GET00211 - Modelos Lineares 2

Rafael Erbisti

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Aula 02

Introdução aos Modelos Lineares Generalizados (MLG)

A classe dos MLG é definida, essencialmente, por duas componentes, a saber:

- A distribuição da variável resposta, a qual deve pertencer à família exponencial (parte aleatória).

- Uma função de ligação, a qual associa, de forma adequada, a média da variável resposta (μ_i) a um preditor linear:

$$g(\mu_i) = x_i^T \boldsymbol{\beta}$$

Família Exponencial (FE) Bi-paramétrica

Dizemos que uma v.a. Y (discreta ou contínua) pertence à família exponencial bi-paramétrica, seguindo a notação,.

$$Y \sim \mathrm{FE}(\theta, \phi)$$

se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por:

$$f_Y(y; \theta, \phi) = \exp\{\phi\,[\,y\theta - b(\theta)\,] + c(y, \phi)\}\,\mathcal{I}_A(y)$$

onde:

- $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ (espaço paramétrico de θ) $\rightarrow$ parâmetro natural (ou canônico)
- $b(\theta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $c(y, \phi) : A \times \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$, com A um conjunto que não depende nem de θ nem de ϕ (uma condição de regularidade)
- ϕ ($\phi > 0$) é o parâmetro de precisão

Caso a distribuição pertença à família exponencial uniparamétrica, isto é, se $\phi = 1$, então:

$$Y \sim \mathrm{FE}(\theta)$$

Propriedades

Na família exponencial bi-paramétrica:

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\{\phi[y\theta - b(\theta)] + c(y,\phi)\}\mathcal{I}_A(y),$$

o parâmetro θ é chamado de parâmetro natural (ou canônico), pois aparece multiplicando a variável aleatória y no termo linear do expoente.

Importante: θ nem sempre coincide com a média da distribuição ($\mu = E(Y)$). Na verdade,

$$E(Y) = \mu = b'(\theta), \quad V(Y) = \phi^{-1}V(\mu),$$

onde a função de variância é

$$V(\mu) = \frac{d\mu}{d\theta} = b''(\theta) = \frac{\partial^2 b(\theta)}{\partial\theta^2}.$$

- $\phi > 0$ é chamado de parâmetro de precisão, pois quanto maior ϕ, menor será a variância de Y.

Informações

- Diversas distribuições pertencem à Família Exponencial, por exemplo: Normal, Normal Inversa, Gama (Exponencial), Poisson, Binomial (Bernoulli), Binomial Negativa (sob certas circunstâncias), dentre outras.

- Neste curso, nos concentraremos em distribuições pertencentes à Família Exponencial (FE).

- Quando a média (valor esperado) não aparecer explicitamente na função de probabilidade (para variáveis discretas) ou na função densidade de probabilidade (para variáveis contínuas), será necessário reparametrizar o modelo de forma que a média fique explícita.

Exemplo: Poisson

Considere $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $\text{A} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\ &= \exp\left\{y\log(\lambda) - \lambda - \log(y!)\right\} \\ &= \exp\left\{\phi[\,y\theta - b(\theta)\,] + c(y,\phi)\right\} \end{aligned}$$

com

$$\theta = \log(\lambda) \quad b(\theta) = \exp(\theta) \quad \phi = 1 \quad c(y,\phi) = -\log(y!)$$

Exemplo: Binomial

Seja Y^* a proporção de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes. Então, $nY^* \sim \text{Binomial}(n, \mu)$. Nesse caso, $E(Y^*) = \mu$, com $\mu \in (0, 1)$ e

$$f_{Y^*}(y^*) = \binom{n}{ny^*} \mu^{ny^*} (1-\mu)^{n-ny^*}.$$

Reescrevendo na forma da família exponencial:

$$\begin{aligned}
f_{Y^*}(y^*) &= \exp\left(\log \binom{n}{ny^*} + ny^* \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) + n \log(1-\mu) \right) \\
&= \exp\left(n \left[y^* \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) + \log(1-\mu) \right] + \log \binom{n}{ny^*} \right) \\
&= \exp\Big(\phi[y^*\theta - b(\theta)] + c(y^*, \phi) \Big),
\end{aligned}$$

com

$$\theta = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right), \quad b(\theta) = \log(1 + e^\theta), \quad \phi = n, \quad c(y^*, \phi) = \log \binom{\phi}{\phi y^*}.$$

Se $n = 1$, $Y^* = Y \sim \text{Bernoulli}(\mu)$.

Exemplo: Normal

Seja $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, com $A = (-\infty, \infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$. A função densidade de probabilidade é

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Reescrevendo na forma da família exponencial:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \exp\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(y\mu - \frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\log(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{\sigma^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\phi[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\right), \end{aligned}$$

com

$$\theta = \mu, \quad b(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, \quad \phi = \frac{1}{\sigma^2}, \quad c(y, \phi) = -\frac{\phi y^2}{2} - \frac{1}{2}\log(2\pi/\phi).$$

Exemplo: Gama

Considere $Y \sim \text{Gama}(a, b)$, $a, b > 0$, com $E(Y) = ab$, $V(Y) = ab^2$ e $A = (0, \infty)$.
A função densidade é

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} y^{a-1} e^{-y/b}.$$

Trabalharemos com uma parametrização em termos da média $\mu = E(Y)$ e do parâmetro de precisão ϕ, de modo que $V(Y) = \mu^2/\phi$ ($a = \phi$ e $b = \mu/\phi$).
A fdp pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{(\phi/\mu)^\phi}{\Gamma(\phi)} y^{\phi-1} \exp\left(-\frac{\phi y}{\mu}\right) \\ &= \exp\Big(\phi[-y/\mu - \log(\mu)] + (\phi - 1)\log(y) + \phi\log(\phi) - \log\Gamma(\phi)\Big) \\ &= \exp\big(\phi[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi)\big), \end{aligned}$$

com

$$\theta = -\frac{1}{\mu}, \quad b(\theta) = -\log(-\theta), \quad c(y, \phi) = (\phi - 1)\log(y) + \phi\log(\phi) - \log\Gamma(\phi).$$

- Se $\phi = 1$, $Y \sim \text{Exponencial}(\mu)$
- Se $\phi = k/2$ e $\mu = k$, $Y \sim \chi^2(k)$

Exemplo: Normal Inversa

Considere $Y \sim \text{NI}(\mu, \phi)$, com $\mu, \phi > 0$, então $A = (0, \infty)$. A função densidade de probabilidade é:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{\phi}{2\pi y^3}} \exp\left(-\frac{\phi(y-\mu)^2}{2\mu^2 y} \right), \quad y > 0.$$

Exercício: Reescrever $f_Y(y)$ na forma da família exponencial e encontrar $E(Y)$ e $V(Y)$:

$$f_Y(y) = \exp\left\{ \phi[y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \right\}.$$

Dicas para a transformação:

- Expandir o quadrado $(y-\mu)^2 = y^2 - 2\mu y + \mu^2$ e reorganizar os termos.
- Identificar o termo linear em y como $\phi y \theta$.
- Separar os termos que dependem apenas de y e ϕ em $c(y, \phi)$ e os que dependem apenas de θ em $b(\theta)$.