1 Определённый интеграл

1.1 Определение

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$, введём:

1. ρ - разбиение $[a;b]$ - последовательность $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ такая, что:
   $x_0 = a, x_n = b$
   $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$

2. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad i \in [0; n-1]$

3. $\lambda\rho = max\{\Delta x_i\}$ - мелкость разбиения

4. $c_i \in [x_i; x_i + 1]$ - произвольная точка отрезка разбиения

Тогда определим интегральную сумму:
$S(\rho, \overline{c}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) * \Delta x_i$
И если $\exists \lim_{\lambda\rho \to 0} S(\rho, \overline{c}) = I$, тогда $f(x)$ - интегрируема на $[a;b]$, I - интеграл, и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Распишем предел из определения по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \rho, \overline{c} \quad \lambda\rho < \delta \implies |S(\rho, \overline{c}) - I| < \varepsilon$$

И по Гейне:

$$\forall \rho_k$$

1.2 Примеры интегрируемой / не интегрируемой функций

1.3 Необходимое условие интегрируемости

1.4 Суммы дарбу

1.4.1 Определение

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$
Введём разбиение ρ и его мелкость $\lambda\rho$ так же, как и в определении интеграла.
Т.к $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, то она ограничена на всех её подотрезках(от противного), а значит имеет sup и inf на каждом из них.

Обозначим $\begin{matrix} sup(f(x)) = M_i \\ inf(f(x)) = m_i \end{matrix}$ где $x \in [x_i; x_{i+1}] \quad i \in [0; n-1]$

Тогда $\begin{matrix} \overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i & \text{- верхняя сумма дарбу} \\ \underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i & \text{- нижняя сумма дарбу} \end{matrix}$

1.4.2 Свойства

1. $\forall \rho, \overline{c} \quad \underline{S}(\rho) \leqslant S(\rho, \overline{c}) \leqslant \overline{S}(\rho)$

   Док-во:
   Рассмотрим $[x_i; x_{i+1}]$
   $x_i \leqslant c_i \leqslant x_{i+1}$ воспользуемся непрерывностью $f(x)$
   $m_i \leqslant f(c_i) \leqslant M_i$ домножим на Δx_i
   $m_i \Delta x_i \leqslant f(c_i) \Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i$ просуммируем по всем i
   $\underline{S}(\rho) \leqslant S(\rho, \overline{c}) \leqslant \overline{S}(\rho)$

2. Добавление точки в ρ не увеличивает $\overline{S}$, не уменьшает $\underline{S}$
   $\underline{S}(\rho) \leqslant \underline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho)$

3. Если ρ^* получена из ρ добавлением конечного числа точек, выполняются те же неравенства.
   $\underline{S}(\rho) \leqslant \underline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho^*) \leqslant \overline{S}(\rho)$

4. $\forall \rho_1, \rho_2 \quad \underline{S}(\rho_1) \leqslant \overline{S}(\rho_2)$

5. Пусть ρ_0 - фиксированное, тогда
   $$\forall \rho \begin{array}{lll} \underline{S}(\rho) \leqslant \overline{S}(\rho_0) & \Longrightarrow \quad \underline{S}(\rho) \text{ ограничена сверху} & \Longrightarrow \quad \exists\ sup(\underline{S}(\rho)) = \underline{I} \\ \overline{S}(\rho) \geqslant \underline{S}(\rho_0) & \Longrightarrow \quad \overline{S}(\rho) \text{ ограничена снизу} & \Longrightarrow \quad \exists\ inf(\overline{S}(\rho)) = \overline{I} \end{array}$$

1.5 Критерий интегрируемости

Пусть $f(x)$ - ограничена на $[a; b]$, тогда равносильны следующие утверждения:

1. $\lim_{\lambda\rho \to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho \quad \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$

3. $\overline{I} = \underline{I}$

4. $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$

$\int_a^b f(x)dx = \overline{I} = \underline{I} = \lim_{\lambda\rho \to 0}(\overline{S}) = \lim_{\lambda\rho \to 0}(\underline{S})$

1.6 Определение площади / геометрический смысл определённого интеграла