1 Определённый интеграл

1.1 Определение

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$, введём:

1. ρ - разбиение $[a;b]$ - последовательность $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ такая, что:
   $x_0 = a, x_n = b$
   $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$

2. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad i \in [0; n-1]$

3. $\lambda\rho = max\{\Delta x_i\}$ - мелкость разбиения

4. $c_i \in [x_i; x_i + 1]$ - произвольная точка отрезка разбиения

Тогда определим интегральную сумму: $S(\rho, \overline{c}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) * \Delta x_i$
И если $\exists \lim_{\lambda\rho \to 0} S(\rho, \overline{c}) = I$, тогда $f(x)$ - интегрируема на $[a;b]$, I - интеграл, и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Распишем предел из определения по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \rho, \overline{c} \quad \lambda\rho < \delta \implies |S(\rho, \overline{c}) - I| < \varepsilon$$

И по Гейне:

$$\forall \{\rho_k\}, \{\overline{c}_k\} \quad \lambda\rho \to 0 \implies \lim_{k \to \infty} S(\rho_k, \overline{c}_k) = I$$

1.2 Необходимое условие интегрируемости

Теорема: $f(x)$ интегрируема на $[a;b] \quad \implies f(x)$ - ограничена на $[a;b]$
Док-во(от противного):

Пусть $f(x)$ неограничена на $[a;b]$ тогда при любом ρ существует такое k, что f(x) неограничена на $[x_k; x_{k+1}]$. И т.к выбор точек произвольный: $\forall \rho \quad \forall C > 0 \quad \exists x \in [x_k; x_{k+1}] \quad |f(x)| > C$

Хотим получить противоречие с интегрируемостью, т.е предел интегральных сумм не должен существовать. Мы добьёмся этого если: $\forall \rho \quad \forall M > 0 \quad \exists \overline{c} \quad \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i\right| > M$
$\left|\sum_{i=0 i \neq k}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i + f(c_k)\Delta x_k\right| > M$
$\left|\sum_{i=0 i \neq k}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i\right| + |f(c_k)|\Delta x_k > M$
$|f(c_k)| > \frac{M - \left|\sum_{i=0 i \neq k}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i\right|}{\Delta x_k}$
Зафиксируем все c_i кроме c_k, и получим что нам нужно доказать, что $|f(c_k)|$ можно сделать больше любого заданного числа, что мы и сделали вначале.

1.3 Суммы Дарбу

1.3.1 Определение

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$

Введём разбиение ρ и его мелкость $\lambda\rho$ так же, как и в определении интеграла.

Т.к $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, то она ограничена на всех её подотрезках(от противного), а значит имеет sup и inf на каждом из них.

Обозначим $\begin{matrix} \sup(f(x)) = M_i \\ \inf(f(x)) = m_i \end{matrix}$ где $x \in [x_i; x_{i+1}]$ $i \in [0; n-1]$

Тогда $\begin{matrix} \overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i & \text{- верхняя сумма Дарбу} \\ \underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i & \text{- нижняя сумма Дарбу} \end{matrix}$

1.3.2 Свойства

1. $\forall \rho, \overline{c} \quad \underline{S}(\rho) \leqslant S(\rho, \overline{c}) \leqslant \overline{S}(\rho)$

   Док-во:

   Рассмотрим $[x_i; x_{i+1}]$

   $x_i \leqslant c_i \leqslant x_{i+1}$ воспользуемся непрерывностью $f(x)$

   $m_i \leqslant f(c_i) \leqslant M_i$ домножим на Δx_i

   $m_i \Delta x_i \leqslant f(c_i) \Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i$ просуммируем по всем i

   $\underline{S}(\rho) \leqslant S(\rho, \overline{c}) \leqslant \overline{S}(\rho)$

2. Добавление точки в ρ не увеличивает $\overline{S}$, не уменьшает $\underline{S}$

   $\underline{S}(\rho) \leqslant \underline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho)$

   Док-во(для $\overline{S}$):

   Пусть мы добавили точку x^* в отрезок $[x_i; x_{i+1}]$, получим два новых отрезка $[x_i; x^*]$, $[x^*; x_{i+1}]$

   Обозначим $M_1^* = \sup(f(x))$ $x \in [x_i; x^*]$ $M_2^* = \sup(f(x))$ $x \in [x^*; x_{i+1}]$

   $\Delta_1 = x^* - x_i \quad \Delta_2 = x_{i+1} - x^*$

   $\Delta_1 + \Delta_2 = x^* - x_i + x_{i+1} - x^* = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$

   Т.к супремум на подотрезке не больше супремума на всём отрезке:

   $M_i \Delta_1 + M \Delta_2 \geqslant M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$

   $M_i(\Delta_1 + \Delta_2) \geqslant M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$

   $M_i \Delta x_i \geqslant M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$

   Т.к остальные $M_j \Delta x_j$ у сумм совпадают, то и $\overline{S}(\rho) \geqslant \overline{S}(\rho^*)$

3. Если ρ^* получена из ρ добавлением конечного числа точек, выполняются те же неравенства.

   $\underline{S}(\rho) \leqslant \underline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho)$

   Док-во - простейшая индукция.

4. $\forall \rho_1, \rho_2 \quad \underline{S}(\rho_1) \leqslant \overline{S}(\rho_2)$

   Док-во:

   Рассмотрим разбиение ρ_3, полученное добавлением всех точек из ρ_1 и ρ_2

- $\underline{S}\rho_1 \leqslant \underline{S}\rho_3$ - по свойству 3 ($\rho_1 = \rho,\ \rho_3 = \rho^*$)
- $\underline{S}\rho_3 \leqslant \overline{S}\rho_3$ - по свойству 1
- $\overline{S}\rho_3 \leqslant \overline{S}\rho_2$ - по свойству 3 ($\rho_2 = \rho,\ \rho_3 = \rho^*$)

5. Пусть ρ_0 - фиксированное, тогда
$$\forall\rho \begin{array}{lcl} \underline{S}(\rho) \leqslant \overline{S}(\rho_0) & \Longrightarrow & \underline{S}(\rho) \text{ ограничена сверху} \Longrightarrow \exists\ \sup(\underline{S}(\rho)) = \underline{I} \\ \overline{S}(\rho) \geqslant \underline{S}(\rho_0) & \Longrightarrow & \overline{S}(\rho) \text{ ограничена снизу} \Longrightarrow \exists\ \inf(\overline{S}(\rho)) = \overline{I} \end{array}$$

1.4 Критерий интегрируемости

Пусть $f(x)$ - ограничена на $[a;b]$, тогда равносильны следующие утверждения:

1. $\lim_{\lambda\rho\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$
2. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\rho \quad \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$
3. $\overline{I} = \underline{I}$
4. $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$

$\int_a^b f(x)dx = \overline{I} = \underline{I} = \lim_{\lambda\rho\to 0}(\overline{S}) = \lim_{\lambda\rho\to 0}(\underline{S})$

1.5 Определение площади / геометрический смысл определённого интеграла

Определим прямоугольник $Rect(a,b,c,d) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in [a;b] \\ y \in [c;d] \end{array}\right\}$

И определим его площадь $S(Rect(a,b,c,d)) = (b-a)(d-c)$

Пусть $\sigma = \vee_{i=1}^{n} Rect_i$ - множество точек, полученное объединением n прямоугольников, пересекающихся не больше, чем по стороне. Тогда $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} S(Rect_i)$

Пусть дана фигура (произвольное множество точек) A.

Пусть существует прямоугольник B такой, что $A \subset B$, если нет, то и площади у такой фигуры нет.

Рассмотрим σ^+ - такая σ, что $A \subset \sigma^+$. Она всегда существует (как минимум B)

Заметим, что $S(\sigma^+) \geqslant 0$ (как и от любой другой σ), значит $\exists\ \inf(S(\sigma^+)) = S^+(A)$ - определение верхней площади.

Теперь рассмотрим σ^- - такая σ, что $\sigma^- \subset A$. Она может и не существовать(ф-ия Дирихле) тогда считаем, что площади у фигуры нет.

Но если существует, то $S(\sigma^-) \leqslant S(B)$ т.к $\sigma^- \subset A \subset B$, значит $\exists \sup(S(\sigma^-)) = S^-(A)$ - определение нижней площади.

Если $S^+(A) = S^-(A) = S(A)$, то $S(A)$ - площадь A.

Определим криволинейную трапецию: f - положительно определена на $[a,b]$

$Tr(a,b,f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in [a;b] \\ y \in [0;f(x)] \end{array}\right\}$

Тогда $\exists\ S(Tr(a,b,f)) \iff f(x)$ интегрируема на $[a;b]$

$S(Tr(a,b,f)) = \int_a^b f(x)dx$

$S(\sigma^+) = \overline{S}(\rho)$

$S(\sigma^-) = \underline{S}(\rho)$