寻找资金管理的圣杯：

基于凯利公式的量化仓位管理系统

GitHub: restinnotes

1 引言：寻找资金管理的圣杯

在构建交易系统时，最难的问题往往不是“买什么”，而是**“买多少”**。如果买得太少，资金利用率低，浪费了机会；如果买得太多，一次剧烈波动就可能导致账户归零。

本章节将详细阐述如何从最基础的数学原理出发，推导出一个量化仓位管理系统，旨在在高波动市场中最大化收益率，同时控制风险。LEAPS 是实现杠杆与风险控制的一种工具，但核心理念在于科学地分配资金。

2 第一阶段：起源 —— 离散凯利公式

(The Origin: Discrete Kelly Criterion)

一切的起点，是赌场里的抛硬币游戏。假设你有一个胜率 p 的游戏，赢了赚 b 倍，输了亏光。为了让长期财富增长速度最大化（而不是单次赢最多），数学家 J.L. Kelly 推导出了著名的公式：

> **基础公式：**
>
> $$f^* = \frac{bp - q}{b}$$

其中：

- p: 赢的概率
- q: 输的概率 $(1 - p)$
- b: 赔率

局限性：这个公式假设游戏是“离散”的（玩一把就结束，要么赢要么输）。但股票市场是“连续”的，股价每一秒都在波动，不存在“输光”或“翻倍”的绝对界限。

3 第二阶段：进化 —— 连续时间莫顿比例

(Evolution: Merton's Fraction)

为了适应股市的连续波动，诺贝尔奖得主 Robert Merton 将凯利公式引入随机微积分领域。对于一个遵循几何布朗运动的资产，最佳仓位取决于**收益率**和**波动率**的对抗。

核心公式：莫顿比例

$$f^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

这个公式揭示了两个深刻的真理：

1. **分子（动力）**：$\mu - r$ 是超额收益（预期收益减去无风险利率）。收益越高，仓位越大。
2. **分母（刹车）**：σ^2 是方差。注意，这里是平方！这意味着波动率对仓位的惩罚是指数级的。如果波动率翻倍，为了活命，你的仓位必须砍掉 75%。

4 第三阶段：策略适配与杠杆实现

(Adaptation: Strategy Adjustment and Leverage Implementation)

在实际股市中，单纯的莫顿比例无法直接应用，因为不同标的存在估值偏离和波动率变化。我们需要对公式进行策略性适配，将 LEAPS 视为独立资产类别，精确计算其净优势（Net Edge）。

4.1 单标的动力与回报修正

1. 正股回归动力（μ_{stock}）

利用均值回归原理计算正股的预期年化收益：

$$\mu_{\text{stock},i} = \lambda_i \cdot \ln\left(\frac{V_i}{P_i}\right)$$

其中 λ_i 为回归速度（弹性系数），V_i 为合理估值，P_i 为当前价格。偏离度越大，潜在反弹动力越强。

2. LEAPS 净优势（ERP）

考虑 LEAPS 的杠杆放大效应，并严格扣除资金占用成本（r_f）与期权时间损耗（θ），得

到真实的净优势：

$$\mathrm{ERP}_i = (\mu_{\mathrm{stock},i} \cdot L_i) - r_f - \theta_{\mathrm{annual},i}$$

注：此处 θ_{annual} 为年化时间损耗率（正值），体现维持杠杆头寸的“租金”成本。

3. 估值折扣系数 (α)

引入“风险水位”概念，确保在价格接近硬底时资金利用率最高，而在接近目标价时自动收缩敞口：

$$\alpha_i = 1 - \beta \cdot \left(\frac{P_i - P_{\mathrm{floor},i}}{V_i - P_{\mathrm{floor},i}} \right)$$

其中 $P_{\mathrm{floor},i}$ 为历史极值硬底。当 $P_i \to P_{\mathrm{floor}}$ 时，$\alpha \to 1.0$（满仓信心）；当 $P_i \to V_i$ 时，$\alpha \to 1 - \beta$（折扣保护）。

4.2 LEAPS 杠杆工具说明

为了实现非对称收益与尾部风险控制，我们使用深度实值远期期权（LEAPS）：

- **行权价（Strike Price）**：设置在硬底 (P_{floor}) 附近，物理上截断下行尾部风险。即便正股腰斩，LEAPS 的最大亏损也被锁定。
- **Delta 控制**：选择 $\delta > 0.8$ 的合约，获得接近正股的线性收益，提供约 2.0x - 3.0x 的有效杠杆 (L)。
- **Theta 优化**：虽然引入了时间损耗，但由于策略专门捕捉被低估标的的高 μ 值，且深度实值期权的损耗率较低，策略的高 ERP 足以覆盖 Theta 成本。

4.3 期限选择的数学博弈：寻找完美“接盘”合约

(The Solver: Finding the Perfect Filling Contract)

在 LEAPS 交易中，期限 T 的选择不再是凭感觉，而是为了满足一个战术目标：**确保在至暗时刻，能够打满子弹**。

我们在 Step 0.5 中引入了“最优期限求解器”，其数学本质是求解以下方程的根 T^*：

$$f_{Kelly}(P = V_{fill},\ k = k_{fill},\ T^*) \approx 100\%$$

求解逻辑： 系统遍历所有可用期限（T），寻找一张合约，使得当股价跌至用户设定的补仓价 V_{fill} 时，在应用了激进的 k_{fill}（通常为 1.0）后，模型建议的仓位恰好填满账户本金（100% Allocation）。

为什么排除 3 个月内的合约？ 求解器默认从 $T = 90$ 天开始扫描。这是因为短期期权（<90 天）存在两个致命缺陷：

- **IV 偏高与不稳定：** 短端隐含波动率往往受近期事件（如财报）扭曲，呈现"波动率微笑"极端形态，导致定价虚高，ERP 被压缩。
- **Gamma 风险过大：** 短期期权对股价变动极其敏感，违背了 LEAPS 策略"用时间换空间"的初衷。

结果含义： 求解出的期限 T^* 是一个"进可攻退可守"的锚点：它保证了如果市场真的发生暴跌，你手中的期权特性允许你安全地、从容地在底部完成满仓操作，而不会因为杠杆过高在半山腰就爆仓。

5 第四阶段：终极形态 —— 单标的现金公式

(The Final Form: Single Asset Cash Allocation)

整合上述所有参数，我们将 LEAPS 视为一个"高波动、高收益、带成本"的合成资产，代入凯利公式得到现金投入比例：

单标的现金投入公式（修正版）

$$\text{cash}_i = \text{Capital} \cdot \frac{k \cdot \max(0, \alpha_i \cdot \text{ERP}_i)}{\sigma^2_{\text{stock},i} \cdot L_i^2}$$

公式核心逻辑解读：

- **分子（进攻）：** $\alpha_i \cdot \text{ERP}_i$
  - 代表经估值信心调整后的净优势。只有当扣除利息和时间损耗后 ERP 仍为正，才允许开仓。
- **分母（防守）：** $\sigma^2_{\text{stock},i} \cdot L_i^2$

  - 这是 LEAPS 的方差 ($\text{Variance}_{\text{leaps}}$)。
  - **稳健性修正 (Robust Estimation)：** 这里的 σ_{stock} 不再使用简单的历史标准差。我们采用 **滚动窗口 (Rolling Window)** 方法，计算过去 5 年中每个 252 天窗口的波动率，并取其 **85 分位数 (85th Percentile)**。
  - **安全锁 (Safety Lock)：** 若当前瞬时波动率高于历史 85 分位值，模型将强制使用当前值。这确保了在平静期模型不会过于激进，而在动荡期能迅速收缩战线。
  - **杠杆惩罚**：风险随着杠杆 (L_i) 的**平方级**放大。必须除以 L^2 才能防止爆仓。

- **动态信心调节器 (Dynamic k)：** 本系统摒弃了传统的固定 k 值，引入了随股价深度 ($Depth$) 线性增强的动态 k 值机制。

$$k(P) = \begin{cases} k_{start} & \text{if } P \geq P_{current} \\ k_{start} + (k_{fill} - k_{start}) \cdot \frac{P_{current} - P}{P_{current} - V_{fill}} & \text{if } V_{fill} < P < P_{current} \\ k_{fill} & \text{if } P \leq V_{fill} \end{cases}$$

逻辑含义：

  - **建仓期 ($P_{current}$)**：使用保守的 k_{start} (如 0.5)。此时安全边际尚未最大化，主要目标是建立底仓并控制回撤。
  - **击球区 (V_{fill})**：当股价跌至预设的补仓价时，均值回归的势能积蓄至顶点，此时 k 线性增加至 k_{fill} (如 1.0)，指示投资者在胜率最高的时刻敢于重仓出击。

6 第六阶段：多标的仓位处理 —— 归一化 vs 矩阵凯利

在实际投资中，我们可能同时持有很多标的。针对如何分配资金，我们提供两种由浅入深的思路。

6.1 方法一：简单归一化 (Simple Normalization)

适用于：小组合、标的间相关性低、或追求计算简便的场景。

假设有 N 个标的，根据单标的公式计算出名义现金投入 cash_i。

1. 计算原始总仓位占用：

$$C_{\text{raw}} = \sum_{i=1}^{N} \text{cash}_i$$

2. 设定最大杠杆上限 ($C_{\max}$)： 例如，设定账户总资金占用不超过 100% 或 120%。

3. 线性缩放： 若 $C_{\text{raw}} > C_{\max}$，则对所有标的进行等比例压缩：

$$\text{cash}_i^{\text{final}} = \text{cash}_i \cdot \frac{C_{\max}}{C_{\text{raw}}}$$

若 $C_{\text{raw}} \le C_{\max}$，则保持原仓位不变。

评价：

- **优点**：直观，永远不会爆仓，保留了各标的之间 ERP 的相对强弱关系。
- **缺点**：忽略了相关性。如果持仓全是高度相关的半导体股（如 NVDA, AMD, TSM），即使归一化后，组合的实际波动风险依然可能过大。

6.2 方法二：多维矩阵凯利 (Multivariate Matrix Kelly)

适用于：大资金、标的关联度高、追求数学上最优解的场景。

当标的之间存在相关性时，单标的公式 (μ/σ^2) 不再适用，必须引入**协方差矩阵**。

1. 定义参数：

- **E**: 超额收益向量 ($N \times 1$)，其中第 i 个元素为 $\alpha_i \cdot \text{ERP}_i$。
- : LEAPS 收益率的协方差矩阵 ($N \times N$)。注意，这里的元素应为 $\text{Cov}(r_i \cdot L_i, r_j \cdot L_j)$。

2. 矩阵凯利公式： 最优仓位向量 $\mathbf{F}^*$（每个元素代表该标的占总资金的比例）由下式给出：

矩阵凯利优化公式

$$\mathbf{F}^* = k \cdot {}^{-1} \cdot \mathbf{E}$$

其中 ${}^{-1}$ 是协方差矩阵的逆矩阵。

3. 数学含义：

- 如果两个标的 i, j 高度正相关（同涨同跌），${}^{-1}$ 会自动降低两者的仓位权重，起到“惩罚拥挤交易”的作用。
- 如果两个标的负相关（对冲），公式会自动放大仓位，因为组合风险被对冲降低了。

评价：

- **优点**：这是理论上的“圣杯”，能精准处理相关性风险，实现风险调整后收益最大化。
- **缺点**：计算复杂，且对协方差矩阵的估计误差非常敏感（垃圾进，垃圾出）。通常需要对结果施加非负约束（$\text{cash}_i \geq 0$）和总杠杆约束。

6.3 实战建议

1. **默认推荐：**使用 **方法一（归一化）**。虽然粗糙，但配合我们保守的 L^2 分母设置，通常已经足够安全。
2. **进阶风控：**如果持仓标的超过 5 只且处于同一板块，建议人为降低全组合的 k 值（例如从 1.0 降至 0.7），以模拟相关性带来的风险。