UNDERVISNINGS
MINISTERIET
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Højere teknisk eksamen

Forberedelsesmateriale

htx142-MAT/A-27082014

Onsdag den 27. august 2014

Forord

Forberedelsesmateriale til prøverne i matematik A

Der er afsat 10 timer på 2 dage til arbejdet med forberedelsesmaterialet til prøverne i matematik A. Oplægget indeholder teori, eksempler og opgaver i et emne i forlængelse af kernestoffet.

Alt billedmateriale er opgavekommissionens ejendom.

Dele af materialet uddybes i et appendiks på side 19 - 22. Dette appendiks indgår ikke i den skriftlige prøve.

Forberedelse til den 5-timers skriftlige prøve:
Nogle af spørgsmålene ved 5-timersprøven tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Forberedelse til den mundtlige prøve:
Emnet, behandlet i dette materiale, indgår som supplerende stof. Der vil derfor være spørgsmål ved den mundtlige prøve i dette emne.

I forberedelsesperioden er alle hjælpemidler tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

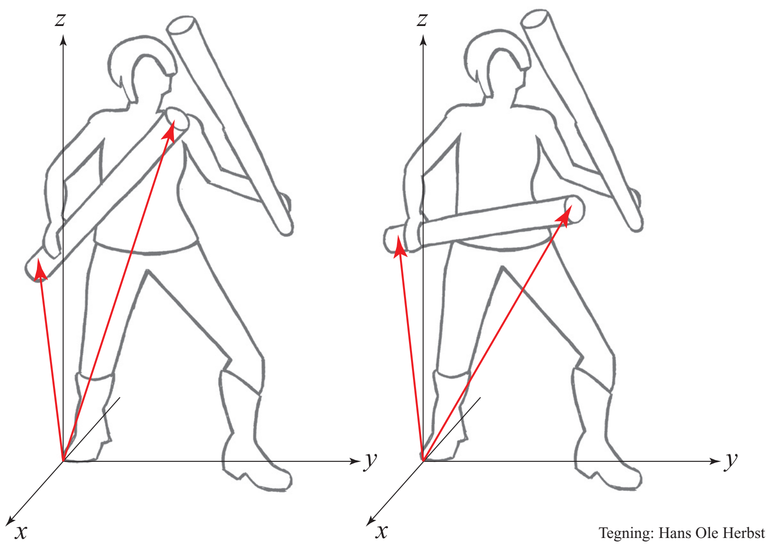
Lineære afbildninger

1. Indledning

I film- og medieverdenen samt andre steder, hvor man arbejder med illustrationer eller visualisering, har man behov for at kunne skalere, dreje eller spejle figurer. Dette gælder ikke mindst ved animation af figurer i computerspil og på film. Bag beregningerne af disse animationer ligger et matematisk emne kaldet *lineære afbildninger.*

Lineære afbildninger anvendes i sammenhæng med vektorregning, som vi kender fra vektorer i planen og i rummet. Alle figurer i planen og i rummet kan fremstilles ved stedvektorer, hvor skalering, drejning og spejling af figurerne er lineære regneoperationer. Når vi skal arbejde med lineære afbildninger, får vi brug for at kende til *matricer*. Vi vil i dette forberedelsesmateriale introducere lineære afbildninger og matricer. Ordet matrix er uregelmæssigt og bøjes: en matrix, matricen, flere matricer, alle matricerne.

Tegningen viser en person, der slår med en kølle. Rotationen af køllen er en lineær afbildning og den lineære afbildning udføres ved hjælp af matricer.

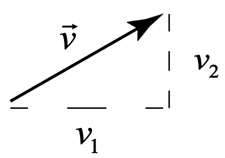


Tegning: Hans Ole Herbst

2. Vektorer og matricer

Vektorer og matricer er nært beslægtede.
En vektor i planen $\vec{v}$ er givet ved to reelle tal v_1 og v_2 (se figur 1),

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

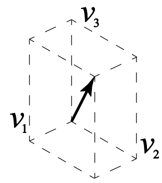


Figur 1

hvor v_1 og v_2 er vektorens koordinater. Mængden af plane vektorer betegner vi med symbolet $\mathbb{R}^2$.

En vektor i rummet $\vec{v}$ er givet ved tre reelle tal v_1, v_2 og v_3 (se figur 2),

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



Figur 2

hvor v_1, v_2 og v_3 er vektorens koordinater. Mængden af rumlige vektorer betegnes $\mathbb{R}^3$.
Helt generelt kan man beskrive vektorer med n tal

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

og mængden af sådanne vektorer vil vi betegne med $\mathbb{R}^n$.

Vi vil nu definere en *matrix*. En matrix er en samling tal organiseret i rækker og søjler. En matrix, der består af n rækker og m søjler af reelle tal, kalder man en $n \times m$ matrix. Hver af de m søjler består af n tal, så vi kan fremstille matricen som dannet af m vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ stillet op ved siden af hinanden. I det følgende benævner vi matricer med fed skrift.

Definition af en matrix

En matrix er en samling tal organiseret i rækker og søjler:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ \vdots \\ v_{n,m} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,m} \end{bmatrix}$$

Mængden af $n \times m$ matricer betegnes med $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Eksempel 1

Stiller vi vektorerne $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ op ved siden af hinanden, får vi en matrix,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix},$$

som består af 3 rækker og 2 søjler (kaldet en 3×2 matrix).

2a. Matrix-vektorproduktet

Fra vektorregningen kender vi både skalar- og vektorproduktet. For matricer er der ligeledes defineret forskellige typer produkter, som vi skal se på her.

Definition af matrix-vektorprodukt

Generelt udtrykt kan en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ multipliceres med en vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.
Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \end{bmatrix} \text{ og } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

da definerer man produktet ved $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m$
Matrix-vektorproduktet er kun defineret, når antallet af søjler m i $\mathbf{A}$ er lig med antallet af koordinater m i $\vec{x}$.

Eksempel 2

Lad os beregne matrix-vektorproduktet af matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ og vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 1
Bestem følgende matrix-vektorprodukter mellem:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ og $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 0 & -4 \\ \frac{2}{3} & 2 & -2 \end{bmatrix}$ og $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2b. Matrix-matrixproduktet

Vi får også brug for at gange matricer sammen. Dette foregår efter lignende princip som ved beregning af matrix-vektorproduktet.

Definition af matrix-matrixprodukt

Generelt udtrykt kan en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ multipliceres med en matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \dots & \vec{w}_k \end{bmatrix}$$

da definerer man produktet $\mathbf{C}$ ved

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \dots & \vec{w}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\vec{w}_1 & \mathbf{A}\vec{w}_2 & \dots & \mathbf{A}\vec{w}_k \end{bmatrix}$$

hvor hver søjle i $\mathbf{C}$ er givet ved **A** multipliceret med den tilsvarende søjle i **B**. Hver søjle i $\mathbf{C}$ er altså et matrix-vektorprodukt. Produktet $\mathbf{C}$ er en $n \times k$ matrix.

Matrix-matrixproduktet er kun defineret, når antallet af søjler i **A** er lig antallet af rækker i **B**.

Eksempel 3
Lad os beregne matrix-matrixproduktet **C** af matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Produktet bliver}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} & 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 13 & -3 \\ 12 & 14 & 30 \\ -14 & 2 & -15 \end{bmatrix}$$

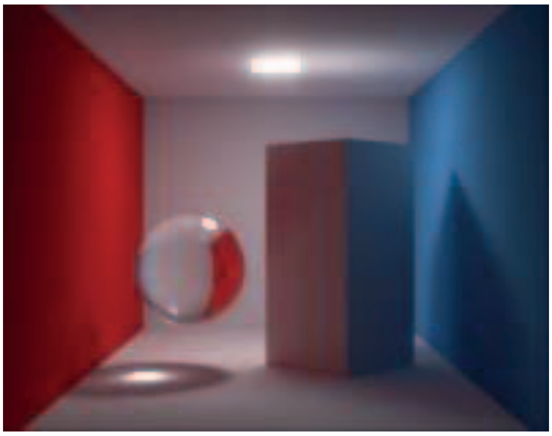
A er en 3×2 matrix, **B** er en 2×3 matrix, så $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bliver en 3×3 matrix.

Opgave 2

Matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er givet ved $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

a) Bestem matrix-matrixproduktet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ og kontroller resultatet med dit CAS-værktøj.

3. Lineære afbildninger

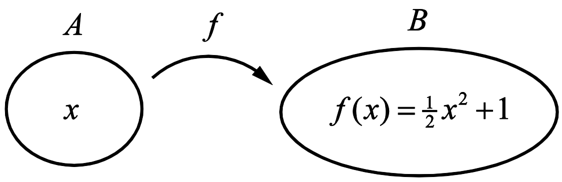


http://graphics.ucsd.edu/~henrik/

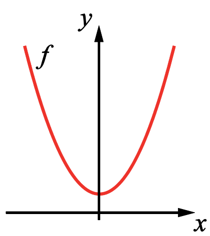
I moderne computeranimerede film bruges mange kræfter på at få overflader til at se realistiske ud. Én metode er *ray tracing*, hvor man følger mange lysstråler fra en lyskilde og simulerer, hvordan de reflekteres fra forskellige overflader. Den matematiske teori, der skal til for at gøre *ray tracing* mulig, involverer bl.a. lineære afbildninger.

Dette afsnit handler om, hvordan matricer leder frem til et nyt begreb nemlig lineære afbildninger. Først vil vi se på, hvad en afbildning er. En afbildning $f : A \to B$ knytter til ethvert x i mængden A et element $f(x)$ i mængden B. Vi kender allerede eksempler på afbildninger. For eksempel er *reelle funktioner* afbildninger, hvor mængderne A og B er de reelle tal, og *vektorfunktioner*, hvor mængden A er reelle tal og B er mængden af vektorer i planen. Lad os se på nogle konkrete eksempler.

En reel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ knytter til ethvert reelt tal $x \in \mathbb{R}$ et reelt tal $f(x) \in \mathbb{R}$. Figur 3a og 3b viser to repræsentationer af funktionen f.

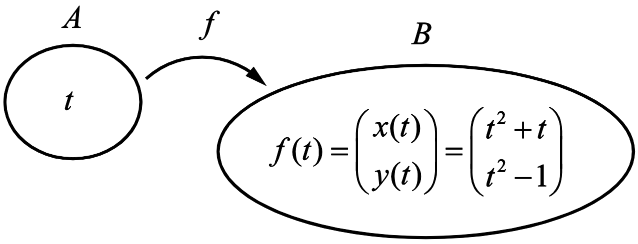


Figur 3a

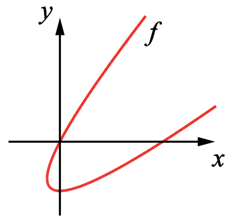


Figur 3b

En vektorfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ knytter til ethvert reelt tal $t\in\mathbb{R}$ en vektor $f(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ i planen. Bemærk at vi i dette materiale har valgt at udelade vektorpil, selvom $f(t)$ i nogle tilfælde er en vektor. Figur 4a og 4b viser to repræsentationer af funktionen f.

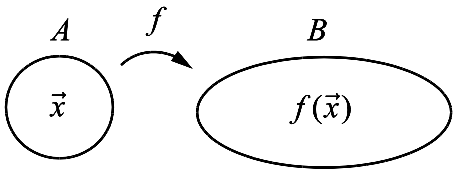


Figur 4a

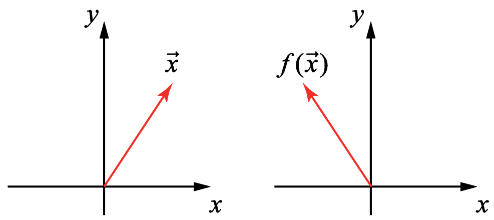


Figur 4b

En afbildning $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ knytter til hvert $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ et $f(\vec{x})\in\mathbb{R}^2$.
Figur 5a og 5b viser to repræsentationer af funktionen f.



Figur 5a



Afbildningen f er en spejling af vektor $\vec{x}$ i y-aksen.

Figur 5b

Vi vil nu se på sammenhængen mellem matricer og afbildninger. Givet en matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ definerer vi en afbildning $f_{\mathbf{A}}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ ved at sætte $f_{\mathbf{A}}(\vec{x})=\mathbf{A}\cdot\vec{x}$. En afbildning defineret på denne måde har nogle pæne egenskaber, der gør, at man kalder den lineær. Først definerer vi, hvad der forstås ved en lineær afbildning, og senere (Sætning 2) viser vi, at afbildningen $f_{\mathbf{A}}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ er lineær.

Definition af lineær afbildning

En afbildning $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ kaldes lineær, hvis følgende to betingelser er opfyldt

(L1) For alle $k\in\mathbb{R}$ og alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ gælder $f(k\cdot\vec{x})=k\cdot f(\vec{x})$
(L2) For alle $\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{R}^m$ gælder $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$

L1 og L2 kaldes linearitetsbetingelserne

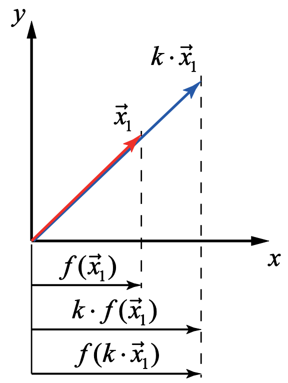
Den geometriske betydning af definitionen illustreres i følgende eksempel.

Eksempel 4
Vi vil nu grafisk vise, at projektionen af en vektor i planen på x-aksen opfylder linearitetsbetingelserne L1 og L2 givet i definitionen. Afbildningen er altså lineær.

Lad $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ være vektorer i planen og $f(\vec{x}_1)$ og $f(\vec{x}_2)$ være projektionerne af $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ på x-aksen.

Figur 6 illustrerer, at betingelsen L1 $k\cdot f(\vec{x}_1)=f(k\cdot\vec{x}_1)$ er opfyldt for afbildningen, som projicerer en vektor i planen ned på x-aksen.

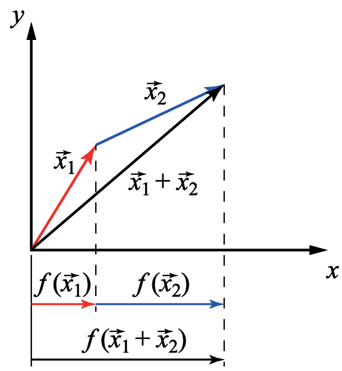
Afbildning af en vektor ganget med en skalar $f(k\cdot\vec{x}_1)$ er lig afbildningen af vektoren ganget med skalaren $k\cdot f(\vec{x}_1)$.



Figur 6

Figur 7 illustrerer, at betingelsen L2 $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$ er opfyldt for afbildningen, som projicerer en vektor i planen ned på x-aksen.

Afbildningen af summen af de to vektorer $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ er lig med summen af afbildningen taget på vektorerne hver for sig $f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$.



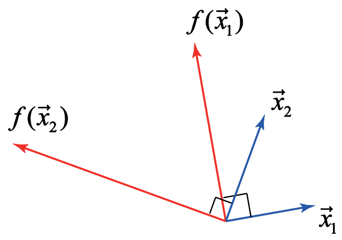
Figur 7

Opgave 3

$f(\vec{x}) = 2 \cdot \hat{x}$ afbilder vektor $\vec{x}$ over i to gange tværvektoren.

Lad $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ være vektorer i planen.

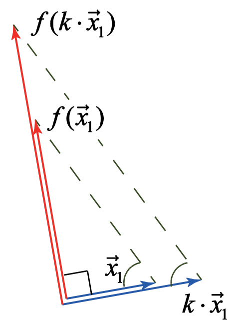
Den geometriske betydning af afbildningen *f* er vist på figur 8. Vektorerne $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ er vist med blåt, mens $f(\vec{x}_1)$ og $f(\vec{x}_2)$ er vist med rødt.



Figur 8

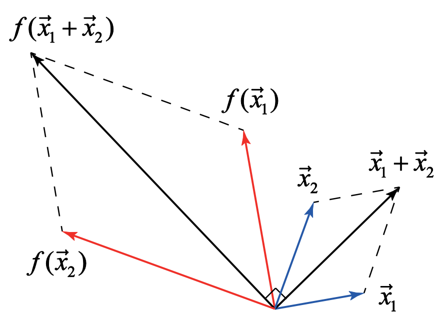
a) Argumenter med egne ord ud fra figur 9 og figur 10 for, at afbildningen overholder linearitetsbetingelserne L1 og L2 fra definitionen af en lineær afbildning.

L1: $k \cdot f(\vec{x}_1) = f(k \cdot \vec{x}_1)$



Figur 9

L2: $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$



Figur 10

3a. Afbildningsmatricer

Som nævnt i indledningen er der en tæt sammenhæng mellem lineære afbildninger og matricer, idet enhver lineær afbildning kan udtrykkes som matrix-multiplikation.

Sætning 1

Antag, at afbildningen $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ er lineær. Så findes der en og kun én matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, så der for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ gælder

$$f(\vec{x}) = \mathbf{A}\cdot\vec{x}$$

Denne matrix kaldes *afbildningsmatricen*.

Beviset for sætning 1 findes i appendiks.

Af lige så stor betydning er det omvendte resultat. Hvis f er givet ved multiplikation med en matrix, da er f lineær. I det følgende vil vi lade $f_{\mathbf{A}}$ betegne en afbildning, der er defineret ved matrix-vektormultiplikation med en matrix $\mathbf{A}$.

Sætning 2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ være en matrix. Så opfylder den tilhørende afbildning $f_{\mathbf{A}}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) = \mathbf{A}\cdot\vec{x}$$

de to linearitetsbetingelser L1 og L2.

Beviset for sætning 2 findes i appendiks.

I opgave 3 argumenterede du for, at afbildningen $f(\vec{x}) = 2\cdot\hat{x}$ er lineær. Sætning 1 fortæller os, at afbildningen derfor kan beskrives ved multiplikation med en afbildningsmatrix. Afbildningen $f(\vec{x}) = 2\cdot\hat{x}$ er en rotation efterfulgt af en skalering. Vi påstår, at sammensætningen af de to afbildninger er givet ved afbildningsmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette vender vi tilbage til i eksempel 5.

Opgave 4

Lad to vektorer være givet ved $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Tegn $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ samt $2 \cdot \hat{x}_1$ og $2 \cdot \hat{x}_2$ i samme koordinatsystem.

b) Bestem koordinaterne til $2 \cdot \hat{x}_1$ og $2 \cdot \hat{x}_2$ ved at udregne matrix-vektorprodukterne:

$$f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_1) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_2) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Kontroller at koordinaterne for vektorerne $2 \cdot \hat{x}_1$ og $2 \cdot \hat{x}_2$ på din tegning er lig koordinaterne for de beregnede vektorer $f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_1)$ og $f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_2)$.

I opgave 4 blev afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ givet. I næste afsnit vises, hvordan man bestemmer afbildningsmatricen for en lineær afbildning.

3b. Bestemmelse af afbildningsmatricer

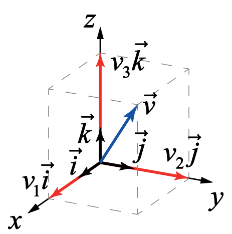
Sætning 1 fastslår, at en lineær afbildning f har netop én afbildningsmatrix. Men den siger ikke noget om, hvordan man bestemmer den. Inden vi ser på dette, vil vi repetere begrebet *basisvektorer*. Fra vektorregning kender vi basisvektorerne for planen,

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{, og for rummet, } \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De kendetegnes ved at have 0 stående på alle pladser på nær én, hvor der står et 1-tal. Basisvektorerne *udspænder* henholdsvis planen og rummet.

Det vil sige, at enhver vektor $\vec{v}$ i planen kan skrives som en linearkombination af $\vec{i}$ og $\vec{j}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, og at enhver vektor $\vec{v}$ i rummet kan skrives som en linearkombination af $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$.

Figur 11 viser en vektor i rummet.



Figur 11

En lineær afbildning f har som sagt netop én afbildningsmatrix. Når vi vil bestemme afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ for den lineære afbildning f, behøver vi kun at se på, hvordan afbildningen virker på basisvektorerne: $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ og $f(\vec{k})$. Sætning 3 viser, hvorledes afbildningsmatricen for en lineær afbildning i rummet ($\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$) bestemmes.

Sætning 3

Lad $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær, og sæt

$$\vec{v}_i = f(\vec{i}),\ \vec{v}_j = f(\vec{j}) \text{ og } \vec{v}_k = f(\vec{k}).$$

Det vil sige at $\vec{v}_i$ er billedet af basisvektor $\vec{i}$ osv.
Så har afbildningen f afbildningsmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{bmatrix}.$$

Beviset for sætning 3 findes i appendiks.
Bemærk, at for at kunne anvende sætning 3, er det vigtigt, at *f* er lineær. Kun når *f* er lineær, er den givet ved en matrix.

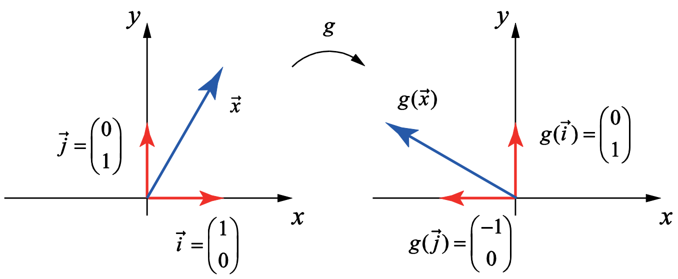
Sætning 3 viste opstillingen af afbildningsmatricen for lineære afbildninger i rummet. På tilsvarende vis kan afbildningsmatricen for lineære afbildninger i planen opstilles.

Opgave 5

a) Opstil afbildningsmatricen for en lineær afbildning $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i planen.

Eksempel 5

Vi er nu klar til at opstille afbildningsmatricen **A** fra opgave 4. Vi husker, at afbildningen $f(\vec{x}) = 2 \cdot \hat{x}$ var sammensat af en rotation efterfulgt af en skalering.
Først opstilles afbildningsmatricen kaldet **B** for den lineære afbildning *g*, som roterer en vektor omkring $(0;0)$ over i dens tværvektor $g(\vec{x}) = \hat{x}$ $(90°$ i positiv omløbsretning).
Figur 12 illustrerer, hvordan rotationen virker på basisvektorerne. Til venstre vises basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ inden afbildningen, og til højre vises afbildningen af basisvektorerne $g(\vec{i})$ og $g(\vec{j})$.

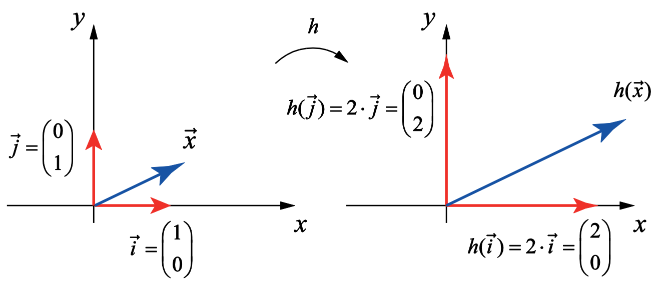


Figur 12

Nu da afbildningens virkning på basisvektorerne er fastlagt, kan vi opstille afbildningsmatricen, som roterer en vektor i *xy*-planen over i vektorens tværvektor.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} g(\vec{i}) & g(\vec{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Herefter opstilles afbildningsmatricen kaldet $\mathbf{C}$ for den lineære afbildning h, som skalerer en vektor med faktor 2, $h(\vec{x}) = 2 \cdot \vec{x}$. Figur 13 viser, hvordan skaleringen h virker på basisvektorerne. Til venstre vises basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ inden afbildningen, og til højre vises afbildningen af basisvektorerne $h(\vec{i})$ og $h(\vec{j})$.



Figur 13

Nu da afbildningens virkning på basisvektorerne er fastlagt, kan vi opstille afbildningsmatricen, som skalerer en vektor med en faktor 2.

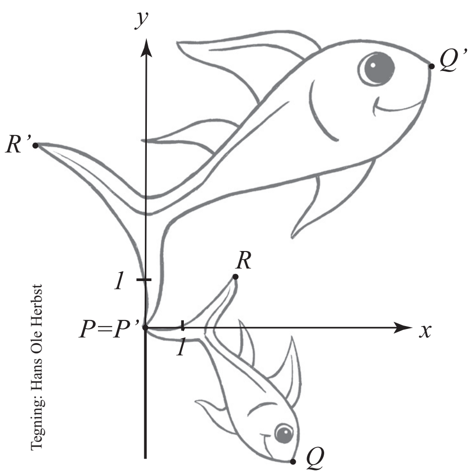
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\vec{i}) & h(\vec{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi påstår nu, at afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ for sammensætningen af rotation omkring $(0;0)$ og skalering af afbildningen $f(\vec{x}) = (h \circ g)(\vec{x}) = 2 \cdot \hat{x}$ kan findes ved matrix-matrixproduktet $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 6

Vi vil vise, hvordan man kan flytte en større punktmængde i én regneoperation. Vi ønsker at rotere billedet af en fisk 90° i positiv omløbsretning og derefter skalere det med en faktor 2. Se figur 14.



Figur 14

I stedet for at betragte alle punkter på fisken, har vi udvalgt de tre punkter P, Q og R, der er markeret på fisken. Koordinaterne til punkterne er givet ved $P(0;0)$, $Q(2,5;1)$ og $R(4;-3)$.

Hvert punkt repræsenteres ved deres stedvektorer $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ og $\overrightarrow{OR}$ og disse samles i en matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Vi benytter afbildningsmatricen **A** bestemt i eksempel 5 til at rotere og skalere stedvektorerne med. Afbildningsmatricen **A** var givet ved

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Ved at gange **A** med **S**, fås en ny matrix $\mathbf{S}'$

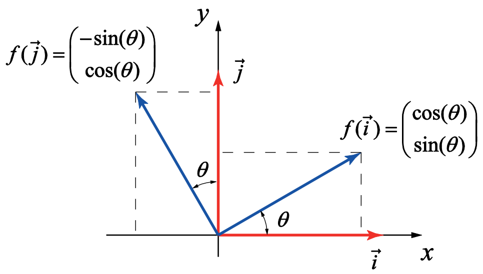
$$\begin{aligned}\mathbf{S}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{S}&=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2,5\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right]\\ &=\left[\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2,5\\1\end{pmatrix}\ \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right]\\ &=\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Søjlerne i $\mathbf{S}'$ består af afbildningen anvendt på stedvektorerne: $\mathbf{S}'=\left[\overrightarrow{OP'}\quad\overrightarrow{OQ'}\quad\overrightarrow{OR'}\right]$.
Efter rotation og skalering af stedvektorerne er punkterne P, Q og R afbildet over i punkterne $P'(0;0)$, $Q'(-2;5)$ og $R'(6;8)$.

I det foregående har vi udelukkende roteret $90°$ i positiv omløbsretning omkring $(0;0)$. Nu vil vi vise, hvordan man kan opstille afbildningsmatricen for rotation med en vilkårlig vinkel θ i positiv omløbsretning.

Eksempel 7

Afbildningsmatricen for den lineære afbildning f, der består af en rotation med en vilkårlig vinkel θ, skal opstilles. Figur 15 illustrerer, hvordan rotationen virker på basisvektorerne.
Basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$ er vist med rødt, mens $f(\vec{i})$ og $f(\vec{j})$ er vist med blåt.



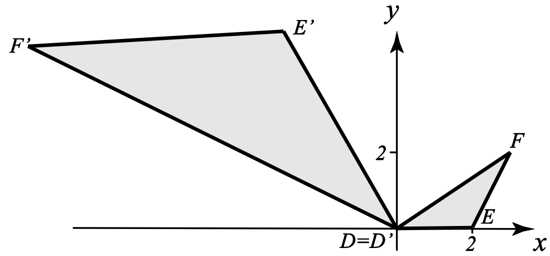
Figur 15

Nu da afbildningens virkning på basisvektorerne er fastlagt, kan vi opstille afbildningsmatricen for rotation med en vilkårlig vinkel θ.

$$\mathbf{A}=\left[f(\vec{i})\quad f(\vec{j})\right]=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

Opgave 6

Figur 16 viser en trekant DEF afbildet over i trekant $D'E'F'$.
Afbildningen roterer trekant DEF $120°$ i positiv omløbsretning omkring $(0;0)$ og skalerer den med en faktor 3.



Figur 16

a) Opstil afbildningsmatricen $\mathbf{B}$ for rotation med $120°$ i positiv omløbsretning omkring $(0;0)$ i planen og afbildningsmatricen $\mathbf{C}$ for skalering med en faktor 3.

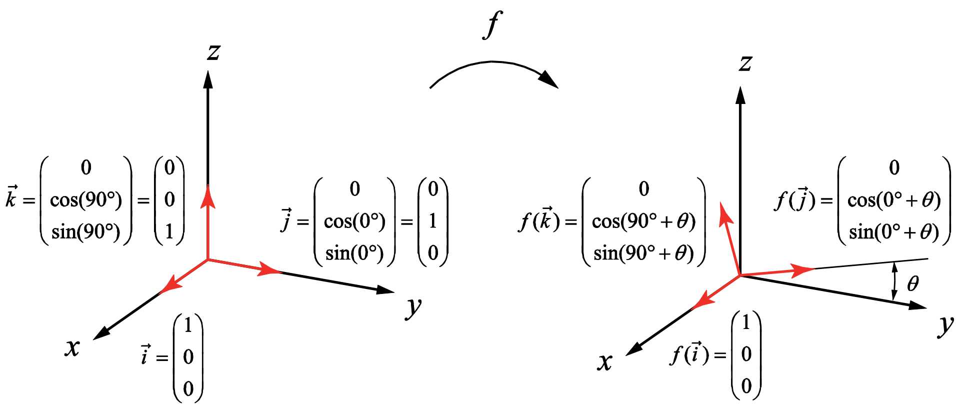
b) Bestem afbildningsmatricen $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$.

På figur 16 er punkterne D, E og F markeret. Punkternes koordinater er givet ved: $D(0;0)$, $E(2;0)$ og $F(3;2)$. Efter rotation og skalering er punkterne D, E *og* F afbildet over i punkterne D', E' og F'.

c) Bestem koordinaterne til punkterne D', E' og F'.

Eksempel 8

I rummet kan vi rotere figurer om akserne. Vi ønsker at opstille afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ for den lineære afbildning f, der består af en rotation om x-aksen med rotationsvinklen θ i positiv omløbsretning. Positiv omløbsretning om x-aksen defineres således, at ved rotation med vinklen $90°$ føres vektor $\vec{j}$ over i vektor $\vec{k}$. Basisvektoren $\vec{i}$ i x-aksens retning forbliver uændret ved rotationen. Figur 17 viser, hvordan afbildningen virker på basisvektorerne.

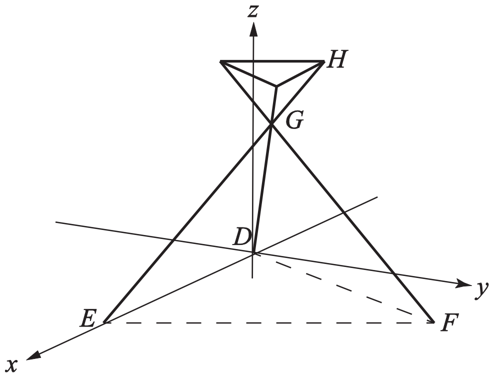


Figur 17

Nu da afbildningens virkning på basisvektorerne er fastlagt, kan vi opstille afbildningsmatricen for rotationen

$$\mathbf{A} = \left[f(\vec{i}) \quad f(\vec{j}) \quad f(\vec{k}) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(0° + \theta) & \cos(90° + \theta) \\ 0 & \sin(0° + \theta) & \sin(90° + \theta) \end{bmatrix}$$

Opgave 7



Figur18

Billedet viser et sømærke ved Sidselbjerg strand på vestkysten. Sømærket står skævt efter utallige år i vestenvinden. Da det blev opstillet, stod det vandret i xy-planen som vist på figur 18, men er efterhånden roteret $15°$ i positiv omløbsretning omkring y-aksen. Positiv omløbsretning om y-aksen defineres således, at ved rotation med vinklen $90°$ føres vektor $\vec{k}$ over i vektor $\vec{i}$.

Koordinaterne til punkterne D, E, F, G og H inden rotationen var givet ved $D(0;0;0)$, $E(10;0;0)$, $F(5;9;0)$, $G(5;3,1;6)$ og $H(3,3;4,1;8)$.

a) Opstil afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ for en rotation med vinklen θ i positiv omløbsretning om y-aksen i rummet.

b) Bestem $\mathbf{A}$ når $\theta = 15°$, og benyt matricen til at finde den nuværende beliggenhed af punkterne D, E, F, G og H.

Eksempel 9

Sætning 3 fortæller, at vi kan bestemme en afbildningsmatrix ved geometrisk at se på, hvordan afbildningen virker på basisvektorerne. Omvendt kan vi, ved at se på afbildningsmatricen, bestemme den geometriske betydning af afbildningen.

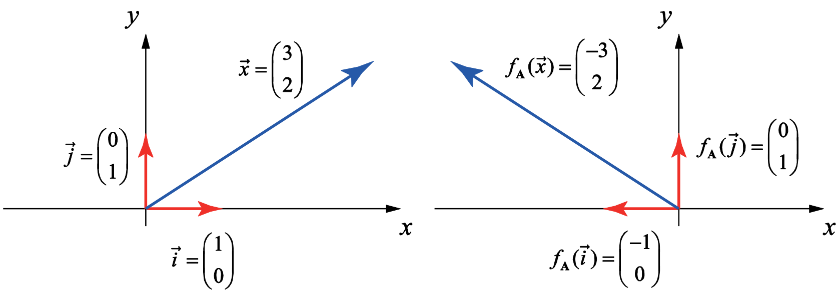
Givet afbildningsmatricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi vil finde ud af, hvad afbildningen $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gør ved vektorer i planen.

Først undersøges, hvordan afbildningen $f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$ virker på vektor $\vec{x}$, givet ved $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vi udfører matrix-vektorproduktet $f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der tegnes to koordinatsystemer. Første koordinatsystem viser basisvektorerne $\vec{i}$, $\vec{j}$ samt vektor $\vec{x}$. Andet koordinatsystem viser afbildningerne $f_{\mathbf{A}}(\vec{i})$, $f_{\mathbf{A}}(\vec{j})$ og $f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$.
Se figur 19.



Figur 19

Det ses, at afbildningen er en spejling i y-aksen.

Opgave 8

Givet afbildningsmatricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ samt vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Udregn matrix-vektorproduktet $f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$

b) Tegn to koordinatsystemer. Første koordinatsystem skal vise basisvektorerne $\vec{i}$, $\vec{j}$ samt vektor $\vec{x}$. Det andet koordinatsystem skal vise afbildningerne $f_{\mathbf{A}}(\vec{i})$, $f_{\mathbf{A}}(\vec{j})$ og $f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$.

c) Beskriv med dine egne ord den geometriske betydning af afbildningen.

Opgave 9

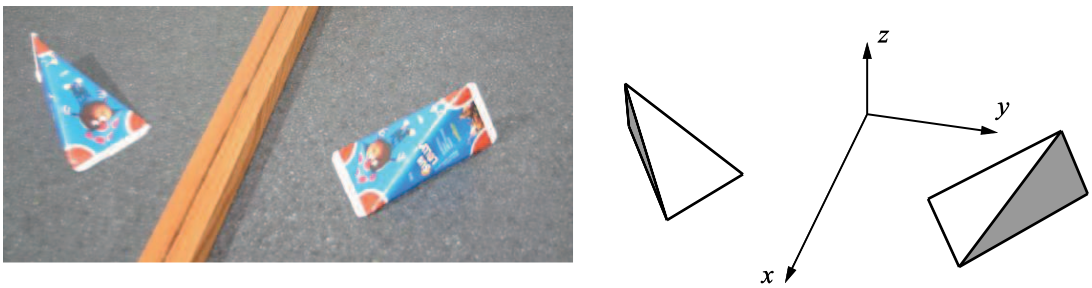
Givet afbildningsmatricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ samt vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Udregn matrix-vektorproduktet $f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$

b) Skitser de tre basisvektorer $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ samt vektor $\vec{x}$ i et koordinatsystem.

c) Skitser afbildningen anvendt på de tre basisvektorer, $f_{\mathbf{A}}(\vec{i})$, $f_{\mathbf{A}}(\vec{j})$, $f_{\mathbf{A}}(\vec{k})$ og $f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$ i et koordinatsystem.

d) Beskriv med dine egne ord den geometriske betydning af afbildningen.



Figur 20

Figur 20 viser billede og spejlbillede af en ”frys selv is” indlagt i et koordinatsystem. Isen spejles i *xz*-planen.

e) Bestem afbildningsmatricen **A** for spejling i *xz*-planen.

4. Perspektivering

Vi har i dette forberedelsesmateriale introduceret lineære afbildninger og matricer. Lineære afbildninger er en del af et større emne *lineær algebra*. Lineær algebra benyttes f.eks. ved løsning af differentialligninger og ved håndtering af store ligningssystemer. Det viser sig at være hensigtsmæssigt at løse ligningssystemer ved at benytte matricer. Matricer giver også her en meget simpel fremstilling af ofte komplicerede fysiske problemstillinger. De optræder derfor i mange sammenhænge. De benyttes eksempelvis ved dynamisk fremskrivning af epidemiers udvikling, afstemning af kemiske reaktioner, beskrivelse af elektriske kredsløb, og ved beregning af brudmekanik i mekaniske konstruktioner.

Appendiks

Beviser for sætning 1, 2 og 3

Vi starter med at vise sætning 2.

Sætning 2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Så opfylder $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ følgende to betingelser.

(L1) For alle $k \in \mathbb{R}$ og alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ gælder

$$f_{\mathbf{A}}(k \cdot \vec{x}) = k \cdot f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$$

og

(L2) For alle $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ gælder

$$f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_1) + f_{\mathbf{A}}(\vec{x}_2).$$

Bevis. Først opskrives $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{A} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_m]$$

Vi starter med at vise (L1), så lad $k \in \mathbb{R}$ og

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

være vilkårlige. På den ene side er

$$k \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_m \end{pmatrix} \text{ og dermed er}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}}(k \cdot \vec{x}) &= \mathbf{A} \cdot (k \cdot \vec{x}) \\ &= kx_1\vec{v}_1 + kx_2\vec{v}_2 + \cdots + kx_m\vec{v}_m. \end{aligned}$$

På den anden side er

$$\begin{aligned} k \cdot f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) &= k(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) \\ &= k(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m) \\ &= kx_1\vec{v}_1 + kx_2\vec{v}_2 + \cdots + kx_m\vec{v}_m \end{aligned}$$

Vi kan se at $f_{\mathbf{A}}(k \cdot \vec{x}) = k \cdot f_{\mathbf{A}}(\vec{x})$ så (L1) er opfyldt.

Lad nu

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ og } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

være vilkårlige. Kan vi vise at

$$f_{\mathbf{A}}(\vec{x} + \vec{y}) = f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) + f_{\mathbf{A}}(\vec{y})$$

så har vi vist (L2) og gjort beviset færdigt.
Da

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix},$$

er

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}}(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathbf{A} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (x_1 + y_1)\vec{v}_1 + (x_2 + y_2)\vec{v}_2 + \cdots + (x_m + y_m)\vec{v}_m \\ &= x_1\vec{v}_1 + y_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m + y_m\vec{v}_m \\ &= x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m + y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + \cdots + y_m\vec{v}_m \\ &= \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{A} \cdot \vec{y} \\ &= f_{\mathbf{A}}(\vec{x}) + f_{\mathbf{A}}(\vec{y}) \end{aligned}$$

hvilket beviser sætningen.

Vi kan slå beviset for sætning 1 og sætning 3 sammen. De to sætninger følger nemlig umiddelbart af nedenstående sætning, som vi kalder sætning 4.
I sætning 4 viser vi, at hvis der for en givet lineær afbildning f overhovedet skal findes en matrix $\mathbf{A}$ så $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$, så må den have en ganske bestemt form. Matricens søjler må nemlig bestå af afbildningens virkning på basisvektorerne. Der eksisterer altså *højst* en matrix, som kan bruges. Bagefter viser vi, at denne matrix rent faktisk virker ved at vise, at $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ for alle $\vec{x}$. Tilsammen har vi derfor vist, at der findes præcis én matrix, som beskriver afbildningen, og vi har samtidig fundet en opskrift på at bestemme den.

Sætning 4 kan formuleres mere generelt, så den gælder for enhver afbildning $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Her vil vi for overskuelighedens skyld begrænse os til tilfældet $m = n = 3$, som vi gjorde i sætning 3.

Sætning 4

Hvis $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er lineær, da findes en og kun én matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ så $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$.

Matricen $\mathbf{A}$ er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{bmatrix}$$

Bevis. Først viser vi, at hvis der eksisterer en matrix **A**, så $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ for alle x, så må **A** have formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{bmatrix}$$

Da $f(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, må dette specielt gælde for de tre basisvektorer $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$. Vi udregner derfor

$$\mathbf{A} \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{v}_i + 0 \cdot \vec{v}_j + 0 \cdot \vec{v}_k = \vec{v}_i$$

så hvis $f(\vec{i}) = \mathbf{A} \cdot \vec{i}$ må den første søjle $\vec{v}_i$ i **A** være $f(\vec{i})$.
Noget tilsvarende gælder for $\vec{j}$ og $\vec{k}$:
Vi udregner

$$\mathbf{A} \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} \vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{v}_i + 1 \cdot \vec{v}_j + 0 \cdot \vec{v}_k = \vec{v}_j$$

så hvis $f(\vec{j}) = \mathbf{A} \cdot \vec{j}$ må den anden søjle $\vec{v}_j$ i **A** være $f(\vec{j})$.

Endelig beregnes

$$\mathbf{A}\cdot\vec{k} = \begin{bmatrix}\vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{v}_i + 0\cdot\vec{v}_j + 1\cdot\vec{v}_k = \vec{v}_k$$

så hvis $f(\vec{k}) = \mathbf{A}\cdot\vec{k}$ må den tredje søjle $\vec{v}_k$ i $\mathbf{A}$ være $f(\vec{k})$.

Der findes altså højst én matrix $\mathbf{A}$ så $f(\vec{x}) = \mathbf{A}\cdot\vec{x}$, og hvis den eksisterer, må den være af formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\vec{v}_i & \vec{v}_j & \vec{v}_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k})\end{bmatrix}.$$

Vi mangler nu bare at vise, at hvis $\mathbf{A}$ er givet på denne måde, så vil $f(\vec{x}) = \mathbf{A}\cdot\vec{x}$ for alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$.

Lad derfor $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ være en vilkårlig vektor. Da kan $\vec{x}$ opskrives vha. basisvektorerne som $\vec{x} = x_1\cdot\vec{i} + x_2\cdot\vec{j} + x_3\cdot\vec{k}$

Da f er lineær fås

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= f(x_1\cdot\vec{i} + x_2\cdot\vec{j} + x_3\cdot\vec{k}) \\
&= f(x_1\cdot\vec{i}) + f(x_2\cdot\vec{j}) + f(x_3\cdot\vec{k}) \\
&= x_1\cdot f(\vec{i}) + x_2\cdot f(\vec{j}) + x_3\cdot f(\vec{k}) \\
&= x_1\cdot\vec{v}_i + x_2\cdot\vec{v}_j + x_3\cdot\vec{v}_k \\
&= \mathbf{A}\cdot\vec{x}
\end{aligned}$$

Hvilket afslutter beviset.