Question 1

a) Pour ce genre de questions, il s'avère très utile de faire un schéma

<u>Schéma</u>

Mois	S18	O18	N18	D18	J19	F19	M19	A19	M19	J19	J19	A19	S19	O19
\$		B			A			442,26\$			442,26\$			442,26\$

Note: comme les séjours sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

En étudiant la situation, on remarque être en présence d'une annuité immédiate.

$$A = 442,26 \; a_{\overline{3}| i^{(4)}/4}$$

$$= 442,26 \; a_{\overline{3}| 0,0025}$$

$$= 442,26 \left[\frac{1 - v^3}{0,0025} \right]$$

$$= 1320,173638$$

b) Il faut maintenant seulement actualiser le montant trouvé en a à un taux nominal composé 4 fois l'an de 2%.

$$B = Av = (1320,173638)(1 + i^{(4)}/4)^{-1} = 1313,60561$$

Question 2

Commençons par tracer le schéma de la situation.

Schéma

$\ddot{a}$

Mois	S18	O18	N18	D18	J19	F19	M19	A19	M19	J19
$		X	X	X	X	X	X	X	X	
									-2000	

Note : Comme les dépôts sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

En étudiant la situation, on remarque que les dépôts se rapprochent d'une annuité due. En effet, pour avoir une annuité due, il faudrait accumuler le 2000 $ pour un mois supplémentaire.

$$2000\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right) = X\,\ddot{s}_{\overline{8}|\,i^{(12)}/12}$$

$$2000\,(1 + 0{,}0015) = X\,\ddot{s}_{\overline{8}|\,0{,}0015}$$

$$2003 = X\left((1{,}0015)\left[\frac{1{,}0015^{8} - 1}{0{,}0015}\right]\right)$$

$$248{,}6904509 = X$$

Question 3

On peut tracer un schéma pour s'aider dans la résolution de ce problème.

<u>Schéma</u>

t	J18	O18	N18	D18	J19	F19	M19	A19	M19	J19
$		X	X	X	X	X	1,5X	1,5X	1,5X	
$									-2000	

NOTE
Comme les dépots sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

On est ici en présence de 2 annuités immédiates.

$$2000 = (X s_{\overline{5}|i})(1+i)^3 + (1,5X) s_{\overline{3}|i} \qquad \text{où } i = \frac{0,018}{12}$$

$$2000 = X(5,015022517)(1,004506753) + 1,5X(3,00450225)$$

$$209,5474565 = X$$

Question 4

Traçons le schéma de la situation

<u>Schéma</u>

t	J18	O18	N18	D18	J19	F19	M19	A19	M19	J19
i	1,8%				1,2%					
$		X	X	X	X	X	X	X	X	
$									-2000	

NOTE
Comme les dépôts sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

On est ici en présence de 2 annuités immédiates

$$2000 = (X s_{\overline{3}|i})(1+j)^5 + X s_{\overline{5}|j} \qquad \text{où } i = 0,018/12 = 0,0015$$

$$j = 0,012/12 = 0,001$$

$$2000 = X(3,019554836) + X(5,01001)$$

$$249,0795 = X$$

Remarque

On peut remarquer que les versements sont plus grands qu'à la question 2, en raison de la baisse du taux d'intérêt pour les 3 derniers versements

Question 5

On peut s'aider d'un schéma pour résoudre le problème.

Schéma

s a

t	6/12	12/12	6/13	12/13	6/14	12/14	6/15	12/15	6/16	12/16	6/17	12/17	6/18
\$		150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
\$						X							

On cherche à savoir la valeur des versements en décembre 2014.

$$X = 150\, s_{\overline{5}|0{,}03} + 150\, a_{\overline{7}|0{,}03}$$

$$X = 150\,(s_{\overline{5}|0{,}03} + a_{\overline{7}|0{,}03})$$

$$X = 150\,(5{,}30913581 + 6{,}230282955)$$

$$X = 1730{,}912815$$

La valeur des 12 versements au 31 décembre 2014 est donc de 1730,912815 \$.

Solution alternative

On aurait aussi pu trouver la valeur présente des versements et accumuler ce montant jusqu'à la date désirée. On aurait eu le développement suivant :

$$X = 150\, a_{\overline{12}|i}\, (1+i)^5$$

$$= 150\, a_{\overline{12}|0{,}03}\, (1{,}03^5)$$

$$= 1730{,}912815$$

Question 6

a) On peut facilement trouver le taux effectif par mois :

$$(1+i)^{12} = 1{,}05$$

$$i = 0{,}004074124$$

On sait que la valeur présente de la rente est de 50 000. Elle veut retirer à chaque fin du mois pendant 5 ans (60 mois). On se retrouve donc avec l'équation suivante :

$$50\,000 = X\, a_{\overline{60}|i}$$

$$213{,}89151 = X$$

Preuve d'une annuité

On cherche à prouver la formule d'annuité:

t	0	1	2	3	4	5
$		X	X	X	X	X

On cherche à déterminer la valeur présente (à $t=0$) des montants déposés.

$$\therefore \quad PV = Xv + Xv^2 + Xv^3 + Xv^4 + Xv^5 \qquad v = (1+i)^{-1}$$

$$= Xv\,(1 + v + v^2 + v^3 + v^4)$$

$$= Xv \times \sum_{k=0}^{4} v^k$$

La série géométrique

$$\sum_{k=0}^{k} Xv^k = \frac{1-v^{k+1}}{1-v}$$

$$= Xv\left(\frac{1-v^5}{1-v}\right)$$

$$= Xv\left(\frac{1-v^5}{1-\frac{1}{1+i}}\right)$$

$$= Xv\left(\frac{1-v^5}{\frac{1+i-1}{1+i}}\right)$$

$$= Xv\left(\frac{1-v^5}{i}\right)(1+i)$$

$$= X\left(\frac{1-v^5}{i}\right) = X\,a_{\overline{5}|i}$$

On procède de manière similaire pour prouver les autres formules ($\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, $s_{\overline{n}|i}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$) $\blacksquare$

(La formule qui pourrait vous sauver la vie en examen!)

Preuve de la série géométrique (culture personnelle)

Définissons d'abord S_n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X v^k$$

Pour trouver S_n, on peut faire une soustraction:

$$\begin{array}{rcccccccc} - \quad S_n & = & X & + & Xv & + Xv^2 + \dots + & Xv^n & & \\ v\,S_n & = & & & Xv & + Xv^2 + \dots + & Xv^n & + & Xv^{n+1} \\ \hline S_n - vS_n & = & X & - & Xv^{n+1} & & & & \end{array}$$

$$S_n(1-v) = X - Xv^{n+1}$$

$$S_n(1-v) = X(1-v^{n+1})$$

$$S_n = X\left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} Xv^k = X\left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v}\right)$$

Note:

- il existe plusieurs variantes de cette formule, mais elles sont toutes équivalentes. Souvent, un simple changement de variables suffit pour passer d'une forme à l'autre.

- Comme $v<1$, quand $n \to \infty$, $v^{n+1} \to 0$. On a donc:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Xv^k = X\left(\frac{1}{1-v}\right)$$

1.6.3.

t	0	1	2	3	4	5
X	1					
Y	1					

Pour le fond X, on a $d^{(2)} = 0{,}08$.

Trouvons la valeur accumulée de X à $t=5$.

$$\therefore \quad (1)\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^{-2(5)} = (1 - 0{,}04)^{-10}$$

$$= 1{,}504\ 137\ 953$$

On a aussi, de l'autre côté, la fonction suivante:

$$\therefore \quad 1\left(\exp\left(\int_0^5 \frac{t^2}{k}\,dt\right)\right) = \exp\left(\frac{t^3}{3k}\Big|_0^5\right)$$

$$= \exp\left(\frac{125}{3k}\right)$$

On doit maintenant isoler k.

$$1{,}504\ 137\ 953 = \exp\left(\frac{125}{3k}\right)$$

$$102{,}07 = k$$

1.6.4.

Quelques observations avant de commencer:

- la force d'intérêt de l'intérêt composé ne dépend pas de t. $(\ln(1+i))$
- la force d'intérêt de l'intérêt simple dépend de t. $(i/1+it)$

Déterminons i

$$\therefore \quad (1+i) = \left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$$
$$i = 0{,}1025$$

$$\therefore \quad \ln(1+i) = i/_{1+it}$$
$$\ln(1{,}1025) = i/_{1+5i}$$

$$(1+5i)\ln(1{,}1025) = i$$

$$\ln(1{,}1025) = 0{,}512\ 048\ 358\ i$$

$$0{,}190\ 549\ 973 = i$$

$$\therefore \quad Z = 1000(1+5i) = 1952{,}749\ 865$$

1.4.8

On a un dépôt de X, qui cumule de l'intérêt à chaque mois

Schéma

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\$		0,0075X	0,0075X	0,0075X		...		...		...			0,0075X + X

Chaque mois, on nous crédite l'intérêt $\left(\frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075\right)$

$$\therefore \quad 0{,}0075X \, s_{\overline{12}|0{,}0075} + X = 0{,}0075X\left(\frac{(1{,}0075)^{12}-1}{0{,}0075}\right) + X$$

$$= X(1{,}0075^{12} - 1) + X$$

$$= X\left[1{,}0075^{12} - 1 + 1\right]$$

$$= X(1{,}0075^{12})$$