Д/з №3 Свойства точечных оценок

Анохин А.И.

№1

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{C}{x^4}dx =$

$= C\frac{1}{-3x^3}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{C}{3x^3}\Big|_{x=1} = \frac{C}{3\cdot 1} = 1 \Rightarrow \boxed{C=3}$

2) $P(|\bar{\xi}^n - E[\xi_1]| > 0{,}1) < 0{,}01$

Запишем неравенство Чебышева

$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon = 0{,}1$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x\cdot\frac{3}{x^4}dx = \frac{3}{x^2(-2)}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{3}{2}$

$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x^2\cdot\frac{3}{x^4}dx = \frac{3}{-1\cdot x}\Big|_{1}^{+\infty} = 3$

$D\xi = 3 - \frac{9}{4} = 0{,}75$

$= \quad E[\xi_i] = E\xi$

$D\bar{\xi}^n = \frac{D\xi}{n} = D\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\dots\xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n) =$

$= \frac{n}{n^2}D\xi = \frac{D\xi}{n}$

$$P(|\bar{\xi}^n - E[\xi_1]| > 0{,}1) \le \frac{D\bar{\xi}^n}{(0{,}1)^2} = \frac{D\xi}{n(0{,}1)^2} = \frac{0{,}75}{0{,}01\cdot n} < 0{,}01$$

$$\frac{0{,}75}{0{,}01\cdot 0{,}01} < n \Rightarrow \underline{n > 7500}$$

№2

$$P\left(|\bar{\xi}^n - \tfrac{7}{2}| > \varepsilon\right) \le \frac{D\xi}{n\varepsilon^2}$$

$$E\xi = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$$

$$E\xi^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{91}{6}^{\backslash 2} - \frac{49}{4}^{\backslash 3} = \frac{35}{12}$$

$$P\left(|\bar{\xi}^n - \tfrac{7}{2}| < \varepsilon\right) \le \frac{D\xi}{n\varepsilon^2} = \underline{\frac{35}{12n\varepsilon^2}}$$

№3

1) $\xi_{i1} \sim Bern(p_1)$ – группа ~~лечения~~ контроля

$\xi_{i2} \sim Bern(p_2)$ – группа ~~контроля~~ лечения $\quad i = 1, 2, \dots, 500$

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^{500} \xi_{i1}}{n}, \quad S_2 = \frac{\sum_{i=1}^{500} \xi_{i2}}{n}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{\xi_{12} + \xi_{22} + \xi_{32} + \dots + \xi_{n2} - (\xi_{11} + \xi_{21} + \dots + \xi_{n1})}{n} =$$

$$= \frac{\dfrac{\xi_{12} + \xi_{22} + \dots + \xi_{n2}}{\sqrt{n}} - \dfrac{\xi_{11} + \xi_{21} + \dots + \xi_{n1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\xi_{12} + \xi_{22} + \dots + \xi_{n2} - nE\xi_2}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}E\xi_2}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\frac{\xi_{11}+\xi_{11}+\dots\xi_{n1} - nE\xi_1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}E\xi_1}{\sqrt{n}} = \frac{N(0, D\xi_2)}{\sqrt{n}} + E\xi_2 - \frac{N(0, D\xi_1)}{\sqrt{n}} -$$

$$- E\xi_1 \approx N\left(E\xi_2 - E\xi_1, \frac{D\xi_1 + D\xi_2}{n}\right) = N\left(p_2 - p_1, \frac{p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)}{n}\right)$$

2) $H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_2 > p_1$

Для проверки этой гипотезы проведём Z-тест, т.к. данные распределены нормально, уровень значимости установим стандартный $\alpha = 0{,}01$

$$Z = \frac{E(S_2 - S_1) - \overset{\text{при } H_0: p_1 = p_2}{0}}{SE} = \frac{E(S_2 - S_1)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{500} + \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{500}}} \approx 3{,}67$$

Для $\alpha = 0{,}01$, критическое значение одностороннего теста будет равно 2,58

$Z = 3{,}67 > 2{,}58$; Получается, что „Незабудка" показало значимое „статистически" различие по сравнению с плацебо.