

Diskrete Fouriertransformation in 2D

Die Fouriertransformation ist nicht nur für eindimensionale Signale definiert, sondern für Funktionen beliebiger Dimension, und daher sind auch zweidimensionale Bilder aus mathematischer Sicht nichts Besonderes.

14.1 Definition der 2D-DFT

Für eine zweidimensionale, periodische Funktion (also z. B. ein Intensitätsbild) $g(u, v)$ der Größe $M \times N$ ist die diskrete Fouriertransformation (2D-DFT) definiert als

$$\begin{aligned} G(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) \cdot e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} \cdot e^{-i2\pi \frac{nv}{N}} \quad (14.1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) \cdot e^{-i2\pi (\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N})} \end{aligned}$$

für die Spektralkoordinaten $m = 0 \dots M-1$ und $n = 0 \dots N-1$. Die resultierende Fouriertransformierte ist also ebenfalls wieder eine zweidimensionale Funktion mit derselben Größe ($M \times N$) wie das ursprüngliche Signal. Analog dazu ist die *inverse* 2D-DFT definiert als

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) \cdot e^{i2\pi \frac{um}{M}} \cdot e^{i2\pi \frac{vn}{N}} \quad (14.2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) \cdot e^{i2\pi (\frac{um}{M} + \frac{vn}{N})} \end{aligned}$$

für die Bildkoordinaten $u = 0 \dots M-1$ und $v = 0 \dots N-1$.

14.1.1 2D-Basisfunktionen

Gl. 14.2 zeigt, dass eine zweidimensionale Funktion $g(u, v)$ als Linearkombination (d. h. als gewichtete Summe) zweidimensionaler, komplexwertiger Funktionen der Form

$$e^{i2\pi(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N})} = \underbrace{\cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]}_{\mathbf{C}_{m,n}^{M,N}(u, v)} + i \cdot \underbrace{\sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]}_{\mathbf{S}_{m,n}^{M,N}(u, v)} \quad (14.3)$$

dargestellt werden kann. Dabei sind $\mathbf{C}_{m,n}^{M,N}(u, v)$ und $\mathbf{S}_{m,n}^{M,N}(u, v)$ zweidimensionale Kosinus- bzw. Sinusfunktionen mit horizontaler Wellenzahl m und vertikaler Wellenzahl n :

$$\mathbf{C}_{m,n}^{M,N}(u, v) = \cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right] \quad (14.4)$$

$$\mathbf{S}_{m,n}^{M,N}(u, v) = \sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right] \quad (14.5)$$

Beispiele

Die Abbildungen 14.1–14.2 zeigen einen Satz von 2D-Kosinusfunktionen $\mathbf{C}_{m,n}^{M,N}$ der Größe $M = N = 16$ für verschiedene Kombinationen von Wellenzahlen $m, n = 0 \dots 3$. Wie klar zu erkennen ist, entsteht in jedem Fall eine gerichtete, kosinusförmige Wellenform, deren Richtung durch die Wellenzahlen m und n bestimmt ist. Beispielsweise entspricht den Wellenzahlen $m = n = 2$ eine Kosinusfunktion $\mathbf{C}_{2,2}^{M,N}(u, v)$, die jeweils zwei volle Perioden in horizontaler und in vertikaler Richtung durchläuft und dadurch eine zweidimensionale Welle in diagonalen Richtung erzeugt. Gleiches gilt natürlich auch für die entsprechenden Sinusfunktionen.

14.1.2 Implementierung der zweidimensionalen DFT

Wie im eindimensionalen Fall könnte man auch die 2D-DFT direkt auf Basis der Definition in Gl. 14.1 implementieren, aber dies ist nicht notwendig. Durch geringfügige Umformung von Gl. 14.1 in der Form

$$G(m, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u, v) \cdot e^{-i2\pi \frac{um}{M}}}_{\text{1-dim. DFT der Zeile } g(\cdot, v)} \right] \cdot e^{-i2\pi \frac{vn}{N}} \quad (14.6)$$

wird deutlich, dass sich im Kern wiederum eine *eindimensionale* DFT (s. Gl. 13.43) des v -ten Zeilenvektors $g(\cdot, v)$ befindet, die unabhängig ist von den „vertikalen“ Größen v und N (die in Gl. 14.6 außerhalb der eckigen Klammern stehen). Wenn also im ersten Schritt jeder Zeilenvektor $g(\cdot, v)$ des ursprünglichen Bilds ersetzt wird durch seine (eindimensionale) Fouriertransformierte, d. h.

1:	SEPARABLE 2D-DFT ($g(u, v) \in \mathbb{C}$)	$\triangleright 0 \leq u < M, 0 \leq v < N$
2:	for $v \leftarrow 0 \dots N-1$ do	
3:	Let $g(\cdot, v)$ be the v^{th} row vector of g : Replace $g(\cdot, v)$ by $\text{DFT}(g(\cdot, v))$.	
4:	for $u \leftarrow 0 \dots M-1$ do	
5:	Let $g(u, \cdot)$ be the u^{th} column vector of g : Replace $g(u, \cdot)$ by $\text{DFT}(g(u, \cdot))$.	
6:	<i>Remark:</i> $g(u, v) = G(u, v) \in \mathbb{C}$ now contains the discrete 2D spectrum.	

$$g'(\cdot, v) \leftarrow \text{DFT}(g(\cdot, v)) \quad \text{für } 0 \leq v < N,$$

dann muss nachfolgend nur mehr die eindimensionale DFT für jeden (vertikalen) Spaltenvektor berechnet werden, also

$$g''(u, \cdot) \leftarrow \text{DFT}(g'(u, \cdot)) \quad \text{für } 0 \leq u < M.$$

Das Resultat $g''(u, v)$ entspricht der zweidimensionalen Fouriertransformierten $G(m, n)$. Die *zweidimensionale* DFT ist also, wie in Alg. 14.1 zusammengefasst, in zwei aufeinander folgende *eindimensionale* DFTs über die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren *separierbar*. Das bedeutet einerseits einen Effizienzvorteil und andererseits, dass wir auch zur Realisierung mehrdimensionaler DFTs ausschließlich eindimensionale DFT-Implementierungen (bzw. die eindimensionale FFT) verwenden können.

Wie aus Gl. 14.6 abzulesen ist, könnte diese Operation genauso gut in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt werden, also beginnend mit einer DFT über alle Spalten und dann erst über die Zeilen. Bemerkenswert ist überdies, dass alle Operationen in Alg. 14.1 „in place“ ausgeführt werden können, d. h., das ursprüngliche Signal $g(u, v)$ wird destruktiv modifiziert und schrittweise durch seine Fouriertransformierte $G(m, n)$ derselben Größe ersetzt, ohne dass dabei zusätzlicher Speicherplatz angelegt werden müsste. Das ist durchaus erwünscht und üblich, zumal auch praktisch alle eindimensionalen FFT-Algorithmen – die man nach Möglichkeit zur Implementierung der DFT verwenden sollte – „in place“ arbeiten.

14.2 Darstellung der Fouriertransformierten in 2D

Zur Darstellung von zweidimensionalen, komplexwertigen Funktionen, wie die Ergebnisse der 2D-DFT, gibt es leider keine einfache Methode. Man könnte die Real- und Imaginärteile als Intensitätsbild oder als Oberflächengrafik darstellen, üblicherweise betrachtet man jedoch den Betrag der komplexen Funktion, im Fall der Fouriertransformierten also das Leistungsspektrum $|G(m, n)|$ (s. Abschn. 13.3.5).

14.2.1 Wertebereich

In den meisten natürlichen Bildern konzentriert sich die „spektrale Energie“ in den niedrigen Frequenzen mit einem deutlichen Maximum bei den

14.2 DARSTELLUNG DER FOURIERTRANSFORMIERTEN IN 2D

Algorithmus 14.1

Implementierung der zweidimensionalen DFT als Folge von eindimensionalen DFTs über Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

Abbildung 14.1

Zweidimensionale Kosinusfunktionen.
 $C_{m,n}^{M,N}(u,v) = \cos \left[2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]$ für
 $M = N = 16, n = 0 \dots 3, m = 0, 1.$

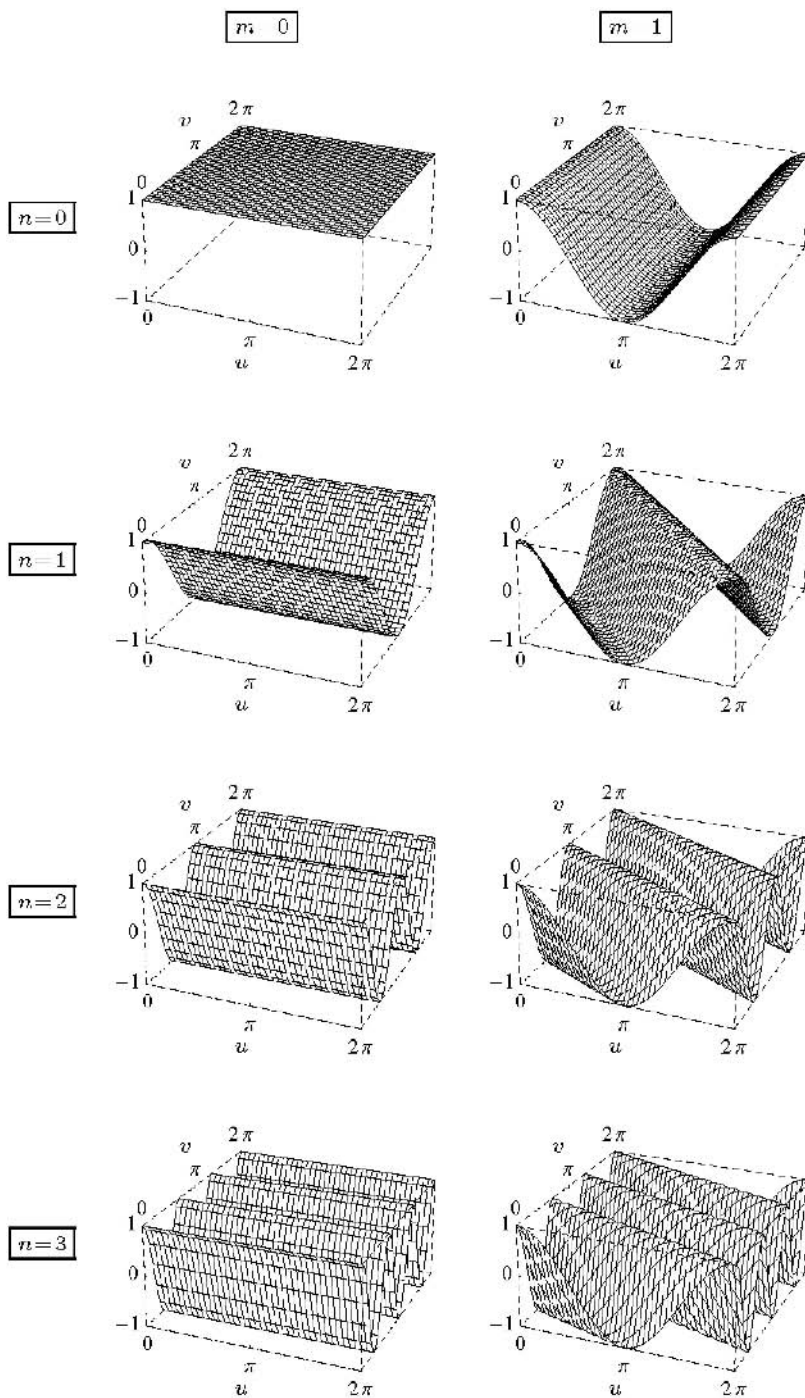
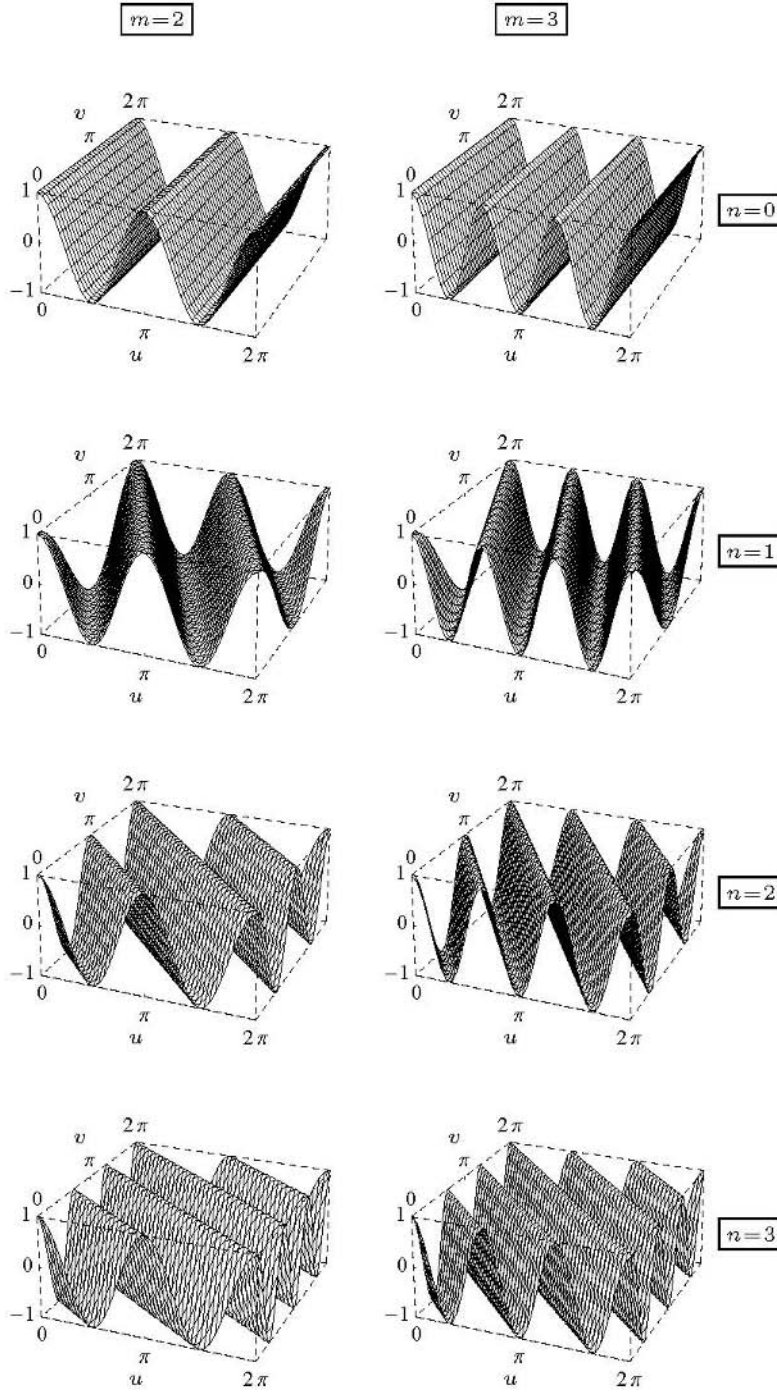


Abbildung 14.2

Zweidimensionale Kosinusfunktionen
(Fortsetzung).

$C_{m,n}^{M,N}(u,v) = \cos \left[2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]$ für
 $M = N = 16$, $n = 0 \dots 3$, $m = 2, 3$.



Wellenzahlen $(0, 0)$, also am Koordinatenursprung (s. auch Abschn. 14.4). Um den hohen Wertebereich innerhalb des Spektrums und insbesondere die kleineren Werte an der Peripherie des Spektrums sichtbar zu machen, wird häufig die Quadratwurzel $\sqrt{|G(m, n)|}$ oder der Logarithmus $\log |G(m, n)|$ des Leistungsspektrums für die Darstellung verwendet.

14.2.2 Zentrierte Darstellung

Wie im eindimensionalen Fall ist das diskrete 2D-Spektrum eine periodische Funktion, d. h.

$$G(m, n) = G(m + pM, n + qN) \quad (14.7)$$

für beliebige $p, q \in \mathbb{Z}$, und bei reellwertigen 2D-Signalen ist das Leistungsspektrum (vgl. Gl. 13.53) überdies um den Ursprung symmetrisch, also

$$|G(m, n)| = |G(-m, -n)|. \quad (14.8)$$

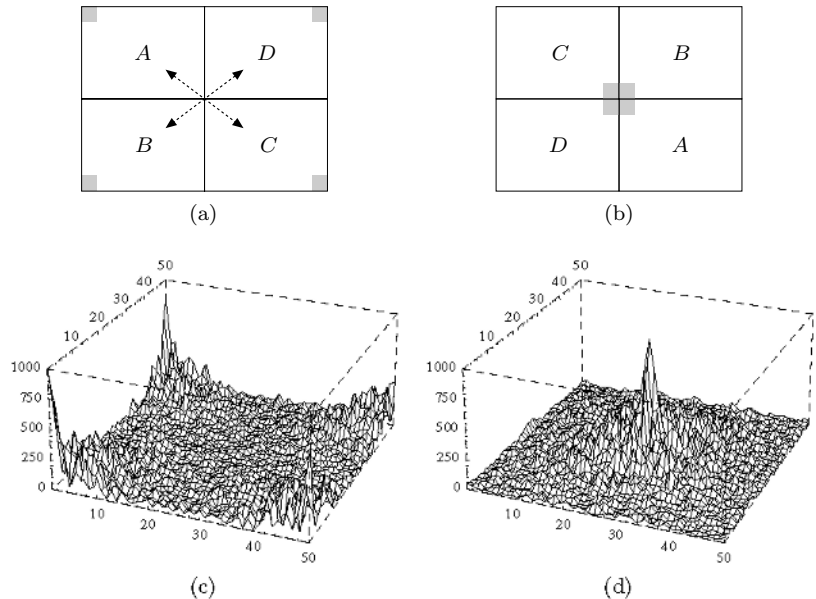
Es ist daher üblich, den Koordinatenursprung $(0, 0)$ des Spektrums *zentriert* darzustellen, mit den Koordinaten m, n im Bereich

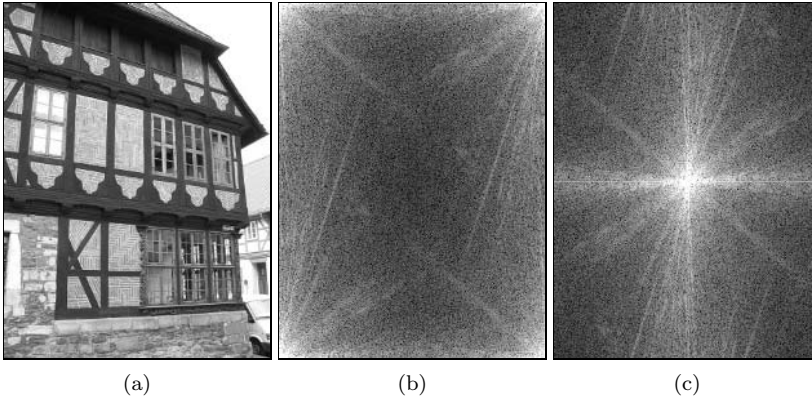
$$-\lfloor \frac{M}{2} \rfloor \leq m \leq \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor \quad \text{bzw.} \quad -\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \leq n \leq \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor.$$

Wie in Abb. 14.3 gezeigt, kann dies durch einfaches Vertauschen der vier Quadranten der Fouriertransformierten durchgeführt werden. In der resultierenden Darstellung finden sich damit die Koeffizienten für die niedrigsten Wellenzahlen im Zentrum, und jene für die höchsten Wellenzahlen liegen an den Rändern. Abb. 14.4 zeigt die Darstellung des

Abbildung 14.3

Zentrierung der 2D-Fourierspektrums. Im ursprünglichen Ergebnis der 2D-DFT liegt der Koordinatenursprung (und damit der Bereich niedriger Frequenzen) links oben und – aufgrund der Periodizität des Spektrums – gleichzeitig auch an den übrigen Eckpunkten (a). Die Koeffizienten der höchsten Wellenzahlen liegen hingegen im Zentrum. Durch paarweises Vertauschen der vier Quadranten werden der Koordinatenursprung und die niedrigen Wellenzahlen ins Zentrum verschoben, umgekehrt kommen die hohen Wellenzahlen an den Rand (b). Konkretes 2D-Fourierspektrum in ursprünglicher Darstellung (c) und zentrierter Darstellung (d).





14.3 FREQUENZEN UND ORIENTIERUNG IN 2D

Abbildung 14.4

Darstellung des 2D-Leistungsspektrums als Intensitätsbild. Originalbild (a), unzentriertes Spektrum (b) und zentrierte Darstellung (c).

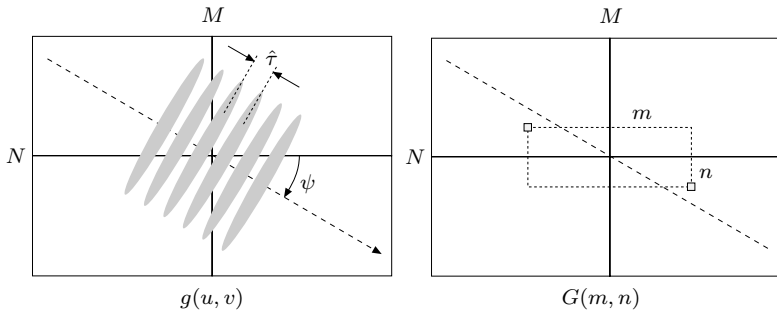


Abbildung 14.5

Frequenz und Orientierung im 2D-Spektrum. Das Bild (links) enthält ein periodisches Muster mit der effektiven Frequenz $\hat{f} = 1/\hat{\tau}$ mit der Richtung ψ . Der zu diesem Muster gehörende Koeffizient im Leistungsspektrum (rechts) befindet sich an der Position $(m, n) = \pm \hat{f} \cdot (M \cos \psi, N \sin \psi)$. Die Lage der Spektralkoordinaten (m, n) gegenüber dem Ursprung entspricht daher i. Allg. *nicht* der Richtung des Bildmusters.

2D-Leistungsspektrums als Intensitätsbild in der ursprünglichen und in der (üblichen) zentrierten Form, wobei die Intensität dem Logarithmus der Spektralwerte $(\log_{10} |G(m, n)|)$ entspricht.

14.3 Frequenzen und Orientierung in 2D

Wie aus Abb. 14.1–14.2 hervorgeht, sind die Basisfunktionen gerichtete Kosinus- bzw. Sinusfunktionen, deren Orientierung und Frequenz durch die Wellenzahlen m und n (für die horizontale bzw. vertikale Richtung) bestimmt sind. Wenn wir uns entlang der Hauptrichtung einer solchen Basisfunktion bewegen (d. h. rechtwinklig zu den Wellenkämmen), erhalten wir eine eindimensionale Kosinus- bzw. Sinusfunktion mit einer bestimmten Frequenz \hat{f} , die wir als *gerichtete* oder *effektive* Frequenz der Wellenform bezeichnen (Abb. 14.5).

14.3.1 Effektive Frequenz

Wir erinnern uns, dass die Wellenzahlen m, n definieren, wie viele volle Perioden die zugehörige 2D-Basisfunktion innerhalb von M Einheiten in horizontaler Richtung bzw. innerhalb von N Einheiten in vertikaler

Richtung durchläuft. Die effektive Frequenz entlang der Wellenrichtung kann aus dem eindimensionalen Fall (Gl. 13.54) abgeleitet werden als

$$\hat{f}_{(m,n)} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2}, \quad (14.9)$$

wobei das gleiche räumliche Abtastintervall für die x - und y -Richtung angenommen wird, d. h. $\tau = \tau_x = \tau_y$. Die maximale Signalfrequenz entlang der x - und y -Achse beträgt daher

$$\hat{f}_{(\pm \frac{M}{2}, 0)} = \hat{f}_{(0, \pm \frac{N}{2})} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{2} f_s, \quad (14.10)$$

wobei $f_s = \frac{1}{\tau}$ die Abtastfrequenz bezeichnet. Man beachte, dass die effektive Frequenz für die Eckpunkte des Spektrums, also

$$\hat{f}_{(\pm \frac{M}{2}, \pm \frac{N}{2})} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_s, \quad (14.11)$$

um den Faktor $\sqrt{2}$ höher ist als entlang der beiden Koordinatenachsen (Gl. 14.10).

14.3.2 Frequenzlimits und Aliasing in 2D

Abb. 14.6 illustriert den in Gl. 14.10 und 14.11 beschriebenen Zusammenhang. Die maximal zulässigen Signalfrequenzen in jeder Richtung liegen am Rand des zentrierten, $M \times N$ großen 2D-Spektrums. Jedes Signal mit Komponenten ausschließlich innerhalb dieses Bereichs entspricht den Regeln des Abtasttheorems und kann ohne Aliasing rekonstruiert werden. Jede Spektralkomponente außerhalb dieser Grenze wird an dieser Grenze zum Ursprung hin in den inneren Bereich des Spektrums (also auf niedrigere Frequenzen) gespiegelt und verursacht daher sichtbares *Aliasing* im rekonstruierten Bild.

Offensichtlich ist die effektive Abtastfrequenz (Gl. 14.9) am niedrigsten in Richtung der beiden Koordinatenachsen des Abtastgitters. Um sicherzustellen, dass ein bestimmtes Bildmuster in jeder Lage (Rotation) ohne Aliasing abgebildet wird, muss die effektive Signalfrequenz \hat{f} des Bildmusters in jeder Richtung auf $\frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\tau}$ begrenzt sein, wiederum unter der Annahme, dass das Abtastintervall τ in beiden Achsenrichtungen identisch ist.

14.3.3 Orientierung

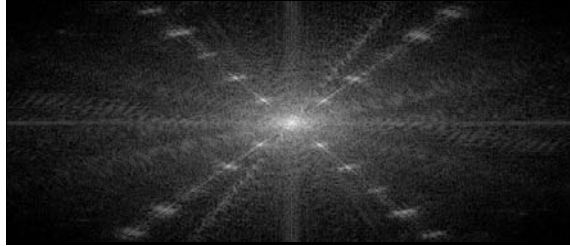
Die räumliche Richtung einer zweidimensionalen Kosinus- oder Sinuswelle mit den Spektralkoordinaten m, n ($0 \leq m < M$, $0 \leq n < N$) ist

$$\psi_{(m,n)} = \arctan_2\left(\frac{n}{N}, \frac{m}{M}\right) = \arctan_2(nM, mN), \quad (14.12)$$

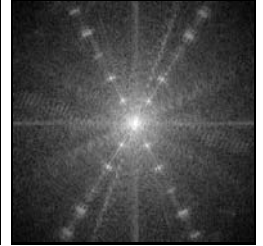
Abbildung 14.7

Geometrische Korrektur des 2D-Spektrums. Ausgangsbild (a) mit dominanten, gerichteten Bildmustern, die im zugehörigen Spektrum (b) als deutliche Spitzen sichtbar werden. Weil Bild und Spektrum nicht quadratisch sind ($M \neq N$), stimmen die Orientierungen im ursprünglichen Spektrum (b) nicht mit denen im Bild überein. Erst wenn das Spektrum auf quadratische Form skaliert ist (c), wird deutlich, dass die Zylinder dieses Motors (*V-Rod Engine* von Harley-Davidson) tatsächlich im 60° -Abstand angeordnet sind.

(a)



(b)



(c)

14.3.5 Auswirkungen der Periodizität

Bei der Interpretation der 2D-DFT von Bildern muss man sich der Tatsache bewusst sein, dass die Signalfunktion bei der diskreten Fouriertransformation implizit und in jeder Koordinatenrichtung als periodisch angenommen wird. Die Übergänge an den Bildrändern, also von einer Periode zur nächsten, gehören daher genauso zum Signal wie jedes Ereignis innerhalb des eigentlichen Bilds. Ist der Intensitätsunterschied zwischen gegenüberliegenden Randpunkten groß (wie z. B. zwischen dem oberen und dem unteren Rand einer Landschaftsaufnahme), dann führt dies zu abrupten Übergängen in dem als periodisch angenommenen Signal. Steile Diskontinuitäten sind aber von hoher Bandbreite, d. h., die zugehörige Signalenergie ist im Fourierspektrum über viele Frequenzen entlang der Koordinatenachsen des Abtastgitters verteilt (siehe Abb. 14.8). Diese breitbandige Energieverteilung entlang der Hauptachsen, die bei realen Bildern häufig zu beobachten ist, kann dazu führen, dass andere, signalrelevante Komponenten völlig überdeckt werden.

14.3.6 Windowing

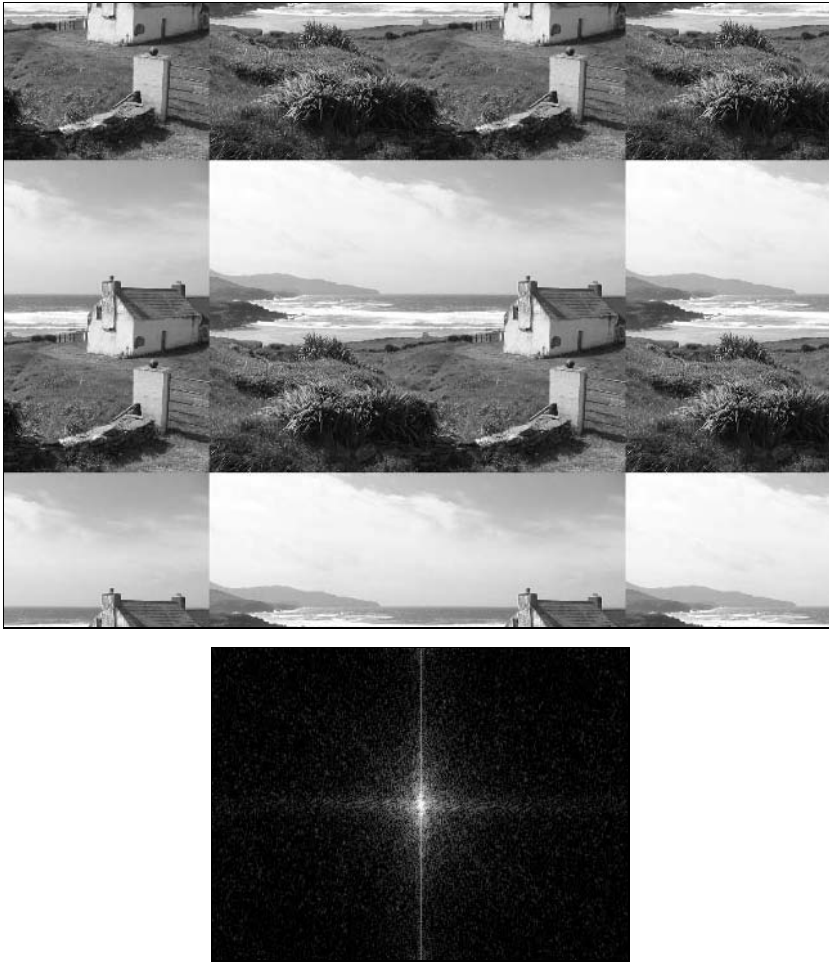
Eine Lösung dieses Problems besteht in der Multiplikation der Bildfunktion $g(u, v) = I(u, v)$ mit einer geeigneten Fensterfunktion (*windowing function*) $w(u, v)$ in der Form

$$\tilde{g}(u, v) = g(u, v) \cdot w(u, v),$$

für $0 \leq u < M$, $0 \leq v < N$, vor der Berechnung der DFT. Die Fensterfunktion $w(u, v)$ soll zu den Bildrändern hin möglichst kontinuierlich

Abbildung 14.8

Auswirkungen der Periodizität im 2D-Spektrum. Die Berechnung der diskreten Fouriertransformation erfolgt unter der impliziten Annahme, dass das Bildsignal in beiden Dimensionen periodisch ist (oben). Größere Intensitätsunterschiede zwischen gegenüberliegenden Bildrändern – hier besonders deutlich in der vertikalen Richtung – führen zu breitbandigen Signalkomponenten, die hier im Spektrum (unten) als helle Linie entlang der vertikalen Achse sichtbar werden.



auf null abfallen und damit die Diskontinuitäten an den Übergängen zwischen einzelnen Perioden der Signalfunktion eliminieren. Die Multiplikation mit $w(u, v)$ hat jedoch weitere Auswirkungen auf das Fourierpektrum, denn entsprechend der Faltungseigenschaft entspricht – wie wir bereits (aus Gl. 13.26) wissen – die *Multiplikation* im Ortsraum einer *Faltung* der zugehörigen Spektra:

$$\tilde{G}(m, n) \leftarrow G(m, n) * W(m, n).$$

Um die Fouriertransformierte des Bilds möglichst wenig zu beeinträchtigen, wäre das Spektrum von $w(u, v)$ idealerweise die Impulsfunktion $\delta(m, n)$, die aber wiederum einer konstanten Funktion $w(u, v) = 1$ entspricht und damit keinen Fenstereffekt hätte. Grundsätzlich gilt, dass je *breiter* das Spektrum der Fensterfunktion $w(u, v)$ ist, desto stärker wird das Spektrum der damit gewichteten Bildfunktion „verwischt“ und umso schlechter können einzelne Spektralkomponenten identifiziert werden.

Die Aufnahme eines Bilds entspricht der Entnahme eines endlichen Abschnitts aus einem eigentlich unendlichen Bildsignal, wobei die Beschneidung an den Bildrändern implizit der Multiplikation mit einer *Rechteckfunktion* mit der Breite M und der Höhe N entspricht. In diesem Fall wird also das Spektrum der ursprünglichen Intensitätsfunktion mit dem Spektrum der Rechteckfunktion gefaltet. Das Problem dabei ist, dass das Spektrum der Rechteckfunktion (s. Abb. 14.9 (a)) extrem breitbandig ist, also von dem oben genannten Ideal einer möglichst schmalen Pulsfunktion weit entfernt ist.

Diese beiden Beispiele zeigen das Dilemma: Fensterfunktionen sollten einerseits möglichst breit sein, um einen möglichst großen Anteil des ursprünglichen Bilds zu berücksichtigen, andererseits zu den Bildrändern hin auf null abfallen und gleichzeitig nicht zu steil sein, um selbst kein breitbandiges Spektrum zu erzeugen.

14.3.7 Fensterfunktionen

Geeignete Fensterfunktionen müssen daher weiche Übergänge aufweisen und dafür gibt es viele Varianten, die in der digitalen Signalverarbeitung theoretisch und experimentell untersucht wurden (s. beispielsweise [11, Abschn. 9.3], [67, Kap. 10]). Tabelle 14.1 zeigt die Definitionen einiger gängiger Fensterfunktionen, die auch in Abb. 14.9–14.10 jeweils mit dem zugehörigen Spektrum dargestellt sind.

Das Spektrum der Rechteckfunktion (Abb. 14.9 (a)), die alle Bildelemente gleich gewichtet, weist zwar eine relativ dünne Spitze am Ursprung auf, die zunächst eine geringe Verwischung im resultierenden Gesamtspektrum verspricht. Allerdings fällt die spektrale Energie zu den höheren Frequenzen hin nur sehr langsam ab, sodass sich insgesamt ein ziemlich breitbandiges Spektrum ergibt. Wie zu erwarten zeigt die elliptische Fensterfunktion in Abb. 14.9 (b) ein sehr ähnliches Verhalten. Das Gauß-Fenster Abb. 14.9 (c) zeigt deutlich, dass durch eine schmalere Fensterfunktion $w(u, v)$ die Nebenkeulen effektiv eingedämmt werden können, allerdings auf Kosten deutlich verbreiterten Spitze im Zentrum. Tatsächlich stellt keine der Funktionen in Abb. 14.9 eine gute Fensterfunktion dar.

Die Auswahl einer geeigneten Fensterfunktion ist offensichtlich ein heikler Kompromiss, zumal trotz ähnlicher Form der Funktionen im Ortsraum große Unterschiede im Spektralverhalten möglich sind. Günstige Eigenschaften bieten z. B. das *Hanning*-Fenster (Abb. 14.10 (c)) und das *Parzen*-Fenster (Abb. 14.10 (d)), die einfach zu berechnen sind und daher in der Praxis auch häufig eingesetzt werden.

Abb. 14.11 zeigt die Auswirkungen einiger ausgewählter Fensterfunktionen auf das Spektrum eines Intensitätsbilds. Deutlich ist zu erkennen, dass mit zunehmender Verengung der Fensterfunktion zwar die durch die Periodizität des Signals verursachten Artefakte unterdrückt werden, jedoch auch die Auflösung im Spektrum abnimmt und dadurch einzelne

Tabelle 14.1

2D-Fensterfunktionen. Die Funktionen $w(u, v)$ sind jeweils in der Bildmitte zentriert, d. h. $w(M/2, N/2) = 1$, und beziehen sich auf die Radien r_u, r_v und $r_{u,v}$ (Definitionen am Tabellenkopf).

Definitionen:	
$r_u = \frac{u-M/2}{M/2} = \frac{2u}{M} - 1, \quad r_v = \frac{v-N/2}{N/2} = \frac{2v}{N} - 1, \quad r_{u,v} = \sqrt{r_u^2 + r_v^2}.$	
Elliptisches Fenster:	$w(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq r_{u,v} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Gauß-Fenster:	$w(u, v) = e^{\left(\frac{-r_{u,v}^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad \sigma = 0.3 \dots 0.4$
Supergauß-Fenster:	$w(u, v) = e^{\left(\frac{-r_{u,v}^n}{\kappa}\right)}, \quad n = 6, \kappa = 0.3 \dots 0.4$
Kosinus²-Fenster:	$w(u, v) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}r_u\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}r_v\right) & \text{für } 0 \leq r_u, r_v \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Bartlett-Fenster:	$w(u, v) = \begin{cases} 1 - r_{u,v} & \text{für } 0 \leq r_{u,v} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Hanning-Fenster:	$w(u, v) = \begin{cases} 0.5 \cdot \cos(\pi r_{u,v}) + 0.5 & \text{für } 0 \leq r_{u,v} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Parzen-Fenster:	$w(u, v) = \begin{cases} 1 - 6r_{u,v}^2 + 6r_{u,v}^3 & \text{für } 0 \leq r_{u,v} < 0.5 \\ 2 \cdot (1 - r_{u,v})^3 & \text{für } 0.5 \leq r_{u,v} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Spektralkomponenten zwar deutlicher hervortreten, aber auch in der Breite zunehmen und damit schlechter zu lokalisieren sind.

Abbildung 14.9

Beispiele für Fensterfunktionen und deren logarithmisches Leistungsspektrum. Rechteckfenster (a), elliptisches Fenster (b), Gauß-Fenster mit $\sigma = 0.3$ (c), Supergauß-Fenster der Ordnung $n = 6$ und $\kappa = 0.3$ (d). Die Größe der Fensterfunktion ist absichtlich *nicht* quadratisch gewählt ($M : N = 1 : 2$).

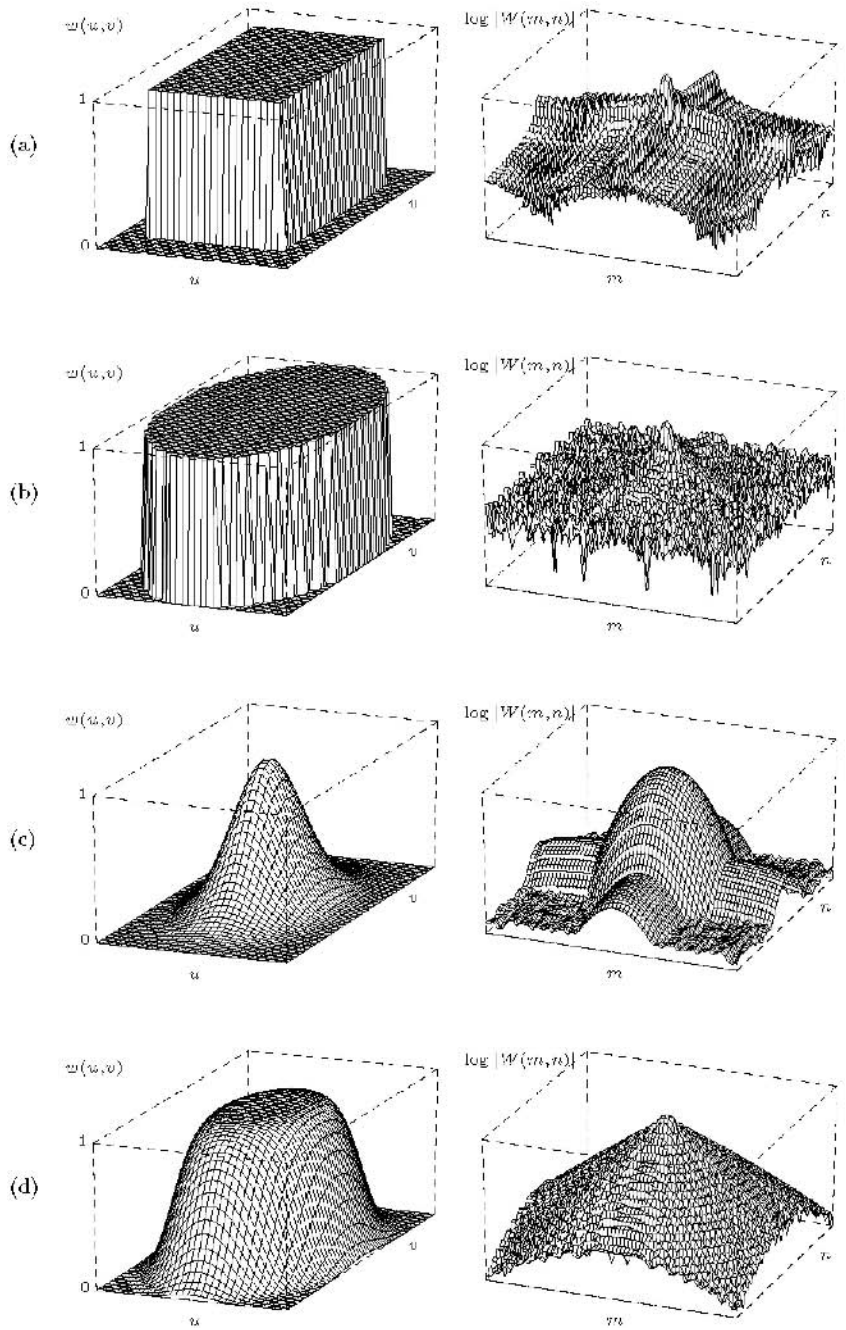
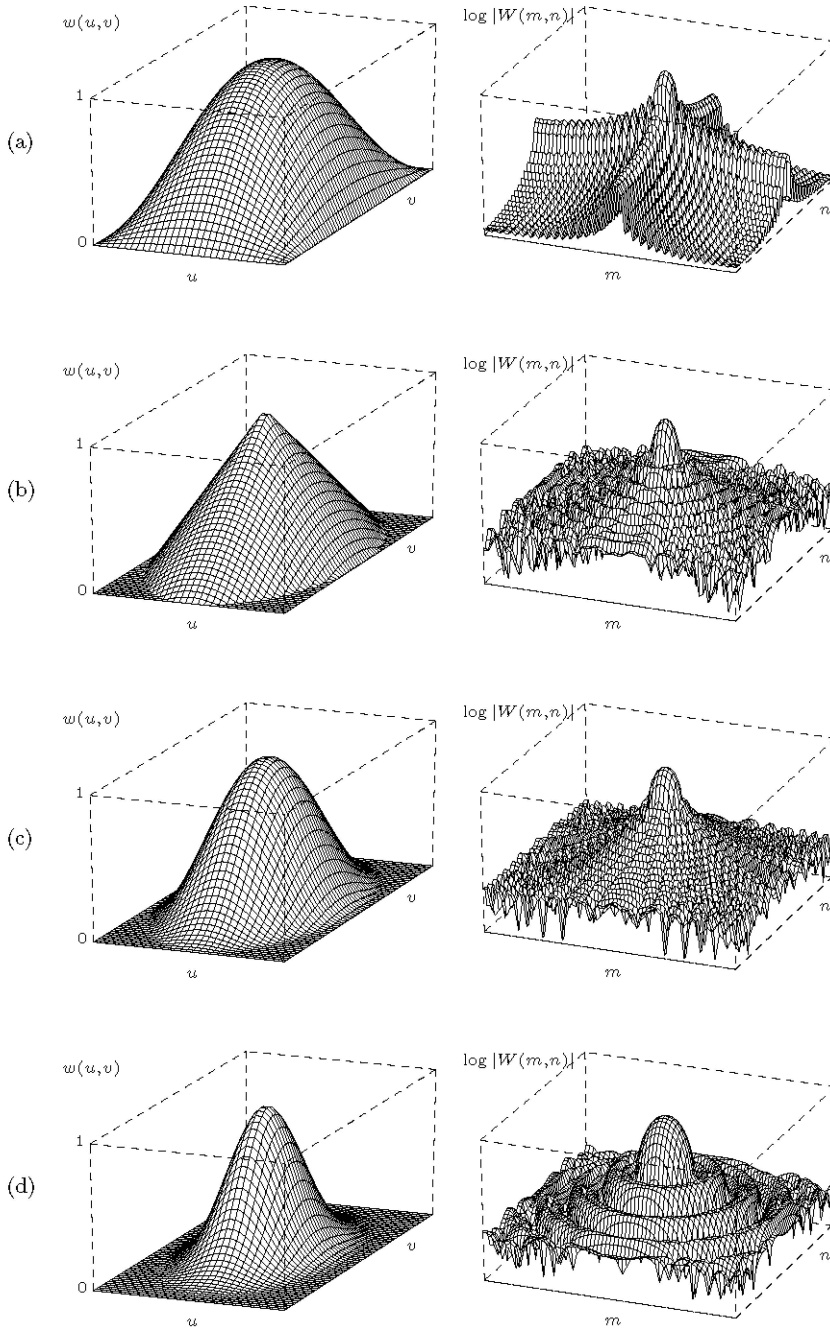


Abbildung 14.10
Beispiele für Fensterfunktionen
(*Fortsetzung*). Kosinus²-Fenster (a),
Bartlett-Fenster (b) Hanning-Fenster
(c), Parzen-Fenster (d).



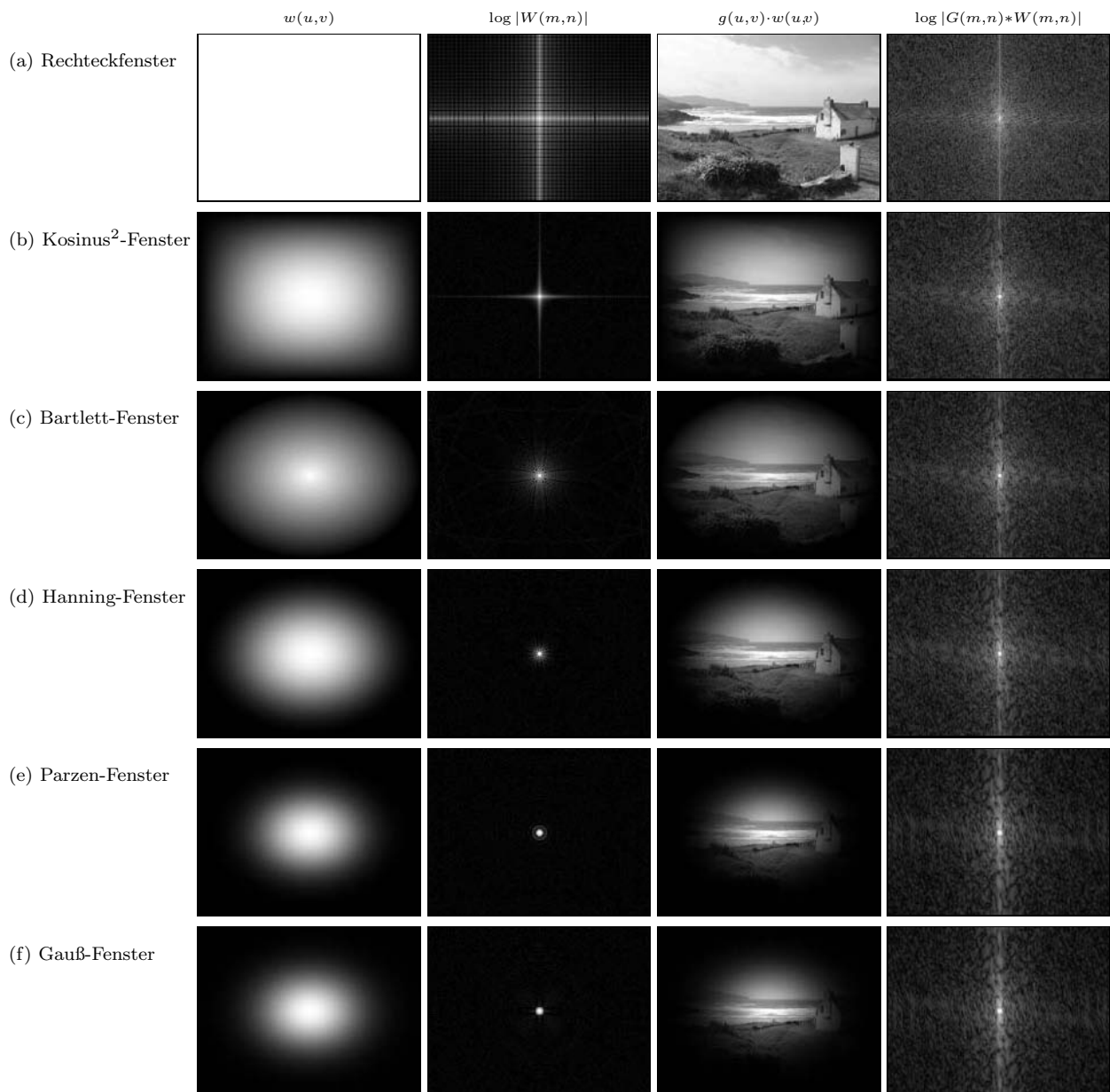


Abbildung 14.11. Anwendung von Fensterfunktionen auf Bilder. Gezeigt ist jeweils die Fensterfunktion $w(u,v)$, das Leistungsspektrum der Fensterfunktion $\log |W(m,n)|$, die gewichtete Bildfunktion $g(u,v) \cdot w(u,v)$ und das Leistungsspektrum des gewichteten Bilds $\log |G(m,n) * W(m,n)|$.

14.4 Beispiele für Fouriertransformierte in 2D

Die nachfolgenden Beispiele demonstrieren einige der grundlegenden Eigenschaften der zweidimensionalen DFT anhand konkreter Intensitätsbilder. Alle Beispiele in Abb. 14.12–14.18 zeigen ein zentriertes und auf quadratische Größe normalisiertes Spektrum, wobei eine logarithmische Skalierung der Intensitätswerte (s. Abschn. 14.2) verwendet wurde.

14.4.1 Skalierung

Abb. 14.12 zeigt, dass – genauso wie im eindimensionalen Fall (s. Abb. 13.4) – die Skalierung der Funktion im Bildraum den umgekehrten Effekt im Spektralraum hat.

14.4.2 Periodische Bildmuster

Die Bilder in Abb. 14.13 enthalten periodische, in unterschiedlichen Richtungen verlaufende Muster, die sich als isolierte Spitzen an den entsprechenden Positionen (s. Gl. 14.13) im zugehörigen Spektrum manifestieren.

14.4.3 Drehung

Abb. 14.14 zeigt, dass die Drehung des Bilds um einen Winkel α eine Drehung des (quadratischen) Spektrums in derselben Richtung und um denselben Winkel verursacht.

14.4.4 Gerichtete, längliche Strukturen

Bilder von künstlichen Objekten enthalten häufig regelmäßige Muster oder längliche Strukturen, die deutliche Spuren im zugehörigen Spektrum hinterlassen. Die Bilder in Abb. 14.15 enthalten mehrere längliche Strukturen, die im Spektrum als breite, rechtwinklig zur Orientierung im Bild ausgerichtete Streifen hervortreten.

14.4.5 Natürliche Bilder

In Abbildungen von natürlichen Objekten sind regelmäßige Anordnungen und gerade Strukturen weniger ausgeprägt als in künstlichen Szenen, daher sind auch die Auswirkungen im Spektrum weniger deutlich. Einige Beispiele dafür zeigen Abb. 14.16 und 14.17.

14.4.6 Druckraster

Das regelmäßige Muster, das beim üblichen Rasterdruckverfahren entsteht (Abb. 14.18), ist ein klassisches Beispiel für eine periodische, in mehreren Richtungen verlaufende Struktur, die in der Fouriertransformierten deutlich zu erkennen ist.

Abbildung 14.12

DFT – Skalierung. Der Rechteckpuls in der Bildfunktion (a–c) erzeugt, wie im eindimensionalen Fall, ein stark ausschwingendes Leistungsspektrum (d–f). Eine Streckung im Bildraum führt zu einer entsprechenden Stauchung im Spektralraum (und umgekehrt).

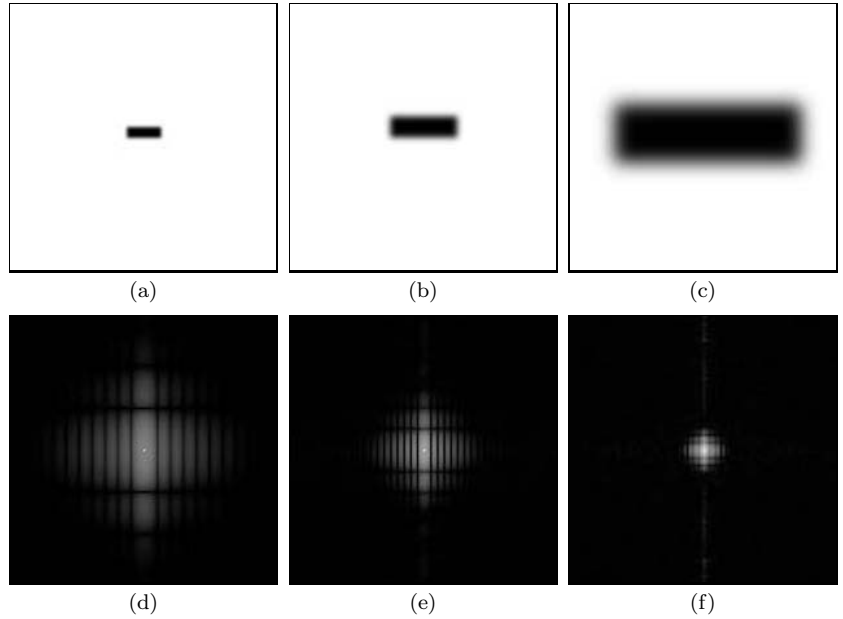
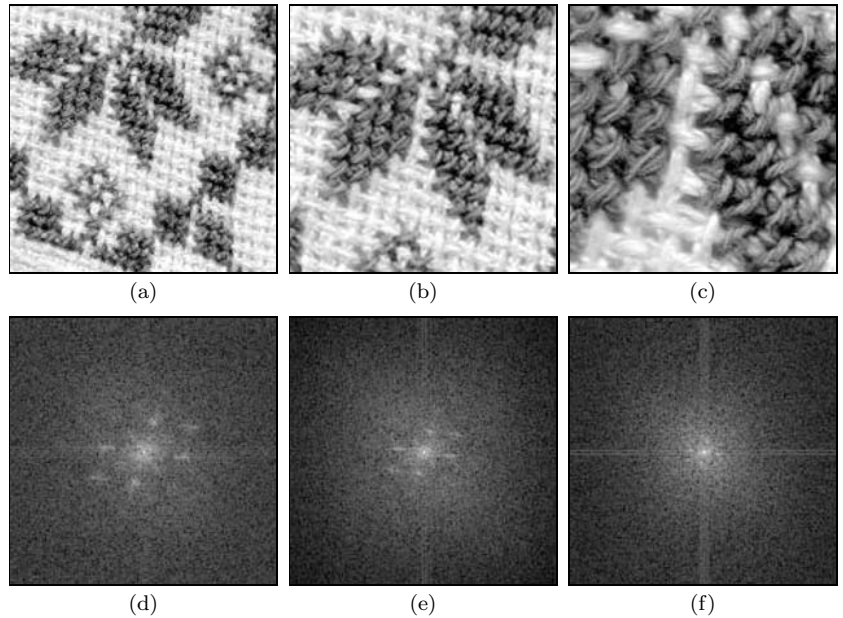
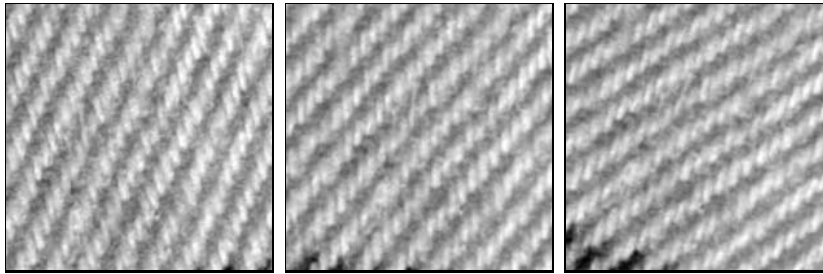


Abbildung 14.13

DFT – gerichtete, periodische Bildmuster. Die Bildfunktion (a–c) enthält Muster in drei dominanten Richtungen, die sich im zugehörigen Spektrum (d–f) als Paare von Spitzenwerten mit der entsprechenden Orientierung wiederfinden. Eine Vergrößerung des Bildmusters führt wie im vorigen Beispiel zur Kontraktion des Spektrums.

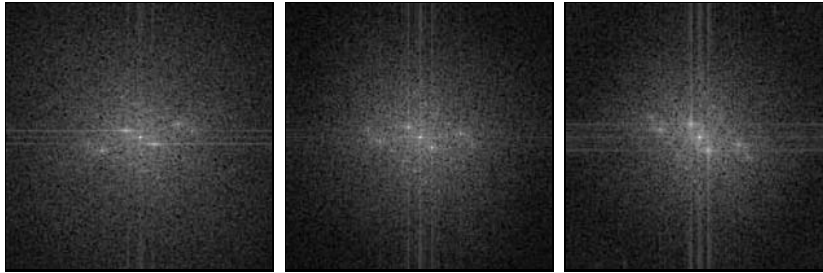




(a)

(b)

(c)



(d)

(e)

(f)

14.4 BEISPIELE FÜR FOURIERTRANSFORMIERTE IN 2D

Abbildung 14.14

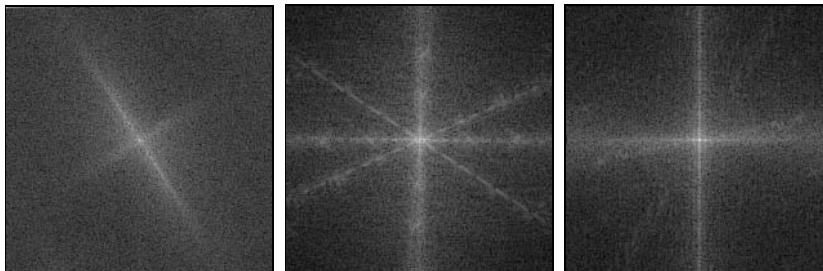
DFT – Rotation. Das Originalbild (a) wird im Uhrzeigersinn um 15° (b) und 30° (c) gedreht. Das zugehörige (quadratische) Spektrum dreht sich dabei in der gleichen Richtung und um exakt denselben Winkel (d–f).



(a)

(b)

(c)



(d)

(e)

(f)

Abbildung 14.15

DFT – Überlagerung von Mustern. Dominante Orientierungen im Bild (a–c) erscheinen unabhängig im zugehörigen Spektrum (d–f). Charakteristisch sind die markanten, breitbandigen Auswirkungen der geraden Strukturen, wie z. B. die dunklen Balken im Mauerwerk (b, e).

Abbildung 14.16

DFT – natürliche Bildmuster.
Beispiele für natürliche Bilder
mit repetitiven Mustern (a–c),
die auch im zugehörigen Spek-
trum (d–f) deutlich sichtbar sind.

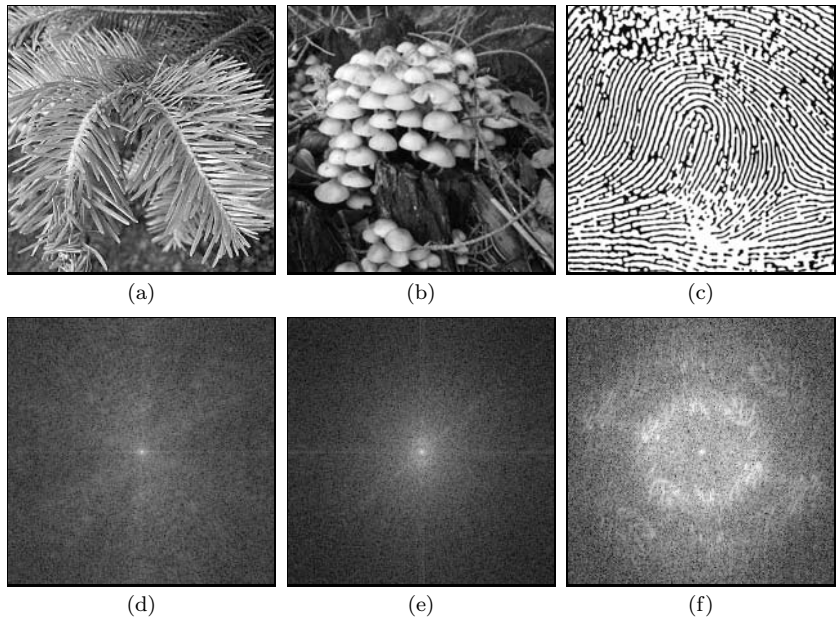
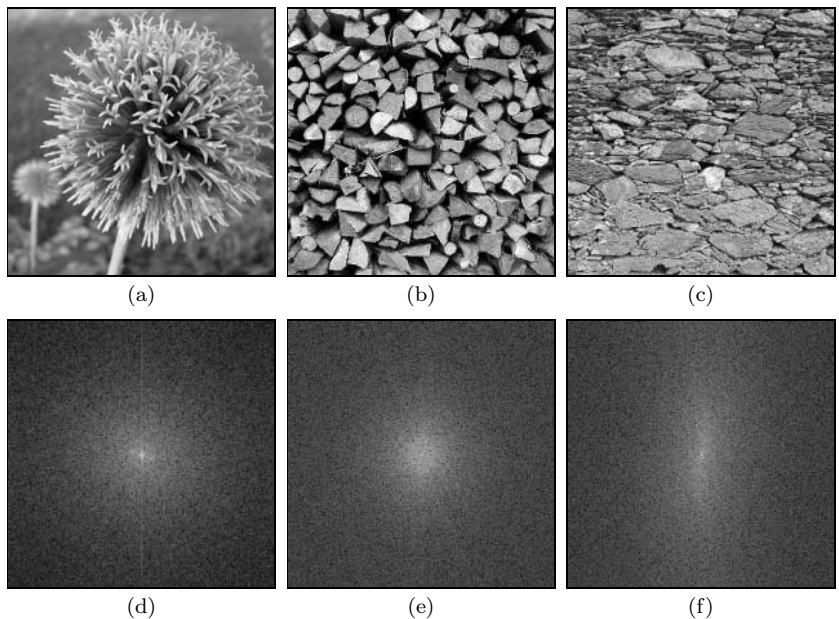
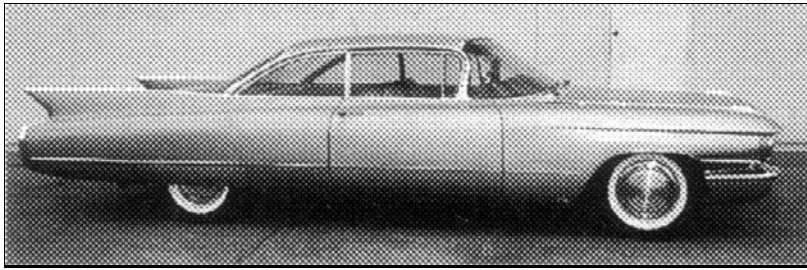


Abbildung 14.17
DFT – natürliche Bildmuster ohne
ausgeprägte Orientierung. Obwohl
natürliche Bilder (a–c) durchaus repe-
titive Strukturen enthalten können,
sind sie oft nicht ausreichend reg-
elmäßig oder einheitlich gerichtet,
um im zugehörigen Fourierspek-
trum (d–f) deutlich zutage zu treten.

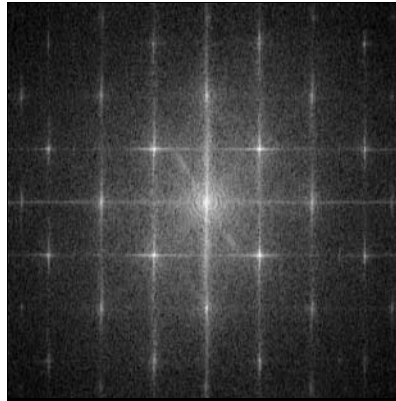




(a)



(b)



(c)

14.5 ANWENDUNGEN DER DFT

Abbildung 14.18

DFT eines Druckmusters. Das diagonal angeordnete, regelmäßige Druckraster im Originalbild (a, b) zeigt sich deutlich im zugehörigen Leistungsspektrum (c). Es ist möglich, derartige Muster zu entfernen, indem die entsprechenden Spitzen im Fourier-spektrum gezielt gelöscht (geglättet) werden und das Bild nachfolgend aus dem geänderten Spektrum durch eine inverse Fouriertransformation wieder rekonstruiert wird.

14.5 Anwendungen der DFT

Die Fouriertransformation und speziell die DFT sind wichtige Werkzeuge in vielen Ingenieurstechniken. In der digitalen Signal- und Bildverarbeitung ist die DFT (und die FFT) ein unverzichtbares Arbeitspferd, mit Anwendungen u. a. im Bereich der Bildanalyse, Filterung und Bildrekonstruktion.

14.5.1 Lineare Filteroperationen im Spektralraum

Die Durchführung von Filteroperationen im Spektralraum ist besonders interessant, da sie die effiziente Anwendung von Filtern mit sehr großer räumlicher Ausdehnung ermöglicht. Grundlage dieser Idee ist die Faltungseigenschaft der Fouriertransformation, die besagt, dass einer linearen Faltung im Ortsraum eine punktweise Multiplikation im Spektralraum entspricht (s. Abschn. 13.1.6, Gl. 13.26). Die lineare Faltung $g * h \rightarrow g'$ zwischen einem Bild $g(u, v)$ und einer Filtermatrix $h(u, v)$ kann daher auf folgendem Weg durchgeführt werden:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Ortsraum:} & g(u, v) * h(u, v) & = & g'(u, v) & \\
 & \downarrow \text{DFT} & & \downarrow \text{DFT} & \uparrow \text{DFT}^{-1} \\
 & & & & \\
 \text{Spektralraum:} & G(m, n) \cdot H(m, n) & \longrightarrow & G'(m, n) &
 \end{array} \quad (14.15)$$

Zunächst werden das Bild g und die Filterfunktion h unabhängig mithilfe der DFT in den Spektralraum transformiert. Die resultierenden Spektren G und H werden punktweise multipliziert, das Ergebnis G' wird anschließend mit der inversen DFT in den Ortsraum zurücktransformiert und ergibt damit das gefilterte Bild g' .

Ein wesentlicher Vorteil dieses „Umwegs“ liegt in der möglichen Effizienz. Die direkte Faltung erfordert für ein Bild der Größe $M \times M$ und eine $N \times N$ große Filtermatrix $\mathcal{O}(M^2 N^2)$ Operationen.² Die Zeitkomplexität wächst daher quadratisch mit der Filtergröße, was zwar für kleine Filter kein Problem darstellt, größere Filter aber schnell zu aufwendig werden lässt. So benötigt etwa ein Filter der Größe 50×50 bereits ca. 2.500 Multiplikationen und Additionen zur Berechnung jedes einzelnen Bildelements. Im Gegensatz dazu kann die Transformation in den Spektralraum und zurück mit der FFT in $\mathcal{O}(M \log_2 M)$ durchgeführt werden, unabhängig von der Größe des Filters (das Filter selbst braucht nur einmal in den Spektralraum transformiert zu werden), und die Multiplikation im Spektralraum erfordert nur M^2 Operationen, unabhängig von der Größe des Filters.

Darüber hinaus können bestimmte Filter im Spektralraum leichter charakterisiert werden als im Ortsraum, wie etwa ein ideales Tiefpassfilter, das im Spektralraum sehr kompakt dargestellt werden kann. Weitere Details zu Filteroperationen im Spektralraum finden sich z. B. in [30, Abschn. 4.4].

14.5.2 Lineare Faltung und Korrelation

Wie bereits in Abschn. 6.3 erwähnt, ist die lineare *Korrelation* identisch zu einer linearen Faltung mit einer gespiegelten Filterfunktion. Die Korrelation kann daher, genauso wie die Faltung, mit der in Gl. 14.15 beschriebenen Methode im Spektralraum berechnet werden. Das ist vor allem beim Vergleich von Bildern mithilfe von Korrelationsmethoden (s. auch Abschn. 17.1.1) vorteilhaft, da in diesem Fall Bildmatrix und Filtermatrix ähnliche Dimensionen aufweisen, also meist für eine Realisierung im Ortsraum zu groß sind.

Auch in ImageJ sind daher einige dieser Operationen, wie *correlate*, *convolve*, *deconvolve* (s. unten), über die zweidimensionale DFT in der „Fourier Domain“ (FD) implementiert (verfügbar über das Menü **Process** → **FFT** → **FD Math...**).

² Zur Notation $\mathcal{O}()$ s. Anhang 1.3.

Die Möglichkeit des Filterns im Spektralraum eröffnet eine weitere interessante Perspektive: die Auswirkungen eines Filters wieder rückgängig zu machen, zumindest unter eingeschränkten Bedingungen. Im Folgenden beschreiben wir nur die grundlegende Idee.

Nehmen wir an, wir hätten ein Bild g_{blur} , das aus einem ursprünglichen Bild g_{orig} durch einen Filterprozess entstanden ist, z. B. durch eine Verwischung aufgrund einer Kamerabewegung während der Aufnahme. Nehmen wir außerdem an, diese Veränderung kann als lineares Filter mit der Filterfunktion h_{blur} ausreichend genau modelliert werden, sodass gilt

$$g_{\text{blur}} = g_{\text{orig}} * h_{\text{blur}}.$$

Da dies im Spektralraum einer Multiplikation der zugehörigen Spektren

$$G_{\text{blur}} = G_{\text{orig}} \cdot H_{\text{blur}}$$

entspricht, sollte es möglich sein, das Originalbild einfach durch die inverse Fouriertransformation des Ausdrucks

$$G_{\text{orig}}(m, n) = \frac{G_{\text{blur}}(m, n)}{H_{\text{blur}}(m, n)}$$

zu rekonstruieren. Leider funktioniert dieses inverse Filter nur dann, wenn die Spektralwerte von H_{blur} ungleich null sind, denn andernfalls würden die resultierenden Koeffizienten unendlich. Aber auch kleine Werte von H_{blur} , wie sie typischerweise bei höheren Frequenzen fast immer auftreten, führen zu entsprechend großen Ausschlägen im Ergebnis und damit zu Rauschproblemen.

Es ist ferner wichtig, dass die tatsächliche Filterfunktion sehr genau approximiert werden kann, weil sonst die Ergebnisse vom ursprünglichen Bild erheblich abweichen. Abb. 14.19 zeigt ein Beispiel anhand eines Bilds, das durch eine gleichförmige horizontale Verschiebung verwischt wurde, deren Auswirkung sehr einfach durch eine lineare Faltung modelliert werden kann. Wenn die Filterfunktion, die die Unschärfe verursacht hat, exakt bekannt ist, dann ist die Rekonstruktion problemlos möglich

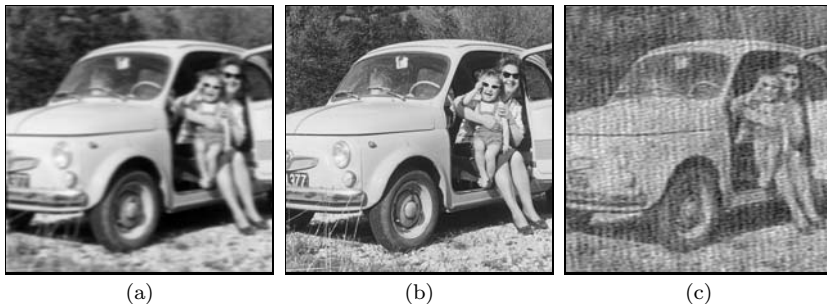


Abbildung 14.19

Entfernung von Unschärfe durch ein inverses Filter. Durch horizontale Bewegung erzeugte Unschärfe (a), Rekonstruktion mithilfe der exakten (in diesem Fall bekannten) Filterfunktion (b). Ergebnis des inversen Filters im Fall einer geringfügigen Abweichung von der tatsächlichen Filterfunktion (c).

(Abb. 14.19 (b)). Sobald das inverse Filter sich jedoch nur geringfügig vom tatsächlichen Filter unterscheidet, entstehen große Abweichungen (Abb. 14.19 (c)) und die Methode wird rasch nutzlos.

Über diese einfache Idee hinaus, die häufig als *deconvolution* („Entfaltung“) bezeichnet wird, gibt es allerdings verbesserte Methoden für inverse Filter, wie z. B. das Wiener-Filter und ähnliche Techniken (s. beispielsweise [30, Abschn. 5.4], [49, Abschn. 8.3], [48, Abschn. 17.8], [16, Kap. 16]).

14.6 Aufgaben

Aufg. 14.1. Verwenden Sie die eindimensionale DFT zur Implementierung der 2D-DFT, wie in Abschn. 14 beschrieben. Wenden Sie die 2D-DFT auf konkrete Intensitätsbilder beliebiger Größe an und stellen Sie das Ergebnis (durch Konvertierung in ein `float`-Bild) dar. Implementieren Sie auch die Rücktransformation und überzeugen Sie sich, dass dabei wiederum genau das Originalbild entsteht.

Aufg. 14.2. Das zweidimensionale DFT-Spektrum eines Bilds mit der Größe 640×480 und einer Auflösung von 72 dpi weist einen markanten Spitzenwert an der Stelle $\pm(100, 100)$ auf. Berechnen Sie Richtung und effektive Frequenz (in Perioden pro cm) der zugehörigen Bildstruktur.

Aufg. 14.3. Ein Bild mit der Größe 800×600 enthält ein wellenförmiges Helligkeitsmuster mit einer effektiven Periodenlänge von 12 Pixel und einer Wellenrichtung von 30° . An welcher Position im Spektrum wird sich diese Struktur im 2D-Spektrum widerspiegeln?

Aufg. 14.4. Verallgemeinern Sie Gl. 14.9 sowie Gl. 14.11–14.13 für den Fall, dass die Abtastintervalle in der x - und y -Richtung nicht identisch sind, also für $\tau_x \neq \tau_y$.

Aufg. 14.5. Implementieren Sie die elliptische Fensterfunktion und das Supergauß-Fenster (Tabelle 14.1) als ImageJ-Plugins und beurteilen Sie die Auswirkungen auf das resultierende 2D-Spektrum. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem ungewichteten Fall (ohne Fensterfunktion).