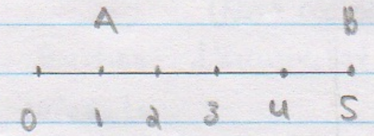
Question 1.

Pour comparer des CF, il faut les actualiser ou les accumuler

Schéma



$CF_A = +12\,000$

$CF_B = +20\,000$

Ici, on cherche à savoir pour quelles valeurs de i $PV_A > PV_B$

$\therefore \quad PV_A > PV_B$

$12\,000(1+i)^{-1} > 20\,000(1+i)^{-5}$

$(1+i)^4 > 5/3$

$i > 0{,}136219$

Ainsi, on préfère la valeur de 12 000\$ pour tous les taux d'intérêt annuels effectifs de plus 13,622%.

On peut se vérifier en comparant les valeurs actualisées à un tx de 14%.

$\therefore \quad 12\,000(1+i)^{-1} = 12\,000(1{,}14^{-1})$

$= 10\,526{,}32$

$\therefore \quad 20\,000(1+i)^{-5} = 20\,000(1{,}14^{-5})$

$= 10\,387{,}373$

Question 2

On veut tripler notre montant initial au temps t. Autrement dit,

$$A(t) = A(0) \cdot a(t)$$
$$3\,000\,000 = 1\,000\,000 \cdot a(t)$$
$$a(t) = 3$$

On sait que l'intérêt initial est de 2%, et qu'elle augmente de 0,5% tous les dix ans. Pour avoir une idée du nombre d'années, on peut procéder par tâtons.

$\therefore$ $a(10) = 1{,}02^{10} = 1{,}21899$
$a(20) = (1{,}02^{10})(1{,}025)^{10} = 1{,}56042$
$a(30) = (1{,}02^{10})(1{,}025^{10})(1{,}03^{10}) = 2{,}09707$
$a(40) = (1{,}02^{10})(1{,}025^{10})(1{,}03^{10})(1{,}035^{10}) = 2{,}95812224$
$a(50) = (1{,}02^{10})(1{,}025^{10})(1{,}03^{10})(1{,}035^{10})(1{,}04^{10}) = 4{,}37874$

Ainsi, on sait que $40 < t < 50$.

Trouvons maintenant la valeur exacte de t :

$$3 = a(t)$$
$$3 = a(40)\,(1+i)^{t^*} \qquad t = 40 + t^*$$
$$3 = 2{,}95812224\,(1+i)^{t^*}$$
$$1{,}014157 = (1{,}04)^{t^*}$$
$$0{,}35842 = t^*$$

Ainsi, $t = 40{,}35842$

Question 3 (pas le genre de question de Thomas)

On sait que la fonction d'accumulation de l'intérêt simple est la suivante

$$a(t) = (1+it)$$

La fonction d'accumulation de l'intérêt composé est la suivante

$$a(t) = (1+i)^t$$

Dans le problème, on a les variables suivantes

$\therefore$ $i = 0{,}05$ $j = 0{,}01$

Réécrivons la question en langage mathématique:

$$\therefore \quad 1000(1+it) = 2000(1+j)^t$$

$$1 + 0{,}05t = 2(1{,}01^t)$$

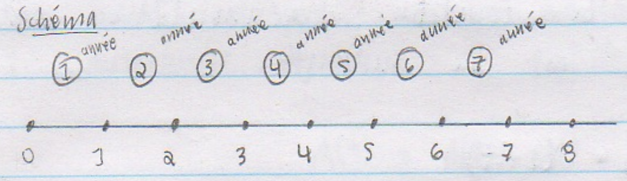
$$(\ldots)$$

$$t = 38{,}9151$$

$\boxed{\text{ou}}$ $t = 138{,}187$

Question 4

Schéma



Ainsi, 7^e année => entre $t=6$ et $t=7$

$\therefore \quad A(6) = 1000 + 10(6) + 6^2 = 1096$

$\therefore \quad A(7) = 1000 + 10(7) + 7^2 = 1119$

Trouvons maintenant le taux d'intérêt effectif de la 7^e année.

$\therefore \quad i = A(7)/A(6) - 1 = 0{,}020985401$

Question 5

a) Taux de rendement des 5 années

$\therefore \quad 8{,}35/10{,}08 - 1 = -0{,}17163$ [année 2005]

$\therefore \quad 9{,}34/8{,}35 - 1 = 0{,}118563$ [année 2006]

$\therefore \quad 11{,}11/9{,}34 - 1 = 0{,}189507$ [année 2007]

$\therefore \quad 12{,}00/11{,}11 - 1 = 0{,}080108$ [année 2008]

$\therefore \quad 10{,}57/12{,}00 - 1 = -0{,}119167$ [année 2009]

b) Taux de rendement annuel constant

$\therefore \quad (10{,}57/10{,}08)^{1/5} - 1 = 0{,}009538511$

Question 6

Schéma

$									20k	20k	20k	40k	40k	20k	20k	26k
Âge 1	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Âge 2	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	5%						7%									

Il faut actualiser tous les montants au temps $t = 0$.
Posons $v_1 = 1{,}05^{-1}$, $v_2 = 1{,}07^{-1}$.

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2 = 20\,000\,(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-1})$
$= 13\,947{,}95134$

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2^2 = 20\,000\,(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-2})$
$= 13\,035{,}46884$

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2^3 = 20\,000\,(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-3})$
$= 12\,182{,}68088$

$\therefore \quad 40\,000\, v_1^6 v_2^4 = 40\,000\,(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-4})$
$= 22\,771{,}3661$

$\therefore \quad 40\,000\, v_1^6 v_2^5 = 40\,000\,(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-5})$
$= 21\,281{,}6506$

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2^6 = 20\,000(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-6})$
$= 9944{,}696537$

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2^7 = 20\,000(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-7})$
$= 9294{,}108913$

$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 v_2^8 = 20\,000(1{,}05^{-6})(1{,}07^{-7})$
$= 8686{,}083096$

On additionne tous ces montants :

$$\therefore \quad 13\,947{,}95134 + 13035{,}46854 + 12\,182{,}68088 + 22\,771{,}3661 + 21\,281{,}6506 + 9944{,}696537 + 9294{,}108913 + 8686{,}083096 = 111\,144{,}01$$

Solution alternative (le concept sera vu plus tard dans le cours)

On peut déduire l'équation suivante :

$$\therefore \quad 20\,000\, v_1^6 \left(a_{\overline{8}|0,07} + v_2^3\, a_{\overline{2}|0,07}\right) = 111\,144{,}01$$

$$a_{\overline{8}|0,07} = \frac{1-v_2^8}{0{,}07} = 5{,}97129851$$

$$a_{\overline{2}|0,07} = \frac{1-v_2^2}{0{,}07} = 1{,}808018168$$

Question 7

On cherche à savoir le taux de rendement.

$\therefore \left(\frac{300}{225}\right)^{1/3} - 1 = 0,1006 \Rightarrow i = 10,06\%$

Question 8

La question est ici assez difficile à comprendre. On pourrait reformuler le problème ainsi:

- Mathieu emprunte 100\$ et il veut absolument payer 300\$ pour rembourser ce prêt. Il est prêt à accepter n'importe quel taux, pourvu que le moment où il devra rembourser ce prêt soit dans plus que 8 ans.

On peut résoudre ce problème en isolant la variable inconnue t dans l'équation suivante:

$$300 = 100(1+i)^t$$
$$300 = 100(1,08)^t$$
$$14,27 = t$$

Comme $t = 14,27 > 8$, Mathieu accepte la proposition de Georgette!

Question 9

Schéma

t	0	1	2	3	4
①	-2500	X		X	
②	-2500		Y		

On se retrouve donc avec les équations suivantes:

où $v = 1{,}04^{-1}$

① $$2500 = Xv + Xv^3$$
$$2500 = X(v + v^3)$$
$$1350{,}96 = X$$

② $$2500 = Yv^2$$
$$2704 = Y$$

Question 10

Le taux annuel composé 6 fois l'an s'écrit sous cette forme : $i^{(6)}$

On a donc $i^{(6)} = 0{,}12$

Il existe une formule générale pour transformer les taux nominals en taux annuels effectifs.

$$\underbrace{i}_{\text{taux annuel effectif}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

Ainsi, $i = \left(1 + \frac{0{,}12}{6}\right)^6 - 1 = 0{,}1261624.$

Question 11 (pas le genre de questions de Thomas)

On peut utiliser l'équation présentée à la question 10 et utiliser un solveur.

$$i = \left(1 + i^{(m)}/m\right)^{m} - 1$$

$$0{,}157625 = \left(1 + 0{,}15/m\right)^{m} - 1$$

$$m = 3$$

Question 12

On nous dit qu'on est en présence d'un taux nominal composé mensuellement : $i^{(12)}$.

$$\therefore \quad i = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right) - 1 = \left(1 + \frac{0{,}0125}{12}\right)^{12} - 1$$

$$= 0{,}012571864$$

Question 13

Rappelons d'abord l'inégalité suivante :

$$d < d^{(m)} < \delta < i^{(m)} < i$$

Ainsi, le plus bas taux possible est le taux d'escompte effectif. ($d = 20\%$)

On peut facilement transforme un taux d'escompte en taux d'intérêt.

$\therefore \quad v = (1-d) \Rightarrow i = d/_{1-d}$

$i = 0{,}2/_{0{,}8}$

$i = 0{,}25$

On cherche à connaitre un taux composé 12 fois l'an ($i^{(12)}$)

$\therefore \quad (1+i) = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$

$1{,}25 = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$

$0{,}225231182 = i^{(12)}$

Le taux composé mensuellement est 22,523%.

Question 14

Plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre ce problème. Ma préférée consiste à transformer le taux d'escompte en taux d'intérêt.

On a que $d^{(4)} = 0{,}03$

$\therefore \quad (1-d) = \left(1 - d^{(4)}/_4\right)^4$ (transformation en taux d'escompte effectif)

$d = 0{,}029664184$

$\therefore \quad v = (1-d) \Rightarrow i = d/_{1-d}$ (transformation en taux d'intérêt)

$i = 0{,}03057105$

Traçons maintenant le schéma de la situation:

Schéma

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2	2,25	2,50	2,75	3
$												20 000	

On veut actualiser le 20 000$ du temps 2,75 au temps 0.

$$\therefore \quad PV = 20\,000\, v^{2,75} = 20\,000\,(1+i)^{-2,75}$$
$$= 20\,000\,(0,920525173)$$
$$= 18\,410,50346$$

Note importante

2,75 ans = 11 trimestres

= 33 mois

Solution alternative

On aurait pu utiliser le fait que $v = (1-d)$. On aurait donc eu le développement suivant:

$$\therefore \quad PV = 20\,000\, v^{2,75} = 20\,000\,(1-d)^{2,75}$$
$$= 20\,000\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{11}$$
$$= 20\,000\left(1-\frac{0,03}{4}\right)^{11}$$
$$= 18\,410,50348$$

Question 15

Nous sommes ici en présence d'une force d'intérêt. On sait que :

$$A(t+h) = A(t) \cdot e^{\int_t^{t+h} \delta(u)\,du}$$

$$A(3) = A(1)\, e^{\int_1^3 \delta_t \, dt}$$

Résolvons l'intégrale :

$$\therefore \int_1^3 \delta_t \, dt = \int_1^3 \frac{1}{[t]+t+1} \, dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{t+2} \, dt + \int_2^3 \frac{1}{t+3} \, dt$$

$$= \ln(t+2) \Big|_1^2 + \ln(t+3) \Big|_2^3$$

$$= \ln(4) - \ln(3) + \ln(6) - \ln(5)$$

$$= \ln(4/3) + \ln(6/5)$$

On se retrouve donc avec l'équation suivante:

$$\therefore A(3) = A(1) \left[\exp\left(\ln(4/3) + \ln(6/5) \right) \right]$$

$$= 2(4/3)(6/5)$$

$$= 3{,}2$$

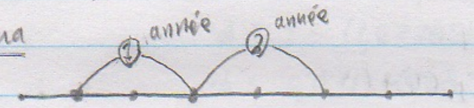
La valeur au $t=3$ est donc de $3{,}2$.

Question 16

a) On cherche le montant d'intérêts la 2^e année du dépôt. Pour ce faire, il faut trouver la valeur du montant accumulé du temps $t=2{,}5$ et celle au temps $t=1{,}5$.

Cependant, il ne faut pas oublier que le montant a été déposé au temps $t = 0{,}5$. On se retrouve donc avec la situation suivante.

Schéma



$\therefore \quad A(2{,}5) = A(0{,}5) \cdot a(2{,}5)/a(0{,}5)$

$= 500 \cdot 1{,}2125/1{,}0405$

$= 582{,}6525709$

$\therefore \quad A(1{,}5) = A(0{,}5) \cdot a(1{,}5)/a(0{,}5)$

$= 500 \cdot 1{,}1245/1{,}0405$

$= 540{,}365209$

Ainsi, le montant gagné en intérêts est :

$\therefore \quad A(2{,}5) - A(1{,}5) = 582{,}6525709 - 540{,}365209$

$= 42{,}2873619$

b) Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler de la définition de la force d'intérêt:

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

Déterminons la dérivée de notre fonction d'accumulation.

$$\therefore \quad a'(t) = \frac{d}{dt}\left[1 + 0{,}08t + 0{,}002t^2\right]$$

$$= 0{,}08 + 0{,}002(2)(t)$$

$$= 0{,}08 + 0{,}004t$$

On peut maintenant remplacer t par 1,33.

$$\therefore \quad \delta = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{0{,}08 + 0{,}004(1{,}33)}{1 + 0{,}08(1{,}33) + 0{,}002(1{,}33)^2}$$

$$= \underline{0{,}08532}$$

$$= 0{,}076869172$$

c) Il existe plusieurs manières de résoudre ce problème. L'une d'entres-elle consiste à trouver le taux d'intérêt effectif et de le transformer en taux effectif.

Pour ce faire, on peut utiliser la formule du taux de rendement :

$$\therefore \quad i = \frac{A(3)}{A(2)} - 1 = \frac{A(0{,}5) \cdot \frac{a(3)}{a(0{,}5)}}{A(0{,}5) \cdot \frac{a(2)}{a(0{,}5)}} - 1$$

$$= \frac{a(3)}{a(2)}$$

$$= \frac{1 + 0{,}08(3) + 0{,}002(3^2)}{1 + 0{,}08(2) + 0{,}002(2^2)} - 1$$

$$= 0{,}077054795$$

En se rappelant que $v = 1-d$, on peut facilement déduire que

$$d = 1 - v$$
$$d = 1 - (1+i)^{-1}$$
$$d = 1 - (1{,}077054795^{-1})$$
$$d = 0{,}07154213$$

On aurait aussi pu utiliser la définition d'un taux d'escompte:

$$d = \frac{A(t+h) - A(t)}{A(t+h)}$$
$$d = 1 - A(t)/A(t+h)$$
$$d = 1 - A(2)/A(3)$$
$$d = 1 - \frac{A(0,5)\ a(2)/a(0,5)}{A(0,5)\ a(3)/a(0,5)}$$
$$d = 1 - a(2)/a(3)$$
$$d = 0{,}07154213$$

Question 17

Ici, on a les variables suivantes:

$i = 1{,}75\%$
$B = 2{,}10\%$

On cherche r, le taux d'intérêt réel.

$$1 + r = \frac{1+i}{1+B} \Rightarrow r = 0{,}00342801 2$$

Question 18

Déterminons les taux d'intérêt offerts par la banque pour les trois années:

$$1+r = \frac{1+i}{1+B} \Rightarrow i = (1+B)(1+r) - 1$$

$\therefore$ $i_1 = (1+0{,}01)(1+0{,}05) - 1 = 0{,}0605$

$i_2 = (1+0{,}015)(1{,}05) - 1 = 0{,}06575$

$i_3 = (1+0{,}0175)(1{,}05) - 1 = 0{,}068375$

Déterminons maintenant la valeur accumulée du dépôt initial de 1500$.

$$A(3) = 1500(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) = 1811{,}260809$$

Déterminons le taux d'escompte effectif annuel:

$$A(0) = A(3)\, v^3$$
$$A(0) = A(3)\, (1-d)^3$$
$$0{,}060918202 = d$$

On peut maintenant facilement trouver le taux d'escompte composé 2 fois l'an.

$$1-d = \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2$$
$$0{,}061875341 = d^{(2)}$$

Ainsi, le taux d'escompte composé 2 fois l'an est 6,1875%.