathrm{ext}} \right)
\tag{2.6}
$$

$$
q^2 \tilde{\mathcal{A}}_y = \frac{e^2}{1+e^2} \tilde{\mathcal{J}}_y^{\mathrm{ext}} := \mu_m \tilde{\mathcal{J}}_y^{\mathrm{ext}}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_m &= \frac{e^2}{1+e^2/r_0} \\
\chi_m &= -\frac{e^2/r_0}{1+e^2/r_0} \\
\lambda^2 &= \frac{1+e^2/r_0}{2e^2 I} \frac{1}{r_0}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

各種表式を代入してやり，Fourier 変換などをいろいろして解く（方程式を出す）

結果の話

Meissner 効果

$$
\mathcal{A}_y \propto e^{-x/\lambda}
\tag{2.9}
$$

λ は磁場侵入長

境界での電流には、超伝導電子による超電流の他に、物質の磁化に由来する束縛電流 (bound current) が存在する束縛電流の効果により、物質の透磁率 μ_m が真空の値からずれ，物性が変化

極端な第一種超伝導体にはなれない:

通常のギンツブルグ・ランダウ（GL）理論では、結合定数 e を大きくすると $e \to \infty$ で磁場侵入長がゼロ $\lambda \to 0$ となり、磁場を完全に排除する極端な第一種超伝導体になりますしかし、このホログラフィックなモデルでは、束縛電流の効果により $e \to \infty$ としても λ が有限の値を保ち、極端な第一種にはなれないことが示されました

GL パラメータの導出（5 次元バルクの場合）: 特に解析的な解が得られる 5 次元バルクのモデルにおいて、磁場侵入長 λ とコヒーレンス長 ξ を具体的に計算し、超伝導体の種類（第一種か第二種か）を決定する GL パラメータ $\kappa^2 = \lambda^2/\xi^2$ を解析的に導出超伝導体の性質が温度や結合定数にどう依存するかが明らかになりました

3 ホログラフィック Meissner 効果

Natsuume 論文の新規模型は、HHH 論文などで確立された従来模型の「外部ソース」という制限を取り払い、電磁場のダイナミクスを直接組み込むことで、従来は間接的にしか示唆できなかったマイスナー効果を、モデル内で直接的かつ解析的に示すことに成功した

3.1 トーラス T^2

4 具体例

[1]

参考文献

[1] 夏梅

[2] 文献情報