RÉSUMÉ

Il existe plusieurs manières d'accumuler de l'intérêt:

	Taux d'intérêt	Taux d'escompte
Simple	$1+ni$	$1-nd$
Composé	$(1+i)^n$	$(1-d)^n$

Définition

∴ $$i_{t+h} = \frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)}$$

∴ $$d_{t+h} = \frac{A(t+h) - A(t)}{A(t+h)}$$

∴ $$v = (1+i)^{-1}$$

∴ $$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = (1-d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(k)}}{k}\right)^{-k} = e^{\delta}$$

∴ $$A(t) = A(0)\, a(t)$$

∴ $$a(t, t+h) = \exp\left(\int_t^{t+h} \delta(t)\, dt \right.$$

∴ $$\delta(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt} \ln(A[t])$$

∴ $$d < d^{(m)} < \delta < i^{(m)} < i$$

∴ $$\frac{1+i}{1+B} = 1+r$$

Pour les annuités, on a les 4 formules de base :

$\therefore \quad a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-v^n}{i}$

$\therefore \quad \ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\dfrac{(1-v^n)}{i} = \dfrac{1-v^n}{d} = (1+i)\, a_{\overline{n}|i}$

$\therefore \quad s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\therefore \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\dfrac{((1+i)^n - 1)}{i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d} = (1+i)\, s_{\overline{n}|i}$

On peut toujours s'aider de la série géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v^k = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$$

On a aussi les formules suivantes :

$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-v^n}{i^{(m)}} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, a_{\overline{n}|i}$

Quand $m \to \infty$, on a $i^{(\infty)} = \delta$

$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1+i)\dfrac{(1-v^n)}{i^{(m)}} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, \ddot{a}_{\overline{n}|i}$

$s^{(m)}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, s_{\overline{n}|i}$

$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1+i)\dfrac{((1+i)^n - 1)}{i^{(m)}} = \dfrac{i}{i^{(m)}}\, \ddot{s}_{\overline{n}|i}$

Question 7

Trouvons d'abord la valeur équivalente d'un taux d'intérêt nominal composé 365 fois l'an.

$\therefore \quad e^{\delta} = (1+i) = \left(1+\frac{i^{(365)}}{365}\right)^{365}$ $\quad 0{,}018\ 243\ 631$

$e^{0{,}08} = \left(1+\frac{i^{(365)}}{365}\right)^{365}$

$i^{(365)} = 0{,}080\ 008\ 768$

D'une part, on a l'annuité qui se compose 365 fois l'an ! D'autre part, on a une annuité qui se compose continûment. On a 50 périodes de 1 an, donc on doit travailler avec des montants annuels [365(25) = 9125]

$\therefore \quad 9125\, a^{(365)}_{\overline{50}|} = 9125\left[\frac{1-v^{50}}{i^{(365)}}\right]$

$= 9125\left[\frac{1-e^{-50(0{,}08)}}{i^{(365)}}\right]$

$= 111\ 961{,}10$

$\therefore \quad 9125\, \bar{a}_{\overline{50}|} = 9125\left[\frac{1-v^{50}}{\delta}\right]$

$= 9125\left[\frac{1-e^{-50(0{,}08)}}{0{,}08}\right]$

$= 111\ 973{,}37$

La valeur de l'annuité continue est supérieure de

$111\ 973{,}37 - 111\ 961{,}10 = 12{,}27.$

Question 8

a) Trouvons d'abord le nombre n de fois où Claire est allé au cinéma.

$$2000 = 25\, a_{\overline{n}|0,5\%}$$

$$2000 = 25 \left[\frac{1-v^n}{0,005} \right]$$

$$2/5 = 1 - v^n$$

$$3/5 = v^n$$

$$n = -\frac{\ln(3/5)}{\ln(1,005)} = 102,4203253$$

Ainsi, le nombre entier de sorties que Claire peut se permettre est 102

b) On a l'équation suivante :

$$2000 = 25\, a_{\overline{102}|0,5\%} + X v^{102}$$

$$6,295\ 765\ 800 = X v^{102}$$

$$10,470\ 968\ 740 = X$$

Elle pourra dépenser 10,47 \$ de plus lors de sa dernière sortie.

c) On se retrouve avec l'équation suivante :

$$10,470\ 968\ 740\,(1+i)^n = 25$$

$$(1,005)^n = 25/10,470\ 968\ 740$$

$$n = 174,488\ 628\ 700$$

Il faudrait attendre 174,488 628 700 mois avant de retourner au cinéma.

Question 9 (pas le genre de question de Thomas)

On aurait l'équation suivante :

$$25\, a_{\overline{102}|i} = 2000$$

$$a_{\overline{102}|i} = 80$$

$$\frac{1-v^{102}}{i} = 80$$

$$i = 0,4933$$ (réponse trouvée avec la BA II+)

Pour ce genre de question, Thomas donne des choix de réponse. On n'a qu'à tester tous les choix de réponse dans l'équation.

Question annuité continue

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$			0,5			1					

$\therefore \quad A(5) = A(2)\ a(2,5)$

$1 = 0{,}5 \exp\left(\int_2^5 a(1+t)^{-1}\, dt \right)$

$2 = \exp \int_3^6 a u^{-1} du \qquad u = 1+t$

$2 = \exp\left(a \ln(u) \Big|_3^6 \right)$

$2 = \exp\left(a \ln(6) - \ln(3)\right)$

$2 = \exp\left(a \ln(6/3)\right)$

$2 = \exp\left(\ln(2)^a\right)$

$1 = a$

$\therefore \quad A(10) = \int_1^X a(t,X)\, dt \cdot a(X,10)$

$= \int_1^X \left[\exp \int_t^X (1+u)^{-1} du\right] dt \cdot \exp\left(\int_X^{10} (1+u)^{-1} du\right)$

$= \int_1^X e^{\int_t^X (1+u)^{-1} du}\, e^{\int_X^{10} (1+u)^{-1} du}\, dt$

$= \int_1^X e^{\int_t^{10} (1+u)^{-1} du}\, dt$

Hilroy

$$= \int_1^x e^{\int_{t+1}^{11} v^{-1}\,dv}\,dt$$ $v = 1+u$, $dv = du$

$$= \int_1^x \exp\left[\ln(v)\Big|_{t+1}^{11}\right] dt$$

$$= \int_1^x \exp\left(\ln\left(\tfrac{11}{t+1}\right)\right) dt$$

$$= \int_1^x \frac{11}{t+1}\,dt$$

$$= \int_2^{x+1} 11u^{-1}\,du$$ $u = t+1$, $du = dt$

$$= 11\ln(u)\Big|_2^{x+1}$$

$$= 11\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad 10 = 11\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$2e^{10/11} - 1 = x$$

$$3{,}464\,130\,169 = x$$

Question annuité continue

Nous sommes ici en présence d'une annuité continue.
Traçons le schéma de la situation:

Schéma

t   0   1   2   3   4   5

$ ⟵ ? ⟶

$$\therefore \quad 100 = \int_x^5 h(t)\, e^{\int_t^5 \delta(u)\, du}\, dt$$

$$100 = \int_x^5 10(1+t) \exp\left[\int_t^5 2(1+u)^{-1}\, du\right] dt$$

$$100 = \int_x^5 10(1+t) \exp\left[2 \ln(1+u)\Big|_t^5\right] dt$$

$$100 = \int_x^5 10(1+t) \exp\left[\ln\left(\tfrac{6}{1+t}\right)^2\right] dt$$

$$100 = \int_x^5 10(1+t) \left(\frac{6}{1+t}\right)^2 dt$$

$$100 = \int_x^5 \frac{360}{1+t}\, dt$$

$$100 = 360 \ln(1+t)\Big|_x^5$$

$$100 = 360 \ln\left(\tfrac{6}{1+x}\right)$$

$$e^{5/18} = \tfrac{6}{1+x}$$

$$x = \tfrac{6}{e^{5/18}} - 1 = 3{,}544\ 790\ 770$$

Question

On a la série de paiements suivante :

t	0	1	2	3	4	5	6
\$		X	X	$2X$	X	X	$2X$

Trouvez la valeur à $t=0$ si le taux d'intérêt est i.

On peut voir le schéma suivant :

t	0	1	2	3	4	5	6
$\$_1$		X	X	X	X	X	X
$\$_2$				X			X

On a donc l'équation suivante :

$$PV = X a_{\overline{6}|i} + X a_{\overline{2}|j} \qquad \text{où } j = (1+i)^3 - 1$$

On aurait aussi pu passer par les séries géométriques :

$$PV = Xv + Xv^2 + Xv^3 + Xv^4 + Xv^5 + Xv^6$$
$$+ Xv^3 + Xv^6$$

$$= X(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 + v^6)$$
$$+ X(v^3 + v^6)$$

$$= X a_{\overline{6}|i} + X a_{\overline{2}|j} \qquad \text{où } j = (1+i)^3 - 1$$