

ホログラフィック超伝導の進展から

川合玲央

2025 年 10 月 17 日

本記事ではホログラフィー原理による超伝導現象の解析の試みと、特にその近年の進展について紹介します。

解析手段としてのホログラフィー原理→ RHIC における成功・その他の強結合ゲージ場への応用→ 高温超伝導に対する期待・ホログラフィック超伝導にあった問題点の解決→ 境界上の電磁場にダイナミクスを導入

ホログラフィック超伝導というのがあるよ

強結合、つまり高温超伝導を解決できるかもしれないよ

ホログラフィーっていうのは場の理論の問題を重力を使って簡単に解くことができる手法だよ

従来のホログラフィック超伝導はゲージ場がダイナミカルじゃないから問題だよ (例えば Meissner 効果が起きないよ???)

最近提唱されたモデルでは Meissner 効果が起きるなど従来の問題を解決したよ

1 導入

ホログラフィー原理とは重力理論とゲージ理論が等価であるという主張であり、量子重力理論の構築への足がけとして期待されている枠組みです。そんな熱い期待がかけられているホログラフィー原理は、実はその端緒を弦理論にもちます。にもかかわらず弦理論がよく言われる検証不可能性^{*1}とは一線を画し、実際に現実の観測量と結

^{*1} 弦理論の典型的なエネルギースケールは程度であり、現在稼働している加速器のエネルギースケールは程度です。ただ高エネルギースケールの弦理論から示唆される結果は直接的な観測はできないものの string phenomenology という分野もあると聞きますが、筆者はその有用性と詳細を知らないで言及しません。

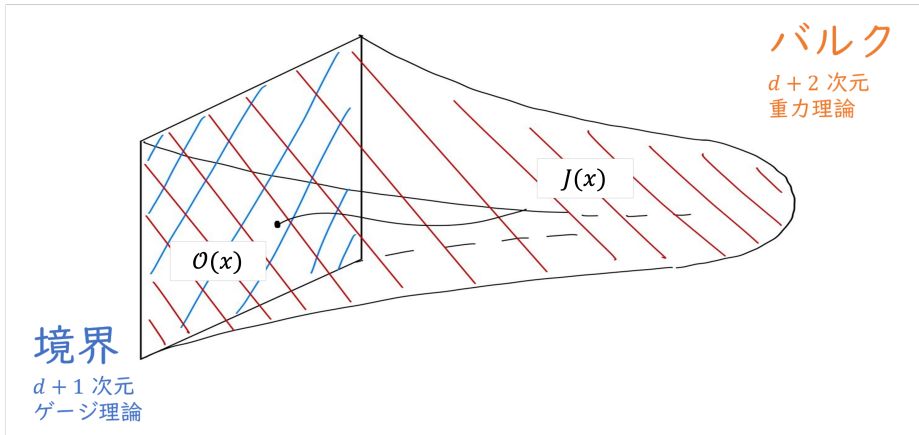


図1 ホログラフィー原理の概念図

びつける研究が多数行われています。よく挙げられる例はクォーク・グルーオン・プラズマ [1, 2] や超伝導 [3, 4]

今回は超伝導（正確には超伝導っぽいもの）をホログラフィー原理を用いて解析する

1.1 ホログラフィー原理

ホログラフィー原理を知っているか？ここがすごい！ホログラフィー原理 AdS/CFT 対応ともよばれ、 $d + 2$ 次元の重力理論と $d + 1$ 次元のゲージ理論が等価になるという主張。1997 年に Maldacena により最初の例が示された [5]。

GKP–Witten 関係式バルク中の場 $\mathcal{J}(x)$ が境界上の物理量 $\mathcal{O}(x)$ のソースとなる [6, 7]

1.1.1 QGP

BNL のレポート弦理論が役にたつ実験結果 $\frac{\eta}{s} \approx 0.1$ ，ホログラフィーによる計算 $\frac{\eta}{s} = \frac{1\hbar}{4\pi k_B} \approx 0.08$ 。

実験レポート [8]

引用されている粘性の予言 [2]

QGP における「成功」があった他の例にも応用したいととりあえず同じような強結合の場合に応用してみる物性においてはそのような強相関系

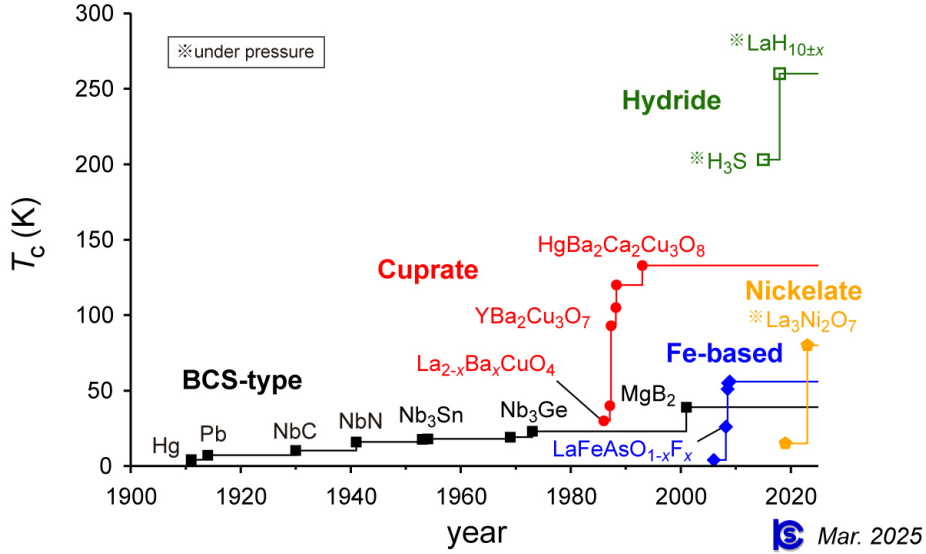


図 2 超伝導転移温度の記録

中村真の仕事で、時間依存する重力時空と流体力学の関係、および時空の正則性と流体の輸送係数を論じた代表的な論文は S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “Consistent Anti-de Sitter-Space/Conformal-Field-Theory Dual for a Time-Dependent Finite Temperature System,” Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 031601 [arXiv:0901.4834 [hep-th]]; S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “A Holographic Dual of Bjorken Flow,” Prog. Theor. Phys. 121 (2009) 121 [arXiv:0807.3797 [hep-th]]. なお、これら一連の仕事の発端となった研究は、R. A. Janik and R. B. Peschanski, “Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT,” Phys. Rev. D 73, 045013 (2006) [arXiv:hep-th/0512162].

2 ホログラフィック超伝導

2.1 高温超伝導

Hartnoll のレビュー!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

厳密にはマイスナー効果は起こらないがマイスナー効果を引き起こすための本質的

なぜ厳密には起こらないのか？

HHH 論文の非常に重要な功績は、このモデルを用いてロンドン方程式 $J_i = -n_s A_i$ を導出したことです。ロンドン方程式は、ベクトルポテンシャル A_i が存在するだけで（つまり磁場が存在するだけで）電流 J_i が流れることを示す、超伝導の根幹をなす関係式です。著者らは、このロンドン方程式が成立することを示した上で、「もしこの理論を（後から）弱くゲージ化して、電流がマクスウェル方程式に従って磁場を生み出すようにすれば、磁場は排除されるだろう」と論じています。

新日の違ひ！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！！

境界での $U(1)$ 対称性はグローバル対称性境界の電磁場（光子）が力学（ダイナミクス）を持たず外部から固定された**「外部ソース」**としてのみ存在

新規模型 (Natsuume 論文): 境界での電磁場をダイナミカルな場として扱います。これを実現するために、「半古典的なマクスウェル方程式 ($\nabla F = e^2 \langle J \rangle$)」そのものを境界条件として課します。これにより、物質が生み出す電流 $\langle J \rangle$ が、電磁場 F を変化させるというバックリアクションがモデルに最初から組み込まれています。

4

3 より現実的なモデルにするために

上で作ったモデルは現実の超伝導の解析という目的からすると多くの問題があります。

- Meissner 効果が起らない
- ラージ N ゲージ理論になっている
- AAA

ここではの Meissner 効果が起らないについて

作用には Maxwell 場が入っているじゃないかと思われるかもしれませんが、

Natsuume 論文の新規モデルは、HHH 論文などで確立された従来モデルの「外部ソース」という制限を取り払い、電磁場のダイナミクスを直接組み込むことで、従来は間接的にしか示唆できなかったマイスナー効果を、モデル内で直接的かつ解析的に示すことに成功した

3.1 ホログラフィック Meissner 効果

3.2 5次元モデル

ホログラフィック繰り込みの考えから境界に対数項 S_{ct} が必要となる。オンシェル超重力作用 S_{sugra} の発散は、バルク時空の境界（カットオフ $\rho = \epsilon$ または $r^2 = \epsilon$ ）で評価されますが、その発散の構造は境界次元 d に依存します。・奇数次元の場合：発散項は ϵ の逆べき乗（ $\frac{1}{\epsilon}$ ）の形のみで出現します。・偶数次元の場合： ϵ の逆べき乗の項に加えて、対数発散項 $\log \epsilon$ が出現します

対数発散は、ホログラフィック繰り込みにおいて特殊な対処を必要とします。

作用を有限化するためには、この \log の発散も打ち消すように、境界対項 S_{ct} を含めなければなりません [9].

夏梅のレビュー!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

超伝導らしきものを再現するための作用 s 波ホログラフィック超伝導

理論モデル 4(5) 次元時空（バルク）中のアインシュタイン・マクスウェル・スカラー理論ホログラフィック超伝導体を記述する標準的なモデル背景時空バルクの時空は、ブラックホールが存在する Schwarzschild- $\text{AdS}_4(5)$ 時空このブラックホールのホーキング温度が、境界の $(2+1)(3+1)$ 次元時空の温度に対応

$$\begin{aligned}
S_{\text{bulk}} &= \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{\text{matter}}) \\
\mathcal{L}_g &= R - 2\Lambda \\
\mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} + |D_M \Psi|^2 + m^2 |\Psi|^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし

$$\begin{aligned}
F_{MN} &= \partial_M A_N - \partial_N A_M, \\
D_M &= \nabla_M - iA_M, \\
\Lambda &= -\frac{3}{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Maxwell 場およびスカラー場が重力場と結合しない．解析を簡単にするためにプローブ近似 $g \gg 1$ (or $q \rightarrow \infty$) をとることで物質場から重力への影響・バックリアクションを無視できるようにする．

運動方程式はどうかう

$A_u = 0$ のゲージをとる運動方程式はどうかう

物質場の漸近的振る舞いは

$$\begin{aligned}
A_\mu &\sim \mathcal{A}_\mu + A_\mu^{(+)} u, \\
\Psi &\sim \Psi^{(-)} u^{\Delta_-} + \Psi^{(+)} u^{\Delta_+}, \\
\Delta_\pm &:= \frac{3}{2} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} + m^2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}_\mu \rangle &= \frac{1}{g^2} F_{u\mu} \Big|_{u=0} \\
\langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{g^2} 2\nu \Psi^{(+)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

AdS/CFT 辞書: バルクの場の境界近く ($u \rightarrow 0$) での振る舞いが、境界の物理量に対応します。

バルクのベクトルポテンシャル A_μ の境界値 \mathcal{A}_μ が境界のベクトルポテンシャル A_μ の次のオーダーの項 $A_\mu^{(+)}$ が境界の電流 $\langle \mathcal{J}_\mu \rangle$ に対応する

バルクのスカラー場 Ψ の境界での主要項 $\Psi^{(+)}$ が超伝導の秩序パラメータ $\langle \mathcal{O} \rangle$ に対応する

$\mathcal{A}_t = \mu$ は化学ポテンシャルを $A (+)_t$ は荷電密度 $\langle \rho \rangle$ を同様に \mathcal{A}_i はベクトルポテンシャルを $A_i^{(+)}$ はカレント密度 $\langle \mathcal{J} \rangle$ を $\Psi^{(+)}$ はオーダーパラメータ $\langle O \rangle$ を $\Psi^{(-)}$ はオーダーパラメータの外場ソースを表す

Section III: Small Magnetic Field (小さい磁場をかけた場合) ここがこの論文の最初の核心部分です。一定の超伝導状態に、弱い磁場をかけてみて、その応答を調べることでマイスナー効果を解析します。

A. Dirichlet Boundary Condition (通常の境界条件) まず、従来の手法、つまり境界の電磁場 \mathcal{A}_μ を固定するディリクレ境界条件で計算するとどうなるかを見ています。

計算: バルクのマクスウェル方程式 (3.2) を解くと、境界での電流 $\langle \tilde{\mathcal{J}}_y \rangle$ は、境界のベクトルポテンシャル $\tilde{\mathcal{A}}_y$ を用いて次のように書けることを導出します (q は運動量)。

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{J}}_y \rangle &= \partial_u \tilde{\mathcal{A}}_y \Big|_{u=0} \\ &= \tilde{\mathcal{A}}_y \left(-q^2 - 2 \int_0^1 du |\varphi_0|^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

電流は2つの部分からなる超電流 $-2 \int |\varphi_0|^2$ の項は、超伝導電子による電流ですこれはロンドン方程式に対応束縛電流 $-q^2$ の項は超伝導凝縮がない ($\varphi_0 = 0$) 通常の状態でも存在する電流論文ではこれが物質の磁化による束縛電流として解釈できると指摘境界のマクスウェル方程式 (アンペールの法則) が存在しないため (境界条件として電流が存在するだけで、Maxwell 場はダイナミカルに存在はしない) 超電流が磁場を押し返すことができず、マイスナー効果は起こりません磁場は超伝導体内部に自由に侵入できてしまいます

元の境界条件 $\mathcal{A}_\mu = A_\mu|_{u=0}$

新たな境界条件非自明な解をとるために外場ソース $\mathcal{J}_{\text{ext}}^i$ を加えてやる

$$\partial_j \mathcal{F}^{ij} = e^2 (\langle \mathcal{J}^i \rangle + \mathcal{J}_{\text{ext}}^i) \quad (3.6)$$

$$q^2 \tilde{\mathcal{A}}_y = \frac{e^2}{1 + e^2} \tilde{\mathcal{J}}_y^{\text{ext}} := \mu_m \tilde{\mathcal{J}}_y^{\text{ext}} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
\mu_m &= \frac{e^2}{1 + e^2/r_0} \\
\chi_m &= -\frac{e^2/r_0}{1 + e^2/r_0} \\
\lambda^2 &= \frac{1 + e^2/r_0}{2e^2 I} \frac{1}{r_0}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

各種表式を代入してやり，Fourier 変換などをいろいろして解く（方程式を出す）

結果の話

Meissner 効果

$$\mathcal{A}_y \propto e^{-x/\lambda} \tag{3.9}$$

λ は磁場侵入長

境界での電流には、超伝導電子による超電流の他に、物質の磁化に由来する束縛電流 (bound current) が存在する束縛電流の効果により、物質の透磁率 μ_m が真空の値からずれ、物性が変化

極端な第一種超伝導体にはなれない:

通常のギンツブルグ・ランダウ (GL) 理論では、結合定数 e を大きくすると $e \rightarrow \infty$ で磁場侵入長がゼロ $\lambda \rightarrow 0$ となり、磁場を完全に排除する極端な第一種超伝導体になりますしかし、このホログラフィックなモデルでは、束縛電流の効果により $e \rightarrow \infty$ としても λ が有限の値を保ち、極端な第一種にはなれないことが示されました

GL パラメータの導出 (5 次元バルクの場合) : 特に解析的な解が得られる 5 次元バルクのモデルにおいて、磁場侵入長 λ とコヒーレンス長 ξ を具体的に計算し、超伝導体の種類 (第一種か第二種か) を決定する GL パラメータ $\kappa^2 = \lambda^2/\xi^2$ を解析的に導出超伝導体の性質が温度や結合定数にどう依存するかが明らかになりました

参考文献

- [1] G. Policastro, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, p. 081601, 2001.

- [2] P. Kovtun, Dan T. Son, and Andrei O. Starinets. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 94, p. 111601, 2005.
- [3] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Building a Holographic Superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 101, p. 031601, 2008.
- [4] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Holographic Superconductors. *JHEP*, Vol. 12, p. 015, 2008.
- [5] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 231–252, 1998.
- [6] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett. B*, Vol. 428, pp. 105–114, 1998.
- [7] Edward Witten. Anti de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Vol. 2, pp. 253–291, 1998.
- [8] A. Adare, et al. Energy Loss and Flow of Heavy Quarks in Au+Au Collisions at $\sqrt{s(NN)}(1/2) = 200$ -GeV. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 172301, 2007.
- [9] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 217, pp. 595–622, 2001.