

Question 1

a) Pour ce genre de questions, il s'avère très utile de faire un schéma

Schéma

Mars 518 018 N18 D18 J1a F19 M19 A19 M19 J19 J19 A19 S19 O19
\$ B A 442,26\$ 442,26\$ 442,26\$

Note: comme les séjours sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

En étudiant la situation, on remarque être en présence d'une annuité immédiate.

$$A = 442,26 \text{ a}_{37, \frac{1}{4}}$$

$$= 442,26 \text{ a}_{37,0,025}$$

$$= 442,26 \left[\frac{1 - v^3}{0,0225} \right]$$

$$= 1320,173638$$

b) Il faut maintenant seulement actualiser le montant trouvé en a à un taux nominal composé 4 fois l'an de 2%.

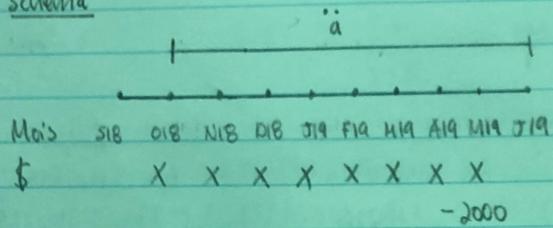
$$B = Av = (1320,173638) \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-1} = 1313,60561$$

Hilary

Question 2

Commençons par tracer le schéma de la situation.

Schéma



Note : Comme les dépôts sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

En étudiant la situation, on remarque que les dépôts se rapprochent d'une annuité due. En effet, pour avoir une annuité due, il faudrait accumuler le 2000\$ pour un mois supplémentaire.

$$2000 \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right) = X \ddot{s}_{87}^{(12)}$$

$$2000 \left(1 + 0,0015\right) = X \ddot{s}_{87}^{(12)}$$

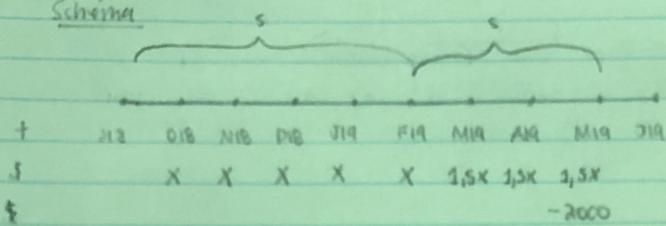
$$2000 = X \left(1,0015 \left[\frac{1,0015^8 - 1}{0,0015} \right]\right)$$

$$248,6904509 = X$$

Question 3

On peut tracer un schéma pour aider dans la résolution de ce problème.

Schéma



NOTE

comme les dépôts sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

On est ici en présence de 2 annuités immédiates.

$$2000 = (X s_{\overline{5}i}) (1+i)^3 + (1,5X) s_{\overline{3}i} \quad \text{où } i = \frac{0,018}{12}$$

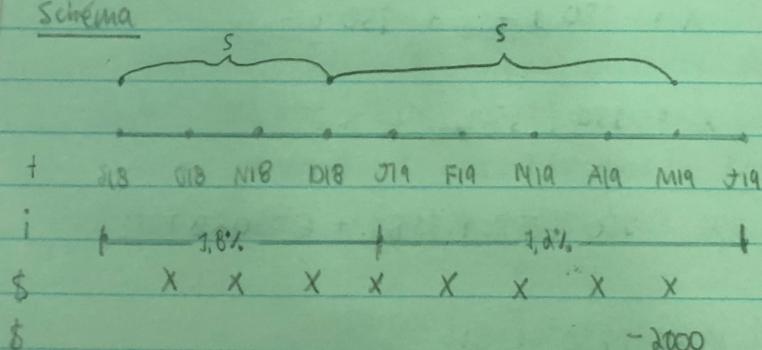
$$2000 = X (5,015022517) (1,004506753) + 1,5X (3,00450225)$$

$$209,5474565 = X$$

Question 4

Tracons le schéma de la situation

Schéma



NOTE

comme les dépôts sont à la fin du mois, j'ai décidé de les placer au début du mois suivant.

On est ici en présence de 2 annuités immédiates

$$2000 = (X s_{\overline{5}j}) (1+j)^5 + X s_{\overline{1}j} \quad \text{où } i = 0,018/12 = 0,0015$$

$$2000 = X (3,019854836) + X (5,01007) \quad j = 0,012/12 = 0,001$$

$$249,0795 = X$$

Hilary

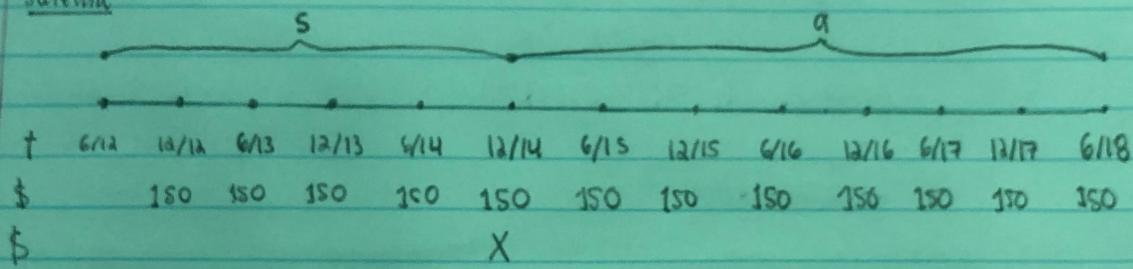
Remarque

On peut remarquer que les versements sont plus grands qu'à la question 2, en raison de la baisse du taux d'intérêt pour les 3 derniers versements.

Question 5

On peut aider d'un schéma pour résoudre le problème.

Schéma



On cherche à savoir la valeur des versements en décembre 2014.

$$X = 150 s_{\overline{5} \mid 0,03} + 150 a_{\overline{2} \mid 0,03}$$

$$X = 150 (s_{\overline{5} \mid 0,03} + a_{\overline{2} \mid 0,03})$$

$$X = 150 (5,30913581 + 6,230282955)$$

$$X = 1730,912815$$

La valeur des 13 versements au 31 décembre 2014 est donc de 1730,912815 \$.

Solution alternative

On aurait aussi pu trouver la valeur présente des versements et accumuler ce montant jusqu'à la date désirée. On aurait eu le développement suivant :

$$\begin{aligned} X &= 150 \alpha_{127,1} (1+i)^5 \\ &= 150 \alpha_{137,0,03} (1,03)^5 \\ &= 1730,912815 \end{aligned}$$

Question 6

- a) On peut facilement trouver le taux effectif par mois :

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= 1,05 \\ i &= 0,004074124 \end{aligned}$$

On sait que la valeur présente de la rente est de 50 000. Elle veut retirer à chaque fin de mois pendant 5 ans (60 mois). On se retrouve donc avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 50\,000 &= X \alpha_{60,1} \\ 213,89151 &= X \end{aligned}$$

Hilroy

Preuve d'une annuité

On cherche à prouver la formule d'annuité:

+	0	1	2	3	4	5
\$	X	X	X	X	X	X

On cherche à déterminer la valeur présente (à $t=0$) des montants déposés.

$$\therefore PV = Xv + Xv^2 + Xv^3 + Xv^4 + Xv^5 \quad \left\{ v = (1+i)^{-1} \right.$$

$$= Xv (1 + v + v^2 + v^3 + v^4)$$

$$= Xv \times \sum_{k=0}^4 v^k$$

$$= Xv \left(\frac{1 - v^5}{1 - v} \right)$$

$$= Xv \left(\frac{1 - v^5}{1 - \frac{v}{1+i}} \right)$$

$$= Xv \left(\frac{1 - v^5}{\frac{1+i-1}{1+i}} \right)$$

$$= Xv \left(\frac{1 - v^5}{i} \right) (1+i)$$

$$= X \left(\frac{1 - v^5}{i} \right) = X a_{5|i}$$

La série géométrique

$$\sum_{k=0}^K Xv^k = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v}$$

On procède de manière similaire pour prouver les autres formules ($a_{m|i}$, $s_{m|i}$, $\bar{s}_{m|i}$)

Nihoy

(La formule qui pourrait vous sauver la vie en examen!)

Preuve de la série géométrique (culture personnelle)

Définissons d'abord S_n .

$$S_n = \sum_{k=0}^n Xv^k$$

Pour trouver S_n , on peut faire une soustraction:

$$\begin{aligned} S_n &= X + Xv + Xv^2 + \dots + Xv^n \\ vS_n &= \quad \quad Xv + Xv^2 + \dots + Xv^n + Xv^{n+1} \\ S_n - vS_n &= X - Xv^{n+1} \end{aligned}$$

$$S_n(1-v) = X - Xv^{n+1}$$

$$S_n(1-v) = X(1-v^{n+1})$$

$$S_n = X \left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v} \right)$$

$$\sum_{k=0}^n Xv^k = X \left(\frac{1-v^{n+1}}{1-v} \right)$$

Note:

- il existe plusieurs variantes de cette formule, mais elles sont toutes équivalentes. Souvent, un simple changement de variables suffit pour passer d'une forme à l'autre.

- comme $v < 1$, quand $n \rightarrow \infty$, $v^{n+1} \rightarrow 0$. On a donc:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Xv^k = X \left(\frac{1}{1-v} \right)$$

1.6.3.

t	0	1	2	3	4	5
X	1					
Y	1					

Pour le fond X, on a $d^{(2)} = 0,08$.

Trouvons la valeur accumulée de X à $t=5$.

$$\therefore \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2} \right)^{\frac{x(5)}{2}} = (1 - 0,04)^{-10}$$
$$= 1,504\ 137\ 953$$

On a aussi, de l'autre côté, la fonction suivante:

$$\therefore \mathbb{E} \left(\exp \left(\int_0^5 \frac{t^3}{k} dt \right) \right) = \exp \left(\frac{t^3}{3k} \Big|_0^5 \right)$$
$$= \exp \left(\frac{125}{3k} \right)$$

On doit maintenant isoler k.

$$1,504\ 137\ 953 = \exp \left(\frac{125}{3k} \right)$$
$$102,07 = k$$

1.6.4.

Quelques observations avant de commencer:

- la force d'intérêt de l'intérêt composé ne dépend pas de t . ($\ln(1+i)$)
- la force d'intérêt de l'intérêt simple dépend de t . ($i/(1+it)$)

Déterminons i

$$\therefore (1+i) = \left(1 + \frac{i}{\alpha}\right)^{\alpha}$$
$$i = 0,1025$$

$$\therefore \ln(1+i) = \frac{1}{1+it}$$
$$\ln(1,1025) = \frac{i}{1+si}$$

$$(1+si) \ln(1,1025) = i$$

$$\ln(1,1025) = 0,512\ 048\ 358\ i$$

$$0,190\ 549\ 973 = i$$

$$\therefore Z = 1000(1+si) = 1952,749\ 865$$

1.4.8

On a un dépôt de X , qui cumule de l'intérêt à chaque mois

Schéma

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\$	0,0075X + X												

Chaque mois, on nous crédite l'intérêt ($\frac{0,09}{12} = 0,0075$)

$$\begin{aligned}\therefore 0,0075X \underset{+ 0,0075X}{\cancel{+ 0,0075X}} + X &= 0,0075X \left(\frac{(1,0075)^{12} - 1}{0,0075} \right) + X \\ &= X(1,0075^{12} - 1) + X \\ &= X[1,0075^{12} - 1 + 1] \\ &= X(1,0075^{12})\end{aligned}$$