

## 4. Проста експонента

Розглянемо тенденцію виду:  $y = ab^t$ . Логарифмуємо це співвідношення:

$$\ln y_t = \ln a + t \ln b$$

Отримали лінійну функцію відносно  $t$ . Параметри  $a$  і  $b$  розраховуємо так, як і у випадку лінійного тренду. Для спрощеного розрахунку інтервалу можна скористатися параметром  $k^*$  для лінійного тренду.

Тоді прогнозний інтервал матиме вигляд:

$$H.M. : ant \ln(\ln \hat{y}_{n+L} - S_y k^*),$$

$$B.M. : ant \ln(\ln \hat{y}_{n+L} + S_y k^*),$$

$$\text{де } S_y = \sqrt{\frac{(\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2}{n-2}}$$

## 5. Логарифмічна парабола

Розглядається тенденція виду  $y_t = a b^t c^{t^2}$ . Логарифмуємо цей вираз:  $\ln y_t = \ln a + t \ln b + t^2 \ln c$ . Це квадратична функція відносно параметра  $t$ . Оцінку параметрів  $a, b, c$  і прогнозний інтервал знаходимо так, як для многочлена другого ступеня.

Прогнозний інтервал буде таким:

$$H.M. : ant \ln(\ln \hat{y}_{n+L} - S_y k^*),$$

$$B.M. : ant \ln(\ln \hat{y}_{n+L} + S_y k^*),$$

$$\text{де } k^* - \text{табульовані значення для многочлена другого ступеня, а } S_y = \sqrt{\frac{(\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2}{n-3}}.$$

## 6. Модифікована експонента

Тенденція має вигляд:  $y_t = c - a b^t$ . Вважаємо, що параметр  $a > 0$ . Вираз зведемо до лінійного виду:  $\ln(c - y_t) = \ln a + t \ln b$ . Позначемо  $z_t = \ln(c - y_t)$ . Вважаємо, що  $c = c^*$  - відоме, тобто, відома асимптота. Отримаємо такий вираз для прогнозного інтервалу:

$$H.M. : z_{n+L} - S_z k^*,$$

$$B.M. : z_{n+L} + S_z k^*,$$

де  $S_z$  - середньоквадратичне відхилення від тренду  $z_t = \ln a + t \ln b$ . Тоді прогнозний інтервал для  $y_{n+L}$  має вигляд:

$$H.M. : c^* - ant \ln(z_{n+L} - S_z k^*),$$

$$B.M. : c^* - \text{ant } \ln(z_{n+L} + S_z k^*),$$

Якщо параметр  $c$  невідомий, то можна оцінити параметри модифікованої експоненти  $y = c + a b^t$  методом трьох сум. Згідно з цим методом часовий ряд розбиваємо на три однакових відрізка і позначимо через  $\sum_1 y_t, \sum_2 y_t, \sum_3 y_t$  суми рівнів кожного з відрізків,  $n$  - кількість рівнів у кожному з відрізків. Вікростовуючи алгоритм методу трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів  $c, a$  і  $b$ :

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 y_t - \sum_2 y_t}{\sum_2 y_t - \sum_1 y_t}}, \quad a = (\sum_2 y_t - \sum_1 y_t) \frac{b - 1}{(b^n - 1)^2},$$

$$c = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sum_1 y_t \cdot \sum_3 y_t - (\sum_2 y_t)^2}{\sum_1 y_t + \sum_3 y_t - 2 \sum_2 y_t} \right].$$

Зауважимо, що метод трьох сум працює, якщо коливання ряду досить малі і результати не дуже чутливі до похибок. Тому перед оцінкою ряд необхідно згладити за допомогою ковзної середньої, якщо у ряді досить сильні коливання, або усунути досить великі викиди і замінити їх на усереднені.

## 7. Крива Гомперця

Тенденція, що описується кривою Гомперця має вигляд  $y = c a^{b^t}$ . За допомогою логарифмування криву Гомперця можна представити у вигляді модифікованої експоненти:

$$\ln y_t = \ln c + b^t \ln a$$

Застосувавши метод трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів:

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 \ln y_t - \sum_2 \ln y_t}{\sum_2 \ln y_t - \sum_1 \ln y_t}}, \quad \ln a = \left( \sum_2 \ln y_t - \sum_1 \ln y_t \right) \frac{b - 1}{(b^n - 1)^2},$$

$$c = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sum_1 \ln y_t \cdot \sum_3 \ln y_t - (\sum_2 \ln y_t)^2}{\sum_1 \ln y_t + \sum_3 \ln y_t - 2 \sum_2 \ln y_t} \right].$$

Слід пам'ятати про зауваження, що робиться при розрахунку параметрів модифікованої, відносно коливань і похибок.

## 8. Логістична крива Перла-Ріда

а) Якщо логістична крива має вигляд

$$\frac{1}{y_t} = k + a b^t,$$

то застосувавши метод трьох сум отримаємо такі оцінки параметрів

$$b = \sqrt[n]{\frac{\sum_3 \frac{1}{y_t} - \sum_2 \frac{1}{y_t}}{\sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_1 \frac{1}{y_t}}}, \quad a = \left( \sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_1 \frac{1}{y_t} \right) \frac{b-1}{(b^n-1)^2},$$

$$k = \frac{1}{n} \left( \sum_1 \frac{1}{y_t} - \frac{b^n-1}{b-1} a \right) \quad \text{або} \quad k = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sum_1 \frac{1}{y_t} \cdot \sum_3 \frac{1}{y_t} - (\sum_2 \frac{1}{y_t})^2}{\sum_1 \frac{1}{y_t} + \sum_3 \frac{1}{y_t} - 2 \sum_2 \frac{1}{y_t}} \right].$$

б) Нехай логістична крива представлена у вигляді

$$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}$$

Метод трьох сум дає такі оцінки параметрам логістичної кривої:

$$a = \frac{1}{n} (\ln D_1 - \ln D_2), \quad k = n : \left( \sum_1 \frac{1}{y_t} - \frac{D_1^2}{D_1 - D_2} \right),$$

$$b = \frac{k}{c} \frac{D_1^2}{D_1 - D_2}, \quad \text{де} \quad c = \frac{1 - e^{-na}}{1 - e^a}, \quad D_1 = \sum_1 \frac{1}{y_t} - \sum_2 \frac{1}{y_t},$$

$$D_2 = \sum_2 \frac{1}{y_t} - \sum_3 \frac{1}{y_t}.$$

в) Якщо логістична крива має вигляд

$$y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}}$$

і відсутній повний ряд даних, то для оцінки