

1 Определённый интеграл

1.1 Определение

Пусть $f(x)$ определена на $[a; b]$, введём:

1. ρ - разбиение $[a; b]$ - последовательность $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ такая, что:
 $x_0 = a, x_n = b$
 $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$
2. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad i \in [0; n-1]$
3. $\lambda\rho = \max\{\Delta x_i\}$ - мелкость разбиения
4. $c_i \in [x_i; x_{i+1}]$ - произвольная точка отрезка разбиения

Тогда определим интегральную сумму: $S(\rho, \bar{c}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) * \Delta x_i$

И если $\exists \lim_{\lambda\rho \rightarrow 0} S(\rho, \bar{c}) = I$, тогда $f(x)$ - интегрируема на $[a; b]$, I - интеграл, и обозначается:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Распишем предел из определения по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \rho, \bar{c} \quad \lambda\rho < \delta \implies |S(\rho, \bar{c}) - I| < \varepsilon$$

И по Гейне:

$$\forall \{\rho_k\}, \{\bar{c}_k\} \quad \lambda\rho \rightarrow 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} S(\rho_k, \bar{c}_k) = I$$

1.2 Необходимое условие интегрируемости

Теорема: $f(x)$ интегрируема на $[a; b] \implies f(x)$ - ограничена на $[a; b]$

Док-во(от противного):

Пусть $f(x)$ неограничена на $[a; b]$ тогда при любом ρ существует такое k , что $f(x)$ неограничена на $[x_k; x_{k+1}]$. И т.к. выбор точек произвольный: $\forall \rho \quad \forall C > 0 \quad \exists x \in [x_k; x_{k+1}] \quad |f(x)| > C$

Хотим получить противоречие с интегрируемостью, т.е. предел интегральных сумм не должен существовать. Мы добьёмся этого если: $\forall \rho \quad \forall M > 0 \quad \exists \bar{c} \quad \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i \right| > M$

$$\left| \sum_{i=0, i \neq k}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i + f(c_k) \Delta x_k \right| > M$$

$$\left| \sum_{i=0, i \neq k}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i \right| + |f(c_k)| \Delta x_k > M$$

$$|f(c_k)| > \frac{M - \left| \sum_{i=0, i \neq k}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i \right|}{\Delta x_k}$$

Зафиксируем все c_i кроме c_k , и получим что нам нужно доказать, что $|f(c_k)|$ можно сделать больше любого заданного числа, что мы и сделали вначале.

1.3 Суммы Дарбу

1.3.1 Определение

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a; b]$

Введём разбиение ρ и его мелкость $\lambda\rho$ так же, как и в определении интеграла.

Т.к $f(x)$ ограничена на $[a; b]$, то она ограничена на всех её подотрезках (от противного), а значит имеет \sup и \inf на каждом из них.

Обозначим $\sup(f(x)) = M_i$ где $x \in [x_i; x_{i+1}]$ $i \in [0; n-1]$
 $\inf(f(x)) = m_i$

Тогда $\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ - верхняя сумма Дарбу
 $\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ - нижняя сумма Дарбу

1.3.2 Свойства

$$1. \forall \rho, \bar{c} \quad \underline{S}(\rho) \leq S(\rho, \bar{c}) \leq \bar{S}(\rho)$$

Док-во:

Рассмотрим $[x_i; x_{i+1}]$

$x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$ воспользуемся непрерывностью $f(x)$

$m_i \leq f(c_i) \leq M_i$ домножим на Δx_i

$m_i \Delta x_i \leq f(c_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ просуммируем по всем i

$$\underline{S}(\rho) \leq S(\rho, \bar{c}) \leq \bar{S}(\rho)$$

$$2. \text{Добавление точки в } \rho \text{ не увеличивает } \bar{S}, \text{ не уменьшает } \underline{S}$$
$$\underline{S}(\rho) \leq \underline{S}(\rho^*) \leq \bar{S}(\rho^*) \leq \bar{S}(\rho)$$

Док-во(для \bar{S}):

Пусть мы добавили точку x^* в отрезок $[x_i; x_{i+1}]$, получим два новых отрезка $[x_i; x^*]$, $[x^*; x_{i+1}]$

Обозначим $M_1^* = \sup(f(x)) \quad x \in [x_i; x^*]$ $M_2^* = \sup(f(x)) \quad x \in [x^*; x_{i+1}]$

$$\Delta_1 = x^* - x_i \quad \Delta_2 = x_{i+1} - x^*$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = x^* - x_i + x_{i+1} - x^* = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

Т.к супремум на подотрезке не больше супремума на всём отрезке:

$$M_i \Delta_1 + M \Delta_2 \geq M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$$

$$M_i (\Delta_1 + \Delta_2) \geq M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$$

$$M_i \Delta x_i \geq M_1^* \Delta_1 + M_2^* \Delta_2$$

$$\text{Т.к остальные } M_j \Delta x_j \text{ у сумм совпадают, то и } \bar{S}(\rho) \geq \bar{S}(\rho^*)$$

$$3. \text{Если } \rho^* \text{ получена из } \rho \text{ добавлением конечного числа точек, выполняются те же неравенства.}$$
$$\underline{S}(\rho) \leq \underline{S}(\rho^*) \leq \bar{S}(\rho^*) \leq \bar{S}(\rho)$$

Док-во - простейшая индукция.

$$4. \forall \rho_1, \rho_2 \quad \underline{S}(\rho_1) \leq \bar{S}(\rho_2)$$

Док-во:

Рассмотрим разбиение ρ_3 , полученное добавлением всех точек из ρ_1 и ρ_2

- $\underline{S}\rho_1 \leq \underline{S}\rho_3$ - по свойству 3 ($\rho_1 = \rho$, $\rho_3 = \rho^*$)
- $\underline{S}\rho_3 \leq \bar{S}\rho_3$ - по свойству 1
- $\bar{S}\rho_3 \leq \bar{S}\rho_2$ - по свойству 3 ($\rho_2 = \rho$, $\rho_3 = \rho^*$)

5. Пусть ρ_0 - фиксированное, тогда

$$\forall \rho \quad \begin{aligned} \underline{S}(\rho) \leq \bar{S}(\rho_0) &\implies \underline{S}(\rho) \text{ ограничена сверху} \implies \exists \sup(\underline{S}(\rho)) = \underline{I} \\ \bar{S}(\rho) \geq \underline{S}(\rho_0) &\implies \bar{S}(\rho) \text{ ограничена снизу} \implies \exists \inf(\bar{S}(\rho)) = \bar{I} \end{aligned}$$

1.4 Критерий интегрируемости

Пусть $f(x)$ - ограничена на $[a; b]$, тогда равносильны следующие утверждения:

1. $\lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} (\bar{S} - \underline{S}) = 0$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho \quad \bar{S} - \underline{S} < \varepsilon$
3. $\bar{I} = \underline{I}$
4. $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{I} = \underline{I} = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} (\bar{S}) = \lim_{\lambda \rho \rightarrow 0} (\underline{S})$$

1.5 Определение площади / геометрический смысл определённого интеграла

Определим прямоугольник $Rect(a, b, c, d) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x \in [a; b] \\ y \in [c; d] \end{array} \right. \right\}$

И определим его площадь $S(Rect(a, b, c, d)) = (b - a)(d - c)$

Пусть $\sigma = \bigvee_{i=1}^n Rect_i$ - множество точек, полученное объединением n прямоугольников, пересекающихся не больше, чем по стороне. Тогда $S(\sigma) = \sum_{i=1}^n S(Rect_i)$

Пусть дана фигура (произвольное множество точек) A .

Пусть существует прямоугольник B такой, что $A \subset B$, если нет, то и площади у такой фигуры нет.

Рассмотрим σ^+ - такая σ , что $A \subset \sigma^+$. Она всегда существует (как минимум B)

Заметим, что $S(\sigma^+) \geq 0$ (как и от любой другой σ), значит $\exists \inf(S(\sigma^+)) = S^+(A)$ - определение верхней площади.

Теперь рассмотрим σ^- - такая σ , что $\sigma^- \subset A$. Она может и не существовать (ф-ия Дирихле) тогда считаем, что площади у фигуры нет.

Но если существует, то $S(\sigma^-) \leq S(B)$ т.к. $\sigma^- \subset A \subset B$, значит $\exists \sup(S(\sigma^-)) = S^-(A)$ - определение нижней площади.

Если $S^+(A) = S^-(A) = S(A)$, то $S(A)$ - площадь A .

Определим криволинейную трапецию: f - положительно определена на $[a, b]$

$$Tr(a, b, f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x \in [a; b] \\ y \in [0; f(x)] \end{array} \right. \right\}$$

Тогда $\exists S(Tr(a, b, f)) \iff f(x)$ интегрируема на $[a; b]$

$$S(Tr(a, b, f)) = \int_a^b f(x) dx$$

$$S(\sigma^+) = \bar{S}(\rho)$$

$$S(\sigma^-) = \underline{S}(\rho)$$

1.6 Свойства определённого интеграла

1. Аддитивность.

Если $f(x)$ - инт на $[a; b] \implies \forall c \in [a; b] \quad f(x)$ - инт на $[a; c]$ и $[c; b]$, и наоборот.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Док-во:

Пользуемся тем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho \quad \bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon \iff f(x)$ - инт на $[a; b]$

(\implies) Дано: $f(x)$ - инт на $[a; b]$ т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho \quad \bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon$

Пусть ρ^* - разбиение, полученное добавлением точки c в ρ , тогда:

$$\bar{S}(\rho^*) \leq \bar{S}(\rho), \quad \underline{S}(\rho^*) \geq \underline{S}(\rho)$$

Рассмотрим разбиение ρ_1 , полученное из ρ^* выкидыванием всех точек, не входящих в $[a; c]$.

Получим: $\bar{S}(\rho_1) - \underline{S}(\rho_1) \leq \bar{S}(\rho^*) - \underline{S}(\rho^*) < \varepsilon$

Это верно потому, что разность между соответствующими элементами верхней и нижней суммами дарбу всегда неотрицательная. И т.к. ρ^* получается из ρ_1 добавлением точек, лежащих вне отрезка, в котором лежат все точки ρ^* , то если мы вычтем из правой части неравенства левую, то получим некоторое число неотрицательных слагаемых.

(\impliedby) Дано: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho_1, \rho_2 \quad \begin{matrix} \bar{S}(\rho_1) - \underline{S}(\rho_1) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \bar{S}(\rho_2) - \underline{S}(\rho_2) < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$, где ρ_1, ρ_2 - разбиения $[a; c], [c; b]$.

Сложим неравенства: $\bar{S}(\rho_1) - \underline{S}(\rho_1) + \bar{S}(\rho_2) - \underline{S}(\rho_2) < \varepsilon$

$$\bar{S}(\rho_1) + \bar{S}(\rho_2) - (\underline{S}(\rho_1) + \underline{S}(\rho_2)) < \varepsilon$$

$$\bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon$$

Определение: если $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. Однородность.

3. Произведение.

4. Переход к неравенству.

5. Модуль.

1.7 Теорема о среднем

1.8 Достаточные признаки интегрируемости

1. Непрерывные

2. Монотонные

1.9 Интеграл как функция верхнего предела