

Einführung in Spektraltechniken

In den folgenden drei Kapiteln geht es um die Darstellung und Analyse von Bildern im Frequenzbereich, basierend auf der Zerlegung von Bildsignalen in so genannte *harmonische* Funktionen, also Sinus- und Kosinusfunktionen, mithilfe der bekannten *Fouriertransformation*. Das Thema wird wegen seines etwas mathematischen Charakters oft als schwierig empfunden, weil auch die Anwendbarkeit in der Praxis anfangs nicht offensichtlich ist. Tatsächlich können die meisten gängigen Operationen und Methoden der digitalen Bildverarbeitung völlig ausreichend im gewohnten *Signal- oder Bildraum* dargestellt und verstanden werden, ohne Spektraltechniken überhaupt zu erwähnen bzw. zu kennen, weshalb das Thema hier (im Vergleich zu ähnlichen Texten) erst relativ spät aufgegriffen wird.

Wurden Spektraltechniken früher vorrangig aus Effizienzgründen für die Realisierung von Bildverarbeitungsoperationen eingesetzt, so spielt dieser Aspekt aufgrund der hohen Rechenleistung moderner Computer eine zunehmend untergeordnete Rolle. Dennoch gibt es einige wichtige Effekte und Verfahren in der digitalen Bildverarbeitung, die mithilfe spektraler Konzepte wesentlich einfacher oder ohne sie überhaupt nicht dargestellt werden können. Das Thema sollte daher nicht gänzlich umgangen werden. Die Fourieranalyse besitzt nicht nur eine elegante Theorie, sondern ergänzt auch in interessanter Weise einige bereits früher betrachtete Konzepte, insbesondere lineare Filter und die Faltungsoperation (Abschn. 6.2). Ebenso wichtig sind Spektraltechniken in vielen gängigen Verfahren für die Bild- und Videokompression, aber auch für das Verständnis der allgemeinen Zusammenhänge bei der Abtastung (Diskretisierung) von kontinuierlichen Signalen sowie bei der Rekonstruktion und Interpolation von diskreten Signalen.

Im Folgenden geben wir zunächst eine grundlegende Einführung in den Umgang mit Frequenzen und Spektralzerlegungen, die versucht, mit

einem Minimum an Formalismen auszukommen und daher auch für Leser ohne bisherigen Kontakt mit diesem Thema leicht zu „verdauen“ sein sollte. Wir beginnen mit der Darstellung eindimensionaler Signale und erweitern dies auf zweidimensionale Signale (Bilder) im nachfolgenden Kap. 14. Abschließend widmet sich Kap. 15 kurz der diskreten Kosinustransformation, einer Variante der Fouriertransformation, die vor allem bei der Bildkompression häufig Verwendung findet.

13.1 Die Fouriertransformation

Das allgemeine Konzept von „Frequenzen“ und der Zerlegung von Schwingungen in elementare, „harmonische“ Funktionen entstand ursprünglich im Zusammenhang von Schall, Tönen und Musik. Dabei erscheint die Idee, akustische Ereignisse auf der Basis „reiner“ Sinusfunktionen zu beschreiben, keineswegs unvernünftig, zumal Sinusschwingungen in natürlicher Weise bei jeder Form von Oszillation auftreten. Bevor wir aber fortfahren, zunächst (als Auffrischung) die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit Sinus- und Kosinusfunktionen.

13.1.1 Sinus- und Kosinusfunktionen

Die bekannte Kosinusfunktion

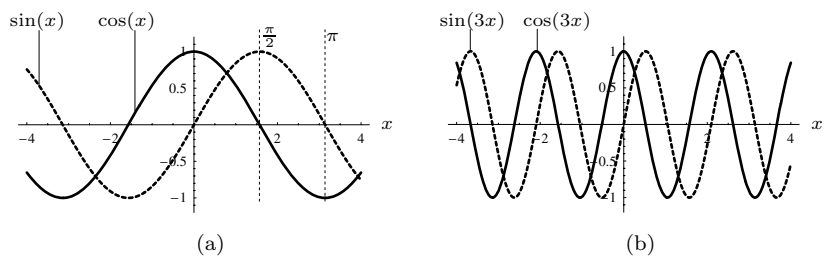
$$f(x) = \cos(x) \quad (13.1)$$

hat den Wert eins am Ursprung ($\cos(0) = 1$) und durchläuft bis zum Punkt $x = 2\pi$ eine volle *Periode* (Abb. 13.1 (a)). Die Funktion ist daher periodisch mit einer *Periodenlänge* $T = 2\pi$, d. h.

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + k2\pi) \quad (13.2)$$

für beliebige $k \in \mathbb{Z}$. Das Gleiche gilt für die entsprechende *Sinusfunktion* $\sin(x)$ mit dem Unterschied, dass deren Wert am Ursprung null ist ($\sin(0) = 0$).

Abbildung 13.1
Kosinus- und Sinusfunktion. Der Ausdruck $\cos(\omega x)$ beschreibt eine Kosinusfunktion mit der Kreisfrequenz ω an der Position x . Die periodische Funktion hat die Kreisfrequenz ω und damit die Periode $T = 2\pi/\omega$. Für $\omega = 1$ ist die Periode $T_1 = 2\pi$ (a), für $\omega = 3$ ist sie $T_3 = 2\pi/3 \approx 2.0944$ (b). Gleiches gilt für $\sin(\omega x)$.



Frequenz und Amplitude

Die Anzahl der Perioden von $\cos(x)$ innerhalb einer Strecke der Länge $T = 2\pi$ ist *eins* und damit ist auch die zugehörige *Kreisfrequenz*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1. \quad (13.3)$$

Wenn wir die Funktion modifizieren in der Form

$$f(x) = \cos(3x), \quad (13.4)$$

dann erhalten wir eine gestauchte Kosinusschwingung, die dreimal schneller oszilliert als die ursprüngliche Funktion $\cos(x)$ (s. Abb. 13.1 (b)). Die Funktion $\cos(3x)$ durchläuft 3 volle Zyklen über eine Distanz von 2π und weist daher eine Kreisfrequenz $\omega = 3$ auf bzw. eine Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{3}$. Im allgemeinen Fall gilt für die Periodenlänge

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (13.5)$$

für $\omega > 0$. Die Sinus- und Kosinusfunktion oszilliert zwischen den Scheitelwerten $+1$ und -1 . Eine Multiplikation mit einer Konstanten a ändert die *Amplitude* der Funktion und die Scheitelwerte auf $\pm a$. Im Allgemeinen ergibt

$$a \cdot \cos(\omega x) \quad \text{und} \quad a \cdot \sin(\omega x)$$

eine Kosinus- bzw. Sinusfunktion mit Amplitude a und Kreisfrequenz ω , ausgewertet an der Position (oder zum Zeitpunkt) x . Die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der „gewöhnlichen“ Frequenz f ist

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \omega = 2\pi f, \quad (13.6)$$

wobei f in Zyklen pro Raum- oder Zeiteinheit gemessen wird.¹ Wir verwenden je nach Bedarf ω oder f , und es sollte durch die unterschiedlichen Symbole jeweils klar sein, welche Art von Frequenz gemeint ist.

Phase

Wenn wir eine Kosinusfunktion entlang der x -Achse um eine Distanz φ verschieben, also

$$\cos(x) \rightarrow \cos(x - \varphi),$$

dann ändert sich die *Phase* der Kosinusschwingung und φ bezeichnet den *Phasewinkel* der resultierenden Funktion. Damit ist auch die Sinusfunktion (vgl. Abb. 13.1) eigentlich nur eine Kosinusfunktion, die um eine Viertelperiode ($\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$) nach rechts² verschoben ist, d. h.

¹ Beispielsweise entspricht die Frequenz $f = 1000$ Zyklen/s (Hertz) einer Periodenlänge von $T = 1/1000$ s und damit einer Kreisfrequenz von $\omega = 2000\pi$. Letztere ist eine einheitslose Größe.

² Die Funktion $f(x-d)$ ist allgemein die um die Distanz d nach rechts verschobene Funktion $f(x)$.

$$\sin(\omega x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (13.7)$$

Nimmt man also die Kosinusfunktion als Referenz (mit Phase $\varphi_{\cos} = 0$), dann ist der Phasenwinkel der Sinusfunktion $\varphi_{\sin} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Kosinus- und Sinusfunktion sind also in gewissem Sinn „orthogonal“ und wir können diesen Umstand benutzen, um neue „sinusoidale“ Funktionen mit beliebiger Frequenz, Phase und Amplitude zu erzeugen. Insbesondere entsteht durch die Addition einer Kosinus- und Sinusfunktion mit identischer Frequenz ω und Amplituden A bzw. B eine weitere sinusoidale Funktion mit *derselben* Frequenz ω , d. h.

$$A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x) = C \cdot \cos(\omega x - \varphi), \quad (13.8)$$

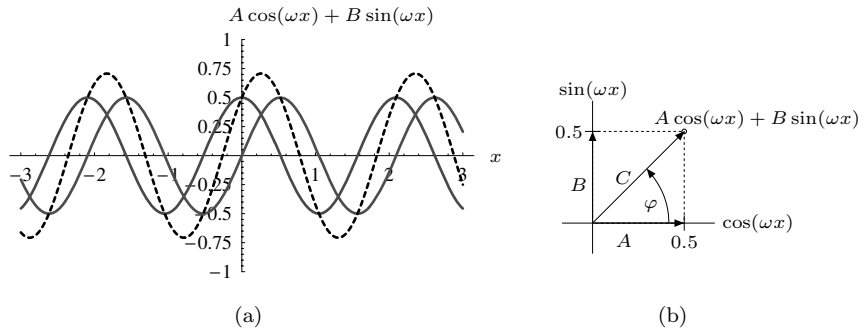
wobei die resultierende Amplitude C und der Phasenwinkel φ ausschließlich durch die beiden Amplituden A und B bestimmt sind als

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right). \quad (13.9)$$

Abb. 13.2 zeigt ein Beispiel mit den Amplituden $A = B = 0.5$ und einem daraus resultierenden Phasenwinkel $\varphi = 45^\circ$.

Abbildung 13.2

Addition einer Kosinus- und einer Sinusfunktion mit identischer Frequenz: $A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)$, mit $\omega = 3$ und $A = B = 0.5$. Das Ergebnis ist eine phasenverschobene Kosinusfunktion (punktierte Kurve) mit Amplitude $C = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \approx 0.707$ und Phasenwinkel $\varphi = 45^\circ$.



Komplexwertige Sinusfunktionen – Euler’sche Notation

Das Diagramm in Abb. 13.2 (b) zeigt die Darstellung der Kosinus- und Sinuskomponenten als ein Paar orthogonaler, zweidimensionaler Vektoren, deren Länge den zugehörigen Amplituden A bzw. B entspricht. Dies erinnert uns an die Darstellung der reellen und imaginären Komponenten komplexer Zahlen in der zweidimensionalen Zahlenebene, also

$$z = a + i b \in \mathbb{C},$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet ($i^2 = -1$). Dieser Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn wir die Euler’sche Notation einer beliebigen komplexen Zahlen z am Einheitskreis betrachten, nämlich

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta) \quad (13.10)$$

($e \approx 2.71828$ ist die Euler'sche Zahl). Betrachten wir den Ausdruck $e^{i\theta}$ als Funktion über θ , dann ergibt sich ein „komplexwertiges Sinusoid“, dessen reelle und imaginäre Komponente einer Kosinusfunktion bzw. einer Sinusfunktion entspricht, d. h.

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} = \cos(\theta) \quad (13.11)$$

$$\operatorname{Im}\{e^{i\theta}\} = \sin(\theta)$$

Da $z = e^{i\theta}$ auf dem Einheitskreis liegt, ist die *Amplitude* des komplexwertigen Sinusoids $|z| = r = 1$. Wir können die Amplitude dieser Funktion durch Multiplikation mit einem reellen Wert $a \geq 0$ verändern, d. h.

$$|a \cdot e^{i\theta}| = a \cdot |e^{i\theta}| = a. \quad (13.12)$$

Die *Phase* eines komplexwertigen Sinusoids wird durch Addition eines Phasenwinkels bzw. durch Multiplikation mit einer komplexwertigen Konstante $e^{i\varphi}$ am Einheitskreis verschoben,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}. \quad (13.13)$$

Zusammenfassend verändert die Multiplikation mit einem reellen Wert nur die *Amplitude* der Sinusfunktion, eine Multiplikation mit einem komplexen Wert am Einheitskreis verschiebt nur die *Phase* (ohne Änderung der Amplitude) und die Multiplikation mit einem beliebigen komplexen Wert verändert sowohl *Amplitude* wie auch die *Phase* der Funktion (s. auch Anhang 1.2).

Die komplexe Notation ermöglicht es, Paare von Kosinus- und Sinusfunktionen $\cos(\omega x)$ bzw. $\sin(\omega x)$ mit identischer Frequenz ω in der Form

$$e^{i\theta} = e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \cdot \sin(\omega x) \quad (13.14)$$

in *einem* funktionalen Ausdruck zusammenzufassen. Wir kommen auf diese Notation bei der Behandlung der Fouriertransformation in Abschn. 13.1.4 nochmals zurück.

13.1.2 Fourierreihen als Darstellung periodischer Funktionen

Wie wir bereits in Gl. 13.8 gesehen haben, können sinusförmige Funktionen mit beliebiger Frequenz, Amplitude und Phasenlage als Summe entsprechend gewichteter Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden. Die Frage ist, ob auch andere, nicht sinusförmige Funktionen durch eine Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen zusammengesetzt werden können. Die Antwort ist natürlich *ja*. Es war Fourier³, der diese Idee als Erster auf beliebige Funktionen erweiterte und zeigte, dass (beinahe) *jede* periodische Funktion $g(x)$ mit einer Grundfrequenz ω_0 als

³ Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768–1830).

(möglicherweise unendliche) Summe von „harmonischen“ Sinusfunktionen dargestellt werden kann in der Form

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x)]. \quad (13.15)$$

Dies bezeichnet man als *Fourierreihe* und die konstanten Gewichte A_k , B_k als *Fourierkoeffizienten* der Funktion $g(x)$. Die Frequenzen der in der Fourierreihe beteiligten Funktionen sind ausschließlich ganzzahlige Vielfache („Harmonische“) der Grundfrequenz ω_0 (einschließlich der Frequenz 0 für $k = 0$). Die Koeffizienten A_k und B_k in Gl. 13.15, die zunächst unbekannt sind, können eindeutig aus der gegebenen Funktion $g(x)$ berechnet werden, ein Vorgang, der i. Allg. als *Fourieranalyse* bezeichnet wird.

13.1.3 Fourierintegral

Fourier wollte dieses Konzept nicht auf periodische Funktionen beschränken und postulierte, dass auch *nicht* periodische Funktionen in ähnlicher Weise als Summen von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können. Dies ist zwar grundsätzlich möglich, erfordert jedoch – über die Vielfachen der Grundfrequenz ($k\omega_0$) hinaus – i. Allg. unendlich viele, dicht aneinander liegende Frequenzen! Die resultierende Zerlegung

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_{\omega} \cos(\omega x) + B_{\omega} \sin(\omega x) d\omega \quad (13.16)$$

nennt man ein *Fourierintegral*, wobei die Koeffizienten A_{ω} und B_{ω} in Gl. 13.16 wiederum die Gewichte für die zugehörigen Kosinus- bzw. Sinusfunktionen mit der Frequenz ω sind. Das Fourierintegral ist die Grundlage für das *Fourierspektrum* und die *Fouriertransformation* [12, S. 745].

Jeder der Koeffizienten A_{ω} und B_{ω} spezifiziert, mit welcher Amplitude die zugehörige Kosinus- bzw. Sinusfunktion der Frequenz ω zur darzustellenden Signalfunktion $g(x)$ beiträgt. Was sind aber die richtigen Werte der Koeffizienten für eine gegebene Funktion $g(x)$ und können diese eindeutig bestimmt werden? Die Antwort ist *ja* und das „Rezept“ zur Bestimmung der Koeffizienten ist erstaunlich einfach:

$$\begin{aligned} A_{\omega} &= A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x) dx \\ B_{\omega} &= B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x) dx \end{aligned} \quad (13.17)$$

Da unendlich viele, kontinuierliche Frequenzwerte ω auftreten können, sind die Koeffizientenfunktionen $A(\omega)$ und $B(\omega)$ ebenfalls kontinuierlich. Sie enthalten eine Verteilung – also das „Spektrum“ – der im ursprünglichen Signal enthaltenen Frequenzkomponenten.

Das Fourierintegral beschreibt also die ursprüngliche Funktion $g(x)$ als Summe unendlich vieler Kosinus-/Sinusfunktionen mit kontinuierlichen (positiven) Frequenzwerten, wofür die Funktionen $A(\omega)$ bzw. $B(\omega)$ die zugehörigen Frequenzkoeffizienten liefern. Ein Signal $g(x)$ ist außerdem durch die zugehörigen Funktionen $A(\omega), B(\omega)$ eindeutig und vollständig repräsentiert. Dabei zeigt Gl. 13.17, wie wir zu einer Funktion $g(x)$ das zugehörige Spektrum berechnen können, und Gl. 13.16, wie man aus dem Spektrum die ursprüngliche Funktion bei Bedarf wieder rekonstruiert.

13.1.4 Fourierspektrum und -transformation

Von der in Gl. 13.17 gezeigten Zerlegung einer Funktion $g(x)$ bleibt nur mehr ein kleiner Schritt zur „richtigen“ Fouriertransformation. Diese betrachtet im Unterschied zum Fourierintegral sowohl die Ausgangsfunktion wie auch das zugehörige Spektrum als *komplexwertige* Funktionen, wodurch sich die Darstellung insgesamt wesentlich vereinfacht.

Ausgehend von den im Fourierintegral (Gl. 13.17) definierten Funktionen $A(\omega)$ und $B(\omega)$, ist das *Fourierspektrum* $G(\omega)$ einer Funktion $g(x)$ definiert als

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[A(\omega) - i \cdot B(\omega) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x) \, dx - i \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot [\cos(\omega x) - i \cdot \sin(\omega x)] \, dx, \end{aligned} \quad (13.18)$$

wobei $g(x), G(\omega) \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung der Euler'schen Schreibweise für komplexe Zahlen (Gl. 13.14) ergibt sich aus Gl. 13.18 die übliche Formulierung für das kontinuierliche *Fourierspektrum*:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\omega x} \, dx \quad (13.19)$$

Der Übergang von der Funktion $g(x)$ zu ihrem Fourierspektrum $G(\omega)$ bezeichnet man als *Fouriertransformation*⁴ (\mathcal{F}). Umgekehrt kann die ursprüngliche Funktion $g(x)$ aus dem Fourierspektrum $G(\omega)$ durch die *inverse* Fouriertransformation⁵ (\mathcal{F}^{-1})

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega x} \, d\omega \quad (13.20)$$

wiederum eindeutig rekonstruiert werden.

⁴ Auch „direkte“ oder „Vorwärtstransformation“.

⁵ Auch „Rückwärtstransformation“.

Auch für den Fall, dass eine der betroffenen Funktionen ($g(x)$ bzw. $G(\omega)$) reellwertig ist (was für konkrete Signale $g(x)$ üblicherweise zutrifft), ist die andere Funktion i. Allg. komplexwertig. Man beachte auch, dass die Vorwärtstransformation \mathcal{F} (Gl. 13.19) und die inverse Transformation \mathcal{F}^{-1} (Gl. 13.20) bis auf das Vorzeichen des Exponenten völlig symmetrisch sind.⁶ *Ortsraum* und *Spektralraum* sind somit zueinander „duale“ Darstellungsformen, die sich grundsätzlich nicht unterscheiden.

13.1.5 Fourier-Transformationspaare

Zwischen einer Funktion $g(x)$ und dem zugehörigen Fourierspektrum $G(\omega)$ besteht ein eindeutiger Zusammenhang in beiden Richtungen: Das Fourierspektrum eines Signals ist eindeutig und zu einem bestimmten Spektrum gibt es nur ein zugehöriges Signal – die beiden Funktionen $g(x)$ und $G(\omega)$ bilden ein sog. „Transformationspaar“,

$$g(x) \circ\!\!\!\bullet G(\omega).$$

Tabelle 13.1 zeigt einige ausgewählte Transformationspaare analytischer Funktionen, die in den Abbildungen 13.3 und 13.4 auch grafisch dargestellt sind.

So besteht etwa das Fourierspektrum einer **Kosinusfunktion** $\cos(\omega_0 x)$ aus zwei getrennten, dünnen Pulsen, die symmetrisch im Abstand von ω_0 vom Ursprung angeordnet sind (Abb. 13.3 (a, c)). Dies entspricht intuitiv auch unserer physischen Vorstellung eines Spektrums, etwa in Bezug auf einen völlig reinen, monophonen Ton in der Akustik oder der Haarlinie, die eine extrem reine Farbe in einem optischen Spektrum hinterlässt. Bei steigender Frequenz $\omega_0 x$ bewegen sich die resultierenden Pulse im Spektrum vom Ursprung weg. Man beachte, dass das Spektrum der Kosinusfunktion reellwertig ist, der Imaginärteil ist null. Gleiches gilt auch für die Sinusfunktion (Abb. 13.3 (b, d)), mit dem Unterschied, dass hier die Pulse nur im Imaginärteil des Spektrums und mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten. In diesem Fall ist also der Realteil des Spektrums null.

Interessant ist auch das Verhalten der **Gauß-Funktion** (Abb. 13.4 (a, b)), deren Fourierspektrum wiederum eine Gauß-Funktion ist. Die Gauß-Funktion ist damit eine von wenigen Funktionen, die im Ortsraum *und* im Spektralraum denselben Funktionstyp aufweisen. Im Fall der Gauß-Funktion ist auch deutlich zu erkennen, dass eine *Dehnung* des Signals im Ortsraum zu einer *Stauchung* der Funktion im Spektralraum führt und umgekehrt!

⁶ Es gibt mehrere gängige Definitionen der Fouriertransformation, die sich u. a. durch den Faktor vor dem Integral und durch die Vorzeichen der Exponenten in der Vorwärts- und Rückwärtstransformation unterscheiden. Alle diese Versionen sind grundsätzlich äquivalent. Die hier gezeigte, symmetrische Version verwendet den gleichen Faktor $(1/\sqrt{2\pi})$ für beide Richtungen der Transformation.

Funktion	Transformationspaar $g(x) \circ\bullet G(\omega)$	Abb.
Kosinusfunktion mit Frequenz ω_0	$g(x) = \cos(\omega_0 x)$ $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$	13.3 (a,c)
Sinusfunktion mit Frequenz ω_0	$g(x) = \sin(\omega_0 x)$ $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$	13.3 (b,d)
Gauß-Funktion der Breite σ	$g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $G(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$	13.4 (a,b)
Rechteckpuls der Breite $2b$	$g(x) = \Pi_b(x) = \begin{cases} 1 & x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $G(\omega) = \frac{2b \sin(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$	13.4 (c,d)

13.1 DIE FOURIERTRANSFORMATION

Tabelle 13.1

Fourier-Transformationspaare für ausgewählte Funktionen. $\delta()$ bezeichnet die Impuls- oder Dirac-Funktion (s. Abschn. 13.2.1).

Die Fouriertransformation eines **Rechteckpulses** (Abb. 13.4 (c,d)) ergibt die charakteristische „Sinc“-Funktion der Form $\sin(x)/x$, die mit zunehmenden Frequenzen nur langsam ausklingt und damit sichtbar macht, dass im ursprünglichen Rechtecksignal Komponenten enthalten sind, die über einen großen Bereich von Frequenzen verteilt sind. Rechteckpulse weisen also grundsätzlich ein sehr breites Frequenzspektrum auf.

13.1.6 Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation

Symmetrie

Das Fouierspektrum erstreckt sich über positive und negative Frequenzen und ist, obwohl im Prinzip beliebige komplexe Funktionen auftreten können, in vielen Fällen um den Ursprung symmetrisch (s. beispielsweise [16, S. 178]). Insbesondere ist die Fouriertransformierte eines reellwertigen Signals $g(x) \in \mathbb{R}$ eine so genannte *hermitesche* Funktion, d. h.

$$G(\omega) = G^*(-\omega), \quad (13.21)$$

wobei G^* den konjugiert komplexen Wert von G bezeichnet (s. auch Anhang 1.2).

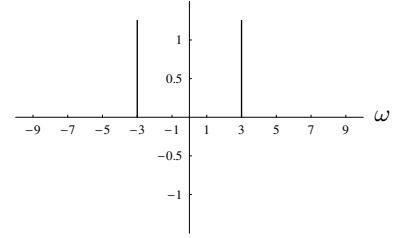
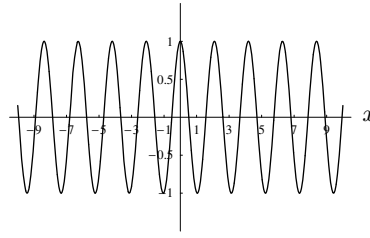
Linearität

Die Fouriertransformation ist eine *lineare* Operation, sodass etwa die Multiplikation des Signals mit einer beliebigen Konstanten $a \in \mathbb{C}$ in gleicher Weise auch das zugehörige Spektrum verändert, d. h.

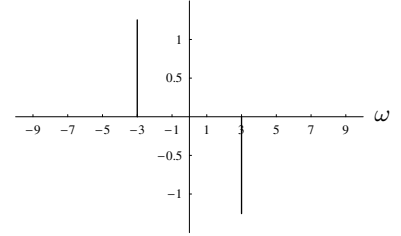
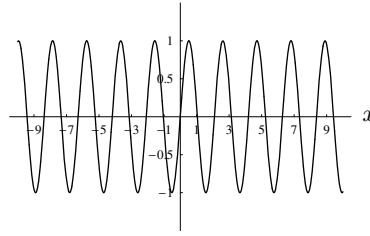
$$a \cdot g(x) \circ\bullet a \cdot G(\omega). \quad (13.22)$$

Darüber hinaus bedingt die Linearität, dass die Transformation der Summe zweier Signale $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ identisch ist zur Summe der zugehörigen Fouriertransformierten $G_1(\omega)$ und $G_2(\omega)$:

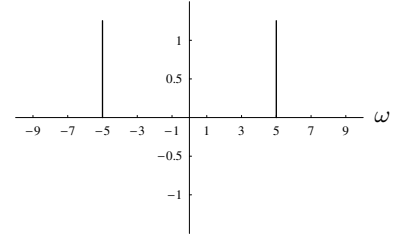
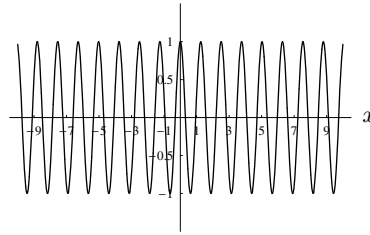
Abbildung 13.3
Fourier-Transformationspaare
– Kosinus-/Sinusfunktionen.



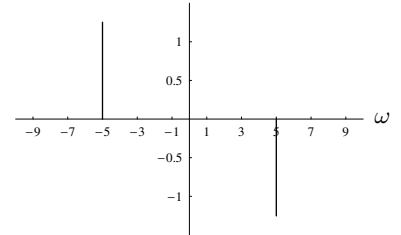
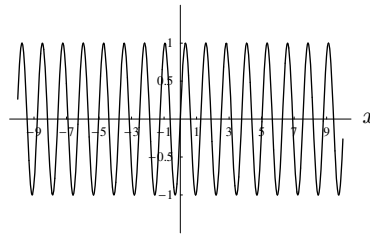
(a) Kosinus ($\omega_0=3$): $g(x) = \cos(3x)$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-3) + \delta(\omega+3))$



(b) Sinus ($\omega_0=3$): $g(x) = \sin(3x)$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-3) - \delta(\omega+3))$

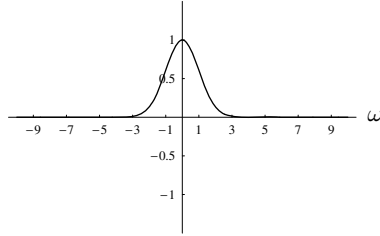
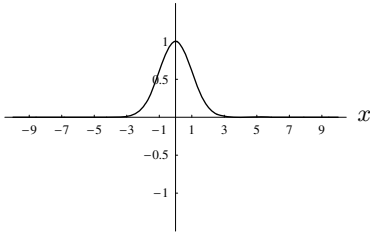


(c) Kosinus ($\omega_0=5$): $g(x) = \cos(5x)$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-5) + \delta(\omega+5))$



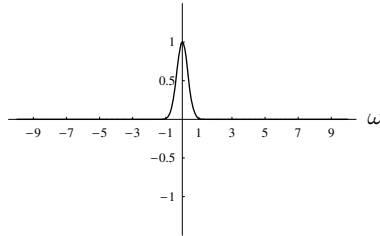
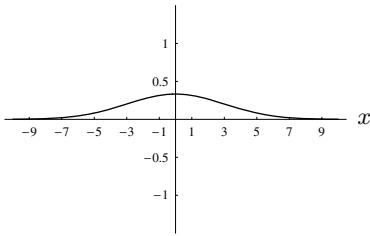
(d) Sinus ($\omega_0=5$): $g(x) = \sin(5x)$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-5) - \delta(\omega+5))$

Abbildung 13.4
Fourier-Transformationspaare –
Gauß-Funktion und Rechteckpuls.



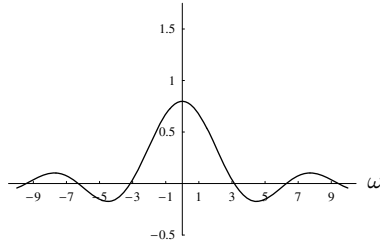
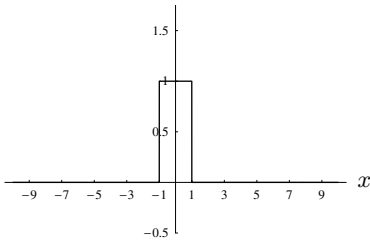
(a) Gauß ($\sigma=1$): $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\circ \bullet$

$$G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$



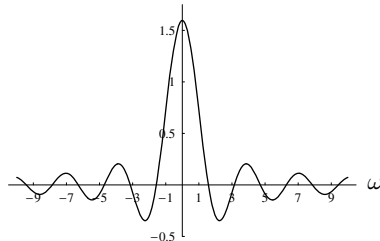
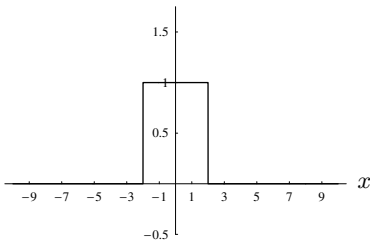
(b) Gauß ($\sigma=3$): $g(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 9}}$ $\circ \bullet$

$$G(\omega) = e^{-\frac{9\omega^2}{2}}$$



(c) Rechteckpuls ($b=1$): $g(x) = \Pi_1(x)$ $\circ \bullet$

$$G(\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$



(d) Rechteckpuls ($b=2$): $g(x) = \Pi_2(x)$ $\circ \bullet$

$$G(\omega) = \frac{4 \sin(2\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

$$g_1(x) + g_2(x) \circ\!\!\!\bullet G_1(\omega) + G_2(\omega). \quad (13.23)$$

Ähnlichkeit

Wird die ursprüngliche Funktion $g(x)$ in der Zeit oder im Raum skaliert, so tritt der jeweils umgekehrte Effekt im zugehörigen Fourierpektrum auf. Wie wir bereits in Abschn. 13.1.5 beobachten konnten, führt insbesondere eine Stauchung des Signals um einen Faktor s , d. h. $g(x) \rightarrow g(sx)$, zu einer entsprechenden Streckung der Fouriertransformierten, also

$$g(sx) \circ\!\!\!\bullet \frac{1}{|s|} \cdot G\left(\frac{\omega}{s}\right). \quad (13.24)$$

Umgekehrt wird natürlich das Signal gestaucht, wenn das zugehörige Spektrum gestreckt wird.

Verschiebungseigenschaft

Wird die ursprüngliche Funktion $g(x)$ um eine Distanz d entlang der Koordinatenachse verschoben, also $g(x) \rightarrow g(x-d)$, so multipliziert sich dadurch das Fourierpektrum um einen von ω abhängigen komplexen Wert $e^{-i\omega d}$:

$$g(x-d) \circ\!\!\!\bullet e^{-i\omega d} \cdot G(\omega). \quad (13.25)$$

Da der Faktor $e^{-i\omega d}$ auf dem Einheitskreis liegt, führt die Multiplikation (vgl. Gl. 13.13) nur zu einer Phasenverschiebung der Spektralwerte, also einer Umverteilung zwischen Real- und Imaginärteil, ohne dabei den Betrag $|G(\omega)|$ zu verändern. Der Winkel dieser Phasenverschiebung (ωd) ändert sich offensichtlich linear mit der Kreisfrequenz ω .

Faltungseigenschaft

Der für uns vielleicht interessanteste Aspekt der Fouriertransformation ergibt sich aus ihrem Verhältnis zur linearen Faltung (Abschn. 6.3.1). Angenommen, wir hätten zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ sowie die zugehörigen Fouriertransformierten $G(\omega)$ bzw. $H(\omega)$. Unterziehen wir diese Funktionen einer linearen Faltung, also $g(x) * h(x)$, dann ist die Fouriertransformierte des Resultats gleich dem (punktweisen) *Produkt* der einzelnen Fouriertransformierten $G(\omega)$ und $H(\omega)$:

$$g(x) * h(x) \circ\!\!\!\bullet G(\omega) \cdot H(\omega). \quad (13.26)$$

Aufgrund der Dualität von Orts- und Spektralraum gilt das Gleiche auch in umgekehrter Richtung, d. h., eine punktweise Multiplikation der Signale entspricht einer linearen Faltung der zugehörigen Fouriertransformierten:

$$g(x) \cdot h(x) \circ\!\!\!\bullet G(\omega) * H(\omega). \quad (13.27)$$

Eine Multiplikation der Funktionen in *einem* Raum (Orts- oder Spektralraum) entspricht also einer linearen Faltung der zugehörigen Transformierten im jeweils *anderen* Raum.

13.2 Übergang zu diskreten Signalen

Die Definition der kontinuierlichen Fouriertransformation ist für die numerische Berechnung am Computer nicht unmittelbar geeignet. Weder können beliebige kontinuierliche (und möglicherweise unendliche) Funktionen dargestellt, noch können die dafür erforderlichen Integrale tatsächlich berechnet werden. In der Praxis liegen auch immer *diskrete* Daten vor und wir benötigen daher eine Version der Fouriertransformation, in der sowohl das Signal wie auch das zugehörige Spektrum als endliche Vektoren dargestellt werden – die „diskrete“ Fouriertransformation. Zuvor wollen wir jedoch unser bisheriges Wissen verwenden, um dem Vorgang der Diskretisierung von Signalen etwas genauer auf den Grund zu gehen.

13.2.1 Abtastung

Wir betrachten zunächst die Frage, wie eine kontinuierliche Funktion überhaupt in eine diskrete Funktion umgewandelt werden kann. Dieser Vorgang wird als *Abtastung* (Sampling) bezeichnet, also die Entnahme von Abtastwerten der zunächst kontinuierlichen Funktion an bestimmten Punkten in der Zeit oder im Raum, üblicherweise in regelmäßigen Abständen. Um diesen Vorgang in einfacher Weise auch formal beschreiben zu können, benötigen wir ein unscheinbares, aber wichtiges Stück aus der mathematischen Werkzeugkiste.

Die Impulsfunktion $\delta(x)$

Die Impulsfunktion (auch *Delta-* oder *Dirac-Funktion*) ist uns bereits im Zusammenhang mit der Impulsantwort von Filtern (Abschn. 6.3.4) sowie in den Fouriertransformierten der Kosinus- und Sinusfunktion (Abb. 13.3) begegnet. Diese Funktion, die einen kontinuierlichen, „idealen“ Impuls modelliert, ist in mehrfacher Hinsicht ungewöhnlich: Ihr Wert ist überall null mit Ausnahme des Ursprungs, wo ihr Wert zwar ungleich null, aber undefiniert ist, und außerdem ist ihr Integral eins, also

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1. \quad (13.28)$$

Man kann sich $\delta(x)$ als einzelnen Puls an der Position null vorstellen, der unendlich schmal ist, aber dennoch endliche Energie (1) aufweist. Bemerkenswert ist auch das Verhalten der Impulsfunktion bei einer Skalierung in der Zeit- oder Raumachse, also $\delta(x) \rightarrow \delta(sx)$, wofür gilt

$$\delta(sx) = \frac{1}{|s|} \cdot \delta(x) \quad \text{für } s \neq 0. \quad (13.29)$$

Obwohl $\delta(x)$ in der physischen Realität nicht existiert und eigentlich auch nicht gezeichnet werden kann (die entsprechenden Kurven in Abb. 13.3 dienen nur zur Illustration), ist diese Funktion – wie im Folgenden gezeigt – ein wichtiges Element zur formalen Beschreibung des Abtastvorgangs.

Abtastung mit der Impulsfunktion

Mit dem Konzept der idealen Impulsfunktion lässt sich der Abtastvorgang relativ einfach und anschaulich darstellen.⁷ Wird eine kontinuierliche Funktion $g(x)$ mit der Impulsfunktion $\delta(x)$ punktweise multipliziert, so entsteht eine neue Funktion $\bar{g}(x)$ der Form

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x) = \begin{cases} g(0) & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13.30)$$

$\bar{g}(x)$ besteht also aus einem einzigen Puls an der Position 0, dessen Höhe dem Wert der ursprünglichen Funktion $g(0)$ entspricht. Wir erhalten also durch die Multiplikation mit der Impulsfunktion einen einzelnen, diskreten Abtastwert der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = 0$. Durch Verschieben der Impulsfunktion um eine Distanz x_0 können wir $g(x)$ an jeder *beliebigen* Stelle $x = x_0$ abtasten, denn es gilt

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13.31)$$

Darin ist $\delta(x - x_0)$ die um x_0 verschobene Impulsfunktion und die resultierende Funktion $\bar{g}(x)$ ist null, außer an der Stelle x_0 , wo sie den ursprünglichen Funktionswert $g(x_0)$ enthält. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 13.5 für die Abtastposition $x_0 = 3$ dargestellt.

Um die Funktion $g(x)$ an mehr als einer Stelle gleichzeitig abzutasten, etwa an den Positionen x_1 und x_2 , verwenden wir zwei individuell verschobene Exemplare der Impulsfunktion, multiplizieren $g(x)$ mit beiden und addieren anschließend die einzelnen Abtastergebnisse. In diesem speziellen Fall erhalten wir

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_1) + g(x) \cdot \delta(x - x_2) \quad (13.32)$$

$$= g(x) \cdot [\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)] \quad (13.33)$$

$$= \begin{cases} g(x_1) & \text{für } x = x_1 \\ g(x_2) & \text{für } x = x_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion $g(x)$ an einer *Folge* von N Positionen $x_i = 1, 2, \dots, N$ kann daher (nach Gl. 13.33) als Summe der N Einzelabtastungen dargestellt werden, also durch

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) &= g(x) \cdot [\delta(x - 1) + \delta(x - 2) + \dots + \delta(x - N)] \\ &= g(x) \cdot \sum_{i=1}^N \delta(x - i). \end{aligned} \quad (13.34)$$

⁷ Der nachfolgende Abschnitt ist bewusst intuitiv und daher auch (im mathematischen Sinn) oberflächlich gehalten. Formal genauere Beschreibungen finden sich beispielsweise in [16, 49].

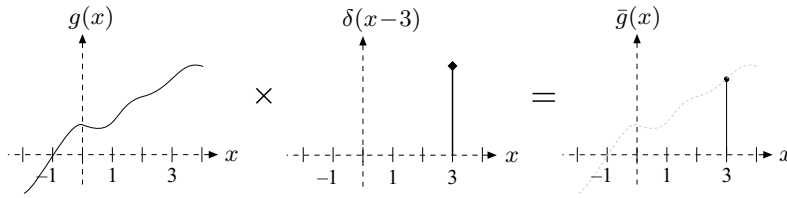


Abbildung 13.5
Abtastung mit der Impulsfunktion. Durch Multiplikation des kontinuierlichen Signals $g(x)$ mit der verschobenen Impulsfunktion $\delta(x-3)$ wird $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$ abgetastet.

Die Kammfunktion

Die Summe von verschobenen Einzelpulsen $\sum_{i=1}^N \delta(x-i)$ in Gl. 13.34 wird auch als „Pulsfolge“ bezeichnet. Wenn wir die Pulsfolge in beiden Richtungen bis ins Unendliche erweitern, erhalten wir eine Funktion

$$\text{III}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x-i), \quad (13.35)$$

die als *Kammfunktion*⁸ bezeichnet wird. Die Diskretisierung einer kontinuierlichen Funktion durch Abtastung in regelmäßigen, ganzzahligen Intervallen kann dann in der einfachen Form

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}(x) \quad (13.36)$$

modelliert werden, d. h. als punktweise Multiplikation des ursprünglichen Signals $g(x)$ mit der Kammfunktion $\text{III}(x)$. Wie in Abb. 13.6 dargestellt, werden die Werte der Funktion $g(x)$ dabei nur an den ganzzahligen Positionen $x_i \in \mathbb{Z}$ in die diskrete Funktion $\bar{g}(x_i)$ übernommen und überall sonst ignoriert. Das Abtastintervall, also der Abstand zwischen benachbarten Abtastwerten, muss dabei keineswegs 1 sein. Um in beliebigen, regelmäßigen Abständen τ abzutasten, wird die Kammfunktion in Richtung der Zeit- bzw. Raumachse einfach entsprechend skaliert, d. h.

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right), \quad \text{für } \tau > 0. \quad (13.37)$$

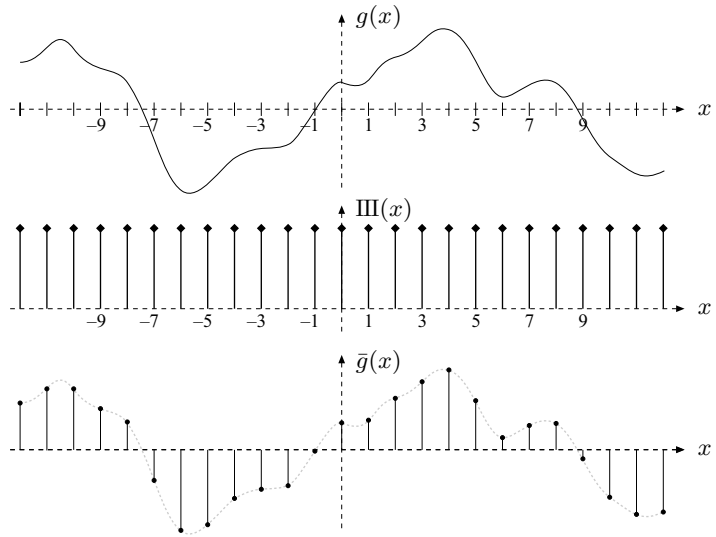
Auswirkungen der Abtastung auf das Fourierspektrum

Trotz der eleganten Modellierung der Abtastung auf Basis der Kammfunktion könnte man sich zu Recht die Frage stellen, wozu bei einem derart simplen Vorgang überhaupt eine so komplizierte Formulierung notwendig ist. Eine Antwort darauf gibt uns das Fourierspektrum. Die Abtastung einer kontinuierlichen Funktion hat massive (wenn auch gut abschätzbare) Auswirkungen auf das Frequenzspektrum des resultierenden (diskreten) Signals, und der Einsatz der Kammfunktion als formales Modell des Abtastvorgangs macht es relativ einfach, diese spektralen

⁸ Im Englischen wird $\text{III}(x)$ „comb function“ oder auch „Shah function“ genannt.

Abbildung 13.6

Abtastung mit der Kammfunktion. Das ursprüngliche, kontinuierliche Signal $g(x)$ wird mit der Kammfunktion $\text{III}(x)$ multipliziert. Nur an den ganzzahligen Positionen $x_i \in \mathbb{Z}$ wird der entsprechende Wert $g(x_i)$ in das Ergebnis $\bar{g}(x_i)$ übernommen, überall sonst ignoriert.



Auswirkungen vorherzusagen bzw. zu interpretieren. Die Kammfunktion besitzt, ähnlich der Gauß-Funktion, die seltene Eigenschaft, dass ihre Fouriertransformierte

$$\text{III}(x) \circ \bullet \text{III}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right) \quad (13.38)$$

wiederum eine Kammfunktion ist, also den gleichen Funktionstyp hat. Skaliert auf ein beliebiges Abtastintervall τ ergibt sich aufgrund der Ähnlichkeitseigenschaft (Gl. 13.24) im allgemeinen Fall als Fouriertransformierte der Kammfunktion

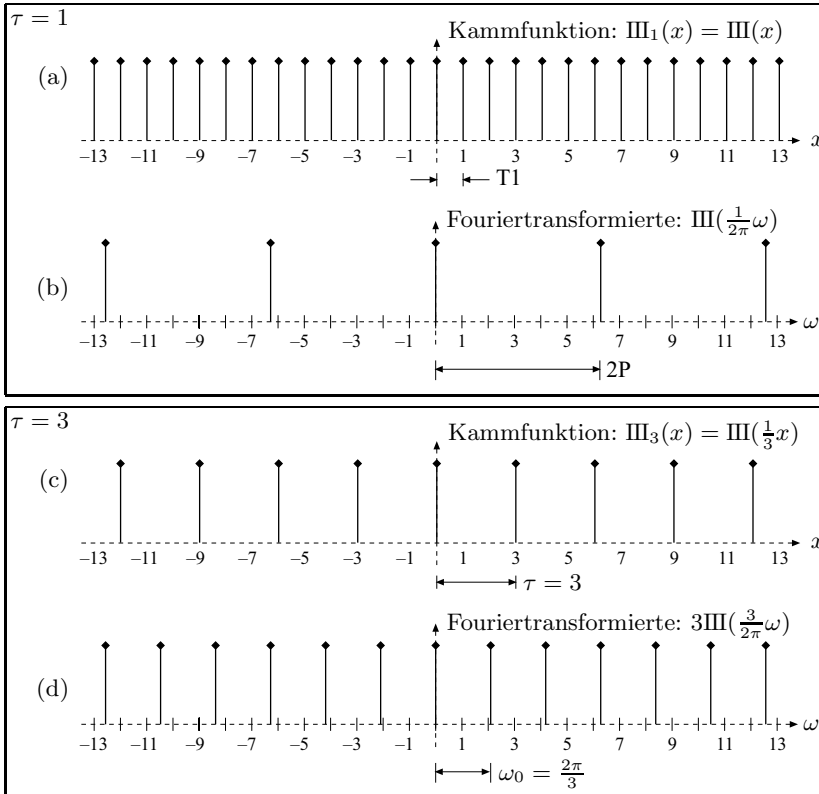
$$\text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \circ \bullet \tau \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right). \quad (13.39)$$

Abb. 13.7 zeigt zwei Beispiele der Kammfunktionen $\text{III}_\tau(x)$ mit unterschiedlichen Abtastintervallen $\tau = 1$ bzw. $\tau = 3$ sowie die zugehörigen Fouriertransformierten.

Was passiert nun bei der Diskretisierung mit dem Fourierspektrum, wenn wir also im Ortsraum ein Signal $g(x)$ mit einer Kammfunktion $\text{III}(\frac{x}{\tau})$ multiplizieren? Die Antwort erhalten wir über die Faltungseigenschaft der Fouriertransformation (Gl. 13.26): Das Produkt zweier Funktionen in einem Raum (entweder im Orts- oder im Spektralraum) entspricht einer linearen Faltung im jeweils anderen Raum, d. h.

$$g(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \circ \bullet G(\omega) * \tau \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right). \quad (13.40)$$

Nun ist das Fourierspektrum der Abtastfunktion wiederum eine Kammfunktion und besteht daher aus einer regelmäßigen Folge von Impulsen (Abb. 13.7). Die Faltung einer beliebigen Funktion mit einem Impuls $\delta(x)$ ergibt aber wiederum die ursprüngliche Funktion, also $f(x) * \delta(x) = f(x)$. Die Faltung mit einem um d verschobenen Impuls $\delta(x-d)$ reproduziert



13.2 ÜBERGANG ZU DISKRETEN SIGNALEN

Abbildung 13.7

Kammfunktion und deren Fouriertransformierte. Kammfunktion $\text{III}_\tau(x)$ für das Abtastintervall $\tau = 1$ (a) und die zugehörige Fouriertransformierte (b). Kammfunktion für $\tau = 3$ (c) und Fouriertransformierte (d). Man beachte, dass die tatsächliche Höhe der einzelnen δ -Pulse nicht definiert ist und hier nur zur Illustration dargestellt ist.

ebenfalls die ursprüngliche Funktion $f(x)$, jedoch verschoben um die gleiche Distanz d :

$$f(x) * \delta(x-d) = f(x-d). \quad (13.41)$$

Das hat zur Folge, dass im Fourierspektrum des abgetasteten Signals $\bar{G}(\omega)$ das Spektrum $G(\omega)$ des ursprünglichen, kontinuierlichen Signals unendlich oft, nämlich an jedem Puls im Spektrum der Abtastfunktion, repliziert wird (Abb. 13.8 (a,b))!

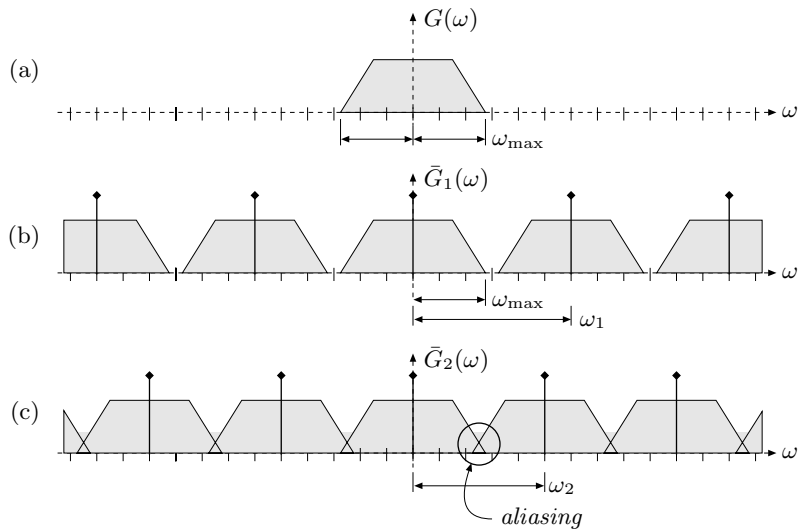
Das daraus resultierende Fourierspektrum ist daher periodisch mit der Periodenlänge $\frac{2\pi}{\tau}$, also im Abstand der Abtastfrequenz ω_s .

Aliasing und das Abtasttheorem

Solange sich die durch die Abtastung replizierten Spektralkomponenten in $\bar{G}(\omega)$ nicht überlappen, kann das ursprüngliche Spektrum $G(\omega)$ – und damit auch das ursprüngliche, kontinuierliche Signal $g(x)$ – ohne Verluste aus einer beliebigen Replika von $G(\omega)$ aus dem periodischen Spektrum $\bar{G}(\omega)$ rekonstruiert werden. Dies erfordert jedoch offensichtlich (Abb. 13.8), dass die im ursprünglichen Signal $g(x)$ enthaltenen Frequenzen nach oben beschränkt sind, das Signal also keine Komponenten mit Frequenzen größer als ω_{\max} enthält. Die maximal zulässige Signalfrequenz

Abbildung 13.8

Auswirkungen der Abtastung im Fourierspektrum. Das Spektrum $G(\omega)$ des ursprünglichen, kontinuierlichen Signals ist angenommen bandbegrenzt im Bereich $\pm\omega_{\max}$ (a). Die Abtastung des Signals mit einer Abtastfrequenz $\omega_s = \omega_1$ bewirkt, dass das Signalspektrum $G(\omega)$ an jeweils Vielfachen von ω_1 entlang der Frequenzachse (ω) repliziert wird (b). Die replizierten Spektralteile überlappen sich nicht, solange $\omega_1 > 2\omega_{\max}$. In (c) ist die Abtastfrequenz $\omega_s = \omega_2$ kleiner als $2\omega_{\max}$, sodass sich die einzelnen Spektralteile überlappen, die Komponenten über $\omega_2/2$ gespiegelt werden und so das Originalspektrum überlagern. Dies wird als „aliasing“ bezeichnet, da das Originalspektrum (und damit auch das ursprüngliche Signal) aus einem in dieser Form gestörten Spektrum nicht mehr korrekt rekonstruiert werden kann.



ω_{\max} ist daher abhängig von der zur Diskretisierung verwendeten Abtastfrequenz ω_s in der Form

$$\omega_{\max} \leq \frac{1}{2}\omega_s \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \geq 2\omega_{\max}. \quad (13.42)$$

Zur Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals $g(x)$ mit Frequenzanteilen im Bereich $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ benötigen wir daher eine Abtastfrequenz ω_s , die mindestens *doppelt so hoch* wie die maximale Signalfrequenz ω_{\max} ist. Wird diese Bedingung nicht eingehalten, dann überlappen sich die replizierten Spektralteile im Spektrum des abgetasteten Signals (Abb. 13.8 (c)) und das Spektrum wird verfälscht mit der Folge, dass das ursprüngliche Signal nicht mehr fehlerfrei aus dem Spektrum rekonstruiert werden kann. Dieser Effekt wird häufig als „aliasing“ bezeichnet.⁹

Was wir soeben festgestellt haben, ist nichts anderes als die Kernaussage des berühmten Abtasttheorems von Shannon bzw. Nyquist (s. beispielsweise [16, S. 256]). Dieses besagt eigentlich, dass die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch wie die *Bandbreite* des kontinuierlichen Signals sein muss, um Aliasing-Effekte zu vermeiden.¹⁰ Wenn

⁹ Das Wort „aliasing“ wird auch im deutschen Sprachraum häufig verwendet, allerdings oft unrichtig ausgesprochen – die Betonung liegt auf der ersten Silbe.

¹⁰ Die Tatsache, dass die *Bandbreite* (und nicht die Maximalfrequenz) eines Signals ausschlaggebend ist, mag zunächst erstaunen, denn sie erlaubt grundsätzlich die Abtastung (und korrekte Rekonstruktion) eines hochfrequenten – aber schmalbandigen – Signals mit einer relativ niedrigen Abtastfrequenz, die eventuell weit unter der maximalen Signalfrequenz liegt! Das ist deshalb möglich, weil man ja auch bei der Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals wieder ein entsprechend schmalbandiges Filter verwenden kann. So kann es beispielsweise genügen, eine Kirchenglocke (ein sehr

man allerdings annimmt, dass das Frequenzbereich eines Signals bei null beginnt, dann sind natürlich Bandbreite und Maximalfrequenz ohnehin identisch.

13.2.2 Diskrete und periodische Funktionen

Nehmen wir an, unser ursprüngliches, kontinuierliches Signal $g(x)$ ist *periodisch* mit einer Periodendauer T . In diesem Fall besteht das zugehörige Fourierspektrum $G(\omega)$ aus einer Folge dünner Spektrallinien, die gleichmäßig im Abstand von $\omega_0 = 2\pi/T$ angeordnet sind. Das Fourierspektrum einer periodischen Funktion kann also (wie bereits in Abschn. 13.1.2 erwähnt) als Fourierreihe dargestellt werden und ist somit *diskret*. Wird, im umgekehrten Fall, ein kontinuierliches Signal $g(x)$ in regelmäßigen Intervallen τ *abgetastet* (also diskretisiert), dann wird das zugehörige Fourierspektrum *periodisch* mit der Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/\tau$.

Diskretisierung im Ortsraum führt also zu Periodizität im Spektralraum und umgekehrt. Abb. 13.9 zeigt diesen Zusammenhang und illustriert damit den Übergang von einer kontinuierlichen, nicht periodischen Funktion zu einer diskreten, periodischen Funktion, die schließlich als endlicher Vektor von Werten dargestellt und digital verarbeitet werden kann.

Das Fourierspektrum eines *kontinuierlichen*, nicht periodischen Signals $g(x)$ ist i. Allg. wieder kontinuierlich und nicht periodisch (Abb. 13.9 (a,b)). Ist das Signal $g(x)$ *periodisch*, wird das zugehörige Spektrum *diskret* (Abb. 13.9 (c,d)). Umgekehrt führt ein diskretes – aber nicht notwendigerweise periodisches – Signal zu einem periodischen Spektrum (Abb. 13.9 (e,f)). Ist das Signal schließlich diskret *und* periodisch mit einer Periodenlänge von M Abtastwerten, dann ist auch das zugehörige Spektrum diskret und periodisch mit M Werten (Abb. 13.9 (g,h)). Die Signale und Spektren in Abb. 13.9 sind übrigens nur zur Veranschaulichung gedacht und korrespondieren nicht wirklich.

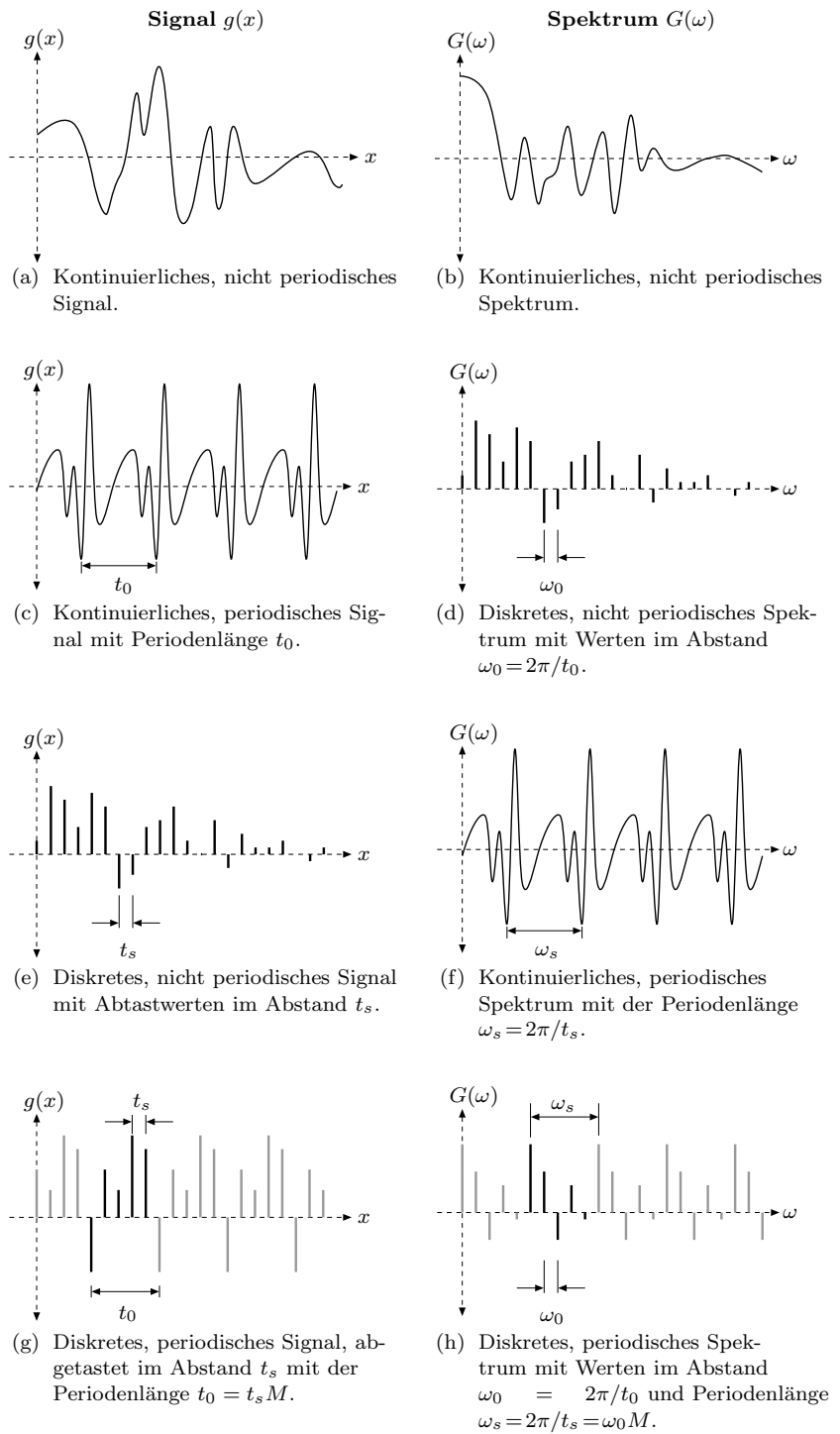
13.3 Die diskrete Fouriertransformation (DFT)

Im Fall eines diskreten, periodischen Signals benötigen wir also nur eine endliche Folge von M Abtastwerten, um sowohl das Signal $g(u)$ selbst als auch sein Fourierspektrum $G(m)$ vollständig abzubilden.¹¹ Durch die Darstellung als endliche Vektoren sind auch alle Voraussetzungen für die numerische Verarbeitung am Computer gegeben. Was uns jetzt noch fehlt ist eine Variante der Fouriertransformation für diskrete Signale.

schmalbandiges Schwingungssystem mit geringer Dämpfung) nur alle 5 Sekunden anzustoßen (bzw. „abzutasten“), um damit eine relativ hochfrequente Schallwelle eindeutig zu generieren.

¹¹ Anm. zur Notation: Wir verwenden $g(x)$, $G(\omega)$ für ein *kontinuierliches* Signal oder Spektrum und $g(u)$, $G(m)$ für die *diskreten* Versionen.

Abbildung 13.9
Übergang von kontinuierlichen zu
diskreten, periodischen Funktionen.



13.3.1 Definition der DFT

Die diskrete Fouriertransformation ist, wie auch bereits die kontinuierliche FT, in beiden Richtungen identisch. Die Vorwärtstransformation (DFT) für ein diskretes Signal $g(u)$ der Länge M ($u = 0 \dots M-1$) ist definiert als

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) \cdot e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq m < M. \quad (13.43)$$

Analog dazu ist die *inverse* Transformation (DFT^{-1})

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) \cdot e^{i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq u < M. \quad (13.44)$$

Sowohl das Signal $g(u)$ wie auch das diskrete Spektrum $G(m)$ sind komplexwertige Vektoren der Länge M , d. h.

$$\begin{aligned} g(u) &= g_{\text{Re}}(u) + i \cdot g_{\text{Im}}(u) \\ G(m) &= G_{\text{Re}}(m) + i \cdot G_{\text{Im}}(m) \end{aligned} \quad (13.45)$$

für $u, m = 0 \dots M-1$. Ein konkretes Beispiel der DFT mit $M = 10$ ist in Abb. 13.10 gezeigt.

u	$g(u)$			$G(m)$		m
0	1.0000	0.0000	DFT →	14.2302	0.0000	0
1	3.0000	0.0000		-5.6745	-2.9198	1
2	5.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	2
3	7.0000	0.0000		-0.0176	-0.6893	3
4	9.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	4
5	8.0000	0.0000	DFT ⁻¹ ←	0.3162	0.0000	5
6	6.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	6
7	4.0000	0.0000		-0.0176	0.6893	7
8	2.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	8
9	0.0000	0.0000		-5.6745	2.9198	9
	Re	Im		Re	Im	

Abbildung 13.10

Komplexwertige Vektoren. Bei der diskreten Fouriertransformation (DFT) sind das ursprüngliche Signal $g(u)$ und das zugehörige Spektrum $G(m)$ jeweils komplexwertige Vektoren der Länge M . Im konkreten Beispiel ist $M = 10$. Für die mit * markierten Werte gilt $|G(m)| < 10^{-15}$.

Umgeformt aus der Euler'schen Schreibweise in Gl. 13.43 (s. auch Gl. 13.10) ergibt sich das diskrete Fourierspektrum in der Komponentennotation als

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \underbrace{[g_{\text{Re}}(u) + i \cdot g_{\text{Im}}(u)]}_{g(u)} \cdot \underbrace{[\cos(2\pi \frac{mu}{M})]}_{C_m^M(u)} - i \cdot \underbrace{\sin(2\pi \frac{mu}{M})}_{S_m^M(u)}, \quad (13.46)$$

wobei \mathbf{C}_m^M und \mathbf{S}_m^M diskrete Basisfunktionen (Kosinus- und Sinusfunktionen) bezeichnen, die im nachfolgenden Abschnitt näher beschrieben sind. Durch die gewöhnliche komplexe Multiplikation (s. Abschn. 1.2) erhalten wir aus Gl. 13.46 den Real- und Imaginärteil des diskreten Fou- rierspektrums in der Form

$$G_{\text{Re}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\text{Re}}(u) \cdot \mathbf{C}_m^M(u) + g_{\text{Im}}(u) \cdot \mathbf{S}_m^M(u) \quad (13.47)$$

$$G_{\text{Im}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\text{Im}}(u) \cdot \mathbf{C}_m^M(u) - g_{\text{Re}}(u) \cdot \mathbf{S}_m^M(u) \quad (13.48)$$

für $m = 0 \dots M-1$. Analog dazu ergibt sich der Real- bzw. Imaginärteil der *inversen* DFT aus Gl. 13.44 als

$$g_{\text{Re}}(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G_{\text{Re}}(m) \cdot \mathbf{C}_u^M(m) - G_{\text{Im}}(m) \cdot \mathbf{S}_u^M(m) \quad (13.49)$$

$$g_{\text{Im}}(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G_{\text{Im}}(m) \cdot \mathbf{C}_u^M(m) + G_{\text{Re}}(m) \cdot \mathbf{S}_u^M(m) \quad (13.50)$$

für $u = 0 \dots M-1$.

13.3.2 Diskrete Basisfunktionen

Die DFT (Gl. 13.44) beschreibt die Zerlegung einer diskreten Funktion $g(u)$ als endliche Summe diskreter Kosinus- und Sinusfunktionen (\mathbf{C}^M , \mathbf{S}^M) der Länge M , deren Gewichte oder „Amplituden“ durch die zugehörigen DFT-Koeffizienten $G(m)$ bestimmt werden. Jede dieser eindimensionalen *Basisfunktionen* (erstmals verwendet in Gl. 13.46)

$$\mathbf{C}_m^M(u) = \mathbf{C}_u^M(m) = \cos\left(2\pi \frac{mu}{M}\right), \quad (13.51)$$

$$\mathbf{S}_m^M(u) = \mathbf{S}_u^M(m) = \sin\left(2\pi \frac{mu}{M}\right) \quad (13.52)$$

ist eine Kosinus- bzw. Sinusfunktion mit einer diskreten Frequenz (Wellenzahl) m und einer Länge von M Abtastpunkten, ausgewertet an einer beliebigen Position u . Als Beispiel sind die Basisfunktionen für eine DFT der Länge $M = 8$ in Abb. 13.11–13.12 gezeigt, sowohl als diskrete Funktionen (mit ganzzahligen Ordinatenwerten $u \in \mathbb{Z}$) wie auch als kontinuierliche Funktionen (mit Ordinatenwerten $x \in \mathbb{R}$).

Für die Wellenzahl $m = 0$ hat die Kosinusfunktion $\mathbf{C}_0^M(u)$ (Gl. 13.51) den konstanten Wert 1. Daher spezifiziert der zugehörige DFT-Koeffizient $G_{\text{Re}}(0)$ – also der Realteil von $G(0)$ – den konstanten Anteil des Signals oder, anders ausgedrückt, den durchschnittlichen Wert des Signals $g(u)$ in Gl. 13.49. Im Unterschied dazu ist der Wert von $\mathbf{S}_0^M(u)$ immer null und daher sind auch die zugehörigen Koeffizienten $G_{\text{Im}}(0)$ in Gl. 13.49 bzw. $G_{\text{Re}}(0)$ in Gl. 13.50 nicht relevant. Für ein reellwertiges

Signal (d. h. $g_{\text{Im}}(u) = 0$ für alle u) muss also der Koeffizient $G_{\text{Im}}(0)$ des zugehörigen Fourierspektrums ebenfalls null sein.

Wie wir aus Abb. 13.11 sehen, entspricht der Wellenzahl $m = 1$ eine Kosinus- bzw. Sinusfunktion, die über die Signallänge $M = 8$ exakt *einen* vollen Zyklus durchläuft. Eine Wellenzahl $m = 2 \dots 7$ entspricht analog dazu $2 \dots 7$ vollen Zyklen über die Signallänge hinweg (Abb. 13.11–13.12).

13.3.3 Schon wieder Aliasing!

Ein genauerer Blick auf Abb. 13.11 und 13.12 zeigt einen interessanten Sachverhalt: Die abgetasteten (diskreten) Kosinus- bzw. Sinusfunktionen für $m = 3$ und $m = 5$ sind *identisch*, obwohl die zugehörigen kontinuierlichen Funktionen unterschiedlich sind! Dasselbe gilt auch für die Frequenzpaare $m = 2, 6$ und $m = 1, 7$. Was wir hier sehen, ist die Manifestation des Abtasttheorems – das wir ursprünglich (Abschn. 13.2.1) im Frequenzraum beschrieben hatten – im *Ortsraum*. Offensichtlich ist also $m = 4$ die maximale Frequenzkomponente, die mittels eines diskreten Signals der Länge $M = 8$ beschrieben werden kann. Jede *höhere* Frequenzkomponente (in diesem Fall $m = 5 \dots 7$) ist in der diskreten Version identisch zu einer anderen Komponente mit niedrigerer Wellenzahl und kann daher aus dem diskreten Signal nicht rekonstruiert werden!

Wenn ein kontinuierliches Signal im regelmäßigen Abstand τ abgetastet wird, wiederholt sich das zugehörige Spektrum an Vielfachen von $\omega_s = 2\pi/\tau$, wie bereits an früherer Stelle gezeigt (Abb. 13.8). Im diskreten Fall ist das Spektrum periodisch mit M . Weil das Fourierspektrum eines reellwertigen Signals um den Ursprung symmetrisch ist (Gl. 13.21), hat jede Spektralkomponente mit der Wellenzahl m ein gleich großes Duplikat mit der gegenüberliegenden Wellenzahl $-m$. Die Spektralkomponenten erscheinen also paarweise gespiegelt an Vielfachen von M , d. h.

$$\begin{aligned}
 |G(m)| &= |G(M-m)| = |G(M+m)| & (13.53) \\
 &= |G(2M-m)| = |G(2M+m)| \\
 &\dots \\
 &= |G(kM-m)| = |G(kM+m)|
 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wenn also das ursprüngliche, kontinuierliche Signal Energie mit Frequenzen

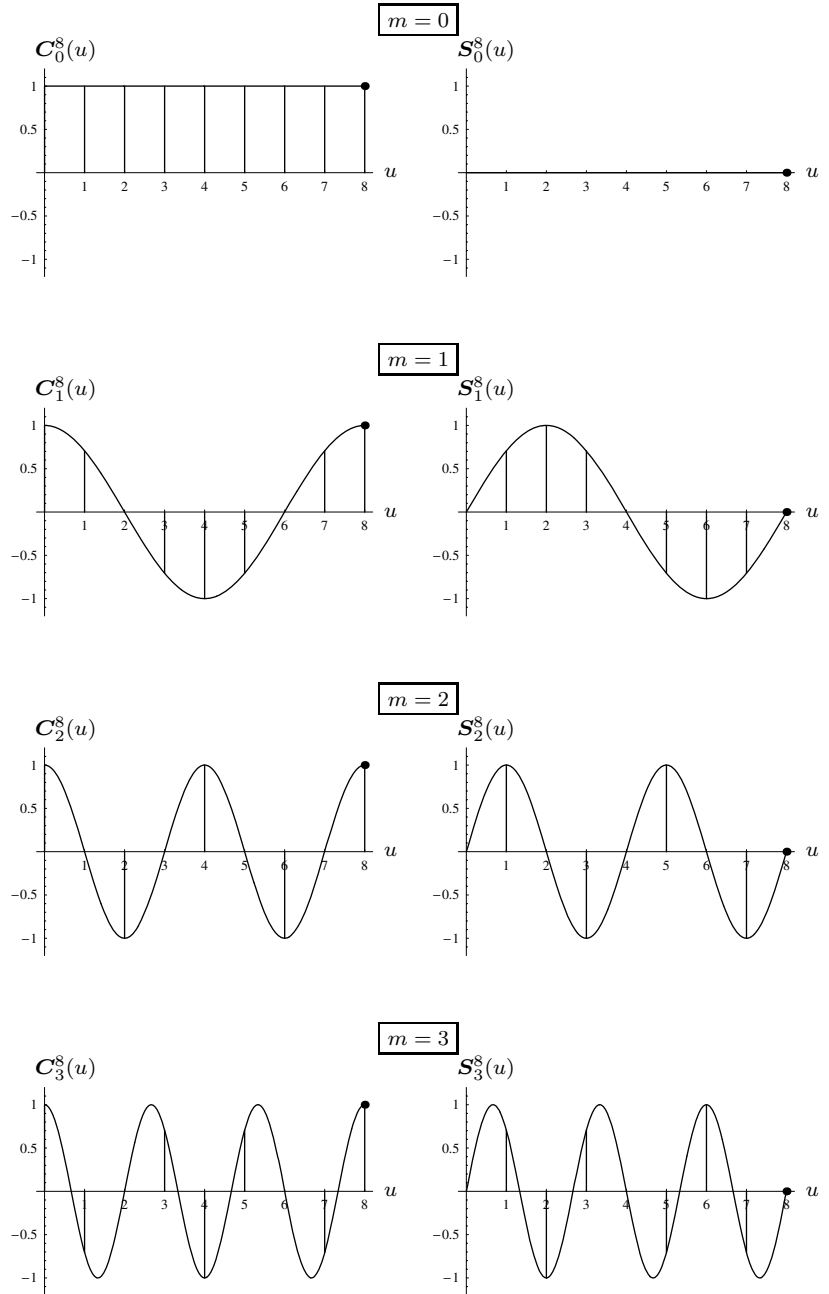
$$\omega_m > \omega_{M/2},$$

enthält, also Komponenten mit einer Wellenzahl $m > M/2$, dann überlagern (addieren) sich – entsprechend dem Abtasttheorem – die überlappenden Teile der replizierten Spektra im resultierenden, periodischen Spektrum des diskreten Signals.

Abbildung 13.11
Diskrete Basisfunktionen $C_m^M(u)$ und $S_m^M(u)$ für die Signallänge $M = 8$ und Wellenzahlen $m = 0 \dots 3$. Jeder der Plots zeigt sowohl die diskreten Funktionswerte (durch runde Punkte markiert) wie auch die zugehörige kontinuierliche Funktion.

$$C_m^8(u) = \cos\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

$$S_m^8(u) = \sin\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$



$$C_m^8(u) = \cos\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

$$S_m^8(u) = \sin\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

13.3 DIE DISKRETE FOURIERTRANSFORMATION (DFT)

Abbildung 13.12

Diskrete Basisfunktionen (Fortsetzung). Signallänge $M = 8$ und Wellenzahlen $m = 4 \dots 7$. Man beachte, dass z. B. die diskreten Funktionen für $m = 5$ und $m = 3$ (Abb. 13.11) identisch sind, weil $m = 4$ die maximale Wellenzahl ist, die in einem diskreten Spektrum der Länge $M = 8$ dargestellt werden kann.

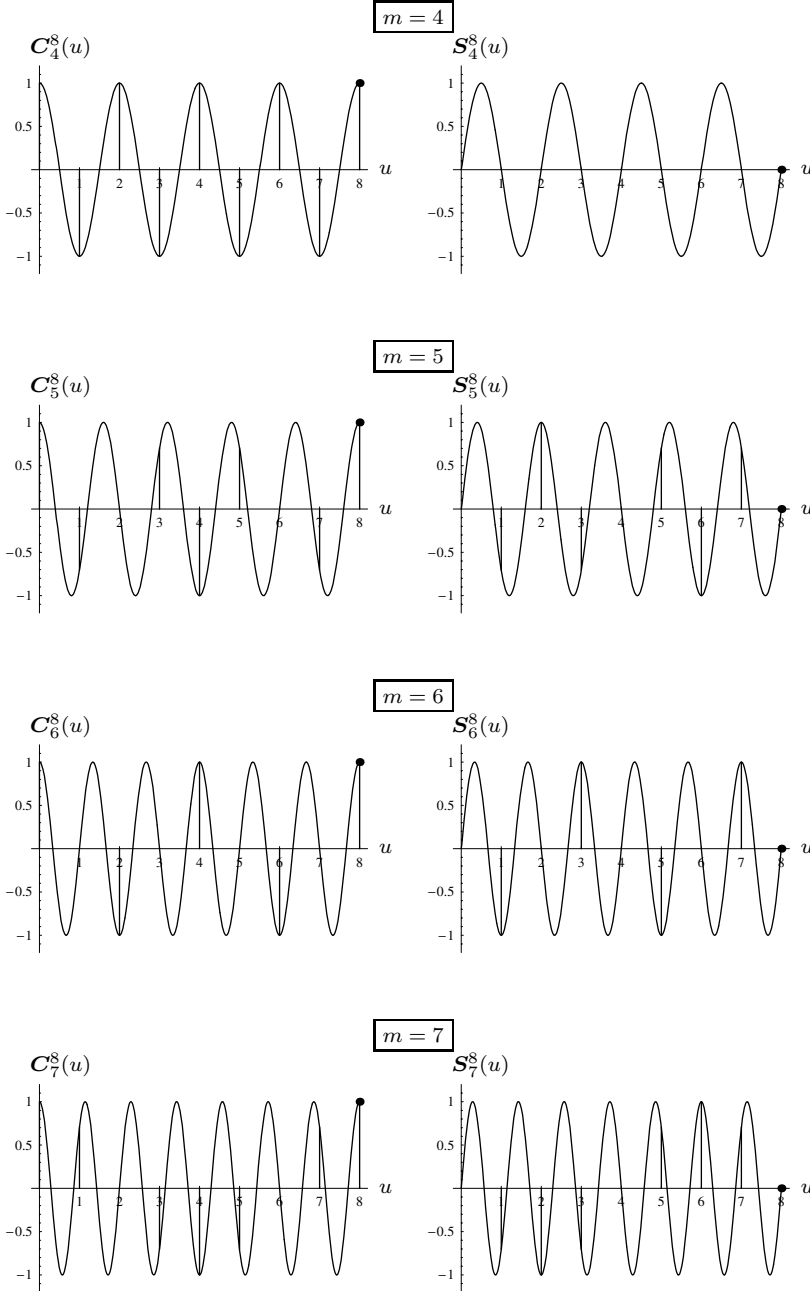
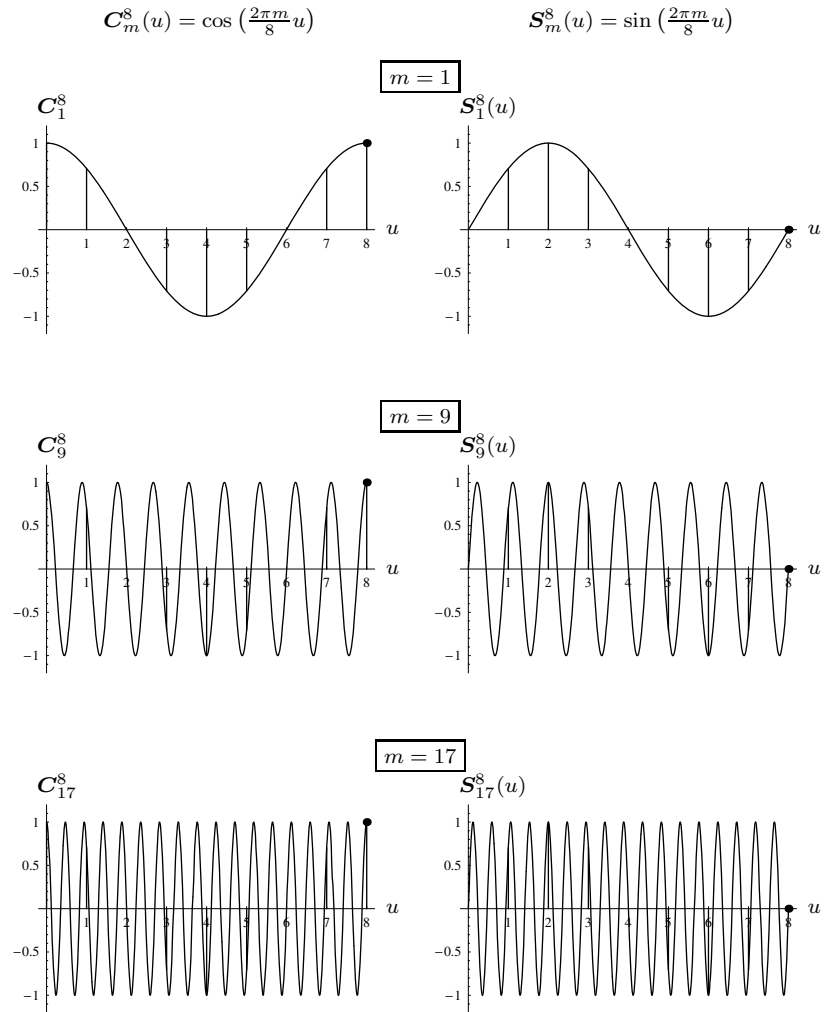


Abbildung 13.13

Aliasing im Ortsraum. Für die Signallänge $M = 8$ sind die diskreten Kosinus- und Sinusfunktionen für die Wellenzahlen $m = 1, 9, 17, \dots$ (durch runde Punkte markiert) alle identisch. Die Abtastfrequenz selbst entspricht der Wellenzahl $m = 8$.



13.3.4 Einheiten im Orts- und Spektralraum

Das Verhältnis zwischen den Einheiten im Orts- und Spektralraum sowie die Interpretation der Wellenzahl m sind häufig Anlass zu Missverständnissen. Während sowohl das diskrete Signal wie auch das zugehörige Spektrum einfache Zahlenvektoren sind und zur Berechnung der DFT selbst keine Maßeinheiten benötigt werden, ist es dennoch wichtig, zu verstehen, in welchem Bezug die Koordinaten im Spektrum zu Größen in der realen Welt stehen.

Jeder komplexwertige Spektralkoeffizient $G(m)$ entspricht einem Paar von Kosinus- und Sinusfunktionen mit einer bestimmten Frequenz im Ortsraum. Angenommen ein kontinuierliches Signal wird an M aufeinander folgenden Positionen im Abstand τ (eine Zeitspanne oder eine Distanz im Raum) abgetastet. Die *Wellenzahl* $m = 1$ entspricht dann

der Grundperiode des diskreten Signals (das als periodisch angenommen wird) mit der Periodenlänge $M\tau$ und damit einer *Frequenz*

$$f_1 = \frac{1}{M\tau}. \quad (13.54)$$

Im Allgemeinen entspricht die Wellenzahl m eines diskreten Spektrums der realen Frequenz

$$f_m = m \frac{1}{M\tau} = m \cdot f_1 \quad (13.55)$$

für $0 \leq m < M$ oder – als Kreisfrequenz ausgedrückt –

$$\omega_m = 2\pi f_m = m \frac{2\pi}{M\tau} = m \cdot \omega_1. \quad (13.56)$$

Die Abtastfrequenz selbst, also $f_s = 1/\tau = M \cdot f_1$, entspricht offensichtlich der Wellenzahl $m_s = M$. Die maximale Wellenzahl, die im diskreten Spektrum ohne Aliasing dargestellt werden kann, ist

$$m_{\max} = \frac{M}{2} = \frac{m_s}{2}, \quad (13.57)$$

also wie erwartet die Hälfte der Wellenzahl der Abtastfrequenz m_s .

Beispiel 1: Zeitsignal

Nehmen wir beispielsweise an, $g(u)$ ist ein Zeitsignal (z. B. ein diskretes Tonsignal) bestehend aus $M = 500$ Abtastwerten im Intervall $\tau = 1\text{ms} = 10^{-3}\text{s}$. Die Abtastfrequenz ist daher $f_s = 1/\tau = 1000$ Hertz (Zyklen pro Sekunde) und die Gesamtdauer (Grundperiode) des Signals beträgt $M\tau = 0.5\text{s}$.

Aus Gl. 13.54 berechnen wir die Grundfrequenz des als periodisch angenommenen Signals als $f_1 = \frac{1}{500 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{0.5} = 2$ Hertz. Die Wellenzahl $m = 2$ entspricht in diesem Fall einer realen Frequenz $f_2 = 2f_1 = 4$ Hertz, $f_3 = 6$ Hertz, usw. Die *maximale* Frequenz, die durch dieses diskrete Signal ohne Aliasing dargestellt werden kann, ist $f_{\max} = \frac{M}{2} f_1 = \frac{1}{2\tau} = 500$ Hertz, also exakt die Hälfte der Abtastfrequenz f_s .

Beispiel 2: Signal im Ortsraum

Die gleichen Verhältnisse treffen auch für räumliche Signale zu, wenn gleich mit anderen Maßeinheiten. Angenommen wir hätten ein eindimensionales Druckraster mit einer Auflösung (d. h. räumlichen Abtastfrequenz) von 120 Punkten pro cm, das entspricht etwa 300 *dots per inch* (dpi) und einer Signallänge von $M = 1800$ Abtastwerten. Dies entspricht einem räumlichen Abtastintervall von $\tau = 1/120\text{ cm} \approx 83\text{ }\mu\text{m}$ und einer Gesamtstrecke des Signals von $(1800/120)\text{ cm} = 15\text{ cm}$.

Die Grundfrequenz dieses (wiederum als periodisch angenommenen) Signals ist demnach $f_1 = \frac{1}{15}$, gemessen in Zyklen pro cm. Aus der Abtastfrequenz von $f_s = 120$ Zyklen pro cm ergibt sich eine maximale Signalfrequenz $f_{\max} = \frac{f_s}{2} = 60$ Zyklen pro cm und dies entspricht auch der feinsten Struktur, die mit diesem Druckraster aufgelöst werden kann.

13.3.5 Das Leistungsspektrum

Der Betrag des komplexwertigen Fourierspektrums

$$|G(m)| = \sqrt{G_{\text{Re}}^2(m) + G_{\text{Im}}^2(m)} \quad (13.58)$$

wird als *Leistungsspektrum* („power spectrum“) eines Signals bezeichnet. Es beschreibt die Energie (Leistung), die die einzelnen Frequenzkomponenten des Spektrums zum Signal beitragen. Das Leistungsspektrum ist reellwertig und positiv und wird daher häufig zur grafischen Darstellung der Fouriertransformierten verwendet (s. auch Abschn. 14.2).

Da die Phaseninformation im Leistungsspektrum verloren geht, kann das ursprüngliche Signal aus dem Leistungsspektrum allein nicht rekonstruiert werden. Das Leistungsspektrum ist jedoch – genau *wegen* der fehlenden Phaseninformation – unbeeinflusst von *Verschiebungen* des zugehörigen Signals und eignet sich daher zum Vergleich von Signalen. Genauer gesagt ist das Leistungsspektrum eines zyklisch verschobenen Signals identisch zum Leistungsspektrum des ursprünglichen Signals, d. h., für ein diskretes, periodisches Signal $g_1(u)$ der Länge M und das um den Abstand $d \in \mathbb{Z}$ zyklisch verschobene Signal

$$g_2(u) = g_1(u-d) \quad (13.59)$$

gilt für die zugehörigen Leistungsspektren

$$|G_2(m)| = |G_1(m)|, \quad (13.60)$$

obwohl die komplexwertigen Fourierspektren $G_1(m)$ und $G_2(m)$ selbst i. Allg. verschieden sind. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft des Fourierspektrums (Gl. 13.53) gilt überdies

$$|G(m)| = |G(-m)| \quad (13.61)$$

für reellwertige Signale $g(u) \in \mathbb{R}$.

13.4 Implementierung der DFT

13.4.1 Direkte Implementierung

Auf Basis der Definitionen in Gl. 13.47 und Gl. 13.48 kann die DFT auf direktem Weg implementiert werden, wie in Prog. 13.1 gezeigt. Die dort angeführte Methode `DFT()` transformiert einen Signalvektor von beliebiger Länge M (nicht notwendigerweise eine Potenz von 2) und benötigt dafür etwa M^2 Operationen (Additionen und Multiplikationen), d. h., die Zeitkomplexität dieses DFT-Algorithmus beträgt $\mathcal{O}(M^2)$.

Programm 13.1

Direkte Implementierung der DFT auf Basis der Definition in Gl. 13.47 und 13.48. Die Methode `DFT()` liefert einen komplexwertigen Ergebnisvektor der gleichen Länge wie der ebenfalls komplexwertige Input-Vektor `g`. Die Methode implementiert sowohl die Vorwärtstransformation wie auch die inverse Transformation, je nach Wert des Steuerparameters `forward`. Die Klasse `Complex` (oben) definiert die Struktur der komplexen Vektorelemente.

```

1 class Complex {
2     double re, im;
3
4     Complex(double re, double im) { //constructor method
5         this.re = re;
6         this.im = im;
7     }
8 }

1     Complex[] DFT(Complex[] g, boolean forward) {
2         int M = g.length;
3         double s = 1 / Math.sqrt(M); //common scale factor
4         Complex[] G = new Complex[M];
5         for (int m = 0; m < M; m++) {
6             double sumRe = 0;
7             double sumIm = 0;
8             double phim = 2 * Math.PI * m / M;
9             for (int u = 0; u < M; u++) {
10                 double gRe = g[u].re;
11                 double gIm = g[u].im;
12                 double cosw = Math.cos(phim * u);
13                 double sinw = Math.sin(phim * u);
14                 if (!forward) // inverse transform
15                     sinw = -sinw;
16                 //complex mult: [gRe + i gIm] · [cos(ω) + i sin(ω)]
17                 sumRe += gRe * cosw + gIm * sinw;
18                 sumIm += gIm * cosw - gRe * sinw;
19             }
20             G[m] = new Complex(s * sumRe, s * sumIm);
21         }
22         return G;
23     }

```

Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Effizienz des DFT-Algorithmus ist die Verwendung von Lookup-Tabellen für die sin- und cos-Funktion (deren numerische Berechnung vergleichsweise aufwendig ist), da deren Ergebnisse ohnehin nur für M unterschiedliche Winkel φ_m benötigt werden. Für $m = 0 \dots M-1$ sind die zugehörigen Winkel $\varphi_m = 2\pi \frac{m}{M}$ gleichförmig auf dem vollen 360° -Kreisbogen verteilt. Jedes ganzzahlige Vielfache $\varphi_m \cdot u$ (für $u \in \mathbb{Z}$) kann wiederum auf nur einen dieser Winkel fallen, denn es gilt

$$\varphi_m \cdot u = 2\pi \frac{mu}{M} \equiv \underbrace{2\pi \frac{(mu \bmod M)}{M}}_{0 \leq k < M} = 2\pi \frac{k}{M} = \varphi_k \quad (13.62)$$

(mod ist der „Modulo“-Operator¹²). Wir können also zwei konstante Tabellen (Gleitkomma-Arrays) $\mathbf{W}_C[k]$ und $\mathbf{W}_S[k]$ der Größe M einrichten mit den Werten

¹² Siehe auch Anhang B.1.2.

$$\mathbf{W}_C[k] \leftarrow \cos(\omega_k) = \cos\left(2\pi \frac{k}{M}\right) \quad (13.63)$$

$$\mathbf{W}_S[k] \leftarrow \sin(\omega_k) = \sin\left(2\pi \frac{k}{M}\right),$$

wobei $0 \leq k < M$. Aus diesen Tabellen können die für die Berechnung der DFT notwendigen Kosinus- und Sinuswerte (Gl. 13.46) in der Form

$$\mathbf{C}_k^M(u) = \cos\left(2\pi \frac{mu}{M}\right) = \mathbf{W}_C[mu \bmod M] \quad (13.64)$$

$$\mathbf{S}_k^M(u) = \sin\left(2\pi \frac{mu}{M}\right) = \mathbf{W}_S[mu \bmod M] \quad (13.65)$$

ohne zusätzlichen Berechnungsvorgang für beliebige Werte von m und u ermittelt werden. Die entsprechende Modifikation der $\text{DFT}()$ -Methode in Prog. 13.1 ist eine einfache Übung (Aufg. 13.5).

Trotz dieser deutlichen Verbesserung bleibt die direkte Implementierung der DFT rechenaufwendig. Tatsächlich war es lange Zeit unmöglich, die DFT in dieser Form auf gewöhnlichen Computern ausreichend schnell zu berechnen und dies gilt auch heute noch für viele konkrete Anwendungen.

13.4.2 Fast Fourier Transform (FFT)

Zur praktischen Berechnung der DFT existieren schnelle Algorithmen, in denen die Abfolge der Berechnungen so ausgelegt ist, dass gleichartige Zwischenergebnisse nur einmal berechnet und in optimaler Weise mehrfach wiederverwendet werden. Die sog. *Fast Fourier Transform*, von der es mehrere Varianten gibt, reduziert i. Allg. die Zeitkomplexität der Berechnung von $\mathcal{O}(M^2)$ auf $\mathcal{O}(M \log_2 M)$. Die Auswirkungen sind vor allem bei größeren Signallängen deutlich. Zum Beispiel bringt die FFT bei einer Signallänge $M = 10^3$ bereits eine Beschleunigung um den Faktor 100 und bei $M = 10^6$ um den Faktor 10.000, also ein eindrucksvoller Gewinn. Die FFT ist daher seit ihrer Erfindung ein unverzichtbares Werkzeug in praktisch jeder Anwendung der digitalen Spektralanalyse [11].

Die meisten FFT-Algorithmen, u. a. jener in der berühmten Publikation von Cooley und Tukey aus dem Jahr 1965 (ein historischer Überblick dazu findet sich in [30, S. 156]), sind auf Signallängen von $M = 2^k$, also Zweierpotenzen, optimiert. Spezielle FFT-Algorithmen wurden aber auch für andere Längen entwickelt, insbesondere für eine Reihe kleinerer Primzahlen [7], die wiederum zu FFTs unterschiedlichster Größe zusammengesetzt werden können.

Wichtig ist jedenfalls zu wissen, dass DFT und FFT *dasselbe* Ergebnis berechnen und die FFT nur eine spezielle – wenn auch äußerst geschickte – *Methode* zur Implementierung der diskreten Fouriertransformation (Gl. 13.43) ist.

13.5 Aufgaben

13.5 AUFGABEN

Aufg. 13.1. Berechnen Sie die Werte der Kosinusfunktion $f(x) = \cos(\omega x)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 5$ für die Positionen $x = -3, -2, \dots, 2, 3$. Welche Periodenlänge hat diese Funktion?

Aufg. 13.2. Ermitteln Sie den Phasenwinkel φ der Funktion $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ für $A = -1$ und $B = 2$.

Aufg. 13.3. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Größe $z = 1.5 \cdot e^{-i2.5}$.

Aufg. 13.4. Ein eindimensionaler, optischer Scanner zur Abtastung von Filmen soll Bildstrukturen mit einer Genauigkeit von 4.000 dpi (*dots per inch*) auflösen. In welchem räumlichen Abstand (in mm) müssen die Abtastwerte angeordnet sein, sodass kein *Aliasing* auftritt?

Aufg. 13.5. Modifizieren Sie die Implementierung der eindimensionalen DFT in Prog. 13.1 durch Verwendung von Lookup-Tabellen für die cos- und sin-Funktion, wie in Gl. 13.64 und 13.65 beschrieben.