4.Проста експонента

Розглянемо тенденцію виду: $y = ab^t$. Логарифмуємо це співвідношення:

$$\ln y_t = \ln a + t \ln b$$

Отримали лінійну функцію відносно t. Параметри a і b розраховуємо так, як і у випадку лінійного тренду. Для спрощеного розрахунку інтервалу можна скористатися параметром k^* для лінійного тренду.

Тоді прогнозний інтервал матиме вигляд:

$$H.M.: ant\,ln(\ln \hat{y}_{n+L} - S_y k^*),$$

$$B.M.: ant\,ln(\ln \hat{y}_{n+L} + S_y k^*),$$

де $S_y = \sqrt{\frac{(\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2}{n-2}}$

5.Логарифмична парабола

Розглядається тенденція виду $y_t = a\,b^t\,c^{t^2}$. Логарифмуємо цей вираз: $\ln y_t = \ln a + t\,\ln b + t^2\,\ln c$. Це квадратична функція відносно параметра t. Оцінку параметрів a, b, c і прогнозний інтервал знаходимо так, як для многочлена другого ступеня.

Прогнозний інтервал буде таким:

$$H.M.: ant\,ln(\ln \hat{y}_{n+L} - S_y k^*),$$

$$B.M.: ant\,ln(\ln \hat{y}_{n+L} - S_y k^*),$$

де k^* - табульовані значення для многочлена другого ступеня, а $S_y = \sqrt{\frac{(\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2}{n-3}}$.

6.Модифікована експонента

Тендніця має вигляд: $y_t = c - a\,b^t$. Вважаємо, ща параметр $a > 0$. Вираз зведемо до лінійного виду: $\ln (c - y_t) = \ln a + t\,\ln b$. Позначемо $z_t = \ln (c^* - y_t)$. Вважаємо, що $c = c^*$ - відоме, тобто, відома асимптота. Отримаємо такий вираз для прогнозного інтервалу:

$$H.M.: z_{n+L} - S_z\,k^*,$$

$$H.M.: z_{n+L} + S_z\,k^*,$$

де S_z - середньоквадратичне віждхилення від тренду $z_t = \ln a + t\,\ln b$. Тоді прогнозний інтервал для y_{n+L} має вигляд:

$$H.M.: c^* - ant\,ln(z_{n+L} - S_z\,k^*),$$

$$B.M.: c^{*} - ant\, ln(z_{n+L} + S_z\, k^{*}),$$

Якщо параметр c невідомий, то можна оцінити параметри модифікованної експоненти $y = c{+}a\, b^t$ методом трьох сум. Згідно з цим методом часовий ряд розбиваємо на три однакових відрізка і позначимо через $\sum_1 y_t, \sum_2 y_t, \sum_3 y_t$ суми рівнів кожного з відрізків, n -кількість рівнів у кожному з відрізків. Вікростовуючи алгоритм методу трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів c, a і b:

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 y_t - \sum_2 y_t}{\sum_2 y_t - \sum_1 y_t}},\ a = (\sum\nolimits_2 y_t - \sum\nolimits_1 y_t)\frac{b-q}{(b^n-1)^2},$$

$$c = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_1 y_t \cdot \sum_3 y_t - (\sum_2 y_t)^2}{\sum_1 y_t + \sum_3 y_t - 2\sum_2 y_t}\right].$$

Зауважимо, що метод трьох сум працює, якщо коливанняряду досить малі і результати не дуже чутливі до похибок. Тому перед оцінкою ряд необхідно згладити за допомогою ковзної середньої, якщо у ряді досить сильні коливання, або усунути досить великі викиди і замінити їх на усереднені.

7.Крива Гомперця

Тенденція, що описується кривою Гомперця має вигляд $y = c\, a^{b^t}$. За допомогою логарифмування криву Гомперця можна представити у вигляді модифікованної експоненти:

$$ln y_t = \ln c + b^t \ln a$$

Застосувавши метод трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів:

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 \ln y_t - \sum_2 \ln y_t}{\sum_2 \ln y_t - \sum_1 \ln y_t}},\ \ln a = \left(\sum\nolimits_2 \ln y_t - \sum\nolimits_1 \ln y_t\right)\frac{b-1}{(b^n-1)^2},$$

$$c = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_1 \ln y_t \cdot \sum_3 \ln y_t - (\sum_2 \ln y_t)^2}{\sum_1 \ln y_t + \sum_3 \ln y_t - 2\sum_2 \ln y_t}\right].$$

Слід пам'ятати про зауваження, що робится при розрахунку параметрів модифікованної, відносно коливань і похибок.

8.Логістична крива Перла-Ріда

а) Якщо логістична крива має вигляд

$$\frac{1}{y_t = k + a\, b^t},$$

то застосувавшиметод трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 \frac{1}{y_t} - \sum_2 \frac{1}{y_t}}{\sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_1 \frac{1}{y_t}}},\ a = (\sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_1 \frac{1}{y_t}) \frac{b-1}{(b^n-1)^2},$$

$$k = \frac{1}{n}\left(\sum_1 \frac{1}{y_t} - \frac{b^n-1}{b-1} a\right) \ \texttt{або}\ k = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_1 \frac{1}{y_t} \cdot \sum_3 \frac{1}{y_t} - (\sum_2 \frac{1}{y_t})^2}{\sum_1 \frac{1}{y_t} + \sum_3 \frac{1}{y_t} - 2\sum_2 \frac{1}{y_t}}\right].$$

б) Нехай логістична крива представлена у вигляді

$$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}$$

Метод трьох сум дає такі оцінки параметрам логістичної кривої:

$$a = \frac{1}{n}\left(\ln D_1 - \ln D_2\right), k = n : \left(\sum_1 \frac{1}{y_t} - \frac{D_1^2}{D_1 - D_2}\right),$$

$$b = \frac{k}{c} \frac{D_1^2}{D_1 - D_2},\ \texttt{де}\ c = \frac{1 - e^{-na}}{1 - e^a}, D_1 = \sum_1 \frac{1}{y_t} - \sum_2 \frac{1}{y_t},$$

$$D_2 = \sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_3 \frac{1}{y_t}.$$

в) Якщо логістична крива має вигляд

$$y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}}$$

і відсутній повний ряд даних, то для оцінки