理论作业一　量子比特与量子门

周楠　3220102535

2024 年 10 月 14 日

---

1. 已知双量子比特系统的量子态如下 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\intercal \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率。

利用量子态的归一化条件，即整个量子态的概率总和必须等于 1。这意味着态矢量的各个分量的绝对值平方之和必须等于 1。

$$\left|\frac{1}{2}\right|^2 + |x|^2 + |3x|^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + |x|^2 + 9|x|^2 + \frac{1}{8} = 1$$

$$10|x|^2 = \frac{5}{8}$$

$$|x|^2 = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

因此该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率为 $\frac{1}{16}$。

2. 已知单量子比特的态矢量为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

$$|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{3}{5}, \quad e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{4}{5}$$

因此，

$$e^{i\phi} = 1, \quad \phi = 0, \theta = 2 \cdot arccos(\frac{3}{5})$$

3. Bell 态指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0, 1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \tag{1}$$

a. 证明 Bell 态是纠缠态。

如果一个态不能表示为两个单量子比特的直接积形式，则它是纠缠态。

(a) $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

(b) $|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

(c) $|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

(d) $|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

我们逐个检查这四个 Bell 态，看看它们能否表示为单量子比特态的张量积。显然上述 Bell 态无法进行分解。

以 β_{00} 为例：如果测量第一个量子比特的状态为 $|0\rangle$，那么第二个量子比特的状态必定为 $|0\rangle$；同样，如果测量第一个量子比特的状态为 $|1\rangle$，那么第二个量子比特的状态也必定为 $|1\rangle$。

b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为 $|00\rangle$ 的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

(a) $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

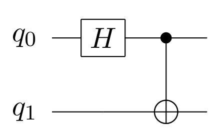
1. 对第一个量子比特应用 Hadamard 门：H。

2. 对两个量子比特应用 CNOT 门，第一个比特为控制比特，第二个为目标比特。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |0\rangle|0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{CNOT}\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

对应的电路图为：



(b) $|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

1. 对第一个量子比特应用 Hadamard 门

2. 对第二个量子比特应用 X 门（NOT 门）。

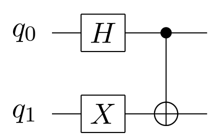
3. 对两个量子比特应用 CNOT 门，第一个比特为控制比特，第二个为目标比特。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |0\rangle|0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$X\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{CNOT}\frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

对应的电路图为：



(c) $|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

1. 对第一个量子比特应用 Hadamard 门

2. 对第一个量子比特应用 Z 门。

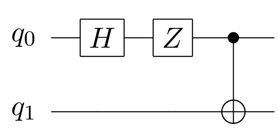
3. 对两个量子比特应用 CNOT 门，第一个比特为控制比特，第二个为目标比特。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |0\rangle|0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$Z\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{CNOT}\frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

对应的电路图为：



(d) $|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

1. 对第一个量子比特应用 Hadamard 门
2. 对第二个量子比特应用 X 门（NOT 门）。
3. 对第一个量子比特应用 Z 门。
4. 对两个量子比特应用 CNOT 门，第一个比特为控制比特，第二个为目标比特。

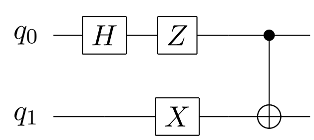
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} |0\rangle|0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$X\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

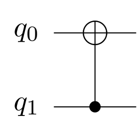
$$Z\frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

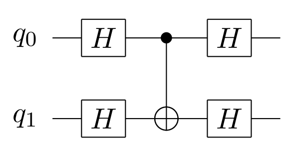
$$\mathrm{CNOT}\frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

对应的电路图为：



4. 证明下图中的两个量子电路等价。（提示：计算两个量子电路对应的酉矩阵）





1. 量子电路 1：q_1 作为控制位，q_0 作为目标位，对应的酉矩阵为

$$CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 量子电路 2：

(a) 1. 对 q_0 和 q_1 应用 Hadamard 门 H。

$$H \otimes H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) 2. 对 q_0 作为控制位，q_1 作为目标位应用 CNOT 门。

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) 3. 再次对 q_0 和 q_1 应用 Hadamard 门 H。

$$U = (H \otimes H) \cdot CNOT \cdot (H \otimes H) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = (H \otimes H) \cdot CNOT \cdot (H \otimes H) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

5. 当矩阵满足 $A = A^{\dagger}$ 时，则 A 为厄米矩阵

不妨设厄米算符的本征值为 λ_1 和 λ_2，$\lambda_1 \neq \lambda_2$

对应的本征向量分别为 $|\psi_1\rangle$ $|\psi_2\rangle$

① $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$\langle\psi|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$

$(\langle\psi|A|\psi\rangle)^* = (\lambda\langle\psi|\psi\rangle)^* = \lambda^*(\langle\psi|\psi\rangle)$

$= \langle\psi|A^{\dagger}|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

所以 $\lambda\langle\psi|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$ 厄米算符的本征值为实数

② $A|\psi_1\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle$ $A|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$

$\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$

又因为 $(A|\psi_1\rangle)^T = \langle\psi_1|A^T$ $(A|\psi_1\rangle)^{\dagger} = \langle\psi_1|A^* = \langle\psi_1|A$

所以 $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = (A|\psi_1\rangle)^{\dagger}|\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle$

所以 $\lambda_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \lambda_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$

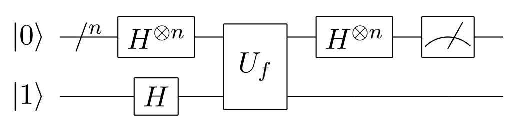
又因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$

不同本征值对应的本征态正交

6. Deutsch 算法展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

已知函数 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0，或对所有输入均输出 1）或平衡函数 (对恰好一半的输入输出 0，对另一半输入输出 1)。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数 f 的结构进行一次查询，即可判断 f 是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中，$U_f : |x, y\rangle \to |x, y \oplus f(x)\rangle$ 是实现函数 f 的 $n+1$ 比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断 f 是常数函数还是平衡函数。（提示：计算 f 为常数函数或平衡函数时的测量结果）

1. 初始状态假设我们有一个 n 比特的初始量子态 $|0\rangle^{\otimes n}$ 和一个辅助比特 $|1\rangle$，整个系统的初始状态可以写为：

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} \otimes |1\rangle$$

2. 第一步：Hadamard 变换对所有比特应用 Hadamard 门（$H^{\otimes n}$ 和 H），作用后的状态为：

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \right) \otimes \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}}$$

其中，$\sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$ 表示所有可能的 n 比特组合的叠加态。

3. 第二步：应用 U_f 门接下来，将状态输入到函数门 U_f，它的作用是将 $|x, y\rangle$ 变换为 $|x, y \oplus f(x)\rangle$。在我们的状态上应用 U_f 后，量子态变为：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)| = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes (-1)^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

因此，上述量子态可以进一步简化为：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

4. 第三步：再次应用 Hadamard 变换

对于单个量子比特 x_1

$$Hx_1 = \frac{\sum_{z \in \{0,1\}} (-1)^{xz} |z\rangle}{\sqrt{2}}$$

对前 n 个比特再次应用 Hadamard 变换，量子态演化为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x) \oplus x \cdot z} |z\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

其中 $x \cdot z$ 表示 x 和 z 的二进制内积，即 $x \cdot z = x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_{n-1} z_{n-1}$。

5. 第四步：测量前 n 个比特

$|0\rangle^{\oplus n}$ 的概率为：$\langle \psi_3 | 0 \rangle \langle 0 | \psi_3 \rangle = (\frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)})^2$ 因为因为除了 $|0\rangle$ 以外的 $|z\rangle$ 都和 $|0\rangle$ 垂直，内积是 0，所以其他项都没了，只剩下 $|z\rangle = |0\rangle$ 的这一项。

- 如果 f(X) 为常数函数，所有的 f(x) = 0 或者 1，所有 $(-1)^{f(x)}$ 都相等，平方后得到结果 1，测出 $|0\rangle^{\oplus n}$ 的概率为 1
- 如果 f(x) 为平衡函数，一半的 $(-1)^{f(x)} = 1$，一半的 $(-1)^{f(x)} = -1$，测出 $|0\rangle^{\oplus n}$ 的概率为 0.