(La formule qui pourrait vous sauver la vie en examen!)

Preuve de la série géométrique (culture personnelle)

Définissons d'abord S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X v^k$$

Pour trouver S_n, on peut faire une soustraction:

$$\begin{array}{rl} - \quad S_n = & X + Xv + Xv^2 + \dots + Xv^n \\ v S_n = & \phantom{X +{}} Xv + Xv^2 + \dots + Xv^n + Xv^{n+1} \\ \hline S_n - vS_n = & X - Xv^{n+1} \end{array}$$

$$S_n(1-v) = X - Xv^{n+1}$$

$$S_n(1-v) = X(1-v^{n+1})$$

$$S_n = X\left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} Xv^k = X\left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v}\right)$$

Note:

- il existe plusieurs variantes de cette formule, mais elles sont toutes équivalentes. Souvent, un simple changement de variables suffit pour passer d'une forme à l'autre.

- Comme $v<1$, quand $n\to\infty$, $v^{n+1}\to 0$. On a donc:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Xv^k = X\left(\frac{1}{1-v}\right)$$