MODELISATION : SUDOKU

MARIUS MONNIER, KOSKAS ORIAN, LOAN TETREL, BENOIT SONZOGNI, ROMAIN REVIL

1. Préambule : formalisation du problème

On considère un sudoku général de taille N (Matrice carrée de taille N à valeur dans $\mathbb{N}^*$).
Avec $N \in \mathbb{N}^*$, N est un carré parfait ($\exists K \in \mathbb{N}^*,\ N = K^2$).
On note les opérations booléennes OU, ET, et NEG respectivement $\vee$, $\wedge$, et $^-$.

On note $x_{l,c,n}$ la variable propositionnelle : La case de la ligne i et de colonne c qui contient la valeur n.
Avec $(l, c) \in \{0, ..., N-1\}^2$ et $n \in \{1, ..., N\}$

2. Règles

2.1 Contraintes de domaine :

Chaque case contient $n \in \{1, ..., N\}$ au moins une fois
$\iff \forall l, c \in \{0, ..., N-1\}, \exists n \in \{1, ..., N\}, x_{l,c,n} = vrai$
$\iff \forall i, j \in \{0, ..., N-1\}, x_{i,j,1} \vee ... \vee x_{i,j,N}$
$\iff \forall i, j \in \{0, ..., N-1\}, x_{i,j,1} \vee ... \vee x_{i,j,N}$
$\iff \bigwedge_{i=0}^{N-1} (\bigwedge_{c=0}^{N-1} (\bigvee_{n=1}^{N} (x_{i,j,n})))$

2.2 Contraintes d'unicité des lignes :

Chaque numéro est présent au plus une fois dans chaque ligne
$\iff \forall l, k \in \{1, ..., N\}$ est porté par une colonne c au plus.
$\iff \forall l, k \in \{1, ..., N\},\ \forall c, x_{l,n,c} \Rightarrow c' \neq c \vee \overline{x_{l,n,c'}}$
$\iff \forall l, k, c : \overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,0,n}} \wedge\ \ ...\ \ \wedge \overline{x_{l,c-1,n}} \wedge \overline{x_{l,c+1,n}} \wedge\ \ ...\ \overline{x_{l,N-1,n}}$.
Par distributivité de $\vee$ et $\wedge$:
$\equiv (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,0,n}}) \wedge\ \ ...\ \ \wedge (\overline{x_{l,c-1,n}} \vee \overline{x_{l,c,n}}) \wedge\ \ ...\ (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,N-1,n}})$
$\equiv \bigvee_{\substack{i=0 \\ i \neq c}}^{N} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,i,k}}) \vee \bigvee_{i=c+1}^{N} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,i,k}}) \equiv \bigwedge_{i=0}^{N-1} (\bigwedge_{n=1}^{N} (\bigwedge_{c=0}^{N-1} (\bigvee_{i=0}^{c-1} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,i,k}}) \vee (\bigvee_{i=c+1}^{N} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l,i,k}})))))$

2.3 Contraintes d'unicité des colonnes :

Chaque numéro est présent au plus une fois dans chaque colonne
$\iff \forall c,k,l:\ \overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{0,c,n}} \wedge\ \ldots\ \wedge \overline{x_{l-1,c,n}} \wedge \overline{x_{l+1,c,n}} \wedge\ \ldots\ \wedge \overline{x_{N-1,c,n}}$
$\equiv (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{0,c,n}}) \wedge\ \ldots\ \wedge (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{l-1,c,n}}) \wedge\ \ldots\ (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{N-1,c,n}})$
$\equiv \bigwedge_{c=0}^{N-1} (\bigwedge_{n=1}^{N} (\bigwedge_{l=0}^{N-1} (\bigvee_{i=0}^{l-1} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{i,c,k}}) \vee (\bigvee_{i=l+1}^{N} (\overline{x_{l,c,n}} \vee \overline{x_{i,c,k}})))))$

2.4 Contraintes d'unicité des carrés : (la contrainte telle qu'exprimé ici n'est valable que pour $N = 9$)

Chaque numéro est présent au plus une fois dans chaque carré
Idée de modélisation : on prend les coordonnées de chaque centre de carré dans un sudoku $9 * 9$

Exemple : Sudoku $9 * 9$
$(l = 2, c = 2), (2, 5), (2, 8)$
$(l = 5, c = 2), (5, 5), (5, 8)$
$(l = 8, c = 2), (8, 5), (8, 8)$

Généralisation (Valable uniquement pour N impair).
$(l = 2 + 3 * 0, c = 2 + 3 * 0), (2, 2 + 3 * 1)....(2, 2 + 3 * (k - 1))....(2, N - 2))$
$(l = 2 + 3 * 1, c = 2 + 3 * 0), (2 + 3 * 1, 2 + 3 * 1)....(2 + 3 * 1, 2 + 3 * (k - 1))....(2 + 3 * 1, N - 2)$
...
$(l = N - 2, 2 + 3 * 0).....(2 + 3 * (N - 1), N - 2)$

$\iff \forall l, c \in [2, 5, ..., N - 2], \forall k \in [1, ..., N].$
$x_{l,c,k} \Rightarrow (\overline{x_{l-1,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l-1,c,k}} \wedge \overline{x_{l-1,c+1,k}} \wedge \overline{x_{l,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l,c+1,k}} \wedge \overline{x_{l+1,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l+1,c+1,k}})$
$\equiv \overline{x_{l,c,k}} \vee (\overline{x_{l-1,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l-1,c,k}} \wedge \overline{x_{l-1,c+1,k}} \wedge \overline{x_{l,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l,c+1,k}} \wedge \overline{x_{l+1,c-1,k}} \wedge \overline{x_{l+1,c+1,k}})$
$\equiv (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l-1,c-1,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l-1,c,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l-1,c+1,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l,c-1,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l,c+1,k}}) \wedge$
$(\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l+1,c-1,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}} \vee \overline{x_{l+1,c,k}}) \wedge (\overline{x_{l,c,k}}) \vee \overline{x_{l+1,c+1,k}}$

2.5 Autre idée pour généraliser : prendre la première case de chaque carré

Exemple Sudoku $9 * 9$:
$(0,0);(0,3);(0,6)$
$(3,0);(3,3);(3,6)$
$(6,0);(6,3);(6,6)$

Exemple Sudoku $4 * 4$:
$(0,0);(0,2)$
$(2,0);(2,2)$

Avantage : Valable pour N quelconque
Généralisation des débuts : Possible car N est un carré parfait

Sudoku $N * N$
$(0 * \sqrt{N}, 0 * \sqrt{N});$
$(0 * \sqrt{N}; 1 * \sqrt{N})......(0,(\sqrt{N}-1) * \sqrt{N})$
$(1 * \sqrt{N}, 0)$
...
$((\sqrt{N}-1) * \sqrt{N}, 0)$

Comment atteindre toutes les cases depuis le début ?
l : lignes , c : colonnes
$l \in \{0,...,N-1\}$, $c \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}$
$(l * \sqrt{N}, c * \sqrt{N});(l * \sqrt{N}, c * \sqrt{N}+1)...(l * \sqrt{N};(c+1) * \sqrt{N}-1)$
$(l * \sqrt{N}+1, c * \sqrt{N})$ ...
...
$((l+1) * \sqrt{N}-1, c * \sqrt{N})$ ...
Donc : $(l * \sqrt{N}+k, c * \sqrt{N}+k') \quad , \forall k, k', l, c \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}$

La modélisation devient :
$\forall n \in \{1,...,N\}, \forall l, c \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}$
$x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n} \Rightarrow (\bigwedge_{k,k' \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}^2-\{(0,0)\}} (\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N}+k',n}}))$
$\equiv \overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}} \vee (\bigwedge_{k,k' \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}^2-\{(0,0)\}} (\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N}+k',n}}))$
$\equiv \bigwedge_{k,k' \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}^2-\{(0,0)\}} (\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N}+k',n}} \vee \overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}})$
$\iff \bigwedge_{n=1}^{N} (\bigwedge_{l=0}^{\sqrt{N-1}} (\bigwedge_{c=0}^{\sqrt{N}-1} (\bigwedge_{k,k' \in \{0,...,\sqrt{N}-1\}^2-\{(0,0)\}} (\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N}+k',n}} \vee \overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}}))))$

$$\iff \bigwedge_{n=1}^{N}\Big(\bigwedge_{l=0}^{\sqrt{N-1}}\Big(\bigwedge_{c=0}^{\sqrt{N}-1}\Big(\bigwedge_{k'=1}^{\sqrt{N}-1}(\overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N}+k',n}}\vee\overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}})\wedge\bigwedge_{k=1}^{\sqrt{N}-1}(\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N},n}}\vee\overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}})\wedge$$

$$\bigwedge_{k,k'\in\{1,\ldots,\sqrt{N}-1\}^2}(\overline{x_{l*\sqrt{N}+k,c*\sqrt{N}+k',n}}\vee\overline{x_{l*\sqrt{N},c*\sqrt{N},n}})\Big)\Big)\Big)\Big)$$