OPTIMIZACIÓN Y TEORÍA DE CÓDIGOS – Curso 2019-20

MÓDULO DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIOS DE LA PRIMERA CONVOCATORIA ORDINARIA

Instrucciones específicas sobre la realización y entrega de los ejercicios de este Módulo

a) Todos los ejercicios deberán estar debidamente **razonados**. Cada apartado deberá ser **razonado** y contestado según requiera el enunciado del mismo.

b) En los apartados en que los se pida la formulación de un problema, ésta deberá aportarse de forma explícita, independientemente de que también se pida la resolución de dicho problema con apoyo de algún software. La elección del software se deja a criterio del alumno.

c) El entregable contendrá los siguientes ficheros:

- Un fichero PDF conteniendo: apellidos y nombre del alumno, la resolución explícita y razonada de los problemas, y también los **códigos** completos (*outputs* inclusive) en caso de que intervenga el uso de algún software. Se recomienda el uso de un editor de texto para la resolución de los problemas, no obstante, en caso de resolver los problemas "a mano", no usar lápiz.
- Un fichero *ejecutable*, conteniendo los códigos completos (*outputs* inclusive) de los problemas en los que se haya usado algún software. El fichero estará encabezado por los apellidos, y nombre del alumno, y delante de cada código deberá indicarse el número y apartado del ejercicio.
- Si el software utilizado es SageMath, se da la opción de que todos los códigos (*outputs* inclusive), en vez de incluirlos en el fichero PDF de los problemas, se aporten por separado en un único fichero Sage, del tipo *Mod1_Alumno*.sws. El fichero estará encabezado por los apellidos, y nombre del alumno, y delante de cada código deberá indicarse el número y apartado del ejercicio.

Tema 1: Programación Lineal

1. **[0.2 puntos cada apartado]**
El objetivo de este ejercicio es resolver un problema de Programación Lineal (conocido en la literatura como de tipo *Reddy Mikks*) aplicando el método del simplex que se ha introducido en los vídeos. Será muy conveniente consultar el libro **Understanding and using linear programming**, de Matoušek, Jǐŕí y Gärtner, Bernd que está disponible en `fama.us.es`. En el capítulo 5, sección 5.1. se trabaja un ejemplo de la misma forma en la que queremos que se realice este ejercicio.

Dado el problema

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Maximizar} & Z = 5x_1 + 4x_2 & & \\
\text{s.a.} & 6x_1 + 4x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\
 & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

que en forma estándar será

$$\begin{array}{lrcccccl}
\text{Maximizar} & Z = 5x_1 + 4x_2 & & & & & & \\
\text{s.a.} & 6x_1 + 4x_2 & +x_3 & & & & = & 24 \\
 & x_1 + 2x_2 & & +x_4 & & & = & 6 \\
 & -x_1 + x_2 & & & +x_5 & & = & 1 \\
 & x_2 & & & & +x_6 & = & 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 & & & &
\end{array}$$

(se puede dejar como un problema de maximización para que sea exactamente como el ejemplo de la bibliografía). Se pide:

a) Resolver el problema gráficamente.

b) Partiendo de la solución básica factible $(0, 0, 24, 6, 1, 2)$ (esto es, eligiendo x_1 y x_2 como variables no básicas y las de holgura como variables básicas), demostrar que si introducimos x_1 como básica y pasando x_3 a no básica obtenemos el punto $(4, 0, 0, 2, 5, 2)$.

c) Repitiendo el proceso, introduciendo como básica la variable que produce una mejora mayor en la función objetivo, demostrar que obtenemos el punto $(3, 3/2, 0, 0, 5/2, 1/2)$ que es el óptimo del problema.

d) Repetir el proceso anterior empezando por la solución básica factible $(0, 1, 20, 4, 0, 1)$.

e) Resolver el problema utilizando algún tipo de software como por ejemplo el que se sugiere al final del Tema 2.

Tema 2: Programación Entera

2. [0.3 puntos]
Un inversor ha preseleccionado una serie de productos financieros $\{1, \ldots, 7\}$, a efectos de elegir en cuáles de dichos productos invierte. Definir las variables de decisión, y modelar las siguientes restricciones en forma de Programación Lineal Entera:

a) Si se eligen los productos 1 y 3, entonces no se elige 4.
b) Si se elige el producto 2 ó el 5, entonces no se elige el 6.
c) Si no se elige producto 1, entonces hay que elegir al menos un producto entre 2 y 7.
d) Si se eligen los productos 4 y 5, entonces no se elige ni el producto 6 ni el 7.
e) Hay que elegir al menos uno de los productos 1, 2, 3, ó al menos dos de los productos 2,4,5,6.

3. [0.3 puntos]
Sea $x_j, j = 1, \ldots, 8$, una colección de variables, tales que las variables de índice par son binarias, y las de índice impar son continuas, con $1 \leq x_j \leq 2$, $j = 1, 3, 5, 7$. Modelar las siguientes relaciones en términos de Programación Entera:

a) La suma de las variables pares es al menos 2, ó la suma de las impares es como máximo 2.
b) Si la suma de las variables pares es como mucho 2, entonces la suma de x_5 y x_7 es 3.

En cada uno de los casos, reemplazar las cota genérica superior M (e inferior $-M$) por una cota superior (e inferior) más ajustada.

4. [0.3 puntos]
Una determinada empresa lanza al mercado un nuevo producto, para lo cual va a realizar una campaña de promoción del mismo. Dicha campaña incluye la inserción de cuñas publicitarias (spots) en un canal autonómico de TV, y la empresa va a destinar, de su presupuesto publicitario, 10.000€ diarios para insertar spots de medio minuto de duración en dicha TV. El coste de emisión de un spot de medio minuto, y el número medio de potenciales receptores de dicho spot depende de la franja horaria en la que se emita, según la siguiente tabla:

Franja horaria	Coste spot (en €)	Audiencia media
1. 8:00–10:00	500	70000
2. 10:00–12:00	800	85000
3. 12:00–14:00	1000	120000
4. 14:00–16:00	2000	200000
5. 16:00–18:00	1500	160000
6. 18:00–20:00	2500	250000
7. 20:00–22:00	3500	400000
8. 22:00–24:00	3000	300000

La empresa, que ya tiene grabado el spot, quiere que en cada franja horaria se emita como mucho una vez, y quiere emitir al menos 4 spots diarios.

a) La empresa quiere saber en qué franjas horarias emitir el spot al objeto de llegar al máximo número posible de espectadores. (i) Formular el problema de Programación Entera. (ii) Resolverlo mediante un software adecuado.

b) Por razones de marketing, se deben contemplar los siguientes requisitos adicionales: (i) Si se emite un spot en la franja 7, deben quedar excluidas de spot las franjas 1, 4, 5, y 8. (ii) Si se emite un spot en alguna de las franjas 6 ú 8, se debe emitir un spot tanto en la franja 1 como en la 3. (iii) Si no se emite un spot en alguna de las franjas 4 ó 5, tampoco se puede emitir en la franja 6. Formular el problema con estos requisitos adicionales, y resolverlo mediante un software adecuado.

5. [0.3 puntos]

Una empresa ecológica fabrica, a partir de material reciclado, tres tipos de producto A, B y C, cuya elaboración requiere semanalmente de determinada materia prima (kg. de material reciclado) y un número determinado de horas de trabajo. La siguiente tabla muestra los datos del proceso de producción:

	Recursos (por semana)		
	Horas	Materia prima (Kg.)	Beneficio (en €)
A	30	4	60
B	20	3	40
C	40	4	70
Disponibilidad	200 h.	30 kg.	

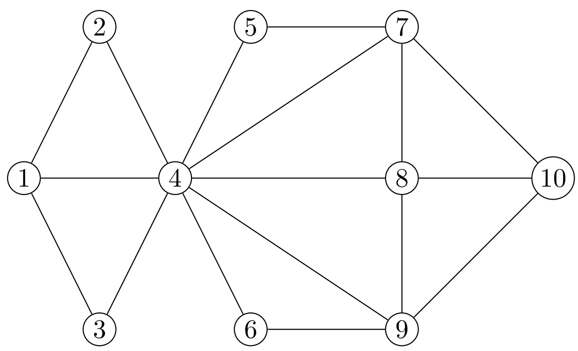
Para el proceso de reciclaje se necesita alquilar determinadas máquinas, cada una de ellas capaces de reciclar el material original y transformarlo en la materia prima que requiere cada producto. El alquiler semanal de las correspondientes máquinas para los productos A, B y C tiene un coste fijo de 200 €, 150 €, y 100 €, respectivamente. Finalmente, ante lo inestable del mercado, la empresa quiere elaborar como máximo 5 unidades semanales del producto A, 10 del B, y 6 del C.

a) Al objeto de planificar la producción, la empresa desea determinar qué productos elaborar, y en qué cantidad, para obtener el máximo beneficio. Formular el problema mediante proramación Entera.

b) Resolver el problema resultante mediante algún software adecuado.

6. [0.3 puntos]

Un museo que expone valiosas colecciones artísticas tiene 10 salas, conectadas entre sí mediante accesos directos (puertas de paso). El grafo que sigue esquematiza dicha situación: los nodos identifican a las salas, y las aristas representan a las puertas. Por ejemplo, las salas 1 y 2 son adyacentes (están conectadas por una arista) porque existe una puerta entre ambas salas.



La vigilancia del museo la lleva a cabo el personal de una empresa de seguridad, de forma que los vigilantes se sitúan en determinados lugares del museo para cubrir la vigilancia de todas las salas del mismo. La empresa quiere determinar el mínimo número de vigilantes necesario para llevar a cabo la vigilancia en las siguientes situaciones:

a) Situar a los vigilantes en las puertas, de forma que cada vigilante controle las dos salas conectadas por dicha puerta.

b) Repetir la situación anterior, con el requisito de que cada sala esté vigilada por exactamente 1 vigilante.

En cada uno de los casos plantear el correspondiente problema de Programación Entera, y resolverlo mediante un software adecuado, indicando en cada caso el número de vigilantes, su ubicación y las salas que vigilan. Según los resultados obtenidos, ¿alguna de dichas situaciones es estrictamente mejor que la otra?

7. [0.3 puntos]

Una unidad especializada en delitos informáticos está realizando un Curso de Actualización, y entre las actividades previstas a lo largo del curso está la realización de 8 talleres al que los funcionarios deben asistir. Los talleres se impartirán en un determinado fin de semana, y están dedicados a conocer los últimos avances de software y hardware orientados a la detección e investigación de este tipo de delitos, así como a ciberseguridad y recuperación de material digital degradado. La duración (en minutos) prevista para cada una de los talleres se muestra en la siguiente tabla:

Sesión	Duración (min.)
1. Sofware 1	45
2. Software 2	60
3. Software 3	60
4. Hardware 1	80
5. Hardware 2	70
6. Hardware 3	80
7. Ciberseguridad	90
8. Recuperación	100

Los talleres tendrán lugar en una sala especializada que ha sido alquilada para el fin de semana previsto (sábado y domingo), por un máximo de 5 horas cada día. El alquiler cuesta 200€ por hora el sábado, y 250€ por hora el domingo. Los talleres son independientes entre sí (por tanto se pueden impartir en cualquier orden), y, obviamente, cada taller sólo se imparte una vez. El taller 8 sobre “recuperación de material digital degradado” se considera indistintamente de software y de hardware, ya que en él se utilizan ambos recursos.

a) Se pide: (i) Mediante Programación Entera, formular el problema de distribuir los 8 talleres en el fin de semana con el menor coste posible. (ii) Resolver el problema con un software adecuado.

b) Por cuestiones internas de organización, la distribución de los talleres en el fin de semana debe satisfacer los siguiente requisitos adicionales:

   1) Cada día debe tener exactamente dos talleres de software.
   2) El sábado debe tener al menos un taller de hardware, y además contener alguno de los talleres entre software y ciberseguridad.
   3) Si los talleres 2, 4 y 5 están en uno de los días, los talleres 4 y 8 deben estar en el otro día.

   Formular el problema de distribuir los 8 talleres en los dos días al menor coste posible tal que se incluyan estos nuevos requisitos, y resolverlo mediante un software adecuado.

8. [0.2 puntos]

Estamos resolviendo el TSP en 5 ciudades: $\{1, \dots, 5\}$, representadas mediante un grafo completo no dirigido de 5 nodos. Las distancias d_{ij} entre las ciudades i, j están recogidas en la siguiente tabla (teniendo en cuenta que $d_{ij} = d_{ji}$):

	1	2	3	4	5
1		100	175	100	75
2			50	75	125
3				100	125
4					50
5					

Vamos a aplicar un algoritmo ACO con una cierta matriz heurística de partida, y con parámetros $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

a) Supongamos que después de algunas iteraciones se tienen los siguientes valores de feromonas en las aristas:

$$\tau_{12} = 3.2, \tau_{13} = 4, \tau_{14} = 0.2, \tau_{15} = 2, \tau_{23} = 1.8, \tau_{24} = 3, \tau_{25} = 0.5, \tau_{34} = 2.3, \tau_{35} = 1.6, \tau_{45} = 2.4$$

Calcular la probabilidad de que una hormiga situada en el nodo 2 se traslade a los nodos adyacentes.

b) Con la matriz de feromonas del apartado anterior, supongamos que una hormiga ha generado el tour 1-2-5-4-3-1, que el factor de evaporación $\rho = 0.75$, y que $Q = 100$. Actualizar los rastros de feromona.