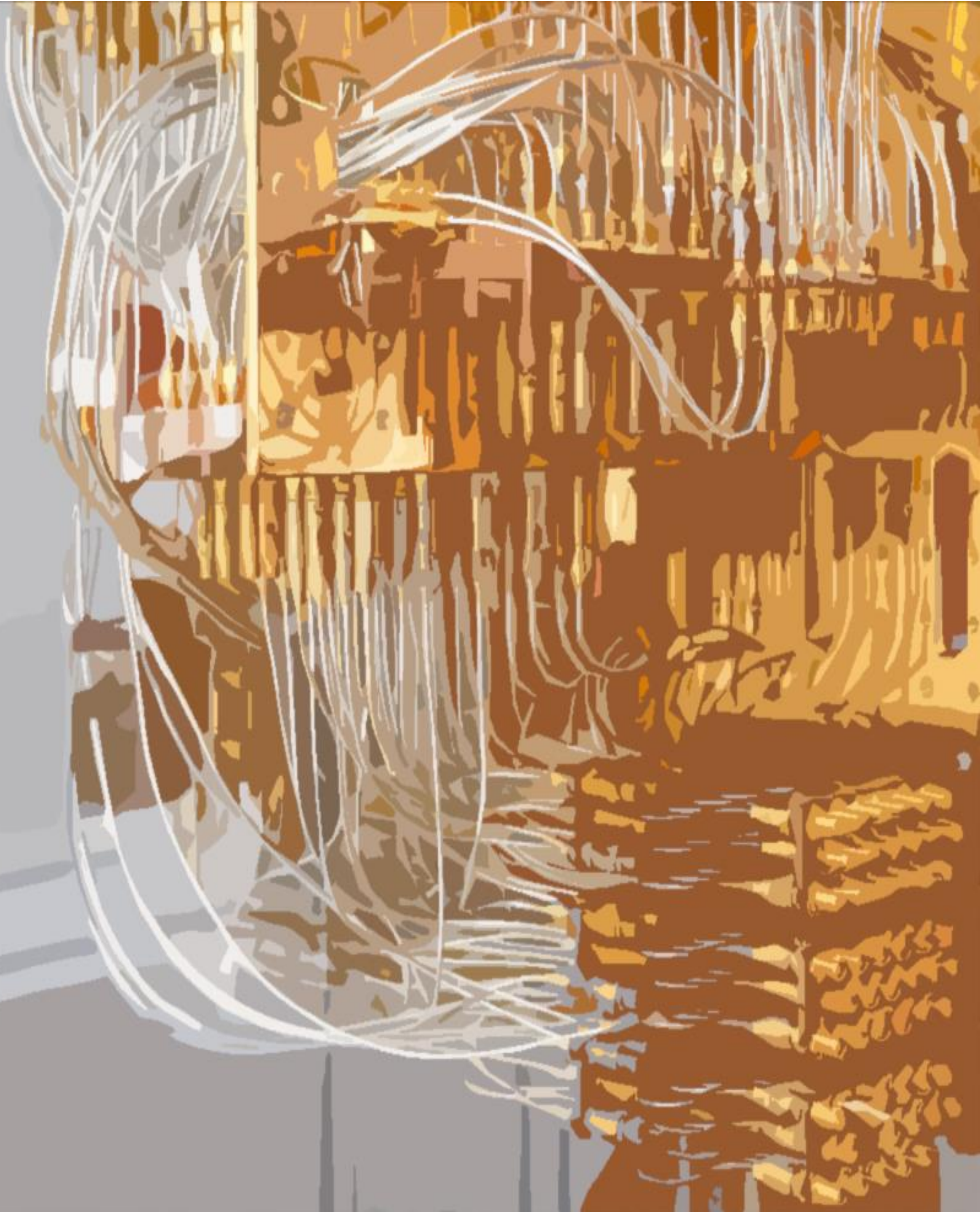
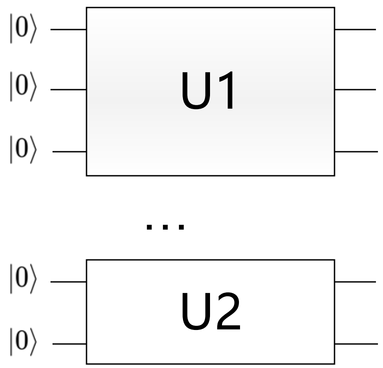
分布式量子计算

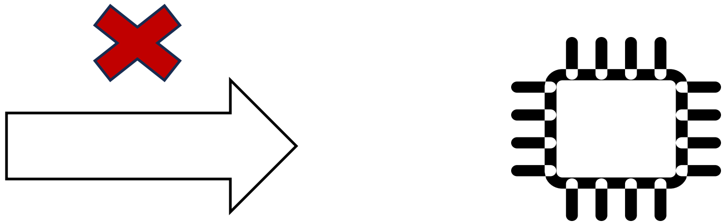


为什么需要量子分布式

1. 大规模量子电路无法运行。量子芯片的比特数决定量子电路的比特数上限；量子芯片的退相干时间决定电路的深度上限

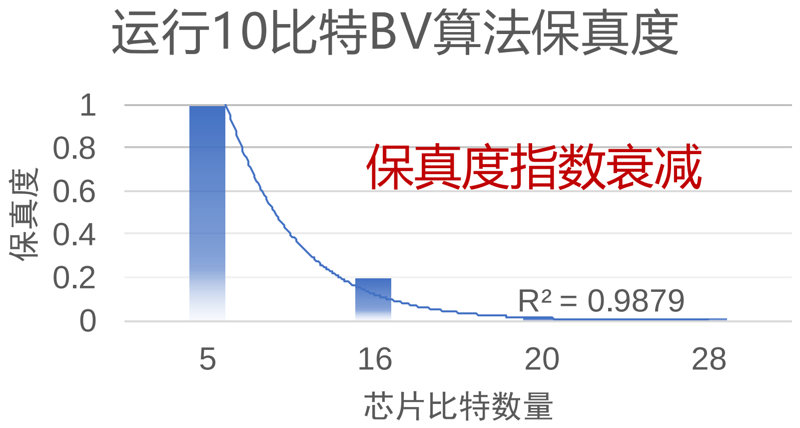


500-qubit QFT算法



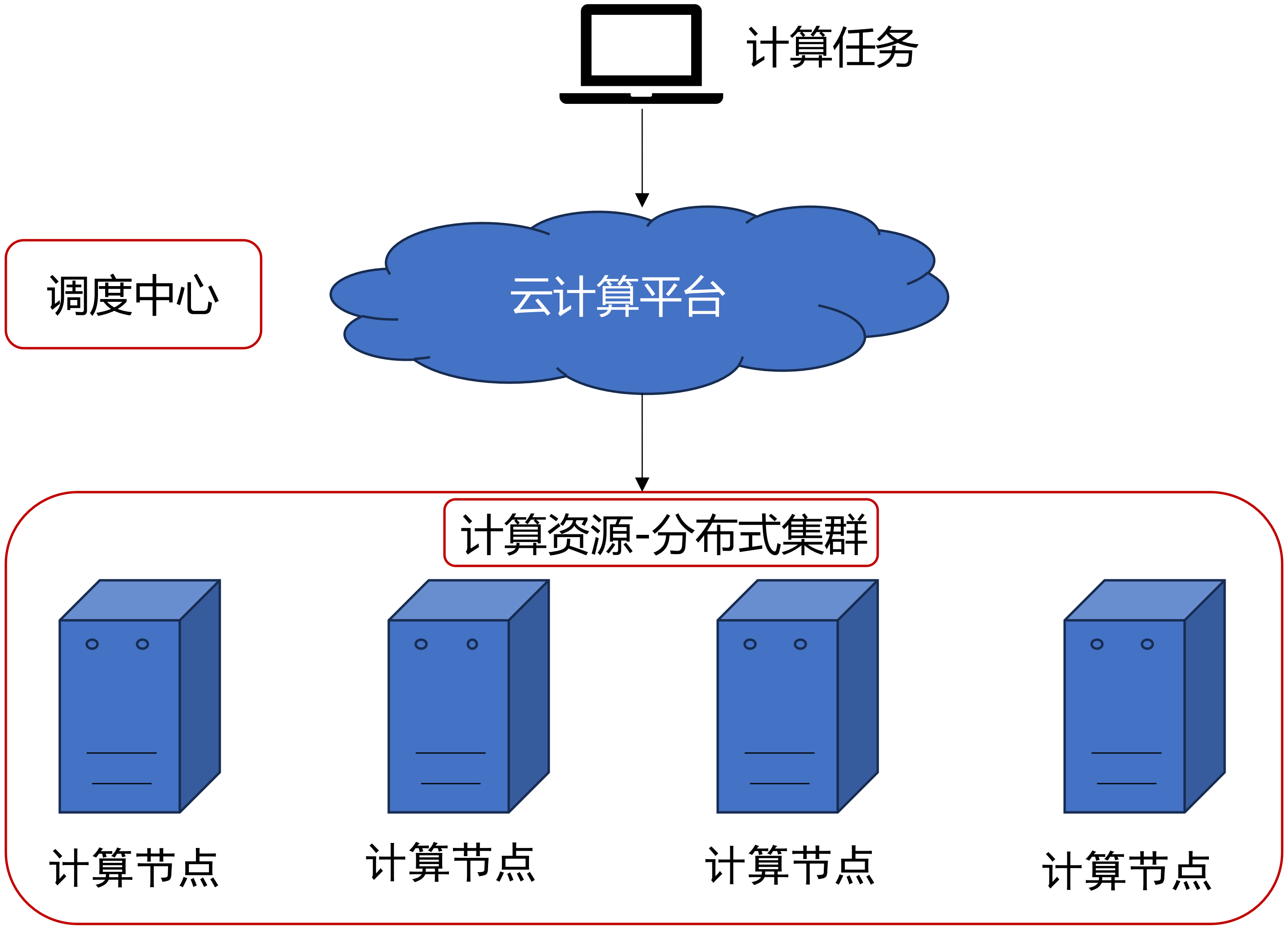
IBM比特数最大的量子芯片
433-qubit

2. 单个量子芯片中，量子比特数越多，串扰和噪音越严重，保真度也就越低。并且物理上难以做到高保真的大芯片



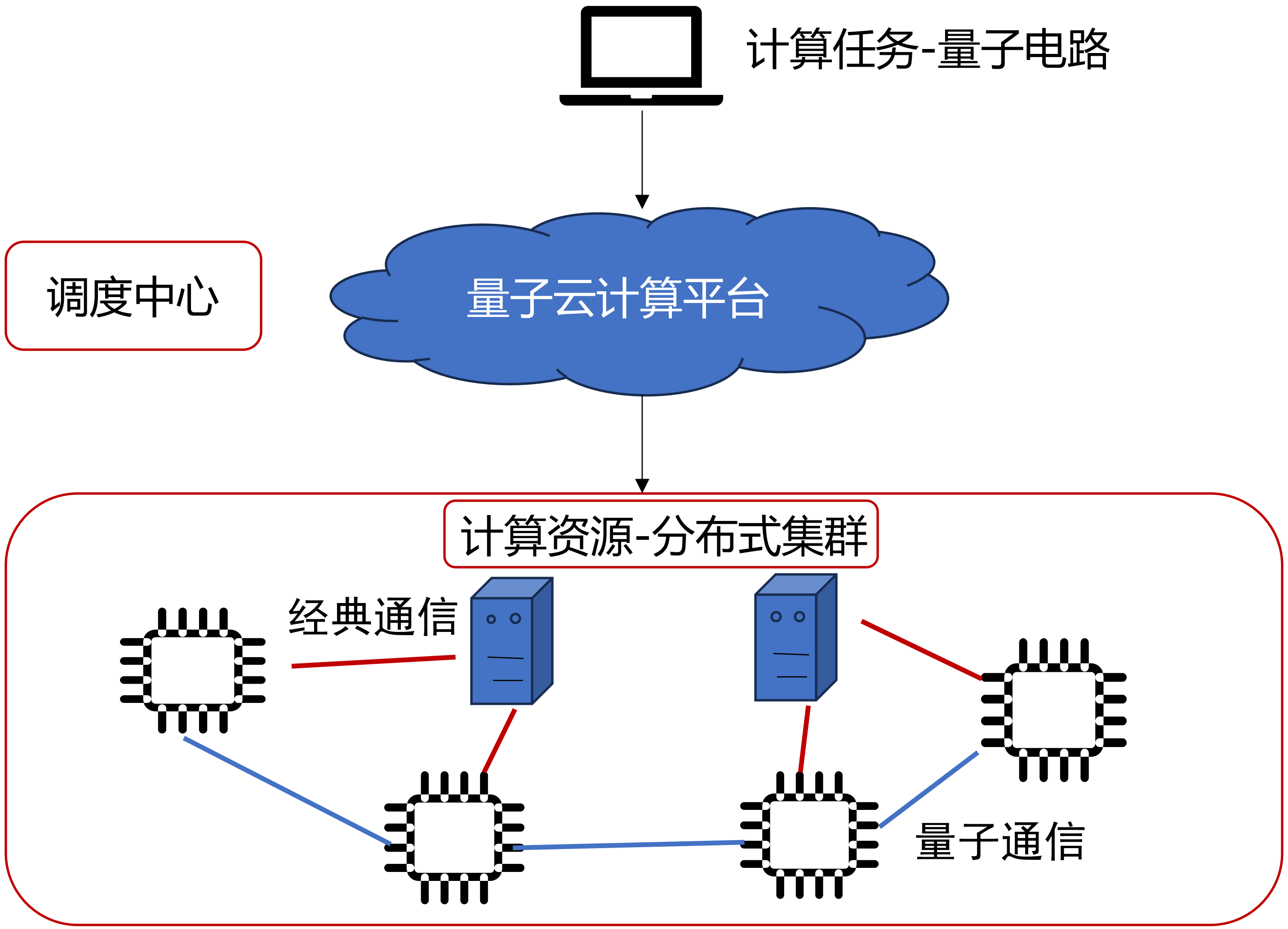
目录

分布式：经典 VS 量子-经典分布式计算



- 经典分布式计算，任务经由调度中心-云计算平台，提交给分布式集群，集群经过切分变换综合最终得出结果。
- 经典计算集群可以无限增加计算资源来提高计算效率
- 经典计算集群的通信开销很小，几乎可以忽略不计
- 经典计算任务的切分对于每个任务是通用的，只是简单地将数据分块来计算

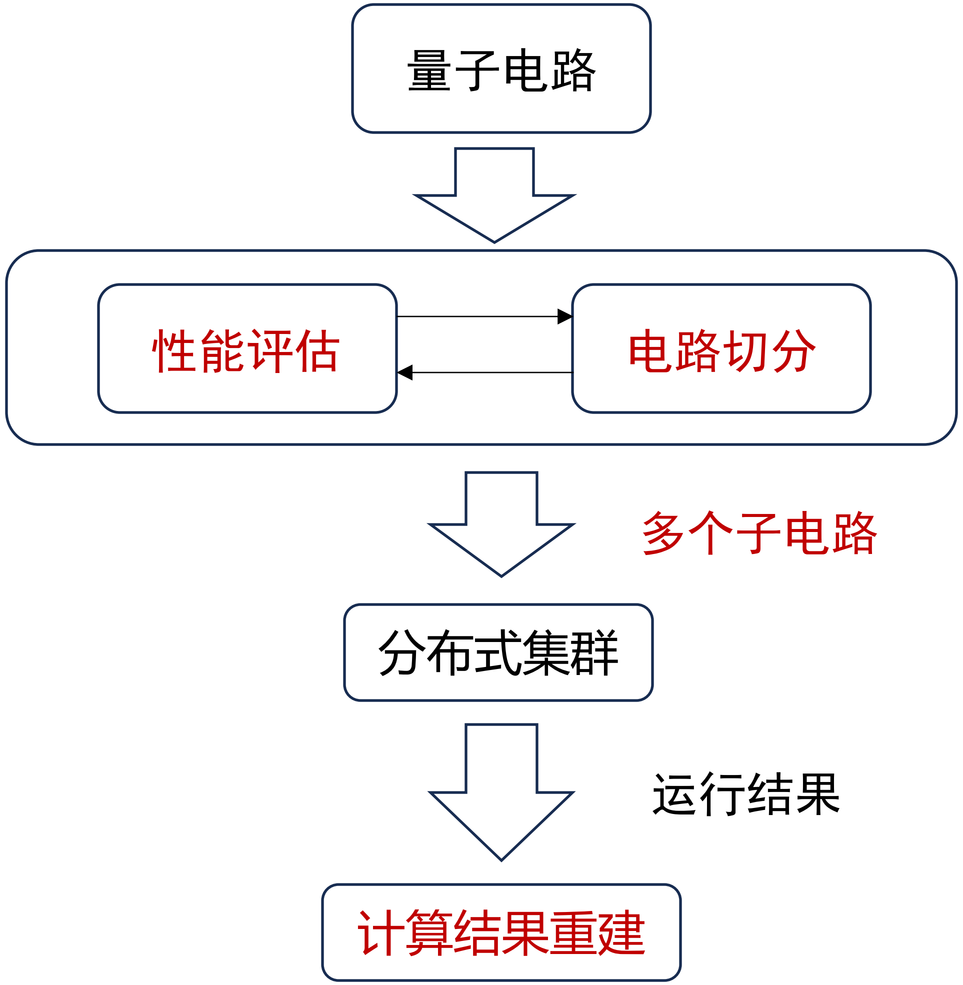
分布式：经典 VS 量子-量子分布式计算



- 量子分布式计算，任务经由调度中心-量子云计算平台，切分评估，最终提交给分布式集群，集群经过各个节点的通信和运行最终得出结果。
- 量子计算集群由于电路切分和后处理的开销随着切分次数增加而增加，所以并不是计算资源越多，效率就越高
- 量子计算集群的量子通信开销相比普通量子门运行的开销大得多
- 量子电路的切分对于每个电路均不同，需要通过一套分析体系才能确定最优切分

目录

量子分布式-流程



1. 输入大规模量子电路到评估优化器中

2. 评估优化器使用根据不同的切割算法，选择不同的评估优化方法和不同的目标函数（最小化通信损失，最大化保真度等等），最终得出较优的电路切分法，送入电路切分器中，最终得到多个子电路

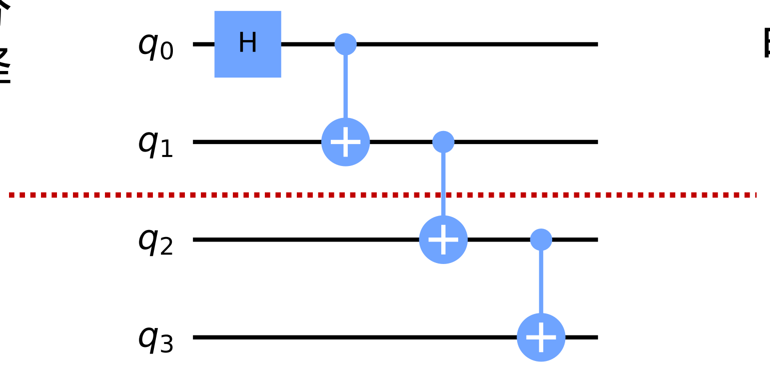
3. 子电路送入分布式集群（包含经典节点和量子节点，运行得到子电路的结果

4. 根据子电路的结果和切分的方法，进行张量计算，重建最终原电路的运行结果

量子分布式-流程

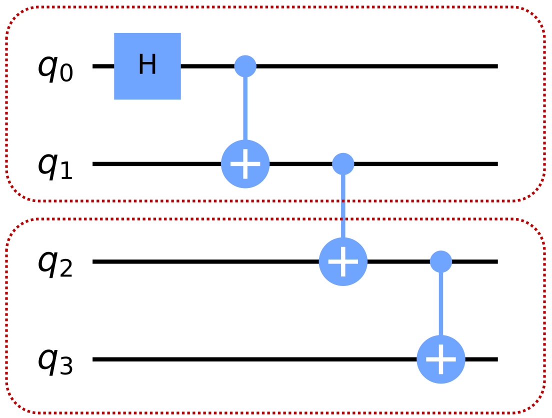
电路切分
电路编译

边切割



电路调度

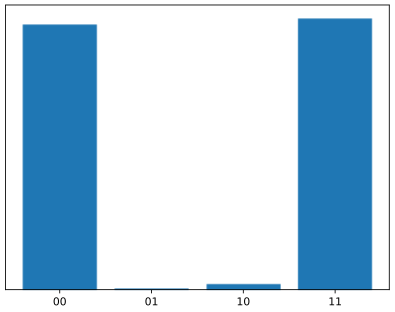
QPU1



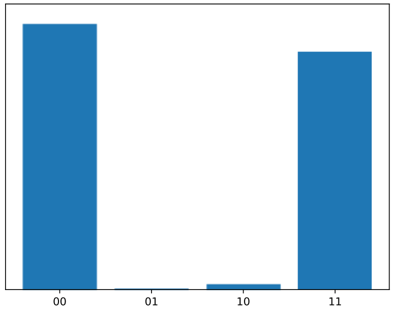
QPU2

电路运行

QPU1

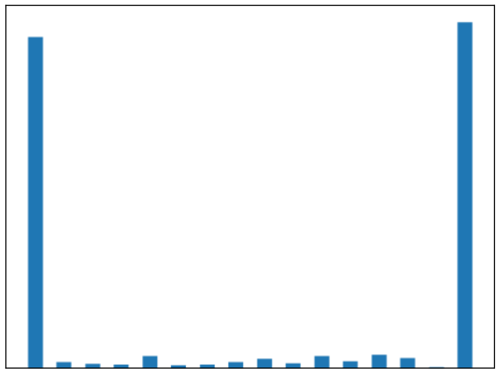


QPU2



张量计算

最终电路运行结果



目录

电路切分-概览

与经典相比，任务/电路的切分并不像经典任务的切分那样，只是切分输入的数据进行分布式计算，切分出的子任务越多，效率大概率就越高。其切分的代价和后处理的代价相比量子电路的切分都要小很多。

谈及量子电路切分，需要同时讨论1. 其电路切分的方法原理，2. 性能评估和3. 后处理。

电路切分：电路切分的方式分为经典链接切分和量子链接切分。经典链接切分表示切分后的子电路并不存在量子通信，完全依靠经典通信传递信息；对应量子链接切分，其切分后的子电路存在量子通信和经典通信。

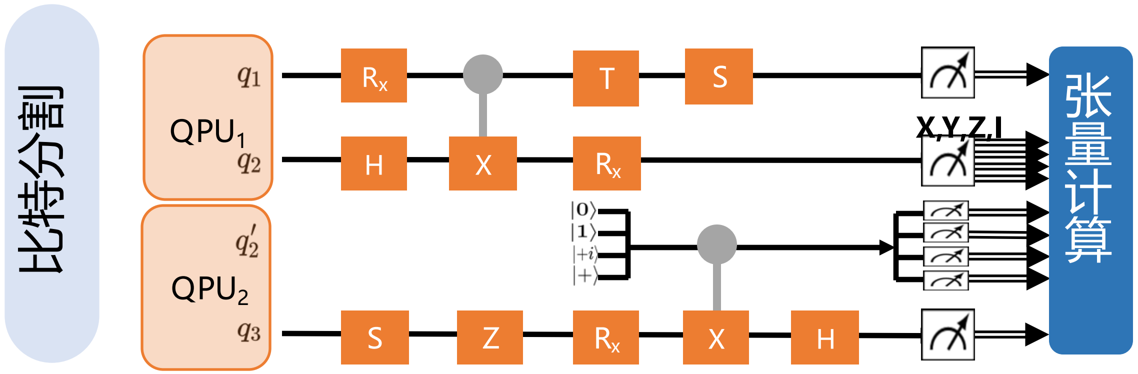
性能评估：性能评估根据电路切分的方法不同，其评估方式也不同。经典链接切分后处理的代价是指数级别的，此时评估就是让经典后处理的代价尽可能小；而量子链接切分量子通信的通信代价是巨大的，此时评估就是让不同电路之间的量子通信代价尽可能小。

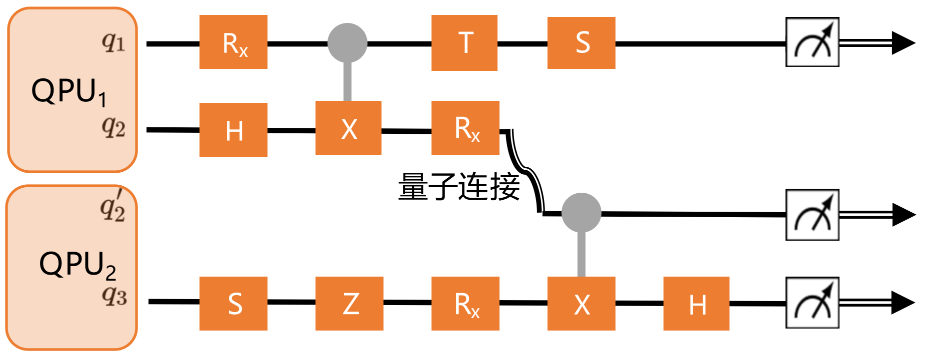
后处理：经典链接拥有后处理的必要，但量子链接不存在后处理的必要。

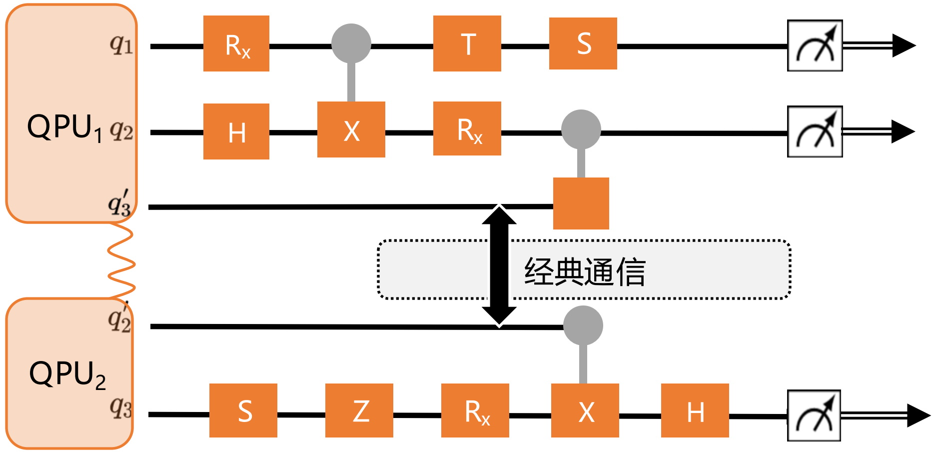
电路切分-概览

经典链接

量子链接







量子网络

目录

电路切分-经典链接比特切割-理论部分

此方法参考论文《CutQC: Using Small Quantum Computers for Large Quantum Circuit Evaluations》

垂直切分量子比特线的数学理论：量子电路中任意量子运算的酉矩阵都可以分解成任何一组正交基。例如选取一组正交基：一组Pauli矩阵I, X , Y, Z。

此时一个2×2的矩阵可被分解为：

$$A = \frac{Tr(AI)I + Tr(AX)X + Tr(AY)Y + Tr(AZ)Z}{2}$$

其中，Tr(X)即为求矩阵X的迹。

电路切分-经典链接比特切割-理论部分

已知，Pauli矩阵构成 2 × 2 厄密矩阵的实向量空间的基础。任意2×2的酉矩阵可被分解成Pauli矩阵的线性组合，即

$$A = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta I$$

两边同乘X，可知

$$AX = \alpha I + \delta X$$

$$Tr(AX) = Tr(\alpha I) + Tr(\delta X) = 2\alpha$$

同乘Y，Z，I同理，所以可知

$$A = \frac{Tr(AI)I + Tr(AX)X + Tr(AY)Y + Tr(AZ)Z}{2}$$

电路切分-经典链接比特切割-理论部分

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

并且为了使其能在量子真机上运行（无法直接对泡利矩阵进行观测，需将其拆成特征基（投影算子）），将Pauli矩阵分解为其特征基（Pauli矩阵是可对角化的）并重新组织一下。

已知算子A在向量空间V的对角表示为

$$A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

其中，λ_i为特征值，$|i\rangle$ 为其对应的特征向量。 所以可知泡利矩阵对应的对角表示为

投影算子正交基相同，最终测量结果相同

$$\boxed{I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}$$

$$X = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = 2|+\rangle\langle +| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$Y = i(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) = 2|+i\rangle\langle +i| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$\boxed{Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|}$$

电路切分-经典链接比特切割-理论部分

此时可获得如下恒等式：

$$A = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{2}$$

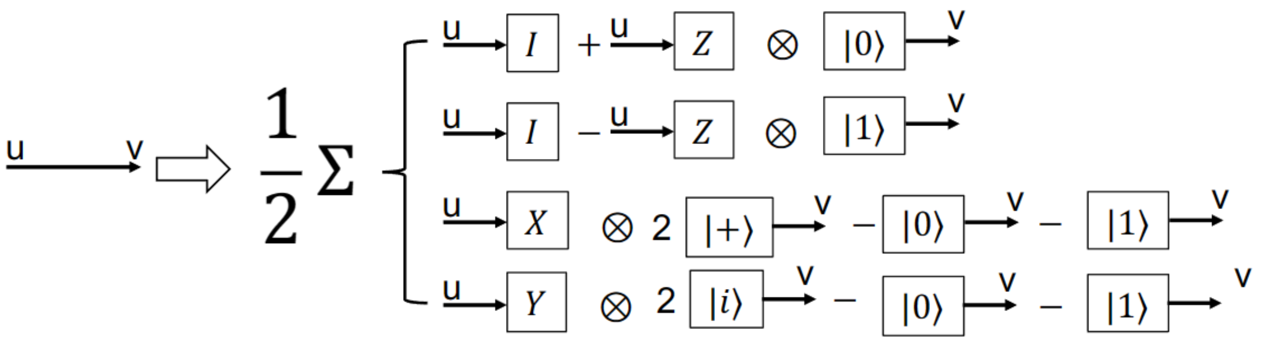
其中，

$$
\begin{aligned}
A_1 &= [\mathrm{Tr}(\mathrm{A}I) + \mathrm{Tr}(\mathrm{A}Z)]|0\rangle\langle 0| \\
A_2 &= [\mathrm{Tr}(\mathrm{A}I) - \mathrm{Tr}(\mathrm{A}Z)]|1\rangle\langle 1| \\
A_3 &= \mathrm{Tr}(\mathrm{A}X)[2|+\rangle\langle +| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|] \\
A_4 &= \mathrm{Tr}(\mathrm{A}Y)[2|+i\rangle\langle +i| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|]
\end{aligned}
$$

对于一个量子电路由于在I或Z基中测量一个量子位在物理上对应于相同的量子电路（因为其投影算子均为$|0\rangle\langle 0|$和$|1\rangle\langle 1|$）
因此会产生三个不同的上游子电路和四个不同的下游子电路。

电路切分-经典链接比特切割-理论部分

根据上一页的恒等式，并且参考论文《Simulating Large Quantum Circuits on a Small Quantum Computer》附录的证明可知



$$A_1 = [\mathrm{Tr}(AI) + \mathrm{Tr}(AZ)]\,|0\rangle\langle 0|$$

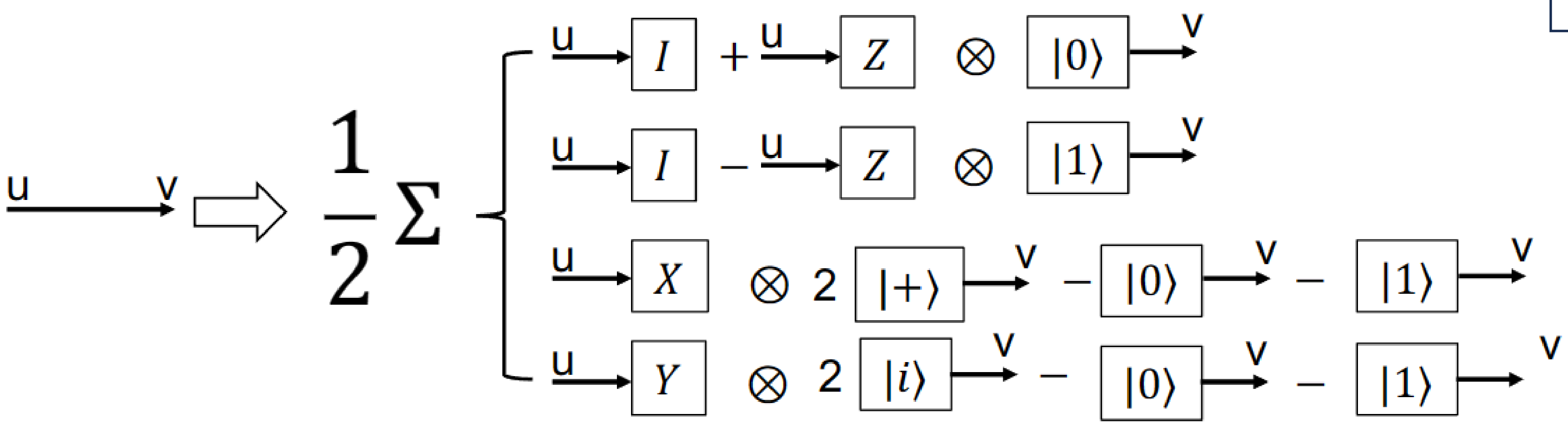
$$A_2 = [\mathrm{Tr}(AI) - \mathrm{Tr}(AZ)]\,|1\rangle\langle 1|$$

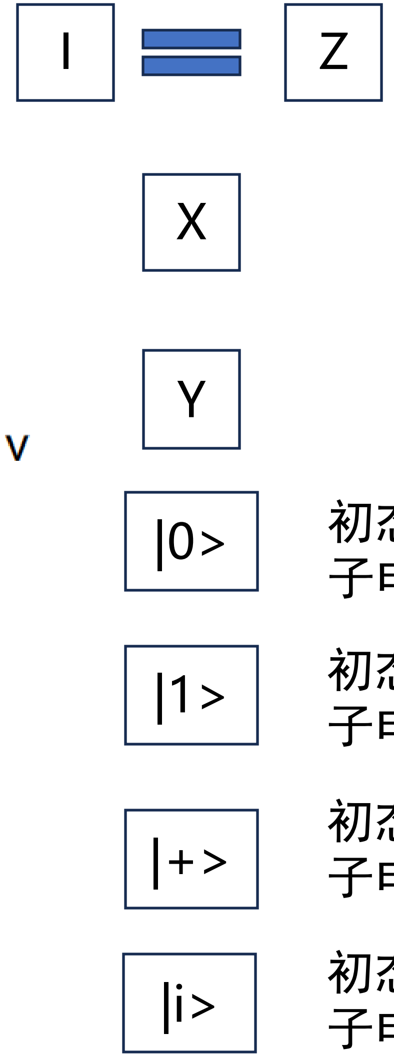
$$A_3 = \mathrm{Tr}(AX)[2|+\rangle\langle +| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|]$$

$$A_4 = \mathrm{Tr}(AY)[2|+i\rangle\langle +i| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|]$$

对于一个完整电路，切割其比特线，根据恒等式可知，可分为以上4个部分

电路切分-经典链接比特切割-理论部分





作用I或Z基的子电路

作用X基的子电路

作用Y基的子电路

初态为0的子电路

初态为1的子电路

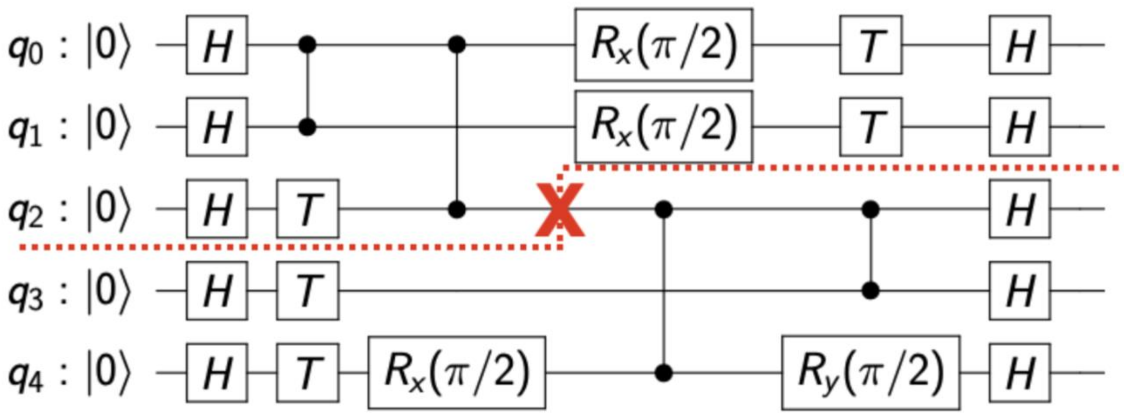
初态为+的子电路

初态为i的子电路

1. 第一部分：对上游子电路1进行I基测量得到的概率+Z基测量得到的概率与初态为|0>的下游子电路1做张量计算。
2. 第二部分：上游子电路1已经测量得到I基得到的概率，所以第二部分利用第一部分的计算结果，只是把+号变成-号与初态为|1>的下游子电路2做张量计算
3. 第三部分：上游子电路2进行X基测量的概率与2 *初态为|+>的下游子电路3 – 下游子电路1得到的概率-下游子电路2得到的概率做张量计算
4. 第四部分：上游子电路3进行Y基测量的概率与2*初态为|i>的下游子电路4-下游子电路1-下游子电路2的概率进行张量计算

电路切分-经典链接比特切割-例子

将如下电路按照红色的切口进行切分，展示计算过程

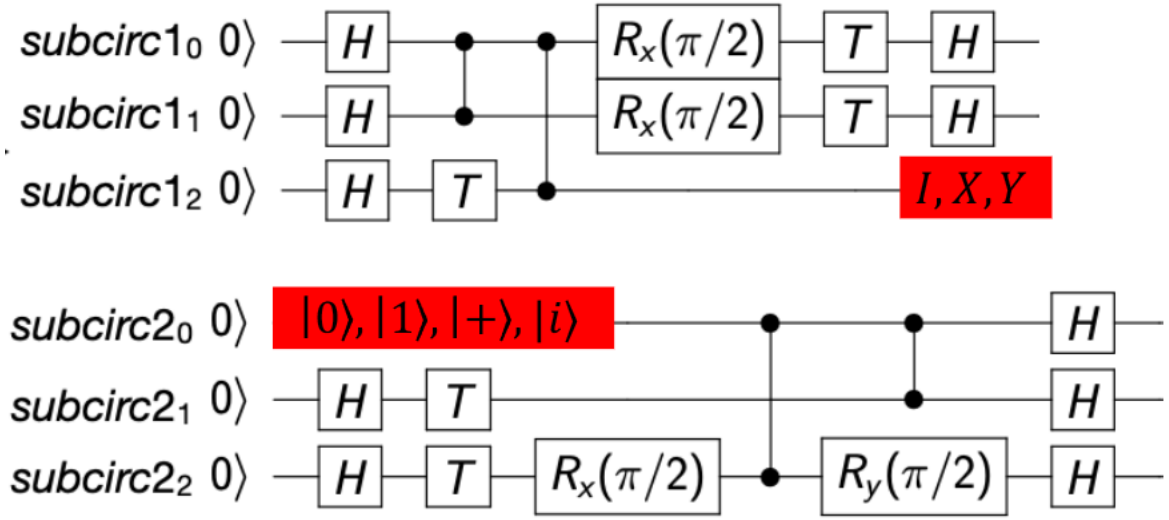


首先将 n-qubit 电路的输入初始化为 $|q_0,\ldots,q_{n-1}\rangle$ 状态，其中 $q_i \in \{|0\rangle,|1\rangle,|+\rangle,|+i\rangle\}$

测量所用基底为 $M_0,\ldots,M_{n-1}$ ，其中$M_i \in \{I,X,Y,Z\}$

此时对于一个量子电路C，即可描述其量子态和测量基

电路切分-经典链接比特切割-例子



此时，将电路切开后形成如上电路，5-Qubit的电路被拆分为2个3-Qubit的子电路，其中最终输出为前两个量子比特和后三个量子比特，subcirc12是中间输出，并不出现在最终输出中

其归属于上游电路subcirc1，上游电路的输出将会受其影响要乘一个乘法因子±1，规则如下：

由不同测量基的特征值c_i决定

$$\begin{cases} \overline{xx0}, \overline{xx1} \to +\overline{xx} & M_2 = I \\ \overline{xx0} \to +\overline{xx} & \\ \overline{xx1} \to -\overline{xx} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\overline{xx}$ 代表subcirc10和11

电路切分-经典链接比特切割-例子

此时，演示如何计算未切割电路的状态$|01010\rangle$ 的概率，子电路1对应拆解后的四个矩阵有四项：

$$p_{1,1}=p(|010\rangle \mid I)+p(|011\rangle \mid I)+p(|010\rangle \mid Z)-p(|011\rangle \mid Z)$$
$$p_{1,2}=p(|010\rangle \mid I)+p(|011\rangle \mid I)-p(|010\rangle \mid Z)+p(|011\rangle \mid Z)$$
$$p_{1,3}=p(|010\rangle \mid X)-p(|011\rangle \mid X)$$
$$p_{1,4}=p(|010\rangle \mid Y)-p(|011\rangle \mid Y).$$

子电路2对应的四项为：

$$p_{2,1}=p(|010\rangle||0\rangle)$$
$$p_{2,2}=p(|010\rangle||1\rangle)$$
$$p_{2,3}=2p(|010\rangle||+\rangle)-p(|010\rangle||0\rangle)-p(|010\rangle||1\rangle)$$
$$p_{2,4}=2p(|010\rangle||i\rangle)-p(|010\rangle||0\rangle)-p(|010\rangle||1\rangle).$$

最终$|01010\rangle$ 的重构概率结果为：

$$p(|01010\rangle)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}p_{1,i}\otimes p_{2,i}.$$

后处理过程

电路切分-经典链接比特切割-评估

经典链接电路切分的主要代价来自后处理，将一个电路拆分为两个子电路，此时概率重构需要进行张量计算。所以评估将会选择最优切分点，使得代价最小，将问题转换为一个混合整数规划问题，可用求解器计算

所以目标函数将会是最小化后处理的时间/浮点数计算次数。

给定最大电路宽度D和最大子电路数量N，此即为约束。

所以问题转换为：

Minimize objective：后处理时间 or 切割次数

s.t. constraints: 满足最大电路宽度D和最大子电路数量N

目录

电路切分-量子链接

经典链接的后处理代价过大，并且进行一次切分也就是就有一个辅助量子比特位被占用，后处理的复杂度也是指数级的。

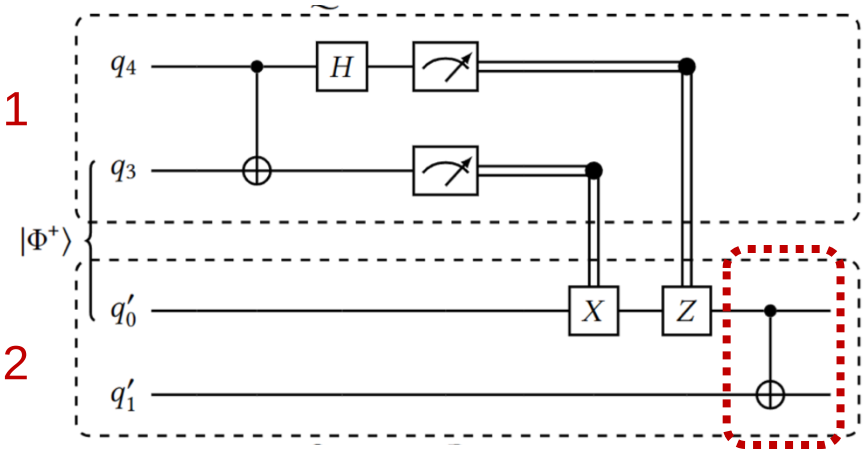
而量子链接则切分的是量子门，将一个本地门转换为远程门。但是与经典链接不同，进行量子链接的代价是需要将QPU分成两部分：通信量子比特位和数据量子比特位。

其次，量子链接相比经典链接需要：

1. 一个EPR对，一个量子位位于源节点，一个量子位位于目标节点
2. 经典通信，但所需求的经典通信要比经典链接的经典通信要少得多。

QPU1

QPU2



本地CX门

数据量子位

通信量子位

通信量子位

数据量子位

左图将一个包含一个cx门的2qubits电路，拆分到两个具有一个通信量子位的QPU上运行。

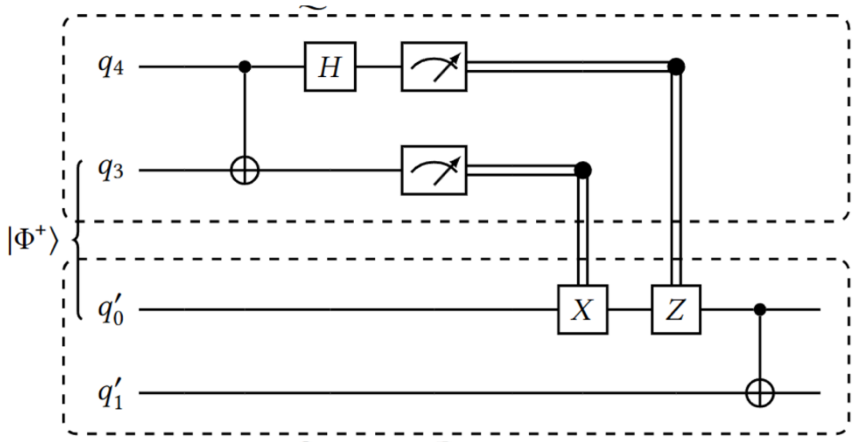
此时成功将一个本地cx门转为远程cx门。

电路切分-量子链接-种类

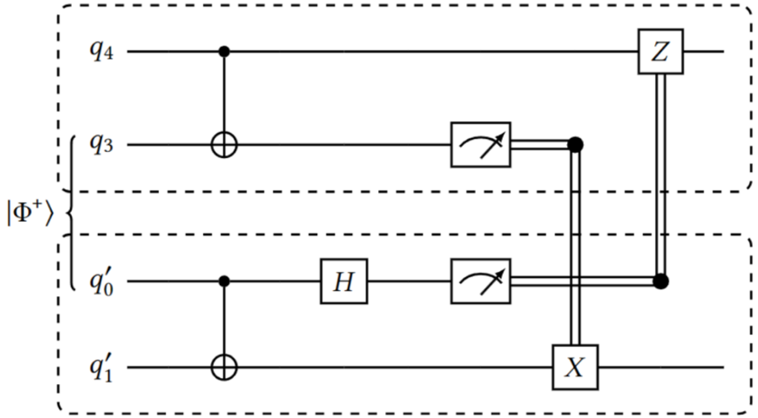
量子通信也就是将本地门转换为远程门有两种方式：

第一种方法，由Gottesman 和 Chuang提出，使用纠缠和测量来实现跨远距离量子比特的多比特量子门。其由两部分组成：纠缠器和解纠缠器。纠缠器与远程QPU共享量子位状态，此时需要消耗一个EPR对，执行量子门，然后解纠缠器则负责破坏残留纠缠，使得通信量子位再次可用。

第二种方法，则是使用量子隐形传态。和第一种方法相同，此时需要进行一位量子通信和两位经典通信。不过此种方法需要消耗两个EPR对，运行完量子门后需要消耗一个EPR对恢复，所以第一种方法相比第二种方法使用更广泛。

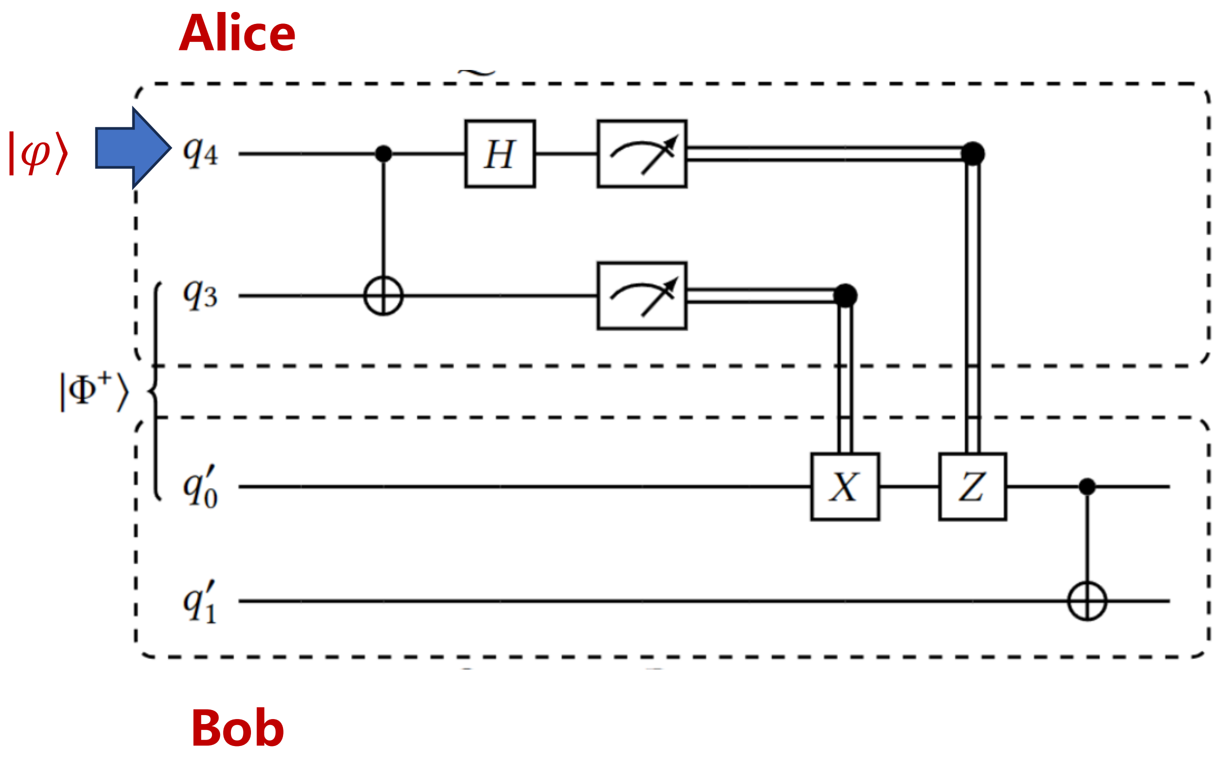


量子隐形传态方法



Cat纠缠器和解纠缠器

电路切分-量子链接-量子隐形传态



已知Alice和Bob都有两个量子位，一个数据量子位，一个通信量子位。此时Alice想要将量子态$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$传送给Bob，并做CX门，所以请求第三方EPR提供方，分发一个EPR对给他们，放置在q_3和q_0上

此时则有EPR对为：$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)$$

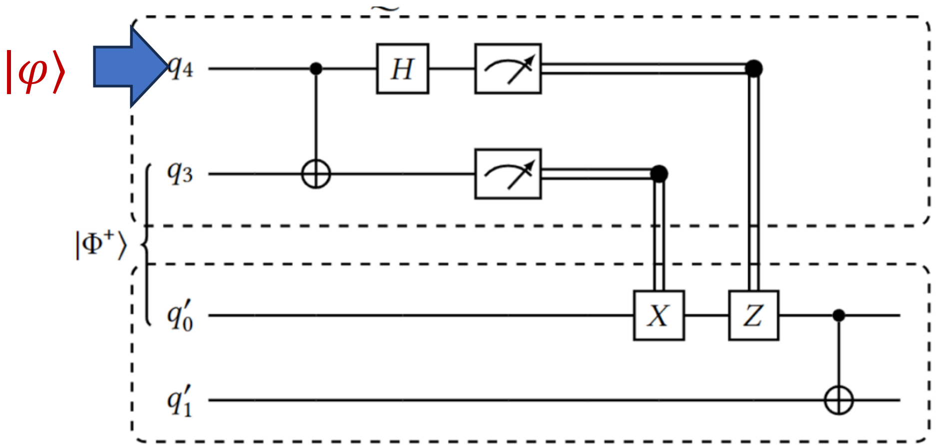
此时前3个量子比特的量子态则为

$$|\psi\rangle \otimes |e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle)$$

电路切分-量子链接-量子隐形传态

然后根据量子隐形传态协议，先对Alice的两个比特作CX门再做H门，则有

Alice



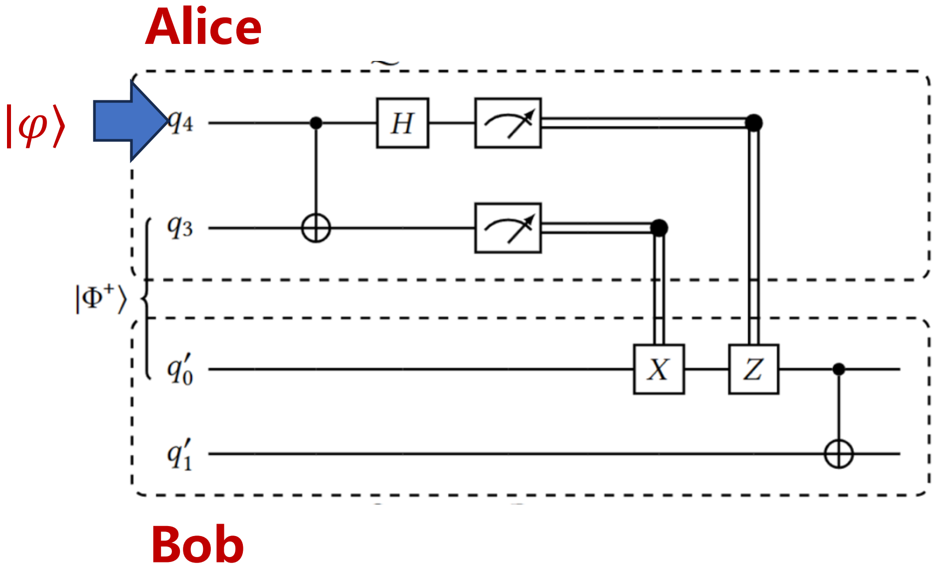
Bob

$$\begin{aligned}
&(H\otimes I\otimes I)(CNOT\otimes I)(|\psi\rangle\otimes|e\rangle)\\
&=(H\otimes I\otimes I)(CNOT\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|100\rangle+\beta|111\rangle)\\
&=(H\otimes I\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|110\rangle+\beta|101\rangle)\\
&=\frac{1}{2}(\alpha(|000\rangle+|011\rangle+|100\rangle+|111\rangle)+\beta(|010\rangle+|001\rangle-|110\rangle-|101\rangle))
\end{aligned}$$

此时可以将量子态拆开为

$$\begin{aligned}
=\frac{1}{2}(\ &|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\\
&+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)\\
&+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\\
&+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\quad)
\end{aligned}$$

电路切分-量子链接-量子隐形传态



此时测量这两个量子比特会获得

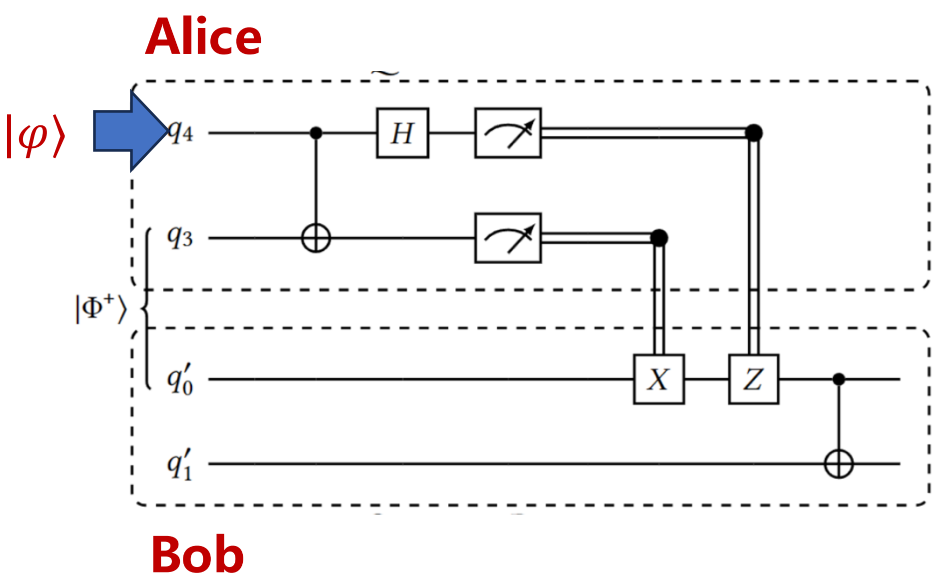
$$
\begin{aligned}
=\frac{1}{2}(\ &|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\\
&+|01\rangle(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)\\
&+|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\\
&+|11\rangle(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)\quad)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\rightarrow (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\\
|01\rangle &\rightarrow (\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)\\
|10\rangle &\rightarrow (\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)\\
|11\rangle &\rightarrow (\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle)
\end{aligned}
$$

此时测量得到$|00\rangle$可知，$q_0=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$
此时测量得到$|01\rangle$可知，$q_0=\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle$
此时测量得到$|10\rangle$可知，$q_0=\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle$
此时测量得到$|11\rangle$可知，$q_0=\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle$

电路切分-量子链接-量子隐形传态

浙江大學 ZHEJIANG UNIVERSITY



已知可以根据测量得到的数据确定最终q_0的态为什么，该如何还原呢

$$|00\rangle \to (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$
$$|01\rangle \to (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)$$
$$|10\rangle \to (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$
$$|11\rangle \to (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)$$

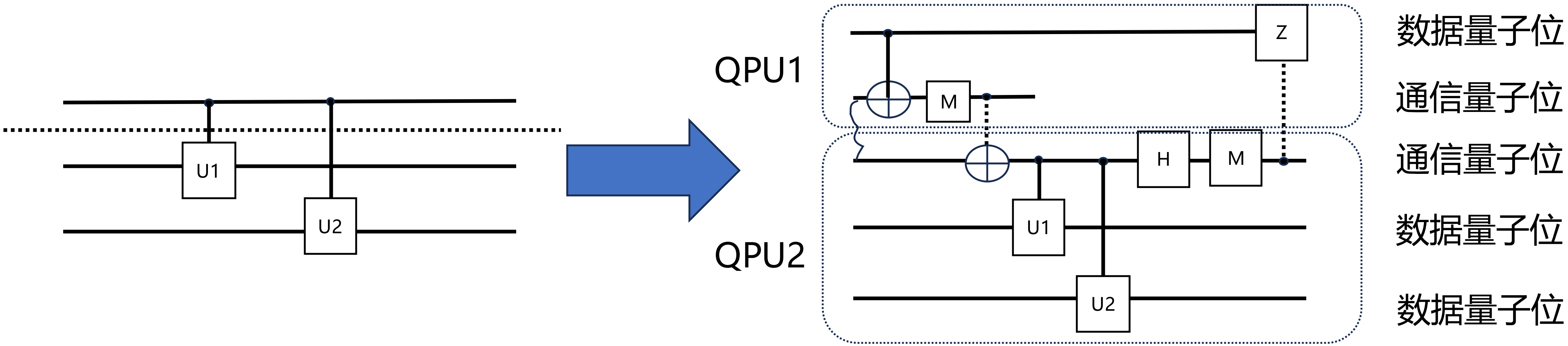
此时可以发现，可以根据获得的经典比特，作受控XZ门

Bob's State	Bits Received	Gate Applied
$(\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle)$	00	I
$(\alpha\|1\rangle + \beta\|0\rangle)$	01	X
$(\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle)$	10	Z
$(\alpha\|1\rangle - \beta\|0\rangle)$	11	ZX

最终可以还原量子态，并且作用CX门了

电路切分-量子链接

由上一页可知，量子链接的本质是切割门。而进行一次量子通信，不仅可以运行一个远程量子门，在符合某种特殊条件下，可同时运行多个远程量子门。



当量子门连续且控制位为同一个量子比特时，此时进行一次量子通信即可运行多个远程量子门

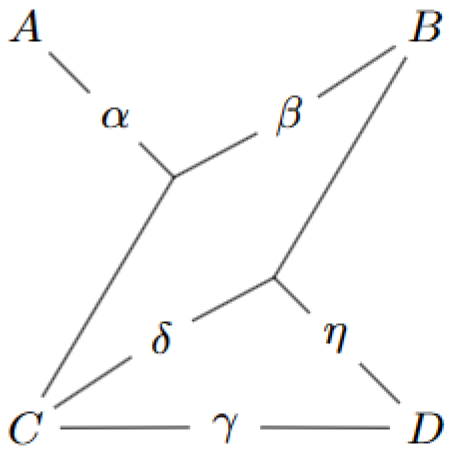
电路切分-量子链接-评估

量子链接的电路切分评估方式有很多，在这里介绍一种方法：超图划分。

此方法来自论文《Automated distribution of quantum circuits via hypergraph partitioning》

此论文将电路转换为超图，利用超图划分技术将超图进行切分，获取切分后最小的EPR数量。

超图是一种广义的图结构，相比传统的图，超图的边可以连接任意数量的顶点，而传统图的边只能连接两个顶点。



电路切分-量子链接-评估

量子电路转换成超图：

流程：
输入：circuit // 量子电路
输出：(V, H) // （点集和超边集合）

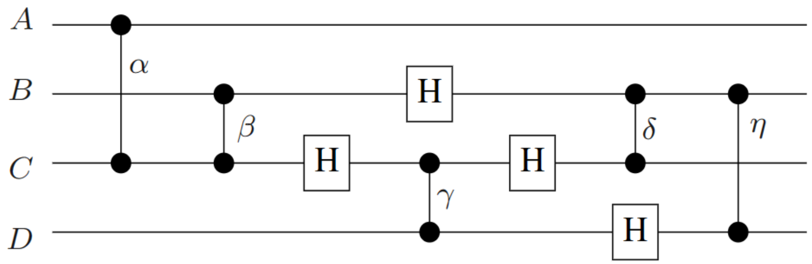
```
Begin
    V, H设为空集
    for qubit_wire in circuit.qubits: // 对于每条量子线
        V = V ∪ {qubit_wire}              // 将量子线加入点集
        hedge = {qubit_wire}               // 将量子线加入一条超边中
        for gate in qubit_wire:      // 对于每条量子线上的门
            if gate is CZ:           // 如果门是CZ
                V = V ∪ {gate}   // 将门加入点集
                hedge = hedge ∪ {gate}  // 将门加入一条超边中
            else //单门
                H = H ∪ {hedge} //一条超边形成加入超边集合
                hedge = {qubit_wire}
        H = H ∪ {hedge}
```

此论文中，点集包含了门和量子比特。

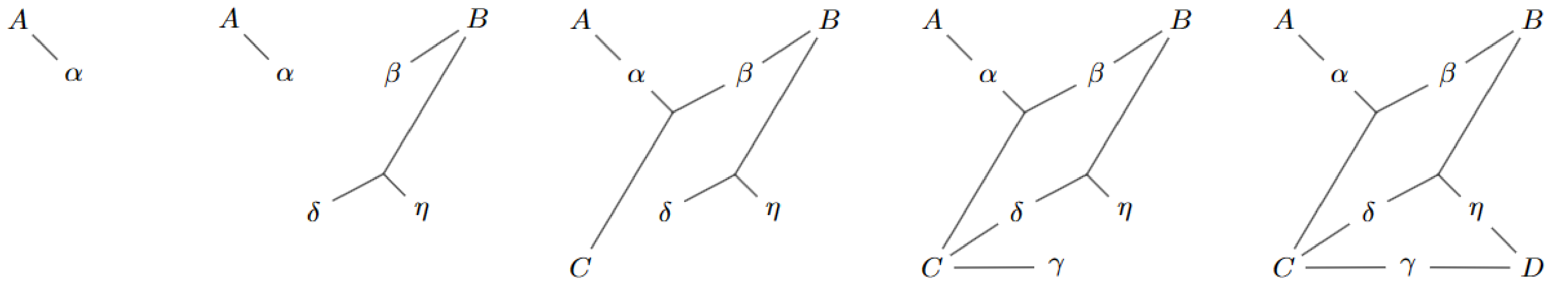
超边集合并不是门集，更像是记录了门的连续关系和门与量子比特的连续关系的集合

电路切分-量子链接-评估

输入：电路



输出：超图/点集和边集



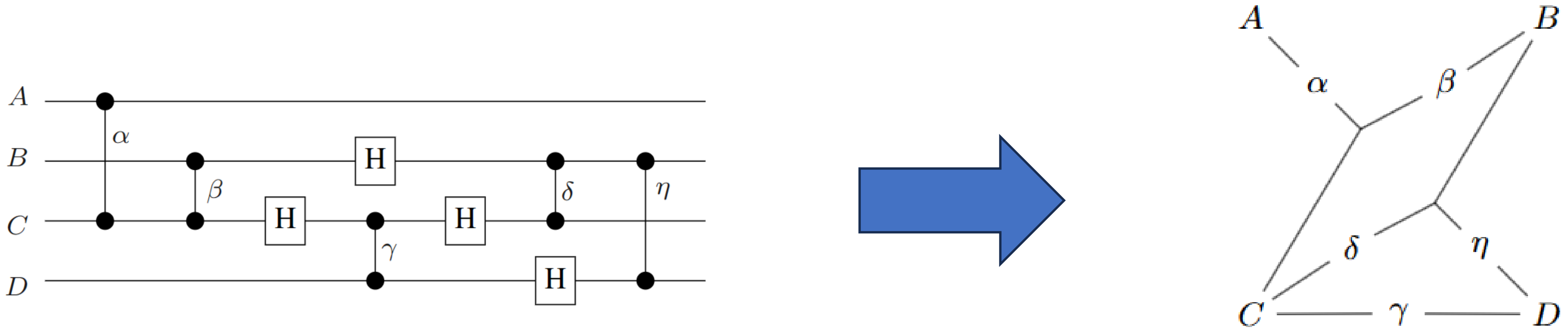
$V = \{A, \alpha\}$
$H = \{\{A, \alpha\}\}$

$V = \{A, \alpha, B, \beta, \delta, \eta\}$
$H = \{\{A, \alpha\}, \{B, \beta\}, \{B, \delta, \eta\}\}$

…

电路切分-量子链接-评估

进行超图划分，首先引入一个结论：切割次数是等于消耗EPR对的数量（证明过程略

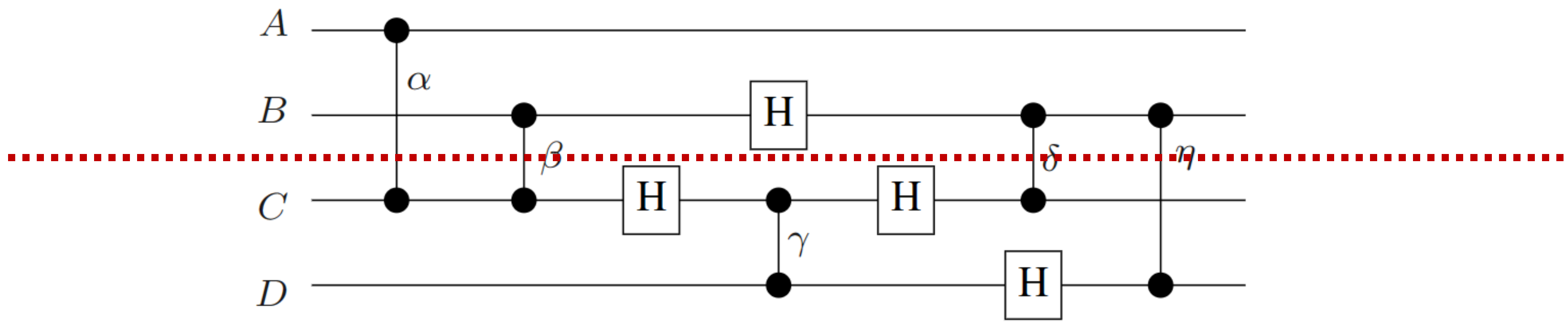


超图划分是一个NP问题，所以一般使用启发式算法得到较优的划分，一个比较经典的超图划分算法就是FM（Fiduccia-Mattheyses）算法。

其基本思想就是：通过不断迭代优化超图的划分，直到达到一定的停止条件。算法的核心是基于交换操作的局部搜索，通过移动超边以改善划分的质量。

也有现成的超图划分优化器：KaHyPar 可以使用。

电路切分-量子链接-例子



此时可以在BC之间切一下，分成两个2qubits 的量子电路

其中α和β两个门由于控制比特一致，可以只使用一个EPR对

其中δ和η两个门由于控制比特也一致，也可以只是用一个EPR对

所以此时分成两个量子电路，所需的通信代价为2个EPR对