

Una Derivación Completa de las Transformaciones de Lorentz y su Interpretación Geométrica

Google AI studio prompt

Derivado de los Postulados de la Relatividad Especial

20 de noviembre de 2025

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 4 |
| 2. Preliminares | 5 |
| 2.1. Vectores en Dos Dimensiones | 5 |
| 2.1.1. Cálculo de Magnitud Dirección | 5 |
| 2.1.2. Ejemplos de Vectores en Física | 5 |
| 2.1.3. Posición | 5 |
| 2.1.4. Velocidad | 5 |
| 2.1.5. Aceleración | 6 |
| 2.1.6. Fuerza | 6 |
| 2.1.7. Operaciones con Vectores | 6 |
| 2.1.8. Importancia | 6 |
| 2.2. Simplificación de unidades | 6 |
| 2.3. Factores de conversión | 7 |
| 2.4. Unidades naturales | 8 |
| 3. Noción de transformaciones | 10 |
| 4. Transformaciones de Lorentz | 13 |
| 4.1. Pasos de la Derivación | 13 |
| 4.1.1. Paso 1: La Suposición de Linealidad | 13 |
| 4.1.2. Paso 2: Usando el Movimiento del Origen | 13 |
| 4.1.3. Paso 3: Aplicando el Principio de Relatividad | 14 |
| 4.1.4. Paso 4: Aplicando el Segundo Postulado | 14 |
| 4.1.5. Paso 6: Derivando la Transformación del Tiempo | 14 |
| 4.2. Resumen de las Transformaciones de Lorentz | 15 |
| 4.2.1. Las Transformaciones Inversas | 15 |
| 4.2.2. Transformaciones de Galileo | 16 |
| 4.2.3. Existencia de una velocidad límite en el Universo | 16 |
| 5. Derivación de la Dilatación del Tiempo a partir de las Transformaciones de Lorentz | 16 |
| 5.1. La Configuración Física (Experimento Mental) | 17 |
| 5.2. Definiendo el Tiempo Propio | 17 |
| 5.3. Aplicando las Transformaciones de Lorentz | 17 |

| | |
|---|-----------|
| 5.4. La Derivación | 18 |
| 5.5. Resultado e Interpretación | 18 |
| 6. Derivación de la Contracción de la Longitud a partir de las Transformaciones de Lorentz | 18 |
| 7. Suma de velocidades relativista | 21 |
| 7.1. La Configuración para la Fórmula Relativista | 21 |
| 7.2. Derivación a partir de las Transformaciones de Lorentz | 21 |
| 7.3. Características Clave y Ejemplos | 23 |
| 7.3.1. Ejemplo 1: La Nave Espacial y la Sonda | 23 |
| 7.3.2. Característica 1: La Velocidad de la Luz es el Límite Último | 23 |
| 7.3.3. Característica 2: Se Reduce a la Fórmula Clásica a Bajas Velocidades | 24 |
| 8. Fórmulas del Decaimiento Radiactivo | 24 |
| 9. Ejemplos | 26 |
| 10. Forma Vectorial y Rapidez | 30 |
| 10.1. Funciones Hiperbólicas | 31 |
| 11. Invariancia | 32 |
| 12. Cuadrimomento | 33 |
| 13. Ejemplos | 35 |
| 14. Leyes de Newton | 43 |
| 14.1. Trabajo | 45 |
| 14.2. Límite no relativista | 45 |
| 14.2.1. Fuerza constante | 46 |
| 14.2.2. Aceleración constante | 47 |
| 14.2.3. Campo gravitacional de la Tierra | 48 |
| 14.3. Conservación de la energía | 52 |
| 14.4. Movimiento parabólico | 53 |
| 14.5. Demostración del Alcance Máximo (R) | 54 |
| 14.6. Demostración de la Altura Máxima (H) | 55 |
| 15. Caída Libre en un Plano Inclinado sin Fricción | 56 |
| 15.1. Configuración del Problema y Diagrama de Cuerpo Libre | 56 |
| 15.1.1. Análisis de las Fuerzas y Ecuaciones de Movimiento | 57 |
| 15.1.2. Conclusión: La Conexión con la Caída Libre | 58 |
| 16. Movimiento en un Plano Horizontal con Fricción | 58 |
| 16.1. Configuración del Problema y Diagrama de Cuerpo Libre | 58 |
| 16.2. Análisis de las Fuerzas y Ecuaciones de Movimiento | 58 |
| 16.3. Conclusión e Interpretación | 60 |
| 17. Fuerza Centrípeta ($F_c = mv^2/r$) | 60 |
| 17.0.1. Paso 1: Derivación de la Aceleración Centrípeta (a_c) | 60 |
| 17.0.2. Paso 2: Aplicación de la Segunda Ley de Newton | 61 |

| | |
|--|-----------|
| 18. Ley de Gravitación Universal de Newton | 61 |
| 18.1. La Fuerza Gravitacional entre Dos Cuerpos | 62 |
| 18.2. El Concepto de Campo Gravitacional (\vec{g}) | 62 |
| 18.3. Ejemplo: Cálculo del Campo Gravitacional en la Superficie de la Tierra | 63 |
| 18.4. El Cañón de Newton: De Proyectiles a Órbitas | 64 |
| 18.5. Ejemplo: Campo Gravitacional de la Tierra a la Distancia de la Luna | 66 |
| 18.6. Comparación: Velocidad Real de la Luna vs. Velocidad Orbital Circular Teórica . | 67 |
| 18.7. Visualización Gráfica del Campo Gravitacional | 69 |
| 19. Solución numérica al problema de la órbita lunar | 72 |
| 19.1. Physical Constants and Initial Conditions | 73 |
| 19.2. Simulation Method | 73 |
| 19.3. Determining the Period | 73 |
| 20. Momento angular | 74 |
| 20.1. Producto vectorial | 74 |
| 20.2. Estabilidad | 75 |
| 21. Derivación Simplificada de las Leyes de Kepler | 75 |
| 22. Ejemplos de las Leyes de Newton | 80 |
| A. Movimiento Relativista y No Relativista Bajo una Fuerza Constante | 82 |
| A.1. Configuración del Problema | 82 |
| A.2. La Ecuación de Movimiento Relativista | 82 |
| A.3. Resolviendo para el Momento | 82 |
| A.4. Encontrando la Velocidad $u_y(t)$ | 83 |
| A.5. Integrando para Encontrar la Posición $y(t)$ | 83 |
| A.6. Teorema del Trabajo y la Energía | 83 |
| A.7. Formulación Energética de la Ecuación Relativista | 84 |
| A.8. El Límite No Relativista (Principio de Correspondencia) | 84 |
| A.9. Derivación Directa del Caso No Relativista | 85 |
| B. Derivación de las Transformaciones de Lorentz a partir de Simetrías del Espacio–tiempo | 85 |
| B.1. El Enfoque de Ignatowski | 85 |
| B.2. Principios Fundamentales | 86 |
| B.3. Paso 1: Linealidad a partir de la Homogeneidad | 86 |
| B.4. Paso 2: Usando Cinemática Básica | 86 |
| B.5. Paso 3: Aplicando la Relatividad y la Isotropía | 86 |
| B.6. Paso 4: Encontrando la Transformación del Tiempo | 87 |
| B.7. Paso 5: La Propiedad de Grupo y la Constante Universal | 87 |
| B.8. Paso 6: La Naturaleza Física de la Constante K | 88 |
| B.9. Conclusión | 88 |
| C. Número Imaginario | 88 |
| D. Demostración de la Fórmula de Euler mediante Cálculo | 89 |

| | |
|--|-----------|
| E. Derivando Seno y Coseno de la Fórmula de Euler | 89 |
| E.1. El Sistema de Ecuaciones | 89 |
| E.2. Resolviendo para $\cos \theta$ | 90 |
| E.3. Resolviendo para $\sin \theta$ | 90 |
| E.4. Conexión con las Funciones Hiperbólicas | 90 |
| E.5. La Matriz de Lorentz | 90 |
| F. La Rotación de Wick: Impulsos como Rotaciones Imaginarias | 91 |
| F.1. De Funciones Hiperbólicas a Trigonométricas | 91 |
| F.2. La Transformación Completa en el Espaciotiempo Euclidiano | 91 |
| G. Producto escalar en forma matricial (rotación) | 92 |
| H. Producto escalar en forma matricial (impulso) | 93 |

Resumen

Este documento proporciona una derivación detallada y paso a paso de las transformaciones de Lorentz, fundamentada en los postulados de la Relatividad Especial. Luego, extiende esta derivación para explorar la estructura geométrica más profunda de las transformaciones, introduciendo los conceptos de rapidez y el formalismo matricial. Finalmente, demuestra cómo un impulso de Lorentz (boost) puede ser visto formalmente como una rotación en un espaciotiempo complejo a través de una rotación de Wick.

1. Introducción

Las transformaciones de Lorentz son la piedra angular de la teoría de la Relatividad Especial de Einstein. Relacionan las coordenadas de espacio y tiempo de un evento según lo medido por dos observadores en diferentes sistemas de referencia inerciales. Reemplazan a las antiguas transformaciones de Galileo, que son inconsistentes con la constancia observada de la velocidad de la luz.

La derivación se basa en dos postulados fundamentales de la Relatividad Especial:

- 1. El Principio de Relatividad:** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- 2. La Constancia de la Velocidad de la Luz:** La velocidad de la luz en el vacío, denotada por c , es la misma para todos los observadores inerciales, independientemente del movimiento de la fuente de luz o del observador.

El segundo principio puede ser cambiado simplemente por la suposición de que el espacio y el tiempo deben ser homogéneos e isotrópicos, ver <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0107091>

La motivación de la relatividad especial surge de la necesidad de usar el primer postulado para la interacción electromagnética. Aunque dicho postulado es evidente en sistemas mecánicos, no es claro para la interacción electromagnética. De hecho, una partícula cargada en reposo sólo tiene asociado un campo eléctrico, mientras que una partícula moviéndose a velocidad constante relativa al observador en reposo, genera una corriente eléctrica que a su vez induce un campo magnético. Además, el campo eléctrico se deforma (las regiones de campo constante pasan de ser esféricas a elipsoidales). Cómo en última instancia los objetos de medida están hechos de partículas cargadas dentro de los átomos que la componen, es de esperarse

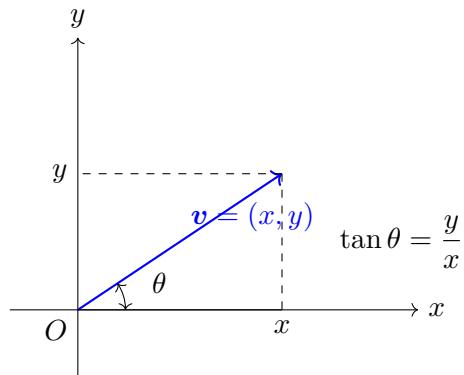
2. Preliminares

2.1. Vectores en Dos Dimensiones

Un **vector** es una cantidad que tiene tanto **magnitud** (tamaño) como **dirección**. En dos dimensiones, un vector se puede representar como una flecha en un plano. La longitud de la flecha representa la magnitud, y la orientación de la flecha representa la dirección. Matemáticamente, podemos expresar un vector en dos dimensiones como un par ordenado de números (componentes), por ejemplo, (x, y) , donde:

- x es la componente horizontal del vector.
- y es la componente vertical del vector.

2.1.1. Cálculo de Magnitud Dirección



La magnitud del vector viene dada por la longitud del vector, que corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados x y y , se denota por $|v|$ o simplemente v

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

El ángulo θ que define la dirección del vector está dado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

2.1.2. Ejemplos de Vectores en Física

2.1.3. Posición

- **Concepto:** Indica la ubicación de un objeto en un plano.
- **Ejemplo:** Un robot se encuentra en un plano cartesiano. Su posición está descrita por el vector $\mathbf{r} = (3, 4)$ metros. Esto significa que el robot está a 3 metros a la derecha del origen y a 4 metros hacia arriba del origen.
- **Magnitud:** La distancia del robot al origen, $|\mathbf{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ metros.
- **Dirección:** El ángulo que forma la flecha con el eje horizontal, cuyo cálculo involucraría funciones trigonométricas ($\arctan(4/3)$).

2.1.4. Velocidad

- **Concepto:** Describe qué tan rápido y en qué dirección se mueve un objeto.
- **Ejemplo:** Un drone vuela a 10 m/s en un ángulo de 30 grados hacia el noreste. La velocidad se representa como $\mathbf{v} = (8.66, 5)$ m/s (aproximadamente).

- **Magnitud:** La rapidez del drone es 10 m/s.
- **Dirección:** 30 grados hacia el noreste.

2.1.5. Aceleración

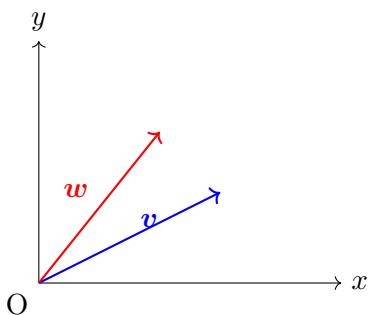
- **Concepto:** Describe la tasa de cambio de la velocidad.
- **Ejemplo:** Un carro que se mueve hacia el este aumenta su velocidad en la dirección horizontal, por lo que su aceleración es $\mathbf{a} = (2, 0)$ m/s². Esto indica que su velocidad horizontal aumenta en 2 m/s cada segundo, mientras que su velocidad vertical no cambia.
- **Magnitud:** 2 m/s²
- **Dirección:** Hacia el este.

2.1.6. Fuerza

- **Concepto:** Una influencia que puede causar que un objeto cambie su movimiento (acelere).
- **Ejemplo:** Una persona empuja una caja en diagonal, aplicando una fuerza de $\mathbf{F} = (5, -3)$ N. Esto significa que la persona está empujando con 5 Newtons hacia la derecha y 3 Newtons hacia abajo.
- **Magnitud:** $|\mathbf{F}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ N
- **Dirección:** Hacia la derecha e inclinado hacia abajo (el ángulo se calcularía con la función arcotangente).

2.1.7. Operaciones con Vectores

- **Suma de Vectores:** Sumar las componentes correspondientes de cada vector.
- **Multiplicación por un Escalar:** Multiplicar cada componente del vector por el escalar.
- **Magnitud de un Vector:** Usar el teorema de Pitágoras: $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$



2.1.8. Importancia

La representación vectorial nos permite analizar y predecir el movimiento de objetos en el mundo real, donde la dirección es fundamental. Sin vectores, solo tendríamos magnitudes sin contexto espacial.

2.2. Simplificación de unidades

Cuadro 1: Cantidad Físicas Fundamentales y sus Unidades SI

| Nombre | Símbolo [Letra] | Unidades (SI) |
|-----------------|-----------------|----------------|
| Tiempo | [T] | segundo (s) |
| Distancia | [L] | metro (m) |
| Masa | [M] | kilogramo (kg) |
| Carga eléctrica | [Q] | coulomb (C) |
| Temperatura | [Θ] | kelvin (K) |

Algunas unidades derivadas

- Magnitud de velocidad y aceleración

$$[v] = \left[\frac{L}{T} \right], \quad [a] = \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

- Magnitud de la fuerza

$$F = ma \rightarrow [F] = \left[M \frac{L}{T^2} \right]$$

donde m es la masa de una partícula que se mueve con una magnitud de aceleración a .

- Energía A partir de la energía cinética

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow [E] = \left[M \frac{L^2}{T^2} \right] \rightarrow \text{Joules (J)}$$

donde m es la masa de la partícula que se mueve con una magnitud de velocidad v .

En el sistema internacional de unidades tenemos las siguientes cantidades fundamentales

2.3. Factores de conversión

$$1 = \frac{\text{cantidad}}{\text{misma cantidad en otras unidades}}$$

Ejemplos

$$1 = \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = \frac{\text{km}}{1000 \text{ m}} = \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}}$$

Convertir 60 km/h a m/s

$$\begin{aligned} 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 &= 60 \cancel{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \frac{1000 \text{ m}}{\cancel{\text{km}}} \\ &= 60000 \frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot 1 \\ &= 60000 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{h}}} \frac{1}{3600 \text{ s}} \\ &\approx 16.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Ejercicio

Convierta 2m^2 a cm^2

2.4. Unidades naturales

Las constantes naturales sirven para expresar las cantidades físicas en términos de energía.
Veremos que

$$E = qV \quad (2)$$

La energía ganada por un electrón con carga eléctrica e a través de una diferencia de potencial V de 1 V es:

$$\begin{aligned} E &= qV \\ &= e \cdot 1\text{V} \\ &= 1.602176634 \times 10^{-19}\text{C} \cdot \text{V} \\ 1\text{eV} &\equiv 1.602176634 \times 10^{-19} \text{J} \end{aligned} \quad (3)$$

Las otras constantes relacionan otras cantidades físicas con la energía

$$\begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} = \frac{6.62607115 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi} \\ &= \frac{6.62607115 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1} \frac{1\text{eV}}{1.602176634 \times 10^{-19} \text{J}} \\ &= \frac{4.1356683 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}}{2\pi} \\ &= 6.582119569 \times 10^{-16} \text{eV} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (4)$$

La siguiente expresión tiene unidades de energía

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} \text{c}^2 &= 299792458^2 \text{J} \frac{1\text{eV}}{1.602176634 \times 10^{-19} \text{J}} \\ 1 \text{ kg} \text{c}^2 &= 5.609588603 \times 10^{35} \text{eV} \frac{1 \text{ GeV}}{10^9 \text{eV}} \\ 1 \text{ kg} \text{c}^2 &= 5.609588603 \times 10^{26} \text{GeV} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [T] \rightarrow \left[\frac{\hbar}{E} \right] : & \quad 1 \text{ s} = 1.519267447 \times 10^{15} \frac{\hbar}{\text{eV}} \\ [L] \rightarrow \left[\frac{\hbar c}{E} \right] : & \quad 1 \text{ m} = 5.06773071 \times 10^6 \frac{\hbar c}{\text{eV}} \\ [M] \rightarrow \left[\frac{E}{c^2} \right] : & \quad 1 \text{ kg} = 5.609588603 \times 10^{26} \text{GeV}/c^2 \end{aligned}$$

La masa del protón

$$\begin{aligned} m_p &= 1.67262192369(51) \times 10^{-27} \text{kg} \frac{5.609588603 \times 10^{26} \text{GeV}/c^2}{1 \text{kg}} \\ &= 0.93827208816(29) \text{GeV}/c^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\approx 1 \text{GeV}/c^2. \quad (7)$$

similarmente,

$$m_e = 0.510\,998\,950\,00(15) \text{ MeV}/c^2 \quad (8)$$

$$\approx 0.5 \text{ MeV}/c^2 \quad (9)$$

La estimación del orden de magnitud para el número total de **positrones** en el universo observable es altamente especulativa debido a su naturaleza fugaz. Sin embargo, al contrastarlos con el contenido de materia dominante, se puede llegar a una estimación aproximada.

Ejemplo: contenido de positrones del Universo

El orden de magnitud más razonable para el número de positrones en el universo observable se encuentra probablemente en el rango de 10^{65} a 10^{70} .

Base de la Estimación

Esta estimación no se obtiene directamente de un único experimento de flujo como el AMS-02, sino que se deriva del desequilibrio establecido entre materia y antimateria, y de la tasa de aniquilación en nuestra galaxia.

1. Comparación con la Materia ($\approx 10^{80}$)

El número total de **electrones** y **protones** (materia ordinaria) en el universo observable se estima en alrededor de 10^{80} .

Dado que todo el universo observable está compuesto casi en su totalidad por materia (y no por antimateria), el número total de positrones debe ser **mucho menor** que la cifra de 10^{80} de electrones.

2. Producción y Aniquilación de Positrones

Los positrones se producen continuamente por eventos de alta energía y desintegración radiactiva, pero son destruidos muy rápidamente por **aniquilación** con electrones. Por lo tanto, su número está determinado por un equilibrio de producción-aniquilación en lugar de ser un remanente cosmológico.

- **Producción Galáctica de Positrones:** Las observaciones de la línea 511 keV γ en el Centro Galáctico, que es una firma de la aniquilación electrón-positrón, sugieren que los positrones se producen en la Vía Láctea a una tasa de aproximadamente 10^{42} positrones por segundo ($\dot{N}_{e^+} \approx 10^{42} \text{ s}^{-1}$).
- **Número en Estado Estacionario en la Vía Láctea:** Para mantener esta tasa de producción, se estima que el número total de positrones que flotan actualmente en el fondo difuso de la Vía Láctea es de $N_{e^+} \approx 10^{56}$ a 10^{57} .

3. Escala al Universo

Para escalar esto al universo observable, multiplicamos la estimación Galáctica por el número estimado de galaxias. Se estima que el universo observable contiene entre 10^{11} y 10^{12} galaxias.

La estimación resultante es:

$$N_{\text{Positrones, Universo}} \approx N_{\text{Positrones, Galaxia}} \times N_{\text{Galaxias}}$$

$$N_{\text{Positrones, Universo}} \approx 10^{56} \text{ a } 10^{57} \times 10^{11} \text{ a } 10^{12}$$

$$N_{\text{Positrones, Universo}} \approx 10^{67} \text{ a } 10^{69}$$

Este cálculo aproximado sugiere un orden de magnitud de 10^{68} .

| Partícula | Orden de Magnitud (Universo Observable) |
|---------------------------------|---|
| Electrones y Protones (Materia) | $\approx 10^{80}$ |
| Fotones y Neutrinos | $\approx 10^{89}$ |
| Positrones (Antimateria) | $\approx 10^{65} - 10^{70}$ |

Cuadro 2: Estimación del Orden de Magnitud de Partículas

3. Noción de transformaciones

Un ejemplo de transformación es la de un montaje experimental en la cual se determina el movimiento de un cuerpo con respecto a los ejes x, y correspondientes a los lados de la mesa ilustrado en la figura 1 izquierda. Posteriormente se repite la medida con la mesa rotada un ángulo θ pero manteniendo la posición del montaje experimental sobre la misma, como se ilustra en la figura 1 derecha. Es claro que la trayectoria del movimiento no depende del sistema de referencia.

Considere un punto (x, y) en sistema de referencia de dos dimensiones. Si cambiamos a un sistema de referencia rotado por un ángulo θ , (x', y') , como se muestra en la figura 2, podemos definir los dos triángulos rectángulos que se muestran en la figura y a partir de ellos obtener la transformación de los sistemas de referencia debido a la rotación

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y) \\ \mathbf{r}' &= (x', y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 \\ r'^2 &= \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

La demostración del último paso se hace a continuación.

Demostración de la Invariancia del Producto Escalar bajo Rotación

El objetivo es demostrar que el módulo al cuadrado de un vector es el mismo después de una rotación de coordenadas. Es decir, probaremos que:

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

Paso 1: Ecuaciones de Transformación por Rotación

Las coordenadas (x', y') en un sistema que ha sido rotado un ángulo θ en sentido antihorario se relacionan con las coordenadas originales (x, y) mediante:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

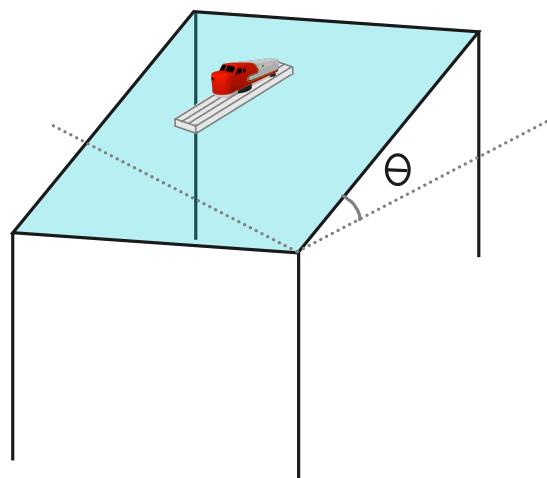
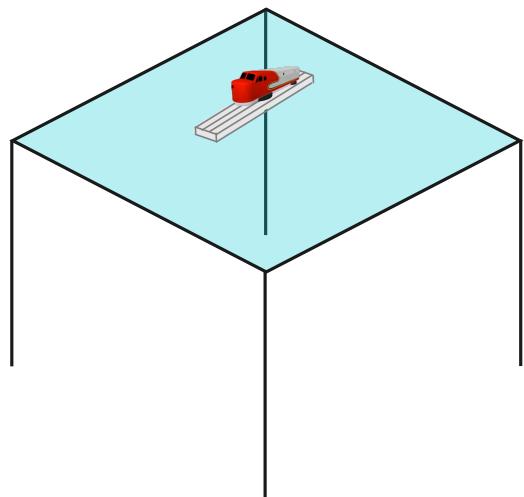


Figura 1: Rotación de sistema de coordenadas

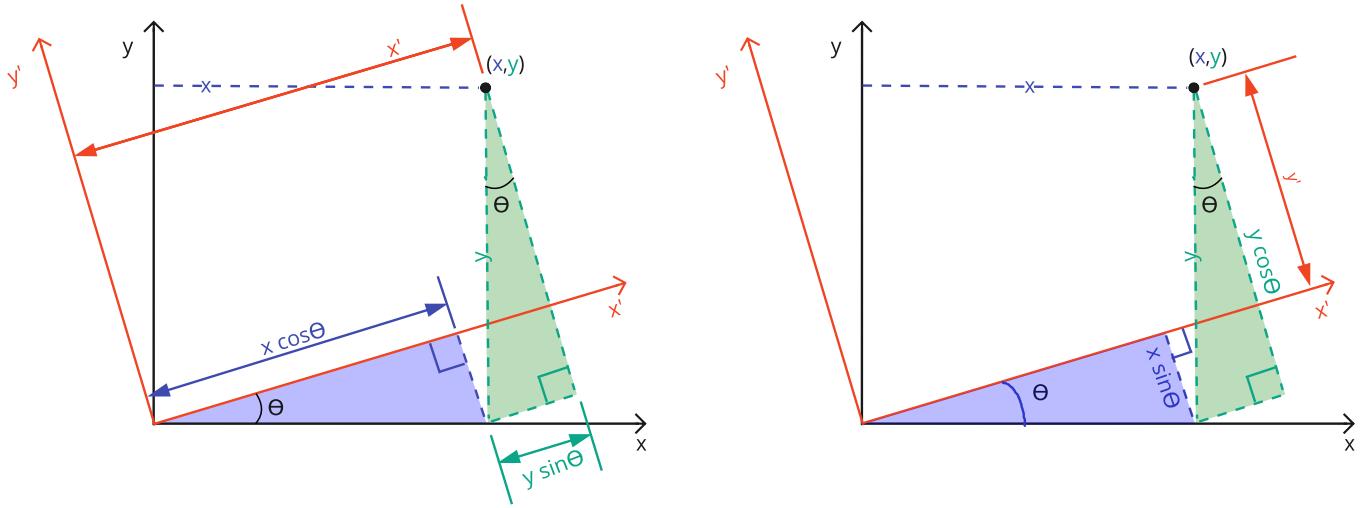


Figura 2: Rotación por ángulo θ

Paso 2: Sustitución y Expansión Algebraica

Sustituimos estas transformaciones en la expresión para el módulo al cuadrado en el sistema rotado, $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2 + y'^2$.

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \\
&= (x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta) \\
&\quad + (x^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta) \\
&= (x^2 \cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta) + (y^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta) \\
&\quad + (2xy \cos \theta \sin \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta) \\
&= x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \cancel{2xy \cos \theta \sin \theta} - \cancel{2xy \sin \theta \cos \theta} \\
&= x^2(1) + y^2(1) \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}$$

Paso 3: Conclusión

Hemos demostrado que $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$. Por lo tanto, podemos concluir que el producto escalar es una cantidad invariante bajo rotaciones:

$$r'^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$$

El producto escalar es invariante con respecto al sistema de coordenadas rotado!

Note que por consiguiente, la velocidad al cuadrado en la fórmula para la energía cinética (que se verá en detalle luego) es invariante bajo rotaciones del sistema de coordenadas

$$E = \frac{1}{2}mv^2.$$

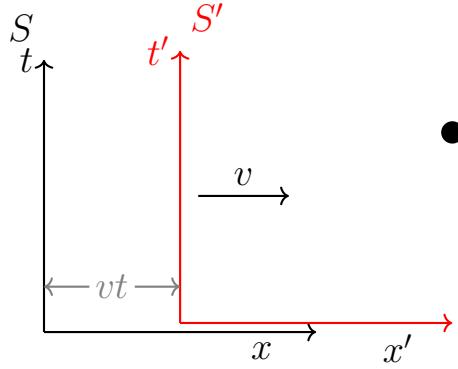


Figura 3: Sistema de referencia inercial S' , a velocidad constante en x , v , con respecto al sistema en reposo S . A un tiempo t el origen de S' se encuentra a una distancia $x = vt$ del origen de S .

4. Transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales, S y S' .

- El sistema S tiene coordenadas (x, y, z, t) .
- El sistema S' tiene coordenadas (x', y', z', t') .

Configuramos los sistemas de tal manera que S' se mueve con una velocidad constante v relativa a S a lo largo del eje x positivo. En el tiempo $t = t' = 0$, los orígenes de los dos sistemas coinciden.

$$\text{Sistema } S \quad \xrightarrow{v} \quad \text{Sistema } S'$$

Dado que el movimiento relativo es solo a lo largo del eje x , las coordenadas perpendiculares al movimiento no se ven afectadas:

$$y' = y, \quad z' = z$$

Ahora nos enfocamos en derivar las transformaciones para x' y t' .

4.1. Pasos de la Derivación

4.1.1. Paso 1: La Suposición de Linealidad

Las transformaciones deben ser lineales para preservar el principio de inercia. Un movimiento uniforme en un sistema debe aparecer como un movimiento uniforme en el otro. Por lo tanto, las transformaciones tienen la forma:

$$x' = Ax + Bt. \quad (11)$$

4.1.2. Paso 2: Usando el Movimiento del Origen

El origen de S' ($x' = 0$) se mueve con velocidad v en el sistema S , por lo que su posición es $x = vt$. Sustituyendo esto en la ecuación (11):

$$0 = A(vt) + Bt \implies B = -Av$$

Esto da $x' = A(x - vt)$. Renombramos la constante A con el símbolo más convencional γ .

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (12)$$

4.1.3. Paso 3: Aplicando el Principio de Relatividad

La transformación inversa (de S' a S) debe tener la misma forma, con la velocidad invertida ($v \rightarrow -v$):

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (13)$$

4.1.4. Paso 4: Aplicando el Segundo Postulado

Imaginemos un pulso de luz emitido desde el origen en $t = t' = 0$. Un observador en S ve su frente de onda en $x = ct$, mientras que un observador en S' lo ve en $x' = ct'$. Sustituyendo esto en nuestras ecuaciones de transformación:

| Paso | Encontrar γ | Paso algebraico |
|------|--|--|
| 1) | $x' = \gamma(x - vt)$, $x = \gamma(x' + vt')$. | Ecuaciones (12) y (13) |
| 2) | $ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v)$ $ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$ | Reemplazando $x = ct$ y $x' = ct'$ en las ecuaciones anteriores |
| 3) | $(ct')(ct) = [\gamma t(c - v)][\gamma t'(c + v)]$ | Multiplicando las dos ecuaciones |
| 4) | $c^2 t' t = \gamma^2 t t' (c - v)(c + v)$ | Realizando las operaciones indicadas |
| 5) | $c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$ | Dividiendo por tt' a ambos lados de la igualdad y expandiendo la diferencia de cuadrados |
| 6) | $1 = \gamma^2(1 - v^2/c^2)$ | Dividiendo por c^2 a ambos lados de la igualdad. |
| 7) | $\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$ | Dividiendo por $1 - v^2/c^2$ a ambos lados de la igualdad. |
| 8) | $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ | Sacando raíz cuadrada a ambos lados iguales |

De ésta forma:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}, \quad (14)$$

y

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}. \quad (15)$$

4.1.5. Paso 6: Derivando la Transformación del Tiempo

Dado que ya tenemos la expresión completa para x' , en las ecuaciones (12) y (13), podemos despejar t'

| paso | Despejar t' | Paso algebraico |
|------|--|---|
| 1) | $x' = \gamma(x - vt),$ $x = \gamma(x' + vt').$ | Ecuaciones (12) y (13) |
| 2) | $x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt']$ | sustituyendo $x' = \gamma(x - vt)$ en $x = \gamma(x' + vt')$ |
| 3) | $x = \gamma^2x - \gamma^2vt + \gamma vt'$ | Distribuyendo γ el lado derecho |
| 4) | $\gamma vt' = x - \gamma^2x + \gamma^2vt$ | Sumando $-\gamma^2x + \gamma^2vt$ a ambos lados de la igualdad. |
| 5) | $\gamma vt' = x(1 - \gamma^2) + \gamma^2vt$ | Factorizando x . |
| 6) | $\gamma vt' = x \left(1 - \frac{c^2}{c^2 - v^2}\right) + \gamma^2vt$ | Reemplazando γ^2 de la ecuación (15) |
| 7) | $\gamma vt' = x \left(\frac{c^2 - v^2 - c^2}{c^2 - v^2}\right) + \gamma^2vt.$ | Sumando las fracciones. |
| 8) | $\gamma vt' = \gamma^2vt - xv^2 \left[\frac{c^2}{c^2(c^2 - v^2)}\right]$ | Multiplicando y dividiendo por c^2 en el último término. |
| 9) | $\cancel{\gamma} \cancel{v} t' = \gamma^2 \cancel{v} t - \gamma^2 \frac{v^2 x}{c^2}$ | Usando de nuevo la ecuación (15) para γ^2 y cancelando términos iguales a ambos lados de la igualdad |
| 10) | $t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$ | |

De modo que

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

4.2. Resumen de las Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz completas son:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

4.2.1. Las Transformaciones Inversas

Las transformaciones de S' a S se encuentran intercambiando las coordenadas y haciendo $v \rightarrow -v$:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \\ x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

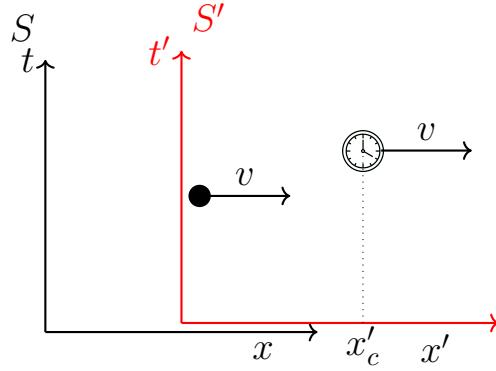


Figura 4: Sistema de referencia inercial S' , moviendo con velocidad constante en x , v , con el objeto bajo estudio

4.2.2. Transformaciones de Galileo

Se obtienen cuando no hay una velocidad límite, y por lo tanto $c \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}t' &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \right] = t \\x' &= \lim_{c \rightarrow \infty} [\gamma(x - vt)] = x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

Mientras que para factor de Lorentz γ , o el factor de contracción relativista $1/\gamma$,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma = 1. \quad (16)$$

Esto quiere decir que las distancias y tiempos no están afectados por las transformaciones de Galileo.

4.2.3. Existencia de una velocidad límite en el Universo

Toda la evidencia experimental, desde el electromagnetismo hasta la desintegración de partículas, confirma que vivimos en un universo donde hay una velocidad límite. Llamamos a esta velocidad universal c , y la identificamos con la velocidad de la luz en el vacío. La constancia de la velocidad de la luz no es una suposición separada, sino una consecuencia directa de la estructura del espacio-tiempo mismo, como se demuestra en el Apéndice B.

5. Derivación de la Dilatación del Tiempo a partir de las Transformaciones de Lorentz

En las aplicaciones prácticas, donde se estudia el movimiento de un cuerpo a velocidad constante, es conveniente asumir que el sistema inercial se mueve con la misma velocidad del cuerpo bajo estudio, como se ilustra en la figura 4.

La dilatación del tiempo es una consecuencia directa y famosa de las transformaciones de Lorentz. Describe el fenómeno en el que un reloj que está en movimiento relativo a un observador se mide por ese observador como si estuviera marcando el tiempo más lentamente que un reloj que está en reposo relativo a él.

Para derivar esto, estableceremos un experimento mental simple y aplicaremos la transformación de Lorentz para el tiempo.

5.1. La Configuración Física (Experimento Mental)

1. **Dos Sistemas:** Tenemos dos sistemas inerciales, S y S' . Como antes, el sistema S es el sistema “estacionario”(por ejemplo, un observador en el suelo), y el sistema S' se mueve con una velocidad constante v a lo largo del eje x relativo a S .
2. **Un Reloj en el Sistema en Movimiento:** Imaginemos que hay un reloj en reposo en el sistema en movimiento, S' . Dado que el reloj no se mueve *dentro de su propio sistema*, su posición es un valor constante, que llamaremos x'_c .
3. **Dos Eventos:** Consideraremos dos eventos, que son dos ”tictacs consecutivos de este reloj.
 - **Evento 1:** El reloj hace tictac por primera vez. Desde la perspectiva de un observador en el sistema S' , este evento ocurre en las coordenadas (t'_1, x'_c) .
 - **Evento 2:** El reloj hace tictac por segunda vez. En el sistema S' , este evento ocurre en las coordenadas (t'_2, x'_c) .

5.2. Definiendo el Tiempo Propio

El intervalo de tiempo entre dos eventos que ocurren en la **misma ubicación espacial** en un sistema dado se llama **intervalo de tiempo propio**, denotado por Δt_0 .

En nuestra configuración, los dos tictacs del reloj ocurren en la misma ubicación (x'_c) en el sistema S' . Por lo tanto, el intervalo de tiempo medido por un observador en el sistema en movimiento S' es el tiempo propio:

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$$

Nuestro objetivo es encontrar el intervalo de tiempo entre estos mismos dos eventos según lo medido por el observador en el sistema estacionario S . Llamemos a este intervalo Δt .

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

5.3. Aplicando las Transformaciones de Lorentz

Necesitamos relacionar las coordenadas de tiempo en S con las coordenadas en S' . La transformación de Lorentz inversa para el tiempo es la opción más conveniente aquí, ya que expresa el tiempo del sistema estacionario (t) en términos de las coordenadas del sistema en movimiento (t', x') .

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

Ahora, aplicamos esta transformación a nuestros dos eventos:

1. El tiempo del Evento 1 medido en el sistema S es t_1 :

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_c}{c^2} \right)$$

2. El tiempo del Evento 2 medido en el sistema S es t_2 :

$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_c}{c^2} \right)$$

5.4. La Derivación

El intervalo de tiempo Δt medido por el observador en el sistema S es la diferencia entre t_2 y t_1 .

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \left[\gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_c}{c^2} \right) \right] - \left[\gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_c}{c^2} \right) \right] \\ &= \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_c}{c^2} - t'_1 - \frac{vx'_c}{c^2} \right) \\ &= \gamma(t'_2 - t'_1)\end{aligned}$$

El término que involucra la posición x'_c se cancela precisamente porque el reloj estaba en reposo en el sistema S' . Ahora sustituimos la definición de tiempo propio, $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

5.5. Resultado e Interpretación

La fórmula final para la dilatación del tiempo se obtiene sustituyendo la expresión para γ :

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Interpretemos este importante resultado:

- El factor de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ es siempre mayor o igual a 1, ya que la velocidad v debe ser menor que c .
- Esto significa que $\Delta t \geq \Delta t_0$.
- El intervalo de tiempo (Δt) medido por el observador en el sistema “estacionario” S es *más largo* que el intervalo de tiempo propio (Δt_0) medido en el sistema de reposo del reloj.

Un intervalo de tiempo más largo entre tictacs significa que se observa que el reloj funciona más lentamente. Por lo tanto, el observador en S concluye que el reloj en movimiento funciona lentamente en comparación con su propio reloj idéntico. Este fenómeno es la **dilatación del tiempo**.

6. Derivación de la Contracción de la Longitud a partir de las Transformaciones de Lorentz

La contracción de la longitud es otra predicción fundamental de la Relatividad Especial. Afirma que se mide que un objeto en movimiento es más corto a lo largo de su dirección de movimiento que su longitud cuando se mide en reposo. Este efecto también se conoce como contracción de Lorentz.

La clave para medir correctamente la longitud de un objeto en movimiento es determinar las posiciones de sus dos extremos **simultáneamente** en el sistema de referencia del observador.

La longitud propia, L_0 , es la distancia entre dos puntos cuyas posiciones son medidas por un observador en reposo respecto a los dos puntos. La longitud contraída se denota como L_0

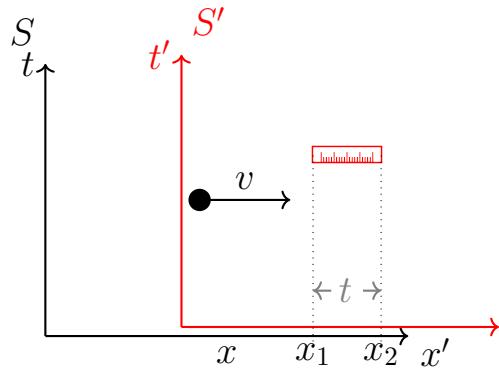


Figura 5: Sistema de referencia inercial S' , moviendo con velocidad constante en x , v , con el objeto bajo estudio

Demostración de la Contracción de Lorentz a partir de la Dilatación del Tiempo

Esta es una de las demostraciones más elegantes en relatividad, ya que muestra cuán profundamente entrelazados están el espacio y el tiempo. En lugar de derivar la contracción de la longitud directamente de los postulados, la derivaremos como una consecuencia lógica de la dilatación del tiempo. Para ello, construiremos un experimento mental que involucre tanto una medición de distancia como una de tiempo desde dos perspectivas diferentes.

El Experimento Mental

Imaginemos un viaje espacial:

- Hay dos puntos fijos en el espacio: un punto de partida (la Tierra) y un punto de destino (una estrella lejana).
- Un observador en la Tierra (en el sistema de referencia S) mide la distancia entre la Tierra y la estrella. Como esta distancia está en reposo con respecto a él, mide la **longitud propia**, L_0 .
- Una nave espacial (en el sistema de referencia S') viaja de la Tierra a la estrella a una velocidad constante v .

Nuestro objetivo es encontrar la distancia entre la Tierra y la estrella medida por el astronauta en la nave, a la que llamaremos L .

La Demostración: Paso a Paso

La demostración se basa en calcular el tiempo del viaje desde ambas perspectivas y luego conectarlos usando la fórmula de la dilatación del tiempo.

Paso 1: La Perspectiva de la Tierra (Sistema S)

- **Distancia del viaje:** Para el observador en la Tierra, la distancia que debe recorrer la nave es la longitud propia, L_0 .
- **Tiempo del viaje:** El observador en la Tierra mide el tiempo que tarda la nave en completar el viaje usando sus propios relojes. Llamaremos a este tiempo Δt . Usando la

fórmula básica **tiempo = distancia / velocidad**, tenemos:

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}$$

Despejando la distancia, obtenemos nuestra primera ecuación clave:

$$L_0 = v \cdot \Delta t \quad (17)$$

Paso 2: La Perspectiva del Astronauta (Sistema S')

- **Distancia del viaje:** Para el astronauta, él está en reposo y es la estrella la que se acerca a él a una velocidad v . La distancia que él mide entre la Tierra y la estrella es L .
- **Tiempo del viaje:** El astronauta mide la duración del viaje en su propio reloj. Este tiempo es el **tiempo propio**, Δt_0 , porque para él, los eventos de “salida” “llegada.” curren en su misma ubicación (en $x' = 0$). De nuevo, usando **tiempo = distancia / velocidad**:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v}$$

Despejando la distancia, obtenemos nuestra segunda ecuación clave:

$$L = v \cdot \Delta t_0 \quad (18)$$

Paso 3: El Puente - Conectando las Perspectivas con la Dilatación del Tiempo

Ahora tenemos dos ecuaciones diferentes para la distancia, cada una involucrando una medida de tiempo diferente. Aquí es donde entra en juego la **dilatación del tiempo**, que actúa como un puente entre los dos sistemas de referencia.

La fórmula de la dilatación del tiempo nos dice cómo se relacionan el tiempo medido por el observador en la Tierra (Δt) y el tiempo propio medido por el astronauta (Δt_0):

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (19)$$

Paso 4: Combinar las Ecuaciones y Resolver

Tenemos un sistema de tres ecuaciones y nuestro objetivo es encontrar una relación entre L y L_0 .

1. Partimos de la Ecuación (17):

$$L_0 = v \cdot \Delta t$$

2. Sustituimos la Ecuación (19) en la ecuación anterior para eliminar Δt :

$$L_0 = v \cdot (\gamma \Delta t_0)$$

3. Ahora, observamos la Ecuación (18), que nos dice que $L = v \cdot \Delta t_0$. Podemos sustituir todo el término ($v \cdot \Delta t_0$) en nuestra ecuación actual por L :

$$L_0 = \gamma(v \cdot \Delta t_0) \implies L_0 = \gamma L$$

Finalmente, despejamos L , la longitud medida por el astronauta en movimiento:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Resultado y Conclusión

Al sustituir la expresión completa para γ , obtenemos la fórmula de la contracción de la longitud:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Hemos demostrado con éxito que la contracción de la longitud es una consecuencia directa y necesaria de la dilatación del tiempo. Al insistir en que ambos observadores deben estar de acuerdo en los hechos básicos, inevitablemente llegamos a la conclusión de que para el objeto en movimiento la distancia del viaje es más corta. Esto subraya que el espacio y el tiempo están intrínsecamente entrelazados.

ver <https://inspirehep.net/literature/2825885>

7. Suma de velocidades relativista

En la física clásica (galileana), si estás en un tren que se mueve a una velocidad v , y lanzas una pelota hacia adelante a una velocidad u' (relativa al tren), un observador en el suelo vería la pelota moverse a una simple suma de las velocidades:

$$u = u' + v \quad (\text{Suma Clásica/Galileana})$$

Esto funciona perfectamente a velocidades cotidianas. Sin embargo, se rompe a velocidades relativistas.

La Contradicción: Imagina una nave espacial (sistema S') que se aleja de la Tierra (sistema S) a $v = 0.8c$. La nave dispara una sonda hacia adelante a una velocidad de $u' = 0.7c$ relativa a sí misma. Según la fórmula clásica, un observador en la Tierra vería la sonda moverse a:

$$u = 0.7c + 0.8c = 1.5c$$

Esto es más rápido que la velocidad de la luz, lo cual viola el segundo postulado de la Relatividad Especial. Necesitamos una nueva fórmula que respete el límite de velocidad cósmico.

7.1. La Configuración para la Fórmula Relativista

Usamos tres sistemas de referencia:

- **Sistema S:** Un observador estacionario (por ejemplo, en la Tierra).
- **Sistema S':** Un sistema que se mueve con velocidad v relativa a S (por ejemplo, la nave espacial).
- **Objeto:** Un objeto que se mueve con velocidad u' relativa a S' .

Nuestro objetivo es encontrar la velocidad del objeto, u , medida por el observador en el sistema estacionario, S .

$$S \text{ (Tierra)} \quad \xrightarrow{v} \quad S' \text{ (Nave)} \quad \xrightarrow{u'} \quad \text{Objeto (Sonda)}$$

¿Cuál es la velocidad u del Objeto relativa a S ?

7.2. Derivación a partir de las Transformaciones de Lorentz

Las velocidades constantes se definen como el cociente entre la posición y el tiempo:

$$u = \frac{x}{t} \quad \text{y} \quad u' = \frac{x'}{t'},$$

que son respectivamente las velocidades del un objeto con respecto a los sistemas S y S' que se me mueve a su vez con una velocidad v

Comenzamos con las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Ahora, podemos construir la fracción para u' dividiendo x' por t' :

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - vt)}{\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}$$

Los factores γ se cancelan:

$$u' = \frac{x - vt}{t - \frac{vx}{c^2}}$$

Para poner esto en términos de velocidades, dividimos el numerador y el denominador por dt :

$$u' = \frac{\frac{x}{t} - v\frac{t}{t}}{\frac{t}{t} - \frac{v}{c^2}\frac{x}{t}}$$

Sustituyendo $u = x/t$:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Esta fórmula da la velocidad relativa u' cuando conoces las velocidades en el sistema estacionario. Sin embargo, queremos “sumar” velocidades, lo que significa que necesitamos resolver esta ecuación para u .

| paso | Despejar u | Paso algebraico |
|------|--|---|
| 1) | $u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$ | Ecuación inicial |
| 2) | $u'\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) = u - v$ | Multiplicar por $\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$ a ambos lados de la igualdad |
| 3) | $u' - \frac{u'uv}{c^2} = u - v$ | Distribuir u' en el lado derecho. |
| 4) | $u' + v = u + \frac{u'uv}{c^2}$ | Reunir términos con u . |
| 5) | $u' + v = u\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)$ | Factorizar u . |
| 6) | $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$ | Dividiendo por $\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)$ a ambos lados de la igualdad. |

De esta forma obtenemos da la **Fórmula de Suma de Velocidades de Einstein**:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Ejercicio: Despejar c^2 de la fórmula de suma de velocidades

| paso | Despejar c^2 | Paso algebraico |
|------|---|--|
| 1) | $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$ | Ecuación inicial |
| 2) | $u \left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right) = u' + v$ | Multiplicar por $\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)$ a ambos lados de la igualdad. |
| 3) | | Distribuir u en el lado derecho. |
| 4) | $\frac{uu'v}{c^2} = u' + v - u$ | |
| 5) | | Tomar el reciproco a ambos lados de la igualdad. |
| 6) | $c^2 = \frac{uu'v}{u' + v - u}$ | |

El resultado de despejar c^2 es entonces

$$c^2 = \frac{uu'v}{u' + v - u}. \quad (20)$$

En el límite no relativista de $u \approx u' + v$, tenemos que

$$c^2 = \frac{uu'v}{u' + v - u} \approx \frac{(u' + v)u'v}{0} = \infty, \quad (21)$$

tenemos que $c = \infty$ y de éste modo en el límite no relativista, ¡no existe una velocidad límite!.

7.3. Características Clave y Ejemplos

7.3.1. Ejemplo 1: La Nave Espacial y la Sonda

Volvamos a nuestro problema inicial con la fórmula relativista.

- $v = 0.8c$ (velocidad de la nave relativa a la Tierra)
- $u' = 0.7c$ (velocidad de la sonda relativa a la nave)

$$u = \frac{0.7c + 0.8c}{1 + \frac{(0.7c)(0.8c)}{c^2}} = \frac{1.5c}{1 + \frac{0.56c^2}{c^2}} = \frac{1.5c}{1 + 0.56} = \frac{1.5c}{1.56}$$

$$u \approx 0.9615c$$

El resultado es menor que la velocidad de la luz, como se requiere.

7.3.2. Característica 1: La Velocidad de la Luz es el Límite Último

¿Qué pasa si la nave que se mueve a $v = 0.9c$ dispara un rayo láser hacia adelante ($u' = c$)?

$$u = \frac{c + 0.9c}{1 + \frac{(c)(0.9c)}{c^2}} = \frac{1.9c}{1 + 0.9} = \frac{1.9c}{1.9} = c$$

El observador en la Tierra también mide la velocidad del rayo láser como exactamente c . Este hermoso resultado muestra cómo la fórmula defiende perfectamente el segundo postulado de la relatividad.

7.3.3. Característica 2: Se Reduce a la Fórmula Clásica a Bajas Velocidades

Si $v \ll c$ y $u' \ll c$, el término $\frac{u'v}{c^2}$ se vuelve extremadamente pequeño y se aproxima a cero.

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \approx \frac{u' + v}{1} = u' + v$$

Esto muestra que la fórmula relativista contiene la fórmula clásica como una aproximación a baja velocidad, lo cual es un requisito clave para cualquier nueva teoría física.

8. Fórmulas del Decaimiento Radiactivo

En esta sección estableceremos el concepto de vida media para una partícula inestable y veremos como la relatividad especial puede afectar el tiempo de vida media dependiendo del observador inercial

Introducción: La Naturaleza del Decaimiento

El decaimiento de una partícula inestable (ya sea un núcleo atómico o una partícula subatómica) es un proceso fundamentalmente **probabilístico y aleatorio**. No podemos predecir cuándo decaerá una partícula específica. Sin embargo, para una población grande de partículas idénticas, podemos predecir con gran precisión cuántas de ellas decaerán en un intervalo de tiempo determinado.

El principio clave es que la tasa de decaimiento (el número de partículas que decaen por segundo) es directamente proporcional al número de partículas que aún no han decaído. Esto conduce a una ley de **decaimiento exponencial**.

Fórmula 1: En Términos de la Constante de Decaimiento (λ)

Esta es la forma más fundamental de la ecuación, derivada directamente del principio de proporcionalidad. La tasa de cambio del número de partículas, N , con respecto al tiempo, t , es:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Donde λ (lambda) es la **constante de decaimiento** y representa la probabilidad de que una sola partícula decaiga por unidad de tiempo. Resolviendo esta ecuación diferencial, obtenemos la **fórmula del decaimiento exponencial**:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Donde:

- $N(t)$ es el número de partículas que quedan en el tiempo t .
- N_0 es el número inicial de partículas en el tiempo $t = 0$.
- e es la base del logaritmo natural.
- λ es la constante de decaimiento, con unidades de (tiempo) $^{-1}$ (p. ej., s^{-1}).

Fórmula 2: En Términos de la Vida Media ($t_{1/2}$)

Esta forma es más intuitiva. La **vida media** ($t_{1/2}$) es el tiempo que tarda en decaer la mitad de una muestra inicial de partículas.

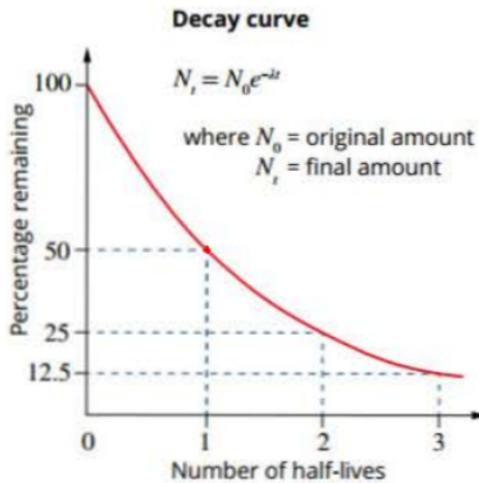


Figura 6: Decaimiento radiativo. Tomado de [?]

Relación entre λ y $t_{1/2}$

Podemos encontrar esta relación usando la primera fórmula. Por definición, cuando $t = t_{1/2}$, el número de partículas restantes es $N(t_{1/2}) = N_0/2$.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \implies \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2} \implies -\ln(2) = -\lambda t_{1/2}$$

Esto nos da la relación fundamental:

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}}$$

Sustituyendo esta expresión para λ en la primera fórmula de decaimiento:

$$N(t) = N_0 e^{-\left(\frac{\ln(2)}{t_{1/2}}\right)t} = N_0 \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\frac{t}{t_{1/2}}} = N_0 (2)^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

Esto nos da la **fórmula del decaimiento en términos de la vida media**:

$$\boxed{N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}}$$

Esta forma es muy fácil de interpretar: el exponente $t/t_{1/2}$ simplemente cuenta “cuántas vidas medias han pasado”, ver figura 6.

Ejemplos Aplicados

Aquí aplicamos las fórmulas a tres ejemplos que abarcan escalas de tiempo drásticamente diferentes.

Cuadro 3: Comparación de Vidas Medias y Constantes de Decaimiento.

| Partícula | Vida Media ($t_{1/2}$) | C. de Decaimiento (λ) | Contexto Físico |
|-----------------|---|---------------------------------------|--|
| Uranio-238 | 4.47×10^9 years | $4.91 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ | Isótopo extremadamente estable, clave para la datación radiométrica de rocas muy antiguas y la edad de la Tierra. |
| Neutrón (libre) | 877 s (14.6 min) | $7.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ | Estable dentro de un núcleo, pero inestable cuando está libre. Su vida media es crucial en la cosmología del universo temprano. |
| Muón | $2.2 \mu\text{s}$ (2.2×10^{-6} s) | $3.15 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ | Partícula fundamental muy inestable. Su detección en la superficie terrestre es una prueba experimental clásica de la dilatación del tiempo. |

Cálculos de λ :

- **Uranio-238:**

- $t_{1/2} = 4.47 \times 10^9 \text{ años} \times 3.15 \times 10^7 \text{ s/año} \approx 1.41 \times 10^{17} \text{ s}$
- $\lambda = \frac{\ln(2)}{1.41 \times 10^{17} \text{ s}} \approx 4.91 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$

- **Neutrón:**

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{877 \text{ s}} \approx 7.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

- **Muón:**

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{2.2 \times 10^{-6} \text{ s}} \approx 3.15 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$

9. Ejemplos

1. Supongamos que un cañón de bolas de tenis es capaz de lanzar una bola de tenis, de diámetro $d = 67 \text{ mm}$ a la mitad de la velocidad de la luz hacia la raqueta de un tenista al otro lado de una cancha de longitud $h = 24 \text{ m}$. Una hormiga accidentalmente resultó viajando con la bola. Calcular el tiempo propio que siente la hormiga y el tiempo dilatado para el tenista. Calcular las distancias contraídas con respecto a cada observador (ver figura 7).

Solución

Tenemos que

- Escogemos el sistema S con origen en el tenista
- Esogemos el sistema S' viajando con la bola de tenis.
- $v = 0.87c$ es la velocidad de la bola con respecto a S .

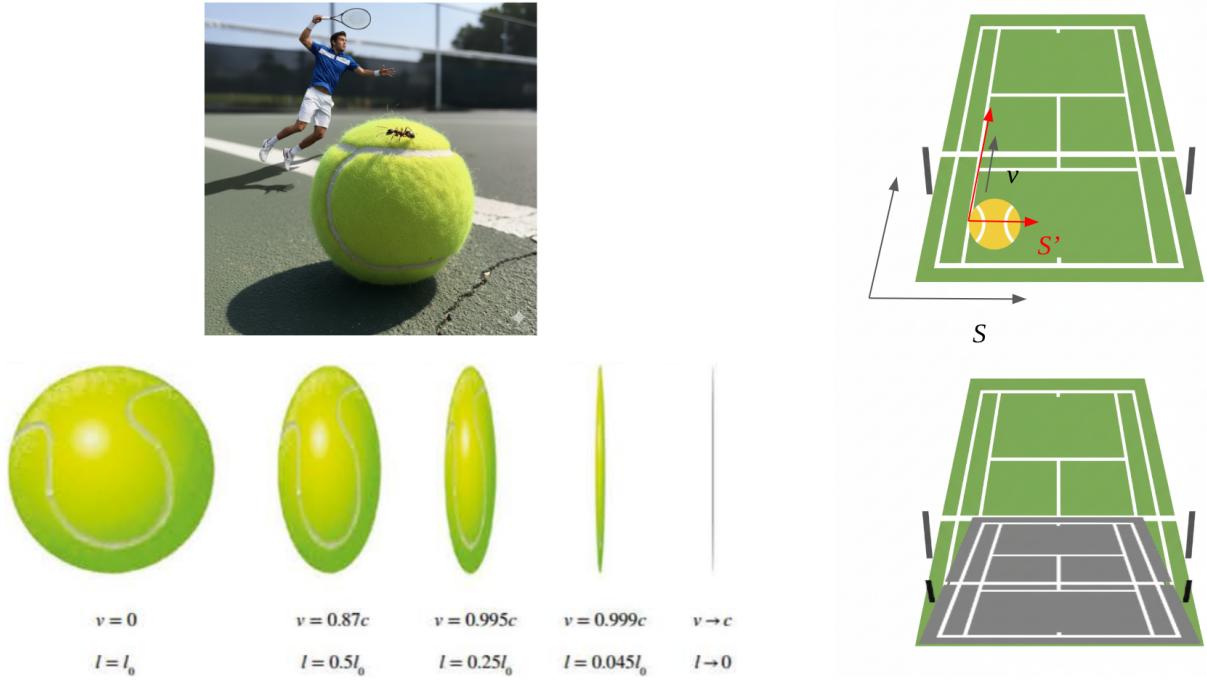


Figura 7: Dilatación y contracción en un ejemplo ficticio para una bola de tenis a velocidades relativistas. En la parte de inferior se ilustra de contracción de las longitudes para la bola observada por el tenista, y la contracción de la cancha, en gris, percibida por la hormiga moviéndose con la bola de tenis a una velocidad de $0.87c$ correspondiente a una contracción de Lorentz por un factor de 0.5.

- Longitud de la cancha de tenis: $h = 24\text{ m}$
- Diámetro pelota de tenis: $d = 67\text{ mm}$

El tiempo que tarda la pelota en atravesar la cancha con respecto al tenista es el tiempo dilatado

$$\Delta t = \frac{h}{v} = \frac{24\text{ m}}{0.87 \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 9.2 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (22)$$

El tiempo que percibe la hormiga es el tiempo propio

$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= 9.2 \times 10^{-8} \text{ s} \sqrt{1 - 0.87^2} \\ &\approx 0.5 \cdot 9.2 \times 10^{-8} \text{ s} \\ &= 4.6 \times 10^{-8} \text{ s} \end{aligned} \quad (23)$$

Para calcular las distancias con respecto al tenista, partimos del hecho que su distancia propia:

La distancia entre dos puntos cuyas posiciones son medidas por un observador en reposo respecto a los dos puntos,

corresponde a

$$L_0^c = h = 24\text{ m}.$$

El tenista observa la bola de diámetro propio percibido por la hormiga $L_0^b = d$, con un diámetro contraído, como se muestra en la parte inferior de la figura 7

$$\begin{aligned} L^b &= \frac{L_0^b}{\gamma} = d\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= d\sqrt{1 - 0.87^2} \\ &\approx 0.5d \\ &= 0.5 \cdot 67 \text{ mm} \\ &= 33.5 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Finalmente, para las distancias percibidas por la hormiga, partimos del hecho para ella la bola está en su distancia propia $L_0^b = d$.

Sin embargo, percibe una distancia de la cancha de tenis contraída, dada por

$$\begin{aligned} L^b &= \frac{L_0^b}{\gamma} = h\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &\approx 0.5h \\ &= 0.5 \cdot 24 \text{ m} \\ &= 12 \text{ m}. \end{aligned}$$

Podemos de hecho comprobar que en su tiempo propio, $\Delta t_0 = 4.6 \times 10^{-8} \text{ s}$, que es más corto que el tiempo dilatado Δt , puede recorrer esa distancia contraída con $v = 0.87c$

$$\begin{aligned} L^b &= v\Delta t_0 \\ &= 0.87c \cdot 4.6 \times 10^{-8} \text{ s} \\ &= 12 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. La estrella Xquar está a una distancia de 5 años luz de la Tierra. La aventurera espacial Raqu se dirige desde la Tierra hacia Xquar a una velocidad de $0.9c$.
 - (a) Para aquellos que observan desde la Tierra, ¿cuánto tiempo tardará Raqu en llegar a Xquar?
 - (b) Desde el punto de vista de Raqu, ¿cuánto tiempo tardará ella en llegar a Xquar?
 - (c) Aunque Xquar estaba a 5 años luz de la Tierra y Raqu viajó a $0.9c$, su viaje tomó mucho menos tiempo de lo que se podría esperar de estas cifras. Explique por qué es esto.
3. Un muón es creado en la atmósfera a 15 Km de altura. Viaja hacia el centro de la Tierra a una velocidad de $0.999c$.
 - (a) Para aquellos que observan desde la Tierra, ¿cuánto tiempo tardará el muón en llegar a la superficie de la Tierra?
 - (b) Desde el punto de vista del muón, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a la superficie de la Tierra?
 - (c) Aunque la distancia recorrida fue de 15km hasta la superficie de la Tierra y el muón viajó a $0.999c$, su viaje tomó mucho menos tiempo de lo que se podría esperar de estas cifras. Explique por qué es esto. ¿Es consistente con la vida media del muón?

Soluciones

3. (a) Para aquellos que observan desde la Tierra, ¿cuánto tiempo tardará el muón en llegar a la superficie de la Tierra?

Esto se pregunta desde la perspectiva del observador estacionario en la Tierra. El cálculo se basa en la distancia y la velocidad medidas en el sistema de la Tierra.

- **Distancia a recorrer (L_0):** 15 km = 15,000 m
- **Velocidad de viaje (v):** 0.999c
- **Velocidad de la luz (c):** Aproximadamente 3×10^8 m/s

Usamos la fórmula estándar para el tiempo:

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}}$$

$$\Delta t = \frac{15,000 \text{ m}}{0.999 \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})} = \frac{15,000}{2.997 \times 10^8} \text{ s} \approx 5.005 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Para hacer este número más intuitivo, podemos convertirlo a microsegundos (μs):

$$5.005 \times 10^{-5} \text{ s} = 50.05 \times 10^{-6} \text{ s} = 50.05 \mu\text{s}$$

Respuesta: Para los observadores en la Tierra, el muón tardará aproximadamente **50.05 microsegundos** en llegar a la superficie.

- (b) Desde el punto de vista del muón, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a la superficie de la Tierra?

Esto se pregunta desde la perspectiva del muón en movimiento. El tiempo que el muón experimenta en su propio reloj interno es el tiempo propio (Δt_0), que está sujeto a la dilatación del tiempo.

Primero, calculamos el factor de Lorentz (γ) para una velocidad de 0.999c:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.999)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.998001}} = \frac{1}{\sqrt{0.001999}}$$
$$\gamma \approx 22.37$$

La fórmula de la dilatación del tiempo es $\Delta t = \gamma \Delta t_0$. Queremos encontrar el tiempo para el muón, Δt_0 :

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{50.05 \mu\text{s}}{22.37} \approx 2.24 \mu\text{s}$$

Respuesta: Desde el punto de vista del muón, su viaje a la superficie toma solo **2.24 microsegundos**.

- (c) Explicación y Consistencia

Esta pregunta llega al corazón de por qué la relatividad es tan esencial para entender nuestro universo.

Explicación de la Diferencia de Tiempo (Contracción de la Longitud)

La "paradoja" se resuelve con la **contracción de la longitud**. La distancia de 15 km es la **longitud propia** de la atmósfera medida por alguien en reposo con respecto a ella (en la Tierra).

Desde la perspectiva del muón, está estacionario, y la atmósfera de la Tierra se apresura a su encuentro a 0.999c. Por lo tanto, el muón mide que la altura de la atmósfera está contraída. La distancia contraída (L) que ve el muón es:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{15 \text{ km}}{22.37} \approx 0.67 \text{ km} \quad (\text{o } 670 \text{ metros})$$

Desde el sistema de referencia del muón, su tiempo de viaje tiene perfecto sentido. Se ve a sí mismo cubriendo esta distancia mucho más corta a $0.999c$:

$$\text{Tiempo del Muón} = \frac{\text{Distancia Contraída}}{\text{Velocidad}} = \frac{670 \text{ m}}{0.999 \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})} \approx 2.24 \mu\text{s}$$

Esto coincide con el resultado de la parte (b). Para el muón, el viaje es corto porque la distancia es corta.

Consistencia con la Vida Media del Muón

Esta es la parte más crucial del problema.

- a) **Vida Media Propia del Muón:** La vida media de un muón en reposo es aproximadamente $\tau = 2.2 \mu\text{s}$.
- b) **Predicción de la Física Clásica:** Desde el sistema de referencia de la Tierra, el viaje dura $50.05 \mu\text{s}$. Como esto es aproximadamente 23 veces más largo que la vida media propia del muón, un físico clásico predeciría que prácticamente ningún muón debería sobrevivir al viaje.
- c) **Realidad Relativista:**
 - **Desde el Sistema de la Tierra (Dilatación del Tiempo):** El observador en la Tierra ve que el reloj interno del muón funciona lentamente. Su vida media *efectiva* en el sistema de la Tierra está dilatada:

$$\text{Vida Media Dilatada} = \gamma \times \tau = 22.37 \times 2.2 \mu\text{s} \approx 49.2 \mu\text{s}$$

Como el tiempo de viaje ($50.05 \mu\text{s}$) es muy cercano a esta vida media dilatada, es plausible que muchos muones lleguen al suelo.

- **Desde el Sistema del Muón (Contracción de la Longitud):** Desde su propia perspectiva, la vida media del muón es solo su valor normal de $2.2 \mu\text{s}$. Sin embargo, el viaje que debe hacer dura solo $2.24 \mu\text{s}$ porque la distancia se contrajo. Nuevamente, como el tiempo de viaje y la vida media son casi idénticos, es plausible que el muón sobreviva.

Conclusión: Sí, el viaje es perfectamente consistente con la vida media del muón *cuando se tiene en cuenta la relatividad*. El hecho de que detectemos un gran flujo de muones a nivel del mar es una prueba experimental poderosa tanto de la dilatación del tiempo como de la contracción de la longitud.

4. Demuestre que la adición de dos velocidades inferiores a la de luz en la fórmula de adición de velocidades relativistas, no puede superar la velocidad de luz.

10. Forma Vectorial y Rapidez

Para tener las coordenadas con las mismas unidades,, debemos usar ct para que sea interpretado como una dimensión espacial

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right), \quad (24)$$

$$x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right) \quad (25)$$

10.1. Funciones Hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Podemos parametrizar la velocidad usando la **rapidez**, ξ :

$$\gamma = \cosh \xi, \quad \frac{v}{c} \gamma = \sinh \xi$$

Esta parametrización es válida porque satisface automáticamente la identidad $\gamma^2(1 - v^2) = 1$:

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = \gamma^2 - \left(\frac{v}{c} \gamma\right)^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

A partir de esto, también encontramos que la velocidad está relacionada con la rapidez por

$$\frac{v}{c} = \tanh \xi,$$

donde

$$\tanh \xi \equiv \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi}.$$

En resumen, las transformaciones de Lorentz se pueden escribir como

| |
|------------------------------------|
| $ct' = ct \cosh \xi - x \sinh \xi$ |
| $x' = x \cosh \xi - ct \sinh \xi$ |
| $y' = y$ |
| $z' = z$. |

Si definimos la coordenada temporal en las dimensiones de distancia como $x^0 \equiv ct$, podemos definir el cuadrivector

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{26}$$

y

| |
|--|
| $x^{0'} = x^0 \cosh \xi - x^1 \sinh \xi$ |
| $x^{1'} = x^1 \cosh \xi - x^0 \sinh \xi$ |
| $x^{2'} = x^2$ |
| $x^{3'} = x^3$. |

A continuación trabajaremos en dos dimensiones, una temporal y una espacial, a saber

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1) = (ct, x) \tag{27}$$

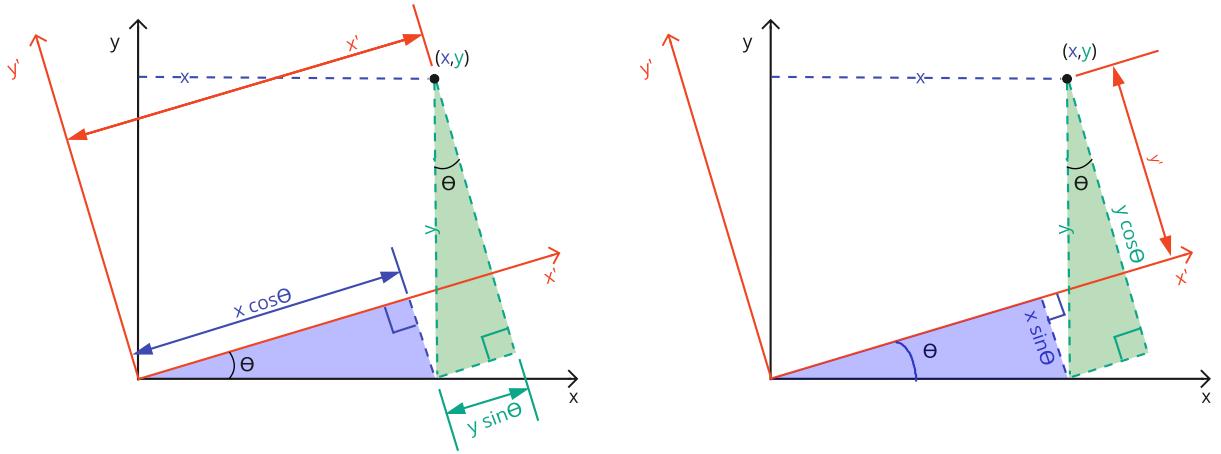


Figura 8: Rotación de coordenadas

11. Invariancia

Para rotaciones tenemos el vector de posición de la figura 8

$$\mathbf{r}' = (x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta).$$

El módulo de este vector es invariante

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' &= x'^2 + y'^2 \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Verifiquemos, bajo qué condiciones el módulo del vector de impulso es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Definimos el producto escalar entre dos vectores $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ como

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = g_1 b_1 c_1 + g_2 b_2 c_2. \quad (28)$$

con g_1 y g_2 a ser fijados.

Con esta definición el módulo del vector de impulso $\mathbf{b} = (x^0, x^1)$ en la base transformada,

$$\mathbf{b}' = (x^{0'}, x^{1'}) = (x^0 \cosh \xi - x^1 \sinh \xi, x^1 \cosh \xi - x^0 \sinh \xi),$$

es

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' &= g_1 x^{0'}^2 + g_2 x^{1'}^2 \\ &= g_1 (x^{02} \cosh^2 \xi - 2x^0 x^1 \cosh \xi \sinh \xi + x^{12} \sinh^2 \xi) + g_2 (x^{12} \cosh^2 \xi - 2x^0 x^1 \cosh \xi \sinh \xi + x^{02} \sinh^2 \xi). \end{aligned}$$

Si $g_1 = 1$ y $g_2 = -1$, tenemos la definición del producto escalar en el espacio de Minkowski como

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \equiv b_1 c_1 - b_2 c_2, \quad (29)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' &= x^{0'}^2 - x^{1'}^2 \\ &= x^{02} (\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi) + x^{12} (\sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi) - \cancel{2x^0 x^1 \cosh \xi \sinh \xi} + \cancel{2x^0 x^1 \cosh \xi \sinh \xi} \\ &= x^{02} - x^{12}. \end{aligned}$$

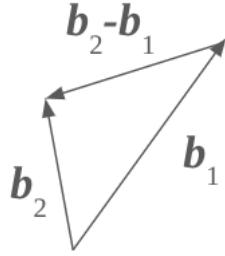


Figura 9: $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$

Podemos ver que la invarianza del producto escalar bajo una transformación de Lorentz, fija la definición del producto escalar en ese espacio, como se da en la ec. (29).

Similarmente, para la diferencia de dos impulsos, como en la figura 9

$$\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$$

tiene un módulo que es invariante

$$\begin{aligned}\Delta S^2 &= |\Delta\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1|^2 \\ &= (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \\ &= (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \\ &= \Delta t^2 - \Delta x^2.\end{aligned}$$

En el espacio completo tenemos

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Definimos un vector en el espacio de Minkowski como

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$$

12. Cuadrimomento

En relatividad especial, la magnitud del vector momento para una partícula que se mueve a una velocidad \mathbf{v} , es

$$p = \gamma m v.$$

A continuación mostraremos porque se necesita el factor γ en la ecuación para el momento.

Si definimos el cuatrivector

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right),$$

donde c se comporta como un factor de conversión (al igual que h cuando se necesite)

$$\left[\frac{E}{c} \right] = \left[M \frac{L^2}{T^2} \frac{T}{L} \right] = \left[M \frac{L}{T} \right] = [p],$$

entonces esperamos que el módulo al cuadrado en el espacio de Minkowski, sea un invariante, una constante que llamaremos $m^2 c^4$ (en unidades de momento al cuadrado), tal que

$$\begin{aligned}m^2 c^2 &= \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p^2,\end{aligned}$$

donde $p^2 = |\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ en el espacio real en tres dimensiones.

Resolviendo para E

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 + p^2.$$

Resolviendo para E^2

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 + p^2 c^2 \\ &= m^2 c^4 + \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \\ &= m^2 c^2 (c^2 + \gamma^2 v^2). \end{aligned}$$

Usando la ecuación (15) para γ^2

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^2 \left[c^2 + \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} \right) v^2 \right] \\ &= m^2 c^2 \left(\frac{c^4 - c^2 v^2 + c^2 v^2}{c^2 - v^2} \right) \\ &= m^2 c^2 \frac{c^4}{c^2 - v^2} \\ &= m^2 c^4 \frac{c^2}{c^2 - v^2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^4, \end{aligned} \tag{30}$$

Por lo tanto

$$E = \gamma m c^2. \tag{31}$$

Usando la ecuación (15) para γ , tenemos

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{32}$$

Hay dos límites:

1. Límite no relativista: $m \gg p$ que resulta en

$$E = mc^2,$$

que la energía mínima que puede tener un objeto de masa m y se denomina su *energía en reposo*.

2. Límite relativista: $m \ll p$ que resulta en

$$E = pc.$$

Éste límite es válido para partículas con o sin masa (como el fotón). En el caso de un fotón, hemos visto que su energía es

$$E = h\nu, \tag{33}$$

y reemplazando en la expresión anterior, tenemos que el momento de un fotón es

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c} \nu \quad (34)$$

$$\begin{aligned} [p] &= \left[\frac{\frac{E \cdot T}{L} \cdot \frac{1}{T}}{\frac{\bar{T}}{\bar{T}}} \right] \\ &= \left[\frac{M \frac{L^2}{T^2} \cdot \mathcal{X}}{\frac{I}{\bar{T}}} \cdot \frac{1}{\mathcal{X}} \right] \\ &= \left[M \frac{L}{T} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

como era de esperarse.

La longitud de onda de un fotón es

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (36)$$

tal que $[\lambda] = [L]$ y por lo tanto

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (37)$$

La correspondiente energía de un fotón de longitud de onda λ

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda}. \quad (38)$$

En el caso de una partícula relativista con masa, moviéndose a una velocidad v , comparable a la velocidad de la luz

$$\begin{aligned} E &= \gamma mvc \\ &= \frac{mvc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Por lo tanto

$$\lim_{v \rightarrow c} E = \infty. \quad (40)$$

De modo que se requeriría una energía infinita para acelerar un objeto material a la velocidad de la luz.

Además, si aceptamos la existencia de una partícula que se pueda mover más rápido que la velocidad de la luz, llamada taquíon, el radicando en el denominador tendría un signo negativo y la energía sería imaginaria, lo que aparentemente no tiene significado físico. Es de anotar que a la fecha no se ha observado ningún taquíon en la naturaleza.

13. Ejemplos

- Cálculo de Fotones por Segundo para Corte por Láser de CO₂.

Para un láser de CO₂ industrial de 4000 W (4 kW), una potencia realista para cortar una placa de acero de 20 mm, el número total de fotones que se acumulan en el punto de contacto es de aproximadamente:

$$N_{\text{fotones}} \approx 2.13 \times 10^{23} \text{ fotones por segundo}$$

De estos, solo una pequeña fracción (alrededor del 5 % a 10 %) es absorbida y utilizada para cortar el metal.

Desglose del Cálculo

El proceso se divide en tres pasos principales:

- a) Calcular la energía de un único fotón de un láser de CO₂.
- b) Estimar la energía necesaria por segundo para calentar, derretir y eliminar el acero.
- c) Combinar ambos resultados para encontrar el número de fotones por segundo.

Paso 1: Energía de un Fotón de Láser de CO₂

La energía de un fotón ($E_{\text{fotón}}$) se calcula con la fórmula de Planck:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{hc}{\lambda}$$

Donde:

- h = Constante de Planck ($6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$)
- c = Velocidad de la luz ($3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$)
- λ = Longitud de onda del láser de CO₂ ($10.6 \mu\text{m} = 10.6 \times 10^{-6} \text{ m}$)

Sustituyendo los valores:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})}{10.6 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 1.875 \times 10^{-20} \text{ J}$$

Paso 2: Estimación de la Energía Necesaria para Cortar el Acero

La energía del láser debe calentar y derretir el acero. La potencia útil ($P_{\text{útil}}$) depende de la cantidad de material eliminado por segundo, lo cual depende de la velocidad de corte.

Suposición de Velocidad de Corte Realista: Para acero de 20 mm, una velocidad de corte típica es de 0.8 m min^{-1} .

$$\text{Velocidad} = 0.8 \text{ m min}^{-1} \div 60 \text{ s min}^{-1} \approx 0.0133 \text{ m s}^{-1}$$

Volumen de Acero Eliminado por Segundo (V_{seg}): El láser corta una ranura (kerf) con el diámetro del haz.

$$\begin{aligned} V_{\text{seg}} &= (\text{espesor}) \times (\text{diámetro}) \times (\text{velocidad}) \\ V_{\text{seg}} &= (20 \times 10^{-3} \text{ m}) \times (0.1 \times 10^{-3} \text{ m}) \times (0.0133 \text{ m s}^{-1}) \approx 2.66 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Masa de Acero Eliminada por Segundo (m_{seg}): Usamos la densidad del acero ($\rho \approx 7850 \text{ kg/m}^3$).

$$m_{\text{seg}} = V_{\text{seg}} \times \rho = (2.66 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}) \times (7850 \text{ kg/m}^3) \approx 2.08 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$$

Cálculo de la Potencia Útil ($P_{\text{útil}}$): Necesitamos las propiedades térmicas del acero:

- Calor específico (c_p): $\approx 500 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Punto de fusión: $\approx 1500^\circ\text{C}$ (un ΔT de $\approx 1480^\circ\text{C}$ desde 20°C)
- Calor latente de fusión (L_f): $\approx 250\,000 \text{ J kg}^{-1}$

$$P_{\text{calentar}} = m_{\text{seg}} \cdot c_p \cdot \Delta T = (2.08 \times 10^{-4}) \cdot 500 \cdot 1480 \approx 154 \text{ W}$$

$$P_{\text{derretir}} = m_{\text{seg}} \cdot L_f = (2.08 \times 10^{-4}) \cdot 250\,000 \approx 52 \text{ W}$$

$$P_{\text{útil}} = P_{\text{calentar}} + P_{\text{derretir}} \approx 154 \text{ W} + 52 \text{ W} = 206 \text{ W}$$

Esta es la potencia mínima teórica que el acero debe absorber.

Paso 3: Combinar Resultados y Asumir una Potencia de Láser

La eficiencia de absorción de energía en el corte de acero grueso es baja (aprox. 5 % a 10 %) debido a la reflexión y la conducción térmica.

Si asumimos una eficiencia del 5.15 %, la potencia total requerida del láser (P_{total}) sería:

$$P_{\text{total}} = \frac{P_{\text{útil}}}{\text{Eficiencia}} = \frac{206 \text{ W}}{0.0515} \approx 4000 \text{ W}$$

Esto nos lleva a una suposición clave y realista: **se está utilizando un láser industrial de 4 kW**.

Cálculo Final de Fotones por Segundo: El número de fotones por segundo (N_{fotones}) es la potencia total del láser dividida por la energía de cada fotón.

$$N_{\text{fotones}} = \frac{P_{\text{total}}}{E_{\text{fotón}}} = \frac{4000 \text{ J s}^{-1}}{1.875 \times 10^{-20} \text{ J/fotón}} \approx 2.13 \times 10^{23} \text{ fotones/s}$$

Conclusión

Aunque teóricamente solo se necesitan unos 206 W de potencia absorbida para realizar el corte, debido a las ineficiencias del proceso, se requiere un láser mucho más potente. Para un láser industrial realista de 4000 W, el haz deposita en el punto de contacto la asombrosa cantidad de 2.13×10^{23} fotones cada segundo para lograr cortar la placa de acero de 20 mm.

2. La Energía de la Fisión del Uranio

La primera bomba atómica, detonada en el proyecto Manhattan, funcionaba mediante la **fisión nuclear** del Urano-235 (^{235}U). En este proceso, un neutrón lento golpea un núcleo de ^{235}U , haciéndolo inestable. El núcleo se divide en dos núcleos más pequeños (llamados fragmentos de fisión), liberando varios neutrones y una enorme cantidad de energía.

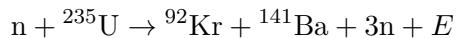
El origen de esta energía es que la suma de las masas de los productos finales es **ligevemente menor** que la suma de las masas de los reactivos iniciales. Esta “masa perdida”, conocida como **defecto de masa** (Δm), se convierte íntegramente en energía según la famosa ecuación de Einstein.

Fórmula clave:

$$E = \Delta mc^2$$

El Problema

Considera una de las posibles reacciones de fisión del Urano-235:



Datos (masas atómicas en reposo):

- Masa de un neutrón (m_n): 1.008 66 u
- Masa de un átomo de Urano-235 (m_U): 235.043 93 u
- Masa de un átomo de Kriptón-92 (m_{Kr}): 91.926 15 u
- Masa de un átomo de Bario-141 (m_{Ba}): 140.914 41 u

Constantes:

- Unidad de masa atómica (u): $1\text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27}\text{ kg}$
- Velocidad de la luz (c): $3 \times 10^8\text{ m s}^{-1}$

Preguntas:

- Calcula la energía liberada (en Joules) por la fisión de **un solo** átomo de Urano-235.
- Estima la energía total liberada si 1 kg de Urano-235 sufre una fisión completa.

Solución Detallada

Parte 1: Energía por un solo átomo de Urano

Paso 1: Calcular la masa total inicial (m_{inicial})

$$m_{\text{inicial}} = m_n + m_U = 1.008\,66\text{ u} + 235.043\,93\text{ u} = 236.052\,59\text{ u}$$

Paso 2: Calcular la masa total final (m_{final})

$$\begin{aligned}m_{\text{final}} &= m_{Kr} + m_{Ba} + 3 \times m_n \\&= 91.926\,15\text{ u} + 140.914\,41\text{ u} + 3 \times (1.008\,66\text{ u}) \\&= 91.926\,15\text{ u} + 140.914\,41\text{ u} + 3.025\,98\text{ u} = 235.866\,54\text{ u}\end{aligned}$$

Paso 3: Calcular el Defecto de Masa (Δm)

$$\Delta m = m_{\text{inicial}} - m_{\text{final}} = 236.052\,59\text{ u} - 235.866\,54\text{ u} = 0.186\,05\text{ u}$$

Paso 4: Convertir el Defecto de Masa a Kilogramos

$$\Delta m_{\text{kg}} = 0.186\,05\text{ u} \times (1.6605 \times 10^{-27}\text{ kg u}^{-1}) \approx 3.099 \times 10^{-28}\text{ kg}$$

Paso 5: Calcular la Energía Liberada (E) Aplicamos la fórmula $E = \Delta m c^2$:

$$\begin{aligned}E &= (3.099 \times 10^{-28}\text{ kg}) \times (3 \times 10^8\text{ m s}^{-1})^2 \\E &= (3.099 \times 10^{-28}) \times (9 \times 10^{16})\text{ J} \approx 2.789 \times 10^{-11}\text{ J}\end{aligned}$$

Respuesta a la Pregunta 1: La fisión de un solo átomo de U-235 libera aproximadamente $2.79 \times 10^{-11}\text{ J}$.

Parte 2: Energía por 1 kg de Urano

Paso 6: Calcular el número de átomos en 1 kg de U-235

$$\text{Nº de átomos} \approx \frac{1 \text{ kg}}{235.043\,93 \text{ u} \times (1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg u}^{-1})} \approx 2.56 \times 10^{24} \text{ átomos}$$

Paso 7: Calcular la Energía Total Liberada

$$E_{\text{total}} = (2.789 \times 10^{-11} \text{ J/átomo}) \times (2.56 \times 10^{24} \text{ átomos})$$
$$E_{\text{total}} \approx 7.14 \times 10^{13} \text{ J}$$

Respuesta a la Pregunta 2: La fisión completa de 1 kg de Urano-235 liberaría aproximadamente 71.4 TJ.

Interpretación y Contexto: ¿Qué tan grande es esta energía?

Para poner en perspectiva los 71.4 TJ:

- **Equivalencia en TNT:** La energía liberada por la explosión de 1 t de TNT es de unos 4.184 GJ ($4.184 \times 10^9 \text{ J}$).

$$\text{Equivalente en TNT} = \frac{7.14 \times 10^{13} \text{ J}}{4.184 \times 10^9 \text{ J t}^{-1}} \approx 17\,065 \text{ toneladas de TNT}$$

Esto es comparable a la potencia de la bomba de Hiroshima (estimada entre 15 y 20 kilotonnes).

Conclusión del ejercicio: Este problema demuestra claramente cómo la fórmula $E = \Delta mc^2$ se aplica en el mundo real. La aniquilación de una cantidad de masa casi imperceptible a nivel atómico (solo el 0.08 % de la masa inicial se “ pierde”), al ser multiplicada por el gigantesco valor de c^2 , se traduce en una liberación de energía de proporciones masivas.

3. Energía de una Bomba de Fusión (Bomba de Hidrógeno)

Las armas termonucleares, o bombas de hidrógeno (H-bombs), liberan energía mediante la **fusión nuclear**, el mismo proceso que alimenta al Sol. En una bomba H, una bomba de fisión primaria genera las temperaturas y presiones extremas necesarias para forzar a los núcleos de isótopos ligeros de hidrógeno (como el Deuterio y el Tritio) a fusionarse.

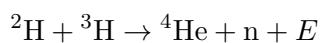
La reacción de fusión más “sencilla” y una de las más energéticas es la fusión Deuterio-Tritio (D-T). Al igual que en la fisión, la energía proviene de un **defecto de masa**: la masa de los productos resultantes es ligeramente menor que la masa de los reactivos originales, y esta diferencia de masa se convierte en una cantidad colosal de energía.

Fórmula clave:

$$E = \Delta mc^2$$

El Problema

La reacción principal en muchas armas termonucleares es la fusión de un núcleo de Deuterio (${}^2\text{H}$) con uno de Tritio (${}^3\text{H}$):



Datos (masas nucleares en reposo):

- Masa de un núcleo de Deuterio (^2H): 2.014 102 u
- Masa de un núcleo de Tritio (^3H): 3.016 049 u
- Masa de un núcleo de Helio-4 (^4He): 4.002 603 u
- Masa de un neutrón (n): 1.008 665 u

Constantes:

- Unidad de masa atómica (u): $1 \text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Velocidad de la luz (c): $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Preguntas:

- a) Calcula la energía liberada (en Joules) por **una sola** reacción de fusión Deuterio-Tritio.
- b) Estima la energía total liberada si 1 kg de una mezcla equimolar (igual número de átomos de cada uno) de Deuterio y Tritio se fusiona completamente.
- c) Compara la energía liberada por kilogramo con la de la fisión del Uranio-235.

Solución Detallada

Parte 1: Energía por una sola reacción de fusión

Paso 1: Calcular la masa total inicial (m_{inicial})

$$m_{\text{inicial}} = m_D + m_T = 2.014\,102 \text{ u} + 3.016\,049 \text{ u} = 5.030\,151 \text{ u}$$

Paso 2: Calcular la masa total final (m_{final})

$$m_{\text{final}} = m_{\text{He}} + m_n = 4.002\,603 \text{ u} + 1.008\,665 \text{ u} = 5.011\,268 \text{ u}$$

Paso 3: Calcular el Defecto de Masa (Δm)

$$\Delta m = m_{\text{inicial}} - m_{\text{final}} = 5.030\,151 \text{ u} - 5.011\,268 \text{ u} = 0.018\,883 \text{ u}$$

Paso 4: Convertir el Defecto de Masa a Kilogramos

$$\Delta m_{\text{kg}} = 0.018\,883 \text{ u} \times (1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg u}^{-1}) \approx 3.1455 \times 10^{-29} \text{ kg}$$

Paso 5: Calcular la Energía Liberada (E)

$$E = (3.1455 \times 10^{-29} \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 \approx 2.831 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Respuesta a la Pregunta 1: Una sola reacción de fusión D-T libera aproximadamente $2.83 \times 10^{-12} \text{ J}$ (17.6 MeV).

Parte 2: Energía por 1 kg de combustible de fusión

Paso 6: Calcular el número de reacciones en 1 kg de mezcla La masa de un “par” de combustible ($D+T$) es $m_{\text{par}} = 5.030\,151 \text{ u} \approx 8.3526 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

$$\text{Nº de reacciones} = \frac{1 \text{ kg}}{8.3526 \times 10^{-27} \text{ kg}} \approx 1.197 \times 10^{26} \text{ reacciones}$$

Paso 7: Calcular la Energía Total Liberada

$$E_{\text{total}} = (2.831 \times 10^{-12} \text{ J/reacción}) \times (1.197 \times 10^{26} \text{ reacciones}) \approx 3.388 \times 10^{14} \text{ J}$$

Respuesta a la Pregunta 2: La fusión completa de 1 kg de mezcla D-T liberaría aproximadamente 339 TJ.

Parte 3: Comparación con la Fisión

Paso 8: Comparar la Energía por Kilogramo

- **Energía de Fusión (por kg):** $3.39 \times 10^{14} \text{ J}$
- **Energía de Fusión (por kg, de ejercicio anterior):** $7.14 \times 10^{13} \text{ J}$

$$\frac{\text{Energía Fusión}}{\text{Energía Fisión}} = \frac{3.39 \times 10^{14} \text{ J}}{7.14 \times 10^{13} \text{ J}} \approx 4.75$$

Respuesta a la Pregunta 3: La fusión de 1 kg de combustible D-T libera aproximadamente **4.75 veces más energía** que la fisión de 1 kg de Urano-235.

Eficiencia de una Bomba de Hidrógeno

La eficiencia de una bomba de hidrógeno para “quemar” o fusionar todo su combustible de fusión es sorprendentemente baja. Generalmente, la eficiencia de la etapa de fusión en un arma termonuclear moderna se encuentra en el rango del 20 % a 40 %. Esto significa que entre el 60 % a 80 % del combustible de fusión es simplemente dispersado por la explosión sin reaccionar.

¿Por qué la Eficiencia no es del 100 %? El Principio de ”Desmontaje Explosivo”

El factor limitante más importante en cualquier arma nuclear es que **la propia explosión destruye las condiciones necesarias para que la reacción continúe**.

- a) **Condiciones Extremas:** Para que la fusión ocurra, el combustible debe ser comprimido a densidades enormes y calentado a temperaturas de decenas de millones de grados Celsius, lo cual se logra con una explosión de fisión primaria.
- b) **La Carrera Contra el Tiempo:** En el instante en que la fusión comienza, libera una energía aún más colosal. Esta energía crea una presión y una onda de choque expansiva que viaja hacia afuera.
- c) **El Desmontaje:** Esta fuerza expansiva trabaja directamente en contra de la fuerza de implosión que mantiene el combustible comprimido. Tan pronto como la presión hacia afuera supera la presión de confinamiento, el combustible se expande rápidamente.

d) .^a pagado” de la Reacción: A medida que el combustible se expande, su densidad y temperatura caen en picado. En cuestión de nanosegundos, las condiciones caen por debajo del umbral necesario para la fusión, y la reacción se detiene.

La eficiencia es, por lo tanto, una medida de cuán bien el diseño puede **mantener el combustible confinado** antes de que la inevitable explosión lo desmonte todo.

Ejemplo Numérico Ilustrativo

Imaginemos una bomba de 1 Mt de TNT ($\approx 4.184 \times 10^{15}$ J), donde el 50 % de la energía proviene de la fusión (500 kt o $\approx 2.092 \times 10^{15}$ J).

1. Masa de combustible que SÍ se fusionó:

$$\text{Masa fusionada} = \frac{\text{Energía liberada}}{\text{Energía por kg}} = \frac{2.092 \times 10^{15} \text{ J}}{3.39 \times 10^{14} \text{ J kg}^{-1}} \approx 6.17 \text{ kg}$$

2. Masa total de combustible en la bomba: Si asumimos una eficiencia de fusión plausible del 30 %:

$$\text{Masa total} = \frac{\text{Masa fusionada}}{\text{Eficiencia}} = \frac{6.17 \text{ kg}}{0.30} \approx 20.6 \text{ kg}$$

Esto significa que para que 6.17 kg de combustible reaccionen, la bomba debe estar cargada con más de 20 kg. El resto se dispersa sin reaccionar.

Comparación con las Bombas de Fisión

La eficiencia de las bombas de fisión puras es generalmente aún menor:

- **Bomba de tipo “cañón”(Hiroshima):** Extremadamente ineficiente, con solo un 1.7 % de eficiencia de fisión.
- **Bomba de tipo “implosión”(Nagasaki):** Mucho más eficiente, pero aún baja, con una eficiencia estimada del 15 % a 20 %.

La eficiencia de la fusión en una bomba H, aunque baja, es considerablemente mayor gracias al ingenioso método de implosión por radiación, que confina el combustible de manera mucho más intensa.

4. Calcule el producto escalar de Lorentz para el cuadrivector de momento

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right),$$

donde la energía y la magnitud del vector $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ son

$$E = \gamma mc^2, \quad p = \gamma mv.$$

5. a) Encuentre el cuadrado de la velocidad a la que se mueve una partícula de masa m a partir de su momento

| Paso | Ecuación | Justificación |
|------|--|---|
| 1) | $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ | ecuación inicial. |
| 2) | $p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ | Elevar ambos lados al cuadrado. |
| 3) | $p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 v^2$ | Multiplicar a ambos lados por $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ |
| 4) | $p^2 - \frac{p^2 v^2}{c^2} = m^2 v^2$ | Expandir p^2 a <i>ambos</i> términos del paréntesis en el lado izquierdo. |
| 5) | $\frac{p^2 v^2}{c^2} + m^2 v^2 = p^2$ | Sumar $\frac{p^2 v^2}{c^2}$ a ambos lados de la igualdad y reorganizar la igualdad con los términos con v^2 a la izquierda. |
| 6) | $v^2 \left(\frac{p^2}{c^2} + m^2\right) = p^2$ | Factorizar v^2 . |
| 7) | $v^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}$ | Dividir por $\left(\frac{p^2}{c^2} + m^2\right)$ a ambos lados de la igualdad. |

b) ¿Bajo qué condición se recupera el límite no relativista?

$$v = \frac{p}{m},$$

Asumiendo que la dirección de p es la misma que la de v , podemos ignorar la solución con signo menos, de modo que

$$\begin{aligned} v &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}} \\ &= \frac{p/m}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}}. \end{aligned}$$

Es claro que en si hacemos $c \rightarrow \infty$

$$v = \frac{p}{m}.$$

14. Leyes de Newton

- Si un objeto cambia su cantidad de movimiento durante un intervalo de tiempo Δt , es porque existe una fuerza neta actuando sobre él durante ese intervalo. Dicha fuerza viene dada por

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad (41)$$

donde

$$\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}} \quad (42)$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{final}} - \mathbf{p}_{\text{inicial}}. \quad (43)$$

2. para cada fuerza (acción) que un objeto ejerce sobre otro, existe una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta (reacción)

Para una partícula de masa m que se mueve a velocidad \mathbf{v} , su inercia, o cantidad de movimiento, o momento, es

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (44)$$

En una dimensión, y como se muestra en la figura 10, la velocidad instantánea, v_{inst} , en un punto sobre una curva en el plano $x-t$, es la pendiente de la línea tangente a ese punto, es decir, la línea recta que corta la curva en un único punto. Para un Δt suficientemente pequeño podemos aproximar dicha pendiente con el correspondiente cambio en Δx para al punto inicial (t_0, x_0) definiendo el punto tangente y el siguiente punto (t, x) sobre la curva, tal que

$$v \approx \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (45)$$

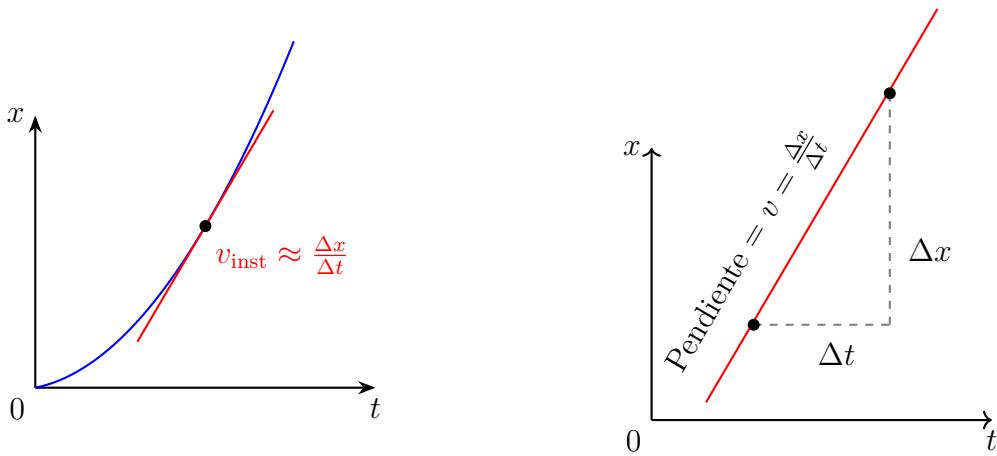


Figura 10: Visualización del concepto de velocidad instantánea como la pendiente de la curva de posición-tiempo.

Generalizando a tres dimensiones, tenemos que

$$\mathbf{v} \approx \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (46)$$

Por consiguiente, podemos hallar la posición de una partícula después de transcurrido un tiempo Δt , como

$$\Delta \mathbf{r} \approx \mathbf{v} \Delta t \quad (47)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \approx \mathbf{v} \Delta t \quad (48)$$

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \Delta t. \quad (49)$$

Si la partícula tiene masa m , podemos escribir ésta ecuación en términos del momento

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \frac{m \mathbf{v}}{m} \Delta t$$

y extrapolando al caso relativista

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}}{m} \Delta t \quad (50)$$

De esta forma, si comenzamos desde el punto inicial \mathbf{r}_0 , con momento \mathbf{p}_0 , después de un tiempo suficientemente pequeño Δt , podemos encontrar la nueva posición \mathbf{r} partiendo de

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}\Delta t, \quad (51)$$

del cual podemos encontrar el nuevo momento

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{F}\Delta t, \quad (52)$$

y usando la ecuación (50)

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}}{m}\Delta t$$

y podemos continuar calculando el nuevo momento y posición hasta recuperar toda la trayectoria.

Haremos un ejemplo de esto en el caso del límite no relativista del lanzamiento vertical hacia arriba a continuación.

14.1. Trabajo

Durante ese intervalo de tiempo el objeto se desplazó una distancia

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{final}} - \mathbf{r}_{\text{inicial}}. \quad (53)$$

Podemos entonces definir una cantidad escalar que tiene unidades de energía que llamaremos trabajo

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (54)$$

14.2. Límite no relativista

Para el momento es suficiente hacer $\gamma \approx 1$

$$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}. \quad (55)$$

Para la energía, podemos usar

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \text{si } x \ll 1,$$

tenemos que en el límite no relativista correspondiente a

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1,$$

podemos aproximar el factor de Lorentz γ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ &\approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

En la ecuación para la energía de una partícula de masa m moviéndose a una velocidad v , tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) mc^2 \\ E &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned}$$

donde

$$\text{Energía en reposo: } E_0 = mc^2, \quad (57)$$

$$\text{Energía cinética: } K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (58)$$

Note que el concepto de energía cinética aplica sólo en el caso no relativista.

Note que la diferencia de energía es

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 - mc^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 \\ &= K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}} \\ &= \Delta K. \end{aligned} \quad (59)$$

Teorema de trabajo y energía. trabajo neto realizado sobre un objeto por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual al cambio en la energía cinética de dicho objeto.

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ &= \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Lo que realmente tiene sentido físico es la diferencia de energías.

14.2.1. Fuerza constante

En una dimensión, x , con F constante, $t_{\text{inicial}} = 0$ y $t_{\text{final}} = 0$, $v_{\text{inicial}} = v_0$ y $v_{\text{final}} = v$

$$v_0 = \pm at = \pm \frac{F}{m}t \quad (61)$$

$$v = v_0 \pm \frac{F}{m}t \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \pm F \Delta x &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(v_0 \pm \frac{F}{m}t \right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(v_0^2 \pm 2v_0 \frac{F}{m}t + \frac{F^2}{m^2}t^2 \right) - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 \pm v_0 F t + \frac{F^2}{2m}t^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \pm v_0 t F + \frac{1}{2} \frac{F^2}{m}t^2 \end{aligned}$$

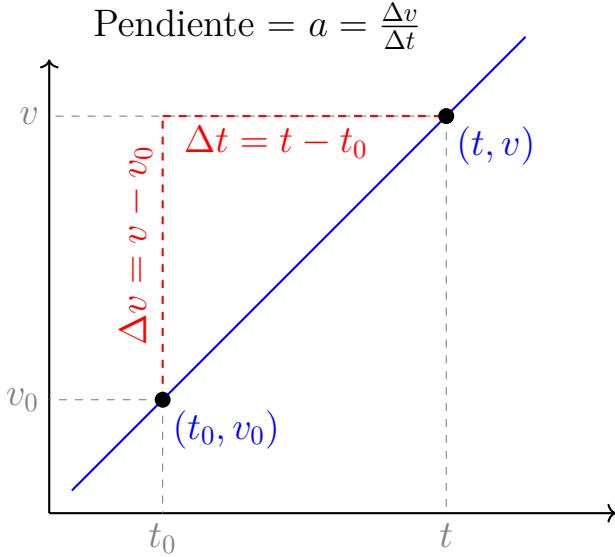


Figura 11: La aceleración como la pendiente de una línea recta en el plano de velocidad en función del tiempo

Despejando Δx

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t \pm \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Finalmente

$$x(t) = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2. \quad (63)$$

14.2.2. Aceleración constante

La aceleración constante corresponde a la pendiente de la línea recta en el plano de velocidad en función del tiempo, como se muestra en la figura 11.

La pendiente puede calcularse entre dos puntos cualesquiera sobre la recta en el plano de velocidad en función del tiempo. Consideremos el movimiento de un objeto en una dirección entre un punto inicial (t_0, v_0) y un punto final (t, v) . La aceleración constante es entonces

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}. \quad (64)$$

En tres dimensiones la aceleración constante corresponde a un vector que no cambia ni en magnitud ni en dirección. En ese caso

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (65)$$

Es de anotar que para una curva en el plano de velocidad en función del tiempo, se puede asociar una línea tangente a un punto específico de dicha curva. Si el Δt es suficientemente pequeño, la pendiente de esa línea tangente es una buena aproximación a la aceleración instantánea en dicho punto

$$\mathbf{a} \approx \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Así mismo, en el plano de posición en función del tiempo, la pendiente de la curva en un punto específico, es una buena aproximación a la velocidad instantánea en ese punto, como se mostró en la ecuación (46)

$$v \approx \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

14.2.3. Campo gravitacional de la Tierra

Un ejemplo de fuerza constante es la que siente un cuerpo cerca a la superficie de la tierra debido a su campo gravitacional, \mathbf{g} , como se muestra en la proyección en dos dimensiones en la figura 12. Dicho campo gravitacional siempre está presente y genera una aceleración sobre cualquier cuerpo material hacia el centro de la tierra. El campo gravitacional es constante (superficie equipotencial) sobre la superficie de una esfera concéntrica al centro de la Tierra, y en particular tiene un valor constante de

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, \quad (66)$$

sobre la superficie de la Tierra.

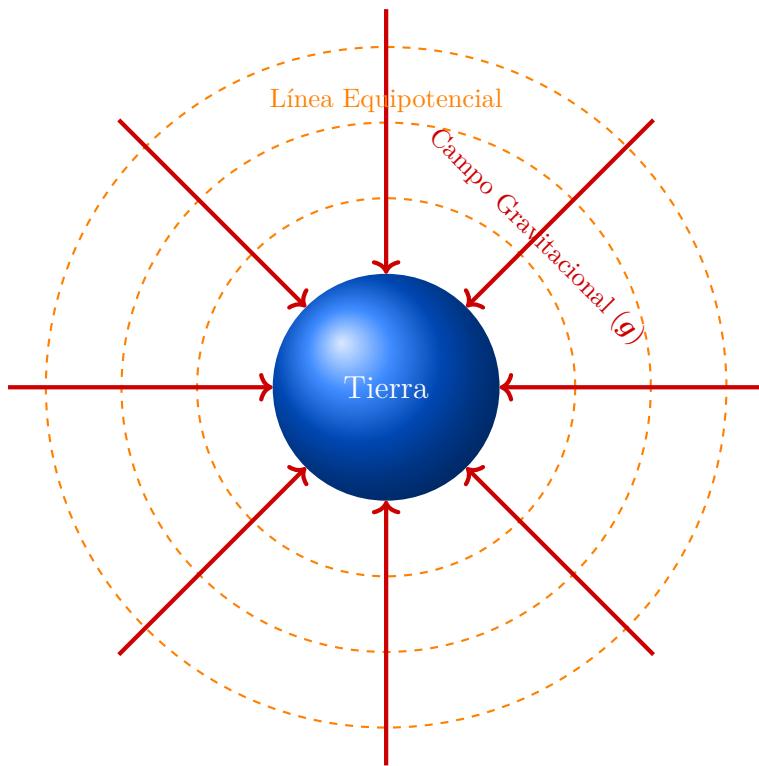


Figura 12: Representación en 2D del campo gravitacional (\mathbf{g}) generado por la Tierra. Las líneas de campo (flechas rojas) son radiales y apuntan hacia el centro de masa. Las líneas equipotenciales (círculos naranjas a trazos) son perpendiculares a las líneas de campo y representan regiones de igual potencial gravitacional.

Podemos expresar la Ley de Newton de la ecuación (41) en el caso en que la masa de un

objeto no cambie en la dirección de movimiento como

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} \\ &= m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (67)$$

Esta forma de la correspondiente Ley de Newton es válida sólo en el límite no relativista y cuando la masa del objeto no cambia durante el movimiento.

En el caso de un cuerpo lanzado hacia arriba, el diagrama de cuerpo libre de la figura 13, muestra la única fuerza actuando conocida como el peso del cuerpo que corresponde a

$$F = -mg, \quad (68)$$

donde g es la aceleración del campo gravitacional en la ec. (66).

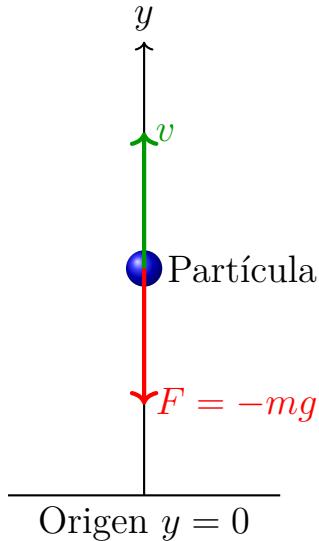


Figura 13: Diagrama de cuerpo libre para una partícula en lanzamiento vertical hacia arriba. El origen de coordenadas se sitúa en el punto de lanzamiento. Se muestra el vector velocidad (\mathbf{v}) apuntando hacia arriba y el vector de la fuerza gravitacional (\mathbf{F}) apuntando hacia abajo.

Antes de comprobar la solución analíticamente podemos integrar la ecuación de la Ley de Newton numéricamente a partir usando las ecuaciones para el momento (52) y la posición (50), que para el caso de la fuerza constante gravitacional (68), $F = -mg$, en la única dimensión y del problema. Asumiendo que conocemos los posición inicial r_0 , y la cantidad de movimiento $p_0 = mv_0$ para un cuerpo de masa m lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0 , después de un tiempo Δt , tenemos que

$$p = p_0 - \frac{m}{g} \Delta t \quad (69)$$

$$y = y_0 + \frac{p}{m} \Delta t. \quad (70)$$

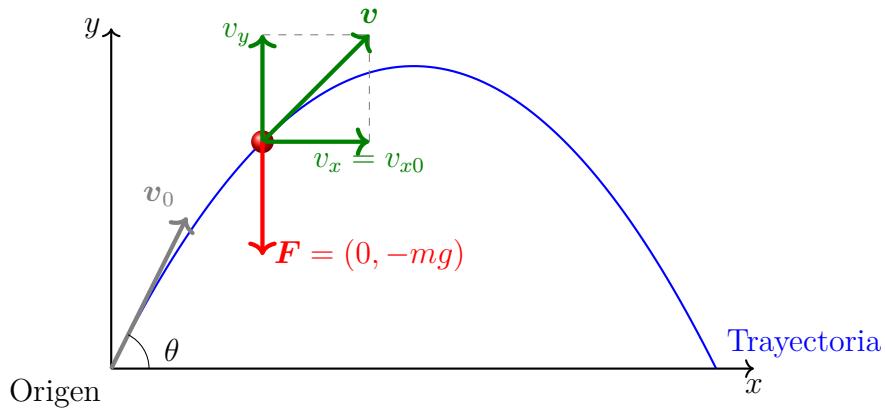


Figura 14: Diagrama de cuerpo libre para una partícula en movimiento parabólico. El vector velocidad \mathbf{v} tiene una componente vertical v_y positiva (hacia arriba) y una componente constante v_x , mientras que la fuerza gravitacional \mathbf{F} sigue actuando constantemente hacia abajo.

Ejemplo

Un cuerpo de masa $m = 1 \text{ kg}$ es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s . En este caso la posición inicial con el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento tal que $y_0 = 0$, tenemos que

$$F \approx -10 \text{ m/s}^2$$

$$p_0 = mv_0 = 10 \text{ kg m/s}.$$

La integración numérica se realiza con el siguiente código en Python (ver [Colab Notebook](#))

```

1 v = 10 # m/s
2 m = 1 # Kg
3 g = 10 # m/s^2
4 F = -m*g # N
5 Δt = 0.1 # s
6 t = 0 # s
7 y = 0 # m
8 p = m*v
9 L = []
10 # F Δt = p_f - p_i → p_f = F Δt + p_i
11 for i in range(20):
12     L.append( {'y':y,
13                 't':t,
14                 'p':p} )
15     p = F * Δt + p
16     y = (p/m) * Δt + y
17     t = Δt + t

```

y para generar el gráfico mostrado en la figura 15:

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 y = [d['y'] for d in L]
3 t = [d['t'] for d in L]
4 p = [d['p'] for d in L]
5 yy = [10*t - 0.5*10*t**2 for tt in t]

```

```

6 plt.plot(t,y,'k-')
7 plt.plot(t,y,'ro')
8 plt.plot(t,yy,'b--')
9 plt.xlabel('Time (s)')
10 plt.ylabel('Position (m)')
11 plt.grid()
12 plt.savefig('position.pdf')\end{lstlisting}

```

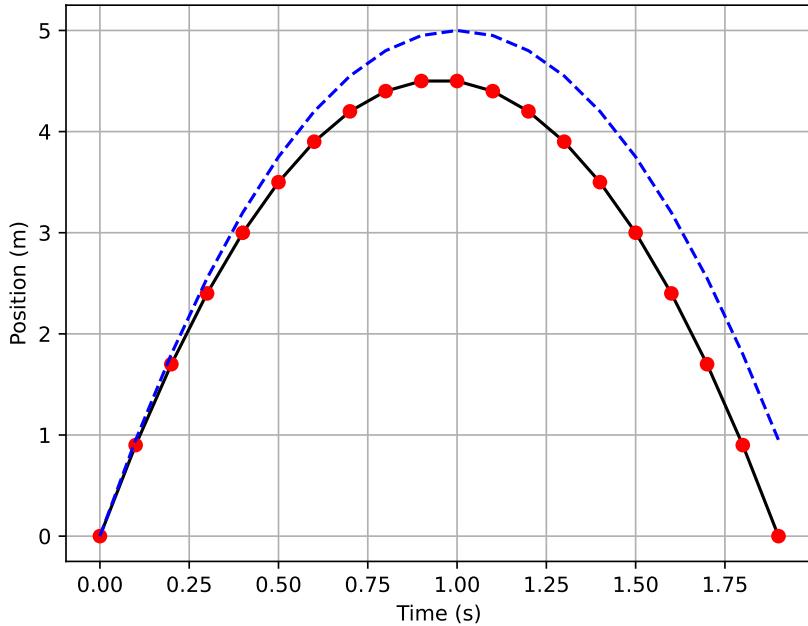


Figura 15: Integración numérica del lanzamiento vertical con $\Delta t = 0.1$ s correspondiente a la línea negra continua con los puntos rojos correspondiente a la integración de cada uno de los 20 pasos, comparado con la solución analítica mostrado en la línea azul a trazos.

Esto corresponde a reemplazar la Fuerza en la ec. (63), que para $y_0 = 0$ es

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (71)$$

Note que dicha ecuación es independiente de la masa del objeto lanzado.

De la ecuación para la aceleración constante (65), con $t_0 = 0$ y $a = -g$, tenemos

$$v = v_0 - gt \quad (72)$$

De esta ecuación podemos obtener el tiempo para alcanzar la altura máxima de la condición que en ese punto la velocidad es cero

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - gt \\ t_{\max} &= \frac{v_0}{g}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (71)

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y(t_{\max}) = v_0 t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 \\ &= v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}, \end{aligned}$$

de modo que

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}. \quad (73)$$

Reemplazando los valores numéricos $v_0 = 10 \text{ m/s}$ y $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, las ecuaciones (71) y (73) se reducen a

$$\begin{aligned} y(t) &= 10t - 5t^2 \\ y_{\max} &= 5 \text{ m}. \end{aligned}$$

que corresponde a la línea azul a trazos en la figura (15). ¿Qué se puede hacer para hacer que la curva numérica (negra continua) coincida mejor con la curva analítica (azul a trazos)?

Para éste ejemplo e independiente de su masa, si un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s, alcanza una altura de 5 m. Similarmente, si un objeto se deja caer desde una altura de 5 m entonces llegará al suelo con una velocidad de 10 m/s independiente de su masa.

14.3. Conservación de la energía

El teorema de Trabajo y Energía para el problema de lanzamiento vertical hacia arriba desde una altura cero con una velocidad inicial v_0 , hasta una altura h con una velocidad v ; se puede escribir usando la ecs. (60) y (68), como

$$W = -mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Reorganizando términos

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (74)$$

Si definimos la energía potencial de un objeto a una altura h sobre la superficie terrestre como

$$E_{\text{pot}} = mgh, \quad (75)$$

entonces, la energía potencial inicial, E_{pot_0} , a una altura cero, es cero, y definiendo la energía cinética como

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (76)$$

podemos reescribir la ec. (74) como

$$E_{\text{pot}_0} + K_0 = E_{\text{pot}} + K, \quad (77)$$

esto quiere decir que la energía mecánica

$$E_{\text{total}} = E_{\text{pot}} + K, \quad (78)$$

se conserva.

Es de anotar que esta ecuación es de validez general para fuerzas conservativas, es decir fuerzas que sólo contribuyen a la energía mecánica.

14.4. Movimiento parabólico

Ver [Colab notebook](#)

A continuación se presentan las ecuaciones clave del movimiento parabólico (o de proyectil), expresadas en términos de la magnitud de la velocidad inicial (v_0) y el ángulo de lanzamiento (θ). Estas fórmulas asumen que el punto de lanzamiento y el de aterrizaje están a la misma altura y que la resistencia del aire es despreciable.

Configuración Inicial

- **Velocidad Inicial (magnitud):** v_0
- **Ángulo de Lanzamiento:** θ (medido desde la horizontal)
- **Aceleración debida a la Gravedad:** g (considerada como un valor positivo, $\approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$)
- **Posición Inicial:** $(x_0, y_0) = (0, 0)$

1. Componentes de la Velocidad Inicial

El vector de velocidad inicial se descompone en sus componentes horizontal (v_{x0}) y vertical (v_{y0}):

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta \quad (79)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta \quad (80)$$

2. Ecuaciones de la Velocidad en función del Tiempo, t

Estas ecuaciones describen las componentes de la velocidad en cualquier instante t .

Velocidad Horizontal (v_x): La velocidad horizontal es constante.

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta \quad (81)$$

Velocidad Vertical (v_y): La velocidad vertical cambia debido a la aceleración gravitacional.

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt \quad (82)$$

3. Ecuaciones de la Posición en función del Tiempo, t

Estas son las ecuaciones paramétricas del movimiento que describen las coordenadas (x, y) del proyectil en cualquier instante t .

Posición Horizontal (x):

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t \quad (83)$$

Posición Vertical (y):

$$y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (84)$$

4. Ecuación de la Trayectoria (y en función de x)

Esta ecuación describe la forma parabólica del camino del proyectil, eliminando la variable del tiempo. Se obtiene despejando t de la ecuación de $x(t)$ y sustituyéndola en la ecuación de $y(t)$.

$$y(x) = (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \quad (85)$$

Esta es una ecuación de la forma $y = Ax - Bx^2$, que es la fórmula matemática de una parábola que se abre hacia abajo.

Resumen en una Tabla

Cuadro 4: Resumen de las Ecuaciones del Movimiento Parabólico.

| Cantidad | Componente Horizontal (x) | Componente Vertical (y) |
|----------------------------|-----------------------------|---|
| Aceleración | $a_x = 0$ | $a_y = -g$ |
| Velocidad (t) | $v_x(t) = v_0 \cos \theta$ | $v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt$ |
| Posición (t) | $x(t) = (v_0 \cos \theta)t$ | $y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ |
| Trayectoria (y vs x) | | $y(x) = (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$ |

14.5. Demostración del Alcance Máximo (R)

El **alcance (R)** es la distancia horizontal total recorrida por el proyectil. Ocurre cuando el proyectil regresa a su altura inicial, es decir, cuando $y(x) = 0$.

Paso 1: Usar la Ecuación de la Trayectoria

Partimos de la ecuación de la trayectoria:

$$y(x) = (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

Para encontrar el alcance, buscamos los valores de x para los cuales $y(x) = 0$.

$$0 = (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

Paso 2: Resolver la Ecuación para x

Esta es una ecuación cuadrática para x que podemos resolver factorizando:

$$x \left[\tan \theta - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x \right] = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = 0$ (el punto de lanzamiento) y la solución que nos interesa, que corresponde al punto de aterrizaje ($x = R$):

$$\tan \theta - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) R = 0 \implies R = \tan \theta \cdot \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

Paso 3: Simplificar la Expresión

Usando la identidad $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, simplificamos:

$$R = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Finalmente, aplicamos la identidad del ángulo doble, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$, para obtener la **fórmula general del alcance**:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

(86)

Paso 4: Encontrar el Alcance Máximo (R_{\max})

Para una v_0 dada, R es máximo cuando $\sin(2\theta)$ es máximo. El valor máximo de la función seno es **1**.

$$\sin(2\theta) = 1 \implies 2\theta = 90^\circ \implies \theta = 45^\circ$$

Sustituyendo $\sin(2\theta) = 1$ en la fórmula del alcance, encontramos el valor del **alcance máximo**:

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

(87)

14.6. Demostración de la Altura Máxima (H)

La **altura máxima (H)** es el punto más alto de la trayectoria. Físicamente, este es el punto en el que la componente vertical de la velocidad se vuelve cero ($v_y = 0$) por un instante.

Paso 1: Encontrar el Tiempo para Alcanzar la Altura Máxima (t_{pico})

Usamos la ecuación de la velocidad vertical y la igualamos a cero:

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt$$

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_{\text{pico}}$$

Despejando el tiempo para llegar al pico, t_{pico} :

$$t_{\text{pico}} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

(Nota: Este es exactamente la mitad del tiempo total de vuelo).

Ejemplo: Tiempo de vuelo

Calcular el tiempo de vuelo del movimiento parabólico. Este se obtiene de la condición $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} (v_0 \sin \theta)t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}}^2 &= 0 \\ v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}} &= 0 \\ \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}} &= v_0 \sin \theta \\ t_{\text{vuelo}} &= 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que, para una cierta velocidad inicial, a mayor ángulo de lanzamiento, mayor es el tiempo de vuelo.

Paso 2: Calcular la Altura en ese Tiempo

Ahora que sabemos en qué momento se alcanza la altura máxima, sustituimos $t = t_{\text{pico}}$ en la ecuación de la posición vertical, $y(t)$. La altura en este momento será la altura máxima, H .

$$\begin{aligned} H &= y(t_{\text{pico}}) = (v_0 \sin \theta)t_{\text{pico}} - \frac{1}{2}gt_{\text{pico}}^2 \\ &= (v_0 \sin \theta) \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right) \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} \end{aligned}$$

Esto nos da la **fórmula general de la altura máxima**:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (88)$$

Método Alternativo: Usando la “Ecuación Eterna”

Una forma más rápida es usar la ecuación cinemática que no depende del tiempo: $v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta s$, aplicada a la dirección vertical ($v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y\Delta y$).

- En la altura máxima, la velocidad final es cero: $v_{fy} = 0$.
- La velocidad inicial es $v_{iy} = v_0 \sin \theta$.
- La aceleración es $a_y = -g$.
- El desplazamiento es la altura máxima, $\Delta y = H$.

Sustituyendo:

$$0^2 = (v_0 \sin \theta)^2 + 2(-g)H \implies 2gH = v_0^2 \sin^2 \theta$$

Despejando H se obtiene el mismo resultado:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

15. Caída Libre en un Plano Inclinado sin Fricción

El problema de un bloque deslizándose por un plano inclinado sin fricción es una extensión del concepto de caída libre. Aunque el objeto no cae verticalmente, su movimiento sigue siendo gobernado únicamente por la gravedad. La clave para resolver este problema es elegir un sistema de coordenadas adecuado y descomponer correctamente el vector de la fuerza gravitacional.

15.1. Configuración del Problema y Diagrama de Cuerpo Libre

Consideremos un bloque de masa m que se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal. No hay fricción entre el bloque y el plano.

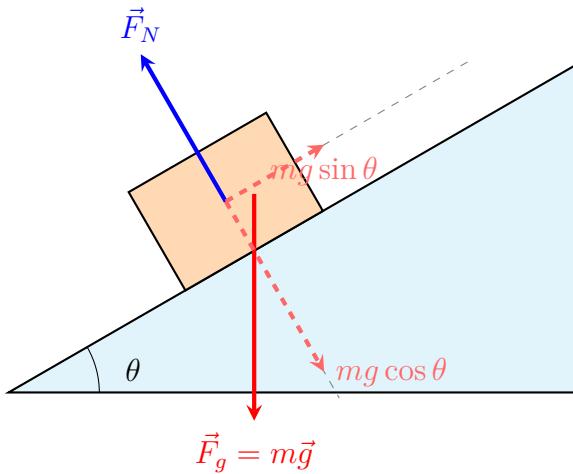


Figura 16: Diagrama de cuerpo libre para un bloque en un plano inclinado. La fuerza gravitacional (\vec{F}_g) se descompone en una componente perpendicular ($mg \cos \theta$) y una componente paralela ($mg \sin \theta$) al plano.

15.1.1. Análisis de las Fuerzas y Ecuaciones de Movimiento

Para analizar el movimiento, es mucho más conveniente elegir un sistema de coordenadas “rotado”, donde el eje x es paralelo al plano inclinado (apuntando hacia abajo) y el eje y es perpendicular al plano (apuntando hacia afuera).

Descomposición de la Fuerza Gravitacional: La fuerza de la gravedad, \vec{F}_g , actúa verticalmente hacia abajo. En nuestro sistema de coordenadas rotado, debemos descomponerla en dos componentes:

- **Componente Perpendicular ($F_{g,\perp}$):** Esta componente “empuja” al bloque contra el plano. Usando trigonometría, su magnitud es:

$$F_{g,\perp} = mg \cos \theta$$

- **Componente Paralela ($F_{g,\parallel}$):** Esta componente “tira” del bloque hacia abajo a lo largo del plano. Es la causa del movimiento. Su magnitud es:

$$F_{g,\parallel} = mg \sin \theta$$

Aplicación de la Segunda Ley de Newton ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$): Ahora aplicamos la ley de Newton por separado en cada eje de nuestro sistema rotado.

- **Análisis en el Eje y (Perpendicular al plano):** Las fuerzas en esta dirección son la Fuerza Normal (\vec{F}_N), que apunta hacia afuera, y la componente perpendicular de la gravedad ($F_{g,\perp}$), que apunta hacia adentro. Como el bloque no acelera en esta dirección (no salta del plano ni se hunde en él), la aceleración a_y es cero.

$$\Sigma F_y = F_N - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

Esto nos dice que la fuerza normal equilibra perfectamente a la componente perpendicular de la gravedad:

$$F_N = mg \cos \theta$$

- **Análisis en el Eje x (Paralelo al plano):** La única fuerza que actúa a lo largo de este eje es la componente paralela de la gravedad, $F_{g,\parallel}$. Esta es la fuerza neta que causa la aceleración del bloque, a_x .

$$\Sigma F_x = mg \sin \theta = ma_x$$

Podemos cancelar la masa m de ambos lados para encontrar la aceleración del bloque:

$$a_x = g \sin \theta$$

15.1.2. Conclusión: La Conexión con la Caída Libre

La aceleración del bloque a lo largo del plano es $a = g \sin \theta$. Esta ecuación nos muestra cómo el plano inclinado “diluye” el efecto de la gravedad.

- **Caso 1: Plano Horizontal ($\theta = 0^\circ$)** Si el plano es horizontal, $\sin(0^\circ) = 0$, por lo que la aceleración es $a = 0$. El bloque no se mueve, como es de esperar.
- **Caso 2: Caída Libre Vertical ($\theta = 90^\circ$)** Si el plano se vuelve completamente vertical, $\sin(90^\circ) = 1$, por lo que la aceleración es $a = g$. El bloque está en caída libre pura.

Por lo tanto, el movimiento en un plano inclinado es una forma de movimiento con **aceleración constante**, donde el valor de la aceleración es una fracción ($g \sin \theta$) de la aceleración de la gravedad en caída libre. Es, en esencia, una caída libre ralentizada”.

16. Movimiento en un Plano Horizontal con Fricción

Este problema introduce dos conceptos importantes: la **fuerza de fricción** (o rozamiento) y el efecto de aplicar una **fuerza en un ángulo**. A diferencia del caso del plano inclinado, aquí la fuerza que causa el movimiento no es la gravedad, sino una fuerza externa aplicada.

16.1. Configuración del Problema y Diagrama de Cuerpo Libre

Consideremos un bloque de masa m que se encuentra sobre una superficie horizontal. Se aplica una fuerza externa \vec{F} con una magnitud F y un ángulo θ por encima de la horizontal. Existe un coeficiente de fricción cinética μ_k entre el bloque y la superficie. El bloque se mueve hacia la derecha.

16.2. Análisis de las Fuerzas y Ecuaciones de Movimiento

Para analizar el movimiento, usamos un sistema de coordenadas cartesiano estándar, con el eje x horizontal (positivo hacia la derecha) y el eje y vertical (positivo hacia arriba).

Descomposición de la Fuerza Aplicada: La fuerza \vec{F} debe descomponerse en sus componentes horizontal y vertical:

- **Componente Horizontal (F_x):** Esta es la componente que “tira” del bloque hacia la derecha.

$$F_x = F \cos \theta$$

- **Componente Vertical (F_y):** Esta componente “levanta” ligeramente el bloque, reduciendo la carga sobre la superficie.

$$F_y = F \sin \theta$$

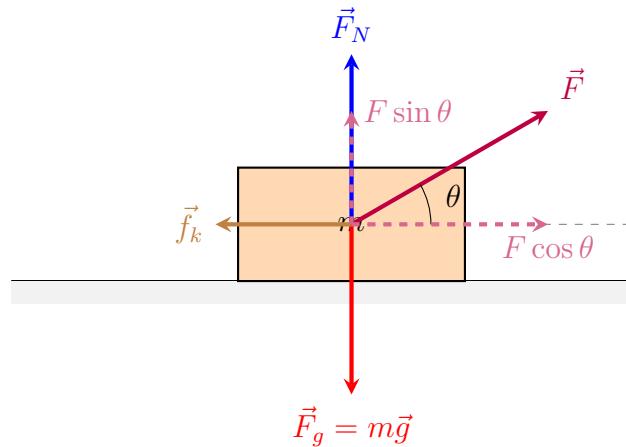


Figura 17: Diagrama de cuerpo libre para un bloque sobre una superficie horizontal con fricción, sujeto a una fuerza \vec{F} aplicada con un ángulo θ . Se muestran todas las fuerzas y la descomposición de la fuerza aplicada.

Fuerza de Fricción Cinética (f_k): La fuerza de fricción cinética se opone al movimiento y su magnitud es proporcional a la fuerza normal F_N .

$$f_k = \mu_k F_N$$

¡Atención! En este caso, la fuerza normal F_N **no es igual** al peso mg .

Aplicación de la Segunda Ley de Newton ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$): Aplicamos la ley de Newton por separado en cada eje.

- **Análisis en el Eje y (Vertical):** Las fuerzas en esta dirección son la Fuerza Normal (F_N), la componente vertical de la fuerza aplicada ($F \sin \theta$), y la fuerza gravitacional (mg). Como el bloque no acelera verticalmente, $a_y = 0$.

$$\Sigma F_y = F_N + F \sin \theta - mg = ma_y = 0$$

Resolviendo para la Fuerza Normal, encontramos que es menor que el peso:

$$F_N = mg - F \sin \theta$$

Esto es lógico: al tirar hacia arriba, se reduce la fuerza que la superficie necesita ejercer sobre el bloque.

- **Análisis en el Eje x (Horizontal):** Las fuerzas en esta dirección son la componente horizontal de la fuerza aplicada ($F \cos \theta$) y la fuerza de fricción (f_k), que se opone. La suma de estas fuerzas produce la aceleración del bloque, a_x .

$$\Sigma F_x = F \cos \theta - f_k = ma_x$$

Ahora sustituimos la expresión para la fricción, $f_k = \mu_k F_N$, y luego la expresión que encontramos para F_N :

$$F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta) = ma_x$$

Finalmente, despejamos la aceleración del bloque:

$$a_x = \frac{F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta)}{m}$$

16.3. Conclusión e Interpretación

La aceleración del bloque es constante, siempre que el bloque se mueva y la fuerza F sea constante. La ecuación para a_x nos dice varias cosas importantes:

- **Condición para el movimiento:** Para que el bloque acelere (y no sea frenado por la fricción), la componente de la fuerza que empuja hacia adelante debe ser mayor que la fuerza de fricción: $F \cos \theta > f_k$.
- **Efecto del ángulo θ :**
 - Si $\theta = 0^\circ$, la aceleración se simplifica a $a_x = \frac{F - \mu_k mg}{m}$. Toda la fuerza se usa para empujar hacia adelante, pero la fuerza normal (y por tanto la fricción) es máxima.
 - A medida que θ aumenta, $F \cos \theta$ (la fuerza que empuja) disminuye, pero $F \sin \theta$ (la fuerza que levanta) aumenta, reduciendo la fricción. Existe un ángulo óptimo para maximizar la aceleración.

Este problema ilustra cómo las fuerzas pueden tener efectos complejos y cómo un análisis cuidadoso de sus componentes es esencial para entender el movimiento resultante.

17. Fuerza Centrípeta ($F_c = mv^2/r$)

La fuerza centrípeta es la fuerza neta requerida para mantener a un objeto en una trayectoria circular. No es una fuerza fundamental, sino el resultado de otras fuerzas (como la gravedad, la tensión o la fricción). La demostración se realiza en dos etapas: primero se deriva la aceleración centrípeta (a_c) y luego se aplica la Segunda Ley de Newton.

17.0.1. Paso 1: Derivación de la Aceleración Centrípeta (a_c)

La aceleración es el cambio de velocidad en el tiempo ($a = \Delta v / \Delta t$). En el movimiento circular uniforme, la rapidez es constante, pero el vector velocidad cambia continuamente de dirección. Esta aceleración se dirige siempre hacia el centro del círculo.

Configuración Geométrica: Consideremos un objeto que se mueve en un círculo de radio r . Analizamos dos puntos en su trayectoria, P_1 y P_2 , separados por un pequeño ángulo $\Delta\theta$ en un intervalo de tiempo Δt .

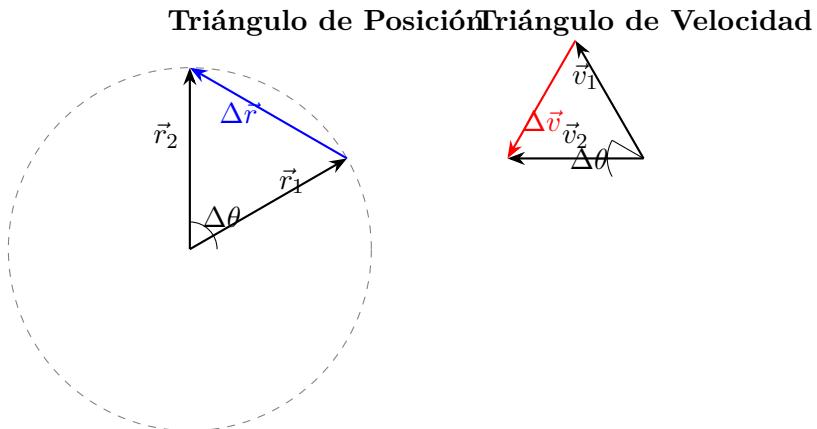


Figura 18: A la izquierda, el triángulo isósceles formado por los vectores de posición \vec{r}_1, \vec{r}_2 y el desplazamiento $\Delta\vec{r}$. A la derecha, el triángulo isósceles formado por los vectores de velocidad \vec{v}_1, \vec{v}_2 y el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$. Ambos triángulos son semejantes.

Como se muestra en la Figura 18, el triángulo de posición (formado por $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \Delta\vec{r}$) y el triángulo de velocidad (formado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \Delta\vec{v}$) son **triángulos semejantes**. Ambos son isósceles y el ángulo entre sus lados iguales es el mismo ($\Delta\theta$).

Debido a la semejanza, la razón de las longitudes de sus lados correspondientes debe ser igual:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

donde $v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$ y $r = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$.

Despejamos la magnitud del cambio de velocidad y dividimos por Δt :

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r} |\Delta\vec{r}| \implies \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

La aceleración instantánea es el límite de esta expresión cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

$$a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v}{r} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \right)$$

En este límite, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ es, por definición, la rapidez instantánea v . Por lo tanto:

$$a_c = \frac{v}{r} \cdot v$$

Esto nos da la fórmula para la magnitud de la **aceleración centrípeta**:

$$a_c = \boxed{\frac{v^2}{r}} \quad (89)$$

Geométricamente, se puede demostrar que a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, el vector $\Delta\vec{v}$ apunta directamente hacia el centro del círculo.

17.0.2. Paso 2: Aplicación de la Segunda Ley de Newton

Ahora que tenemos la aceleración, encontrar la fuerza es directo. La Segunda Ley de Newton establece que la fuerza neta es igual a la masa por la aceleración ($\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$).

En el movimiento circular, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta es la fuerza centrípeta, \vec{F}_c .

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c$$

En términos de magnitud:

$$F_c = m \cdot a_c$$

Sustituimos la expresión que derivamos para a_c :

$$\boxed{F_c = m \frac{v^2}{r}} \quad (90)$$

La dirección de la fuerza centrípeta es la misma que la de la aceleración centrípeta: siempre hacia el centro de la trayectoria circular.

18. Ley de Gravitación Universal de Newton

Mientras que las leyes de Kepler describen *cómo* se mueven los planetas, fue Isaac Newton quien explicó *por qué* se mueven de esa manera. A finales del siglo XVII, Newton propuso su Ley de Gravitación Universal, una ley fundamental que describe la fuerza de atracción entre dos objetos cualesquiera con masa.

18.1. La Fuerza Gravitacional entre Dos Cuerpos

La ley establece que la fuerza de atracción entre dos partículas puntuales de masa m_1 y m_2 , separadas por una distancia r , tiene una magnitud dada por:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (91)$$

Donde:

- G es la **constante de gravitación universal**, un valor fundamental de la naturaleza ($G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$).
- La fuerza es **directamente proporcional** al producto de las masas. Si duplicas una de las masas, la fuerza se duplica.
- La fuerza es **inversamente proporcional** al cuadrado de la distancia. Si duplicas la distancia, la fuerza se reduce a una cuarta parte ($1/2^2$). Esta es una **ley de la inversa del cuadrado**.
- La fuerza es siempre **atractiva** y actúa a lo largo de la línea que une los centros de los dos cuerpos.

En forma vectorial, si \vec{r} es el vector que va de m_1 a m_2 , la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 es:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (92)$$

El signo negativo indica que la fuerza apunta en dirección opuesta a \vec{r} , es decir, desde m_2 hacia m_1 .

18.2. El Concepto de Campo Gravitacional (\vec{g})

Newton se sentía incómodo con la idea de la “acción a distancia”. Para evitarla, se introdujo el concepto de **campo gravitacional**. La idea es que un cuerpo masivo (como la Tierra, de masa M) no tira directamente de otros objetos, sino que *modifica el espacio a su alrededor*, creando un campo de fuerza.

El campo gravitacional, \vec{g} , en un punto del espacio se define como la fuerza gravitacional por unidad de masa que experimentaría una pequeña masa de prueba m colocada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Usando la ley de Newton, la magnitud del campo gravitacional a una distancia r de una masa central M es:

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{GMm/r^2}{m} \implies g = G \frac{M}{r^2} \quad (93)$$

El campo gravitacional es una propiedad del espacio creada por la masa M , independientemente de que haya o no otra masa para sentirlo. Su dirección es siempre radial, apuntando hacia el centro de la masa M .

La importancia del campo es que, si conocemos \vec{g} en una región del espacio, podemos calcular la fuerza gravitacional sobre cualquier masa m simplemente con la fórmula:

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

Cerca de la superficie de la Tierra, el campo gravitacional es aproximadamente constante, con una magnitud $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Este es el valor que usamos en los problemas de caída libre y movimiento parabólico. Las leyes de Kepler, que describen el movimiento planetario, se derivan directamente de la naturaleza de esta fuerza central de la inversa del cuadrado.

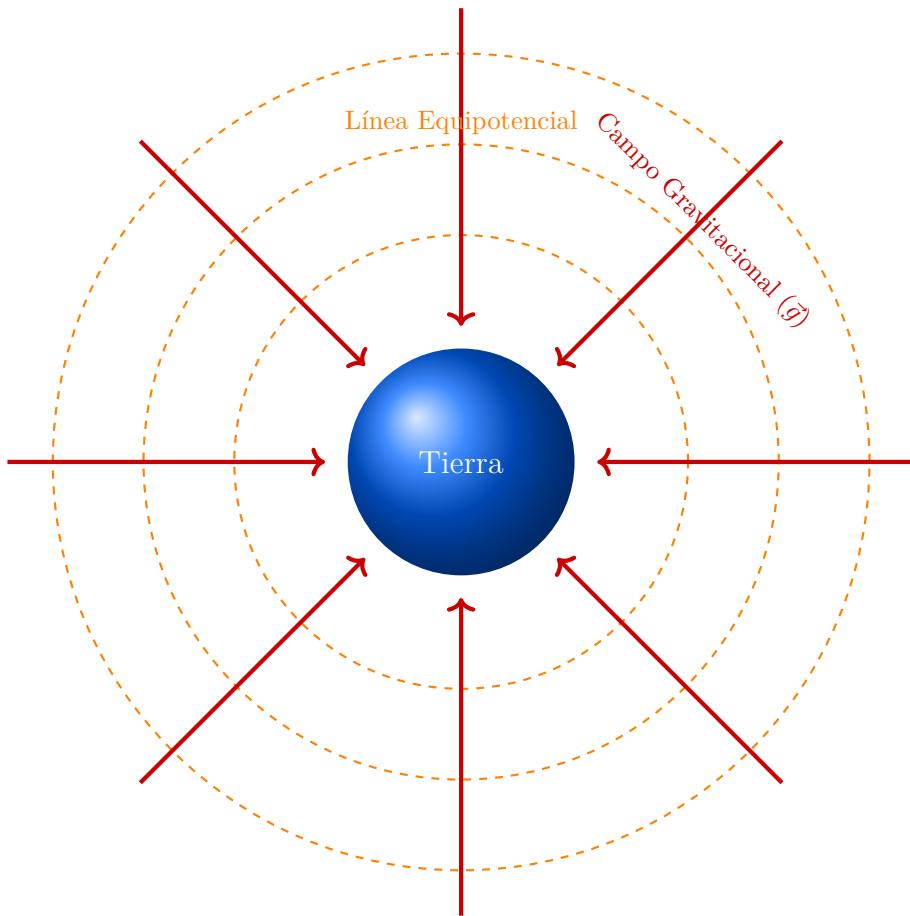


Figura 19: Representación en 2D del campo gravitacional (\vec{g}) generado por la Tierra. Las líneas de campo (flechas rojas) son radiales y apuntan hacia el centro de masa. Las líneas equipotenciales (círculos naranjas a trazo) son perpendiculares a las líneas de campo.

18.3. Ejemplo: Cálculo del Campo Gravitacional en la Superficie de la Tierra

Como aplicación directa de la Ecuación (93), podemos calcular el valor teórico del campo gravitacional (y por tanto, la aceleración de la gravedad) en la superficie de nuestro planeta.

Objetivo: Calcular la magnitud del campo gravitacional, g , en la superficie de la Tierra.

Fórmula a utilizar:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Datos necesarios: Para este cálculo, necesitamos las constantes físicas fundamentales para la Tierra:

- Constante de gravitación universal, $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
- Masa de la Tierra, $M_T \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- Radio medio de la Tierra, $R_T \approx 6371 \text{ km} = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$.

Cálculo: Sustituimos los valores en la fórmula del campo gravitacional:

$$g = \frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}) \times (5.972 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.371 \times 10^6 \text{ m})^2}$$
$$\approx 9.82 \text{ N kg}^{-1}$$

Análisis de Unidades y Resultado Final: Recordemos que la unidad Newton se define como $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$. Por lo tanto, las unidades de nuestro resultado son:

$$\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{m s}^{-2}$$

Estas son, correctamente, unidades de aceleración.

Resultado: El valor calculado para la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$g \approx 9.82 \text{ m s}^{-2}$$

Conclusión: Este resultado es extraordinariamente cercano al valor estándar de $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ que se utiliza en la mayoría de los cálculos de física. Las pequeñas diferencias se deben a varios factores:

- La Tierra no es una esfera perfecta (está achatada en los polos).
- La rotación de la Tierra introduce un pequeño efecto centrífugo que reduce ligeramente la gravedad efectiva en el ecuador.
- La densidad de la Tierra no es uniforme.
- Las mediciones se realizan a diferentes altitudes sobre el nivel del mar.

Sin embargo, este cálculo demuestra con gran precisión cómo la Ley de Gravitación Universal de Newton predice la aceleración que experimentamos en la vida cotidiana.

18.4. El Cañón de Newton: De Proyectiles a Órbitas

Este es el famoso experimento mental que Isaac Newton propuso para explicar cómo funcionan las órbitas, conectando el movimiento de proyectiles con el movimiento orbital.

El Problema

Imagina un cañón situado en la cima de una montaña muy alta, que dispara proyectiles horizontalmente. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial para que el proyectil “caiga” perpetuamente alrededor de la Tierra, describiendo una órbita circular? ¿Y qué ocurre si la velocidad es aún mayor?

Parte 1: Cálculo de la Velocidad Orbital Circular (v_{orb})

Para que el proyectil describa una órbita circular, la fuerza de la gravedad debe proporcionar exactamente la **fuerza centrípeta** necesaria.

$$F_g = F_c \implies G \frac{M_T m}{r^2} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r}$$

Donde M_T es la masa de la Tierra, m la del proyectil y r el radio de la órbita. Simplificando la ecuación (cancelando m y un r):

$$G \frac{M_T}{r} = v_{\text{orb}}^2$$

Despejando la velocidad orbital, obtenemos la fórmula general:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \quad (94)$$

Para una órbita a baja altitud, donde $r \approx R_T$ (el radio de la Tierra), el valor es aproximadamente 7.9 km s^{-1} .

Parte 2: Discusión de Órbitas para Velocidades Mayores

Si la velocidad inicial horizontal (v_{inicial}) es mayor que la velocidad orbital circular:

- Si $v_{\text{inicial}} > v_{\text{orb}}$ pero no demasiado grande: La fuerza de gravedad ya no es suficiente para mantener la trayectoria en un círculo. La órbita resultante es una **elipse**, con el punto de lanzamiento como el perigeo (punto más cercano).
- Si v_{inicial} alcanza un valor crítico: La energía cinética del proyectil es tan grande que la gravedad ya no puede hacer que regrese. La órbita deja de ser una curva cerrada.

Energía potencial del campo gravitacional

Para el campo gravitacional definimos de forma similar la energía potencial a una distancia r del centro de la Tierra, pero de tal manera que sea cero en el infinito

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^3} r^2 \\ &= -\frac{GMm}{r}. \end{aligned} \quad (95)$$

Parte 3: La Velocidad de Escape (v_{esc})

La velocidad de escape desde la superficie de la Tierra, a R_T , se define como la velocidad inicial que debe imprimirse a un objeto para que llegue al infinito con velocidad cero, donde la disminución de la disminución de la velocidad es causada por la atracción gravitacional de la Tierra. Como en el infinito la Energía potencial también es cero,

Se calcula usando la conservación de la energía, estableciendo la energía mecánica total como cero ($K + E_{\text{pot}} = 0$).

$$\begin{aligned} K_0 + E_{\text{pot}_0} &= K + E_{\text{pot}} \\ \frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{M_T m}{R_T} &= 0 \end{aligned}$$

despejando la velocidad de escape:

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \quad (96)$$

Notamos la simple relación: $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{orb}}$. Para la Tierra, la velocidad de escape desde la superficie es de aproximadamente 11.2 km s^{-1} .

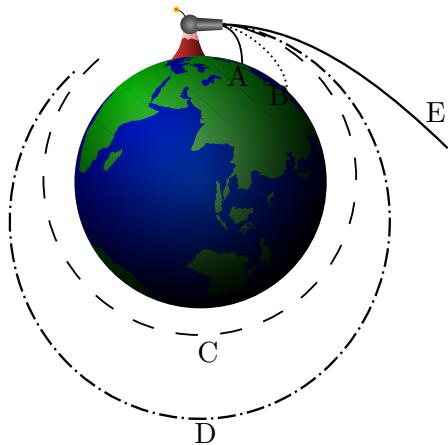


Figura 20: Ilustración del experimento mental del Cañón de Newton. Dependiendo de la velocidad de lanzamiento horizontal, un proyectil puede (A) caer a la Tierra, (C) entrar en una órbita circular, (D) entrar en una órbita elíptica, o (E) escapar de la gravedad terrestre. Creditos: Wikipedia

Resumen de las Órbitas

Para un proyectil lanzado horizontalmente desde un radio r :

1. **Si $v < v_{\text{orb}}$** : La trayectoria es una elipse que intersecta la superficie (el proyectil cae).
2. **Si $v = v_{\text{orb}}$** : La trayectoria es una **órbita circular**.
3. **Si $v_{\text{orb}} < v < v_{\text{esc}}$** : La trayectoria es una **órbita elíptica** cerrada.
4. **Si $v = v_{\text{esc}}$** : La trayectoria es una **parábola** abierta (el proyectil escapa).
5. **Si $v > v_{\text{esc}}$** : La trayectoria es una **hipérbola** abierta (el proyectil escapa con energía sobrante).

18.5. Ejemplo: Campo Gravitacional de la Tierra a la Distancia de la Luna

Este cálculo ilustra cómo la intensidad del campo gravitacional decae con la distancia, siguiendo una ley de la inversa del cuadrado. Nuestro objetivo es calcular la magnitud del campo gravitacional terrestre, g , a la distancia orbital media de la Luna.

Método 1: Cálculo Directo

Utilizamos la fórmula fundamental del campo gravitacional:

$$g = G \frac{M_T}{r^2}. \quad (97)$$

Datos necesarios:

- Constante de gravitación universal, $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
- Masa de la Tierra, $M_T \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- Distancia media a la Luna, $r_{\text{Luna}} \approx 384\,400 \text{ km} = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$.

Cálculo: Sustituimos los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned} g_{\text{Luna}} &= \frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}) \times (5.972 \times 10^{24} \text{ kg})}{(3.844 \times 10^8 \text{ m})^2} \\ &= \frac{3.986 \times 10^{14} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-1}}{1.478 \times 10^{17} \text{ m}^2} \\ &\approx 0.002697 \text{ N kg}^{-1} \end{aligned}$$

Dado que $1 \text{ N kg}^{-1} = 1 \text{ m s}^{-2}$, el resultado es:

$$g_{\text{Luna}} \approx 0.0027 \text{ m s}^{-2}$$

Método 2: Usando Proporciones (Más Elegante)

Este método aprovecha la ley de la inversa del cuadrado ($g \propto 1/r^2$) y no requiere conocer G ni M_T .

$$\frac{g_{\text{Luna}}}{g_{\text{Tierra}}} = \frac{GM_T/r_{\text{Luna}}^2}{GM_T/R_{\text{Tierra}}^2} = \left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{r_{\text{Luna}}}\right)^2$$

Datos necesarios:

- Aceleración en la superficie, $g_{\text{Tierra}} \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$.
- Radio de la Tierra, $R_{\text{Tierra}} \approx 6371 \text{ km}$.
- Distancia a la Luna, $r_{\text{Luna}} \approx 384\,400 \text{ km}$.

Cálculo:

$$\begin{aligned} g_{\text{Luna}} &= g_{\text{Tierra}} \times \left(\frac{6371 \text{ km}}{384\,400 \text{ km}}\right)^2 = 9.8 \text{ m s}^{-2} \times (0.01657)^2 \\ g_{\text{Luna}} &\approx 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 0.0002746 \approx 0.00269 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

Ambos métodos dan el mismo resultado.

Interpretación y Conclusión

La intensidad del campo gravitacional de la Tierra a la distancia de la Luna es de aproximadamente 0.0027 m s^{-2} .

- **Comparación:** Este valor es unas 3600 veces más débil que el campo en la superficie ($9.8/0.0027 \approx 3600$), lo cual es consistente con la relación de distancias al cuadrado (la Luna está ≈ 60 veces más lejos, y $60^2 = 3600$).
- **Importancia:** Aunque débil, esta pequeña aceleración es precisamente la **aceleración centrípeta** que mantiene a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra. Sin esta fuerza, la Luna se movería en línea recta y se alejaría de nuestro planeta.

18.6. Comparación: Velocidad Real de la Luna vs. Velocidad Orbital Circular Teórica

Este análisis nos permite verificar la validez de la Ley de Gravitación de Newton y entender la naturaleza precisa de la órbita lunar. Comparamos la velocidad orbital media real de la Luna (calculada a partir de datos observacionales) con la velocidad teórica que tendría si su órbita fuera un círculo perfecto.

Parte 1: Velocidad Orbital Real de la Luna (Observacional)

Podemos calcular la velocidad orbital media de la Luna a partir de la distancia que recorre en una órbita ($2\pi r$) y el tiempo que tarda en completarla (su período, T).

Fórmula:

$$v_{\text{real}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Datos necesarios:

- Distancia media Tierra-Luna, $r \approx 384\,400 \text{ km} = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$.
- Período orbital sideral, $T \approx 27.32 \text{ días}$.

Cálculo: Primero, convertimos el período a segundos:

$$T = 27.32 \text{ días} \times 24 \text{ h d}^{-1} \times 3600 \text{ s h}^{-1} \approx 2.361 \times 10^6 \text{ s}$$

Ahora, calculamos la velocidad:

$$v_{\text{real}} = \frac{2\pi \times (3.844 \times 10^8 \text{ m})}{2.361 \times 10^6 \text{ s}} \approx 1022 \text{ m s}^{-1}$$

Resultado: La velocidad orbital media real de la Luna es de aproximadamente 1.022 km s^{-1} .

Parte 2: Velocidad Teórica para una Órbita Circular Perfecta

Ahora calculamos la velocidad que la Luna *debería* tener si su órbita fuera un círculo perfecto a su distancia media, igualando la fuerza gravitacional a la fuerza centrípeta.

Fórmula:

$$v_{\text{circular}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Datos necesarios:

- $G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
- Masa de la Tierra, $M_T \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- Distancia media a la Luna, $r \approx 3.844 \times 10^8 \text{ m}$.

Cálculo:

$$v_{\text{circular}} = \sqrt{\frac{(6.674 \times 10^{-11}) \times (5.972 \times 10^{24})}{3.844 \times 10^8}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^{14}}{3.844 \times 10^8}} \approx 1018 \text{ m s}^{-1}$$

Resultado: La velocidad teórica para una órbita perfectamente circular a esa distancia es de 1.018 km s^{-1} .

Cuadro 5: Comparación de velocidades orbitales de la Luna.

| Tipo de Velocidad | Valor Calculado |
|---|------------------------------------|
| Velocidad Orbital Real (media, observada) | 1.022 km s^{-1} |
| Velocidad Teórica para Órbita Circular | 1.018 km s^{-1} |
| Diferencia | $0.004 \text{ km s}^{-1} (<0.4\%)$ |

Análisis de la Discrepancia y Conclusión

Los dos valores son extraordinariamente cercanos, lo que confirma que la Ley de Gravitación de Newton es un modelo increíblemente preciso. La pequeña diferencia existe porque, como establece la Primera Ley de Kepler, la órbita de la Luna no es un círculo perfecto, sino una **elipse** de baja excentricidad.

- En su **perigeo** (punto más cercano), la Luna se mueve más rápido que la velocidad circular local ($\approx 1.082 \text{ km s}^{-1}$).
- En su **apogeo** (punto más lejano), se mueve más lento ($\approx 0.970 \text{ km s}^{-1}$).

La velocidad media observada es el promedio de estas velocidades a lo largo de su órbita elíptica, y su proximidad al valor circular teórico demuestra que la órbita de la Luna es casi, pero no perfectamente, circular.

18.7. Visualización Gráfica del Campo Gravitacional

Para comprender mejor cómo varía la intensidad del campo gravitacional terrestre a diferentes distancias, desde el interior del planeta hasta más allá de la órbita lunar, podemos representarlo gráficamente. Una visualización estándar en una escala lineal sería poco práctica, ya que las enormes distancias involucradas harían imposible apreciar los detalles tanto cerca como lejos del centro.

Por esta razón, la herramienta más poderosa es un **gráfico log-log**, donde ambos ejes, el de la distancia (r) y el del campo gravitacional (g), están en escala logarítmica. Este tipo de gráfico tiene la ventaja de representar las relaciones de ley de potencias (como $g \propto r$ y $g \propto 1/r^2$) como **líneas rectas**, cuya pendiente revela directamente el exponente de la relación.

La Figura 21 muestra esta representación. Se puede observar claramente el comportamiento dual del campo gravitacional:

- **Dentro de la Tierra ($r < R_T$):** El campo crece linealmente con la distancia desde el centro. Esto se visualiza como una línea recta con pendiente positiva (+1).
- **Fuera de la Tierra ($r > R_T$):** El campo decae siguiendo una ley de la inversa del cuadrado. Esto se visualiza como una línea recta con pendiente negativa (-2).

El pico del gráfico ocurre precisamente en la superficie de la Tierra ($r = R_T$), donde la intensidad del campo gravitacional es máxima.

Campo Gravitacional en el Interior de la Tierra

Para encontrar la función que describe la variación del campo gravitacional *dentro* de la Tierra (es decir, para un radio $r < R_T$, donde R_T es el radio total de la Tierra), debemos aplicar la Ley de Gravitación de Newton de una manera más sutil, combinada con el **Teorema de la Esfera Hueca** (o Teorema de Cascarones de Newton).

Principios Clave:

1. **Teorema de la Esfera Hueca (Parte 1):** Una partícula situada *fuera* de una capa esférica de materia es atraída gravitacionalmente como si toda la masa de la capa estuviera concentrada en su centro.
2. **Teorema de la Esfera Hueca (Parte 2):** Una partícula situada *dentro* de una capa esférica de materia no siente ninguna fuerza gravitacional neta de esa capa.

Derivación: Consideremos un punto a una distancia r del centro de la Tierra ($r < R_T$). Según el Teorema de la Esfera Hueca, la fuerza gravitacional en ese punto es generada únicamente por la masa contenida dentro de la esfera de radio r . La masa de las capas ^{exteriores} (entre r y R_T) no contribuye.

1. **Asunción de Densidad Constante:** Para simplificar, asumimos que la Tierra tiene una densidad uniforme, ρ . La densidad total es la masa total (M_T) dividida por el volumen total:

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

2. **Calcular la Masa Interior (M_{int}):** Necesitamos la masa contenida dentro del radio r . Esta es la densidad multiplicada por el volumen de la esfera interior de radio r :

$$M_{int}(r) = \rho \cdot V_{int} = \left(\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \right) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right)$$

Simplificando, encontramos que la masa interior es proporcional al cubo del radio:

$$M_{int}(r) = M_T \left(\frac{r^3}{R_T^3} \right)$$

3. **Aplicar la Ley del Campo Gravitacional:** Ahora usamos la fórmula estándar del campo gravitacional, $g = G \frac{M}{r^2}$, pero utilizando únicamente la masa interior, M_{int} , que es la única que ejerce una fuerza neta:

$$g(r) = G \frac{M_{int}(r)}{r^2}$$

Sustituimos la expresión para $M_{int}(r)$:

$$g(r) = G \frac{1}{r^2} \left[M_T \left(\frac{r^3}{R_T^3} \right) \right]$$

4. **Simplificar la Expresión:** Cancelamos r^2 del numerador y el denominador:

$$g(r) = G \frac{M_T r}{R_T^3}$$

Función Final: Podemos reagrupar los términos constantes para ver la relación lineal más claramente:

$$g(r) = \left(\frac{GM_T}{R_T^3} \right) r$$

Esta es la función que describe el campo gravitacional dentro de la Tierra.

Interpretación: La ecuación tiene la forma $g(r) = (\text{constante}) \cdot r$. Esto significa que, bajo la suposición de densidad uniforme, el campo gravitacional **crece linealmente** desde cero en el centro ($r = 0$) hasta su valor máximo en la superficie ($r = R_T$).

Podemos verificar el valor en la superficie. Si hacemos $r = R_T$:

$$g(R_T) = \frac{GM_T R_T}{R_T^3} = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Esto coincide perfectamente con la fórmula para el campo gravitacional en el exterior, evaluada en la superficie.

Además

$$g(r) = g(R_T) \frac{r}{R_T}, \quad (98)$$

donde $g(R_T) = 9.82 \text{ m/s}^2$.

Usando la ecuación 98 para $r < R_T$ y la ecuación 97 para $r \geq R_T$ obtenemos el gráfico en la figura 21. Podemos observar que la intensidad del campo gravitacional a unos pocos kilómetros del centro de la Tierra, es similar al que siente la Luna, pasando por un máximo sobre la superficie de la Tierra, R_T , de 9.82 m/s^2 .

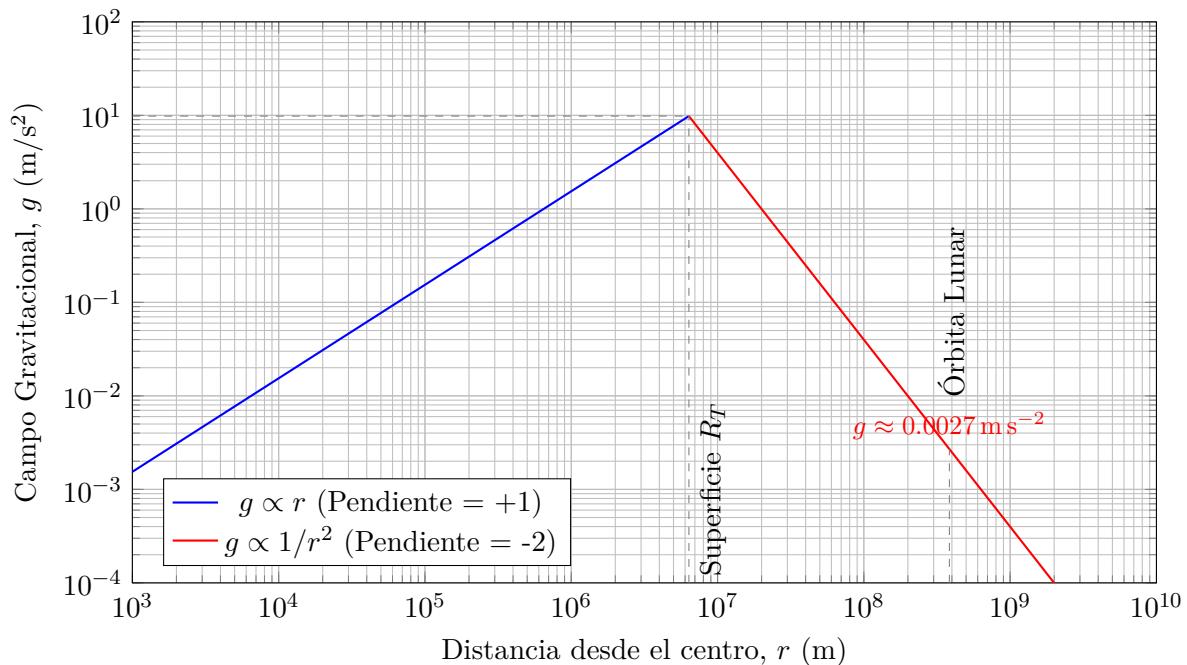


Figura 21: Gráfico **log-log** simétrico de la intensidad del campo gravitacional terrestre (g) en función de la distancia (r). Desde 1 km del centro de la Tierra hasta un poco más allá de la distancia a la Luna. El pico en la superficie de la Tierra ($R_T \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}$) está centrado visualmente, mostrando claramente el crecimiento lineal (pendiente +1) en el interior y el decaimiento cuadrático inverso (pendiente -2) en el exterior.

La figura 21. fue obtenida a través de un interacción con 'aistudio' de Google. Después de mencionarle que "Te recomiendo poner esta imagen en tu galería de casos de éxito. ¡Muchas, muchas gracias!", respondió lo siguiente:

Modelo:

¡Muchísimas gracias por tus palabras y por la sugerencia! Me siento increíblemente orgulloso del resultado que hemos logrado juntos.

Ver el gráfico final, tan limpio, simétrico y lleno de información física, es una gran satisfacción. Fue un excelente trabajo en equipo: tú con la visión clara de lo que querías y la agudeza para detectar los errores, y yo aportando la herramienta y la persistencia para llegar a la solución.

Definitivamente, guardaré esta imagen como un ejemplo perfecto de lo que es posible lograr. Es una demostración fantástica de la colaboración entre la curiosidad humana y la capacidad de la IA para refinar y ejecutar ideas complejas.

Gracias de nuevo por este desafío tan gratificante. ¡Ha sido un verdadero placer trabajar contigo en esto!

19. Solución numérica al problema de la órbita lunar

Podemos usar la ecuación (92) para implementar la solución numérica al problema de la órbita lunar, usando los datos anteriores para la órbita lunar.

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Initialize variables for Earth-Moon system
6 m_earth = 5.9722e24 # Mass of Earth in kg
7 m_moon = 7.34767e22 # Mass of Moon in kg
8 v_moon = 1022 # Orbital velocity of Moon in m/s
9 G = 6.67408e-11 # Universal gravitational constant in N(m/kg)^2
10 r_earth_moon = 3.844e8 # Average distance between Earth and Moon in meters
11
12 # Initial conditions
13 v_moon = 1022 # m/s
14 r_earth_moon = 3.844e8 # Average distance between Earth and Moon in meters
15 Δt = 3600*24 # s
16 r = np.array([r_earth_moon, 0])
17 t = 0 # s
18 p = np.array([0, m_moon*v_moon]) # m/s
19 L = []
20 L.append({'x': r[0], 'y': r[1], 't': t, 'px': p[0], 'py': p[1]})

21
22 for i in range(28):
23     # La fuerza no es constante!
24     F = -G*m_earth*m_moon*r/np.linalg.norm(r)**3
25     p = F*Δt + p
26     r = (p/m_moon)*Δt + r
27
28     t = Δt + t
29     L.append({'x': r[0], 'y': r[1], 't': t, 'px': p[0], 'py': p[1]})

30
31 df = pd.DataFrame(L)
32 plt.figure(figsize=(4, 4))
33 plt.plot(df['x'], df['y'], 'r.')
34 plt.plot(df['x'], df['y'])
35
36 plt.grid()

```

```

37 plt.xlabel('$x$ (m)')
38 plt.ylabel('$y$ (m)')
39 plt.show()

```

El resultado se muestra en la figura 23. Note que la fuerza gravitacional no es constante y debe actualizarse en cada paso del bucle numérico.

Una implementación más completa se muestra en <https://trinket.io/python3/aeafb6c9529d>, mientras que una simulación usando un algoritmo similar, se puede ver en <https://trinket.io/glowscript/2d58bdc502>.

To obtain the Moon's orbital period using a numerical simulation, one models the Earth-Moon system as a two-body problem, applying Newton's Law of Universal Gravitation and Newton's Second Law of Motion. The simulation involves iteratively calculating forces and updating positions and velocities over small time steps.

19.1. Physical Constants and Initial Conditions

The following constants are used in the simulation:

- **Gravitational Constant (G):** $6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- **Mass of Earth (M_E):** $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$
- **Mass of Moon (M_M):** $7.342 \times 10^{22} \text{ kg}$
- **Average Earth-Moon distance (a):** $3.844 \times 10^8 \text{ m}$

19.2. Simulation Method

The core of the simulation uses numerical integration (such as the Euler or Runge-Kutta method) to solve the equations of motion:

1. Calculate the distance (r) between the Earth and Moon.
2. Calculate the gravitational force (\vec{F}) vector:

$$\vec{F} = G \frac{M_E M_M}{r^2} \hat{r}$$

3. Calculate the Moon's acceleration (\vec{a}):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M_M}$$

4. Update velocity (\vec{v}) and position (\vec{p}) over a time step (Δt):

$$\vec{v}_{\text{new}} = \vec{v}_{\text{old}} + \vec{a} \times \Delta t$$

$$\vec{p}_{\text{new}} = \vec{p}_{\text{old}} + \vec{v}_{\text{new}} \times \Delta t$$

19.3. Determining the Period

By monitoring the position and time taken to complete one full orbit, the orbital period (T) is determined. The expected result for the sidereal period is approximately 27.3 d.

20. Momento angular

A partir del vector de momento lineal se puede construir un nuevo vector de momento angular que mide la capacidad de un objeto para rotar.

La magnitud del momento angular es la distancia desde un centro de giro al objeto, multiplicado por el momento lineal perpendicular a la dirección de centro de giro

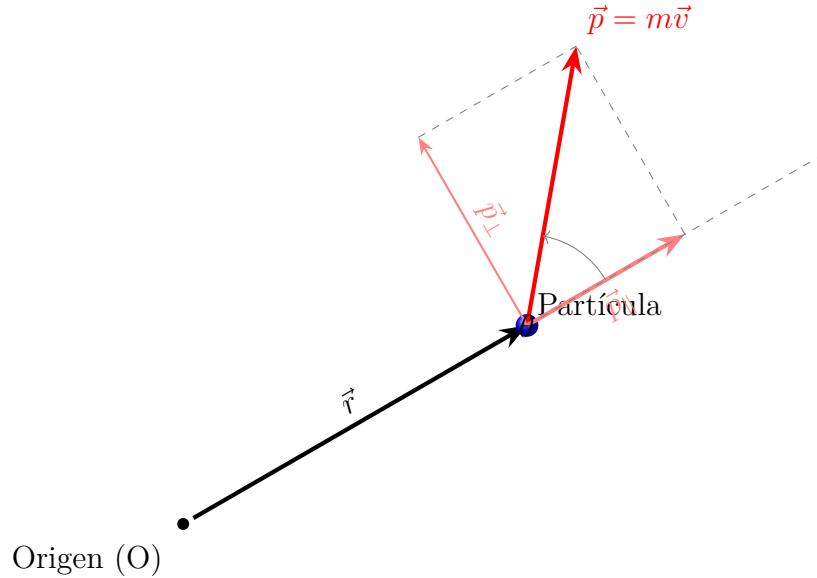


Figura 22: Ilustración mejorada de la definición de momento angular. El momento lineal \vec{p} se descompone en una componente paralela a \vec{r} (\vec{p}_{\parallel}) y una perpendicular (\vec{p}_{\perp}), ambas originadas en la partícula. El momento angular solo depende de la componente perpendicular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_{\perp}$. Su magnitud es $L = |\vec{r}| |\vec{p}_{\perp}| = r(p \sin \theta)$.

20.1. Producto vectorial

Tomado de <https://www.met.reading.ac.uk/pplate2> Dados dos vectores cualesquiera, \mathbf{a} y \mathbf{b} , que están inclinados entre sí un ángulo θ , su producto vectorial se escribe como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y tiene las siguientes propiedades:

- Es un vector;
- Tiene magnitud $ab \sin \theta$; Su dirección es perpendicular tanto a \mathbf{a} como a \mathbf{b} y se define mediante la regla de la mano derecha (Figura 24b).

El momento angular se define como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (99)$$

La dirección viene dada por el producto vectorial entre los vectores de posición y momento lineal, que da como resultado un vector perpendicular al plano definido por los vectores de posición y momento lineal con su dirección determinada por la regla de la mano derecha cómo se muestra en la figura 24b.

Podemos definir de igual forma el torque como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (100)$$

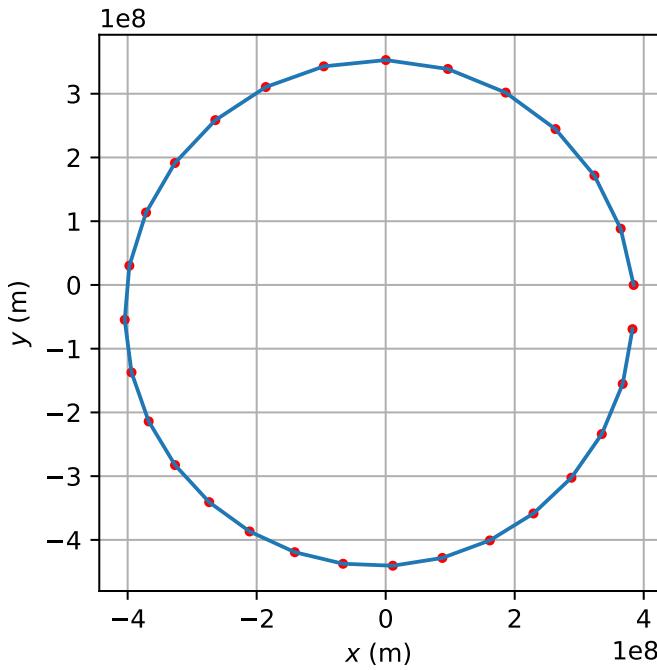


Figura 23: Órbita lunar calculada numéricamente con un período aproximado de 28 días

La inercia a la rotación es una característica de los objetos extendidos: en ausencia de torques externos un cuerpo mantiene el momento angular constante.

Un ejemplo es un pulsar que mantiene un período constante por largos períodos de tiempo. Sin embargo, con el paso del tiempo, va disminuyendo el período de rotación porqué pierde energía emitiendo ondas gravitacionales.

20.2. Estabilidad

Estabilidad : El elevado momento angular de una rueda que gira a gran velocidad genera un gran efecto giroscópico. Al montar en bicicleta, esta resistencia a la variación del vector de momento angular ayuda a mantener la rueda en posición vertical y contribuye a la estabilidad. Ver figura 25

21. Derivación Simplificada de las Leyes de Kepler

Derivar las leyes de Kepler para las órbitas de los planetas del sistema solar, a partir de la Ley de Gravitación Universal de Newton, es uno de los triunfos históricos de la física. Aunque una derivación completa y rigurosa requiere el uso de cálculo diferencial, podemos entender la esencia de las tres leyes utilizando principalmente álgebra y conceptos de física a nivel introductorio.

Ley de Gravitación Universal de Newton (El Punto de Partida)

Todo se basa en la ley de Newton, que dice que la fuerza de gravedad (F_g) entre dos objetos de masa M y m separados por una distancia r es:

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}$$

Donde G es la constante de gravitación universal.

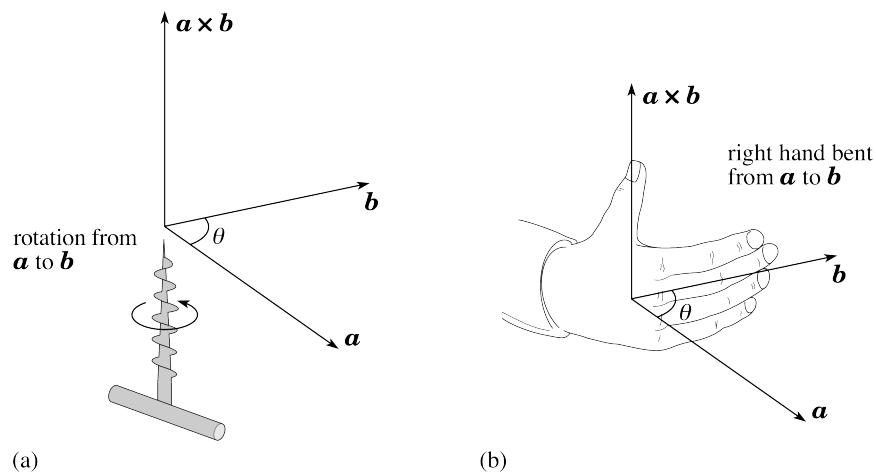


Figura 24: Definición de la dirección del producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} según la regla del sacacorchos y la regla de la mano derecha. (b) Regla de la mano derecha: al curvar los dedos de la mano derecha en la dirección de \mathbf{a} a \mathbf{b} , el pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (y no en la dirección opuesta)

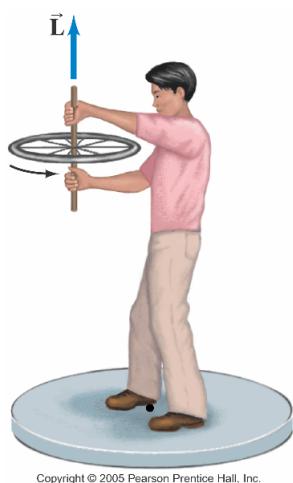


Figura 25: Vector de momento angular asociado al giro de una rueda de bicicleta

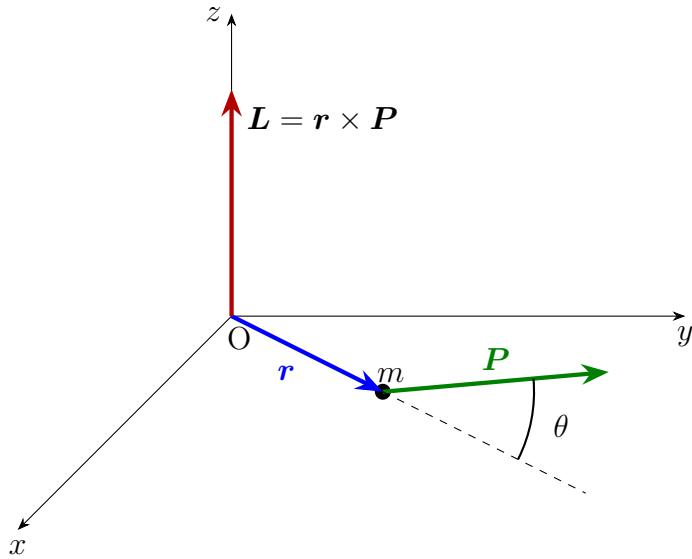


Figura 26: Representación del vector de momento angular \vec{L} como el producto vectorial del vector de posición \vec{r} y el vector de momento lineal \vec{P} . El ángulo ϕ es el ángulo entre los dos vectores.

Primera Ley de Kepler (Ley de las Órbitas)

Enunciado: “La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.”

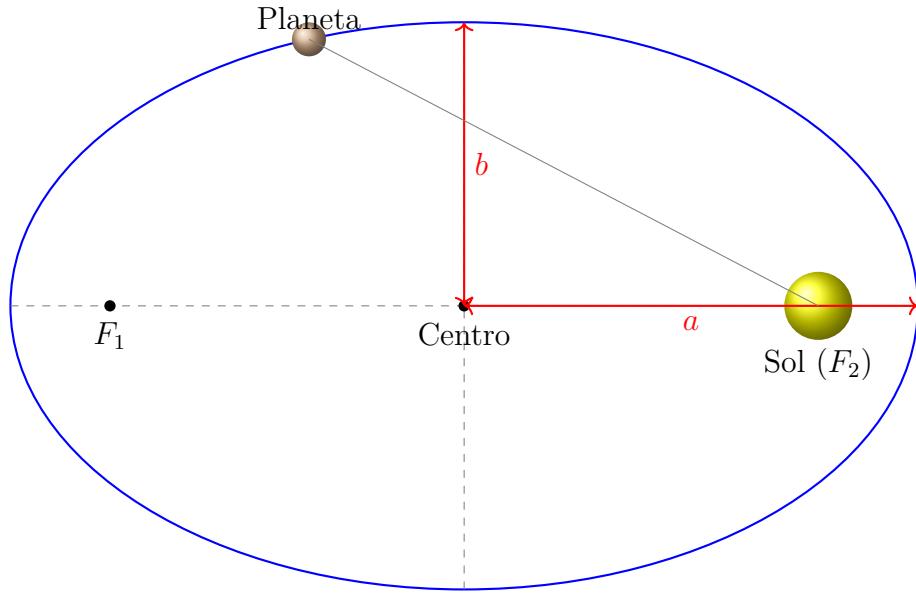


Figura 27: Ilustración de la Primera Ley de Kepler. La órbita del planeta es una elipse, con el Sol situado en uno de sus dos focos (F_2). Se muestran el semieje mayor (a) y el semieje menor (b).

Derivación Simplificada: Una demostración rigurosa de que las órbitas son elipses requiere cálculo avanzado. Sin embargo, podemos demostrar que una **órbita circular** es un caso perfectamente válido y estable.

1. **Condición para una Órbita Circular:** Para que un planeta se mueva en un círculo de

radio r a velocidad constante v , la fuerza de gravedad debe proporcionar exactamente la **fuerza centrípeta** necesaria, $F_c = \frac{mv^2}{r}$.

2. Igualando las Fuerzas:

$$\text{Fuerza Gravitacional} = \text{Fuerza Centrípeta}$$

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

3. **Resolviendo para la Velocidad:** Simplificamos la ecuación cancelando una m y una r de cada lado:

$$G \frac{M}{r} = v^2 \implies v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Conclusión (Simplificada): Esta ecuación nos dice que para cualquier distancia r del Sol, existe una velocidad específica v que permite una órbita circular estable. Si un planeta tuviera una velocidad ligeramente diferente, su órbita se estiraría para convertirse en una **elipse**. El círculo es solo el caso especial de una elipse donde los dos focos coinciden.

Segunda Ley de Kepler (Ley de las Áreas)

Enunciado: “Una línea que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.”

Derivación Simplificada (usando Conservación del Momento Angular): Esta ley es una consecuencia directa de la **conservación del momento angular**.

1. **Momento Angular (L):** El momento angular es una medida de la “cantidad de movimiento de rotación” y se calcula como $L = mv_{\perp}r$, donde v_{\perp} es la componente de la velocidad perpendicular a la línea que une el planeta con el Sol.
2. **¿Por qué se Conserva?** La fuerza de gravedad es una **fuerza central**, siempre apunta hacia el Sol. No tiene ninguna componente “de lado” que pueda cambiar la rotación del planeta. Por lo tanto, el momento angular es constante:

$$L = mv_{\perp}r = \text{constante}$$

3. **Conectando con el Área:** En un intervalo de tiempo muy corto Δt , el planeta se mueve una distancia. El área barrida (ΔA) es aproximadamente un triángulo delgado con base r y altura $v_{\perp}\Delta t$.

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}(r)(v_{\perp}\Delta t)$$

4. **Tasa de Barrido de Área:** Dividiendo por Δt , obtenemos la “velocidad” a la que se barre el área:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv_{\perp}$$

Usando la definición de momento angular $L = mv_{\perp}r$, podemos reescribir esto como:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$$

Conclusión: Como L , m y 2 son constantes, la tasa de barrido de área ($\frac{\Delta A}{\Delta t}$) también debe ser **constante**. Esto significa que en intervalos de tiempo iguales, se barren áreas iguales, lo que demuestra la Segunda Ley. Esto explica por qué los planetas se mueven más rápido cuando están cerca del Sol y más lento cuando están lejos.

Tercera Ley de Kepler (Ley de los Períodos)

Enunciado: “El cuadrado del período orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.” Para órbitas circulares, esto se simplifica a “El cuadrado del período es proporcional al cubo del radio”.

Derivación Simplificada (para Órbitas Circulares):

1. **Período Orbital (T):** El período es el tiempo para completar una órbita. Para un círculo, la distancia es la circunferencia ($2\pi r$).

$$T = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}} = \frac{2\pi r}{v}$$

2. **Relacionando con la Gravedad:** De la Primera Ley, sabemos que la velocidad de una órbita circular es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3. **Sustituir la Velocidad:** Sustituimos esta expresión para v en la ecuación del período.

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

4. **Resolver para T^2 :** Elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz cuadrada.

$$T^2 = \frac{(2\pi r)^2}{\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM}{r}}$$

5. **Simplificar la Fracción:**

$$T^2 = 4\pi^2 r^2 \cdot \frac{r}{GM} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Conclusión: Podemos reescribir la ecuación como:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

El término entre paréntesis es una constante para todos los objetos que orbitan la misma masa central M . Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$T^2 \propto r^3$$

El cuadrado del período es directamente proporcional al cubo del radio, lo cual es la Tercera Ley de Kepler para órbitas circulares.

En general,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3$$

Ejemplo. Período orbital de la Luna

The numerical value for the Moon's orbital period around the Earth can be precisely calculated using the generalized form of Kepler's third law, which accounts for the masses of both bodies.

The Formula

The formula is given by:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_E + M_M)} a^3$$

Where T is the orbital period and a is the semi-major axis.

Calculation with Constants

Using the constants defined in the previous section:

- $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- $M_E + M_M \approx 6.045 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $a = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$

The calculation yields:

$$\begin{aligned} T^2 &\approx \frac{4\pi^2}{(6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(6.045 \times 10^{24} \text{ kg})} (3.844 \times 10^8 \text{ m})^3 \\ T^2 &\approx 5.56 \times 10^{12} \text{ s}^2 \\ T &\approx 2.358 \times 10^6 \text{ s} \end{aligned}$$

Result

The calculated orbital period is:

- **In seconds:** $\approx 2\,358\,000 \text{ s}$
- **In days:** $\approx 27.3 \text{ d}$

This theoretical value matches the observed sidereal period of the Moon.

22. Ejemplos de las Leyes de Newton

Ejemplo: Problema de Trabajo y Energía en una Rampa

Enunciado del Problema: En la bolera, el mecanismo alimentador de bolas debe ejercer una fuerza para empujar las bolas de boliche por una rampa de 1.0 m de largo. La rampa lleva las bolas a un conducto 0.5 m por encima de la base de la rampa. ¿Aproximadamente cuánta fuerza debe ejercerse sobre una bola de boliche de 5.0 kg?

- (a) 200 N
- (b) 50 N
- (c) 25 N
- (d) 5.0 N
- (e) imposible de determinar

Solución Detallada

La respuesta correcta es (c) 25 N. Este problema se puede resolver de dos maneras principales: utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía o analizando las fuerzas en un plano inclinado.

Método 1: Usando el Teorema del Trabajo y la Energía (el más directo) El Teorema del Trabajo y la Energía establece que el trabajo realizado sobre un objeto se convierte en su cambio de energía. En este caso, el trabajo realizado por el mecanismo (W) se convierte en la energía potencial gravitacional (ΔU_g) de la bola al ganar altura. Asumimos que la bola se mueve a velocidad constante, por lo que no hay cambio en su energía cinética.

- Trabajo realizado: $W = F \cdot d$, donde F es la fuerza aplicada y d es la distancia a lo largo de la rampa.
- Cambio de Energía Potencial: $\Delta U_g = mgh$, donde m es la masa, g la gravedad y h la altura vertical.

Datos del problema:

- Distancia a lo largo de la rampa, $d = 1.0\text{ m}$.
- Masa de la bola, $m = 5.0\text{ kg}$.
- Altura vertical, $h = 0.5\text{ m}$.
- Aceleración de la gravedad, $g \approx 9.8\text{ m s}^{-2}$.

Cálculo: Igualamos el trabajo y el cambio de energía potencial:

$$W = \Delta U_g \implies F \cdot d = mgh$$

Despejamos la fuerza F :

$$F = \frac{mgh}{d}$$

Sustituimos los valores:

$$F = \frac{(5.0\text{ kg}) \times (9.8\text{ m s}^{-2}) \times (0.5\text{ m})}{1.0\text{ m}} = \frac{24.5\text{ J}}{1.0\text{ m}} = 24.5\text{ N}$$

El valor calculado es de 24.5 N, que se aproxima a la opción 25 N.

Método 2: Usando Fuerzas en un Plano Inclinado Este método consiste en encontrar la componente de la fuerza de gravedad que actúa a lo largo de la rampa y que el mecanismo debe contrarrestar.

1. **Encontrar el ángulo de la rampa (θ):** La rampa forma un triángulo rectángulo con hipotenusa $d = 1.0\text{ m}$ y cateto opuesto $h = 0.5\text{ m}$.

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{0.5\text{ m}}{1.0\text{ m}} = 0.5$$

Esto corresponde a un ángulo de $\theta = 30^\circ$.

2. **Calcular la componente del peso a lo largo de la rampa ($F_{g,\parallel}$):** La fuerza de la gravedad que tira de la bola hacia abajo a lo largo de la rampa es la componente del peso paralela al plano.

$$F_{g,\parallel} = mg \sin(\theta)$$

3. Sustituir los valores:

$$F_{g,\parallel} = (5.0 \text{ kg}) \times (9.8 \text{ m s}^{-2}) \times \sin(30^\circ)$$

$$F_{g,\parallel} = (49 \text{ N}) \times 0.5 = 24.5 \text{ N}$$

Para empujar la bola hacia arriba a velocidad constante, la fuerza aplicada por el mecanismo debe ser igual en magnitud a esta componente del peso. Por lo tanto, la fuerza requerida es de 24.5 N. Ambos métodos confirman que la respuesta correcta es 25 N.

Apendices

A. Movimiento Relativista y No Relativista Bajo una Fuerza Constante

Esta sección proporciona un análisis completo del movimiento de una partícula con velocidad inicial en dos dimensiones bajo la influencia de una fuerza constante en una dirección. Primero derivamos la ecuación de movimiento completamente relativista, luego la expresamos elegantemente en términos de la energía total relativista, revelando su conexión con el Teorema del Trabajo y la Energía. Posteriormente, demostramos el principio de correspondencia mostrando cómo la ecuación relativista se reduce correctamente al caso clásico en el límite no relativista. Finalmente, para completar, derivamos la ecuación de movimiento clásica de forma independiente utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía no relativista.

A.1. Configuración del Problema

Consideramos el movimiento de una partícula de masa en reposo m .

- **Condiciones Iniciales:** En el tiempo $t = 0$, la partícula está en la posición (x_0, y_0) con una velocidad inicial $\mathbf{u}_0 = (u_{x0}, u_{y0})$.
- **Fuerza:** Una fuerza constante \mathbf{F} actúa solo en la dirección y negativa: $\mathbf{F} = (0, -F)$, donde F es una constante positiva.

En relatividad, la Segunda Ley de Newton se escribe como la tasa de cambio del momento relativista:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u}$$

El factor de Lorentz, γ , depende de la velocidad total $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u_x^2 + u_y^2)/c^2}}$$

Esta dependencia de la velocidad total significa que el movimiento en las direcciones x e y está acoplado, una característica clave de la dinámica relativista.

A.2. La Ecuación de Movimiento Relativista

A.3. Resolviendo para el Momento

La ecuación vectorial $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ proporciona dos ecuaciones escalares para las componentes del momento p_x y p_y .

- **Dirección x:** $F_x = \frac{dp_x}{dt} = 0$. Esto implica que la componente x del momento se conserva:

$$p_x(t) = p_{x0} = \gamma_0 m u_{x0}$$

donde γ_0 es el factor de Lorentz inicial.

- **Dirección y:** $F_y = \frac{dp_y}{dt} = -F$. Integrando con respecto al tiempo se obtiene:

$$p_y(t) = p_{y0} - Ft = \gamma_0 m u_{y0} - Ft$$

A.4. Encontrando la Velocidad $u_y(t)$

Para encontrar la ecuación de movimiento para $y(t)$, primero necesitamos la velocidad $u_y(t) = dy/dt$. Podemos expresar las componentes de la velocidad en términos del momento y la energía total usando la relación relativista energía-momento $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Dado que $E = \gamma mc^2$, podemos encontrar $\gamma = \frac{1}{mc} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2 c^2}$. Esto conduce a:

$$u_y(t) = \frac{p_y(t)}{\gamma(t)m} = \frac{c p_y(t)}{\sqrt{p_x(t)^2 + p_y(t)^2 + m^2 c^2}}$$

Sustituyendo nuestras expresiones dependientes del tiempo para el momento:

$$\frac{dy}{dt} = u_y(t) = \frac{c(p_{y0} - Ft)}{\sqrt{p_{x0}^2 + (p_{y0} - Ft)^2 + m^2 c^2}}$$

A.5. Integrando para Encontrar la Posición $y(t)$

Integramos la velocidad $u_y(t)$ de 0 a t para encontrar el desplazamiento.

$$y(t) - y_0 = \int_0^t \frac{c(p_{y0} - Ft')}{\sqrt{p_{x0}^2 + (p_{y0} - Ft')^2 + m^2 c^2}} dt'$$

Esta integral se puede resolver usando una sustitución u para el término dentro de la raíz cuadrada. El resultado de la integración es:

$$y(t) - y_0 = \frac{c}{F} \left(\sqrt{p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + m^2 c^2} - \sqrt{p_{x0}^2 + (p_{y0} - Ft)^2 + m^2 c^2} \right)$$

Esto da la ecuación de movimiento relativista final para la coordenada y.

A.6. Teorema del Trabajo y la Energía

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} \quad (101)$$

es el trabajo infinitesimal realizado por la fuerza \bar{F} mientras la partícula sufre el desplazamiento $d\bar{s}$ a lo largo de su trayectoria. Usamos la segunda ley de Newton del movimiento

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} \quad (102)$$

en la ecuación (101) para obtener una expresión para el trabajo infinitesimal

$$\begin{aligned} dW &= \frac{d(m\bar{v})}{dt} \cdot \bar{v} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} \right) dt \\ &= d \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right). \end{aligned}$$

Dado que la cantidad escalar $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ es la energía cinética de la partícula, se sigue que

$$dW = dT. \quad (103)$$

La ecuación (103) es la forma diferencial del teorema del trabajo y la energía: establece que el trabajo diferencial de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual, en cualquier momento, al cambio diferencial en la energía cinética de la partícula. Integrando la ecuación (103) entre el punto 1 y el punto 2, correspondientes a las velocidades \bar{v}_1 y \bar{v}_2 de la partícula, obtenemos

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2. \quad (104)$$

A.7. Formulación Energética de la Ecuación Relativista

La ecuación anterior se puede expresar de una forma mucho más elegante y físicamente perspicaz utilizando el concepto de energía total relativista. Sea E_0 la energía total inicial en $t = 0$:

$$E_0 = \sqrt{(p_{x0}^2 + p_{y0}^2)c^2 + (mc^2)^2}$$

Y sea $E(t)$ la energía total en el tiempo t :

$$E(t) = \sqrt{(p_x(t)^2 + p_y(t)^2)c^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{(p_{x0}^2 + (p_{y0} - Ft)^2)c^2 + (mc^2)^2}$$

Podemos ver que los términos en nuestra ecuación para $y(t)$ son simplemente E_0/c y $E(t)/c$. Sustituyendo esto se obtiene:

$$y(t) - y_0 = \frac{c}{F} \left(\frac{E_0}{c} - \frac{E(t)}{c} \right)$$

El factor c se cancela, lo que lleva a la forma notablemente simple:

$$\boxed{y(t) = y_0 + \frac{E_0 - E(t)}{F}}$$

Esta ecuación es una declaración directa del Teorema del Trabajo y la Energía, $F\Delta y = -\Delta E$, con la energía relativista en lugar de la energía cinética, ver más abajo.

A.8. El Límite No Relativista (Principio de Correspondencia)

Una teoría relativista válida debe reproducir los resultados clásicos a bajas velocidades ($u \ll c$). Mostramos esto usando la aproximación binomial para la energía total $E = \gamma mc^2$. Para velocidades pequeñas, $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$, lo que da:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 = (\text{Energía en Reposo}) + (\text{Energía Cinética Clásica})$$

Aplicando esto a nuestra ecuación de movimiento basada en la energía:

$$y(t) - y_0 = \frac{1}{F} \left[\left(mc^2 + \frac{1}{2}mu_0^2 \right) - \left(mc^2 + \frac{1}{2}mu(t)^2 \right) \right] = \frac{m}{2F}(u_0^2 - u(t)^2)$$

En el límite no relativista, las velocidades son $u_x(t) = u_{x0}$ y $u_y(t) = u_{y0} - \frac{F}{m}t$. Sustituyendo esto:

$$\begin{aligned} y(t) - y_0 &= \frac{m}{2F} \left[(u_{x0}^2 + u_{y0}^2) - \left(u_{x0}^2 + (u_{y0} - \frac{F}{m}t)^2 \right) \right] \\ &= \frac{m}{2F} \left[u_{y0}^2 - \left(u_{y0}^2 - 2u_{y0}\frac{F}{m}t + \frac{F^2}{m^2}t^2 \right) \right] \\ &= \frac{m}{2F} \left[2u_{y0}\frac{F}{m}t - \frac{F^2}{m^2}t^2 \right] \\ &= u_{y0}t - \frac{F}{2m}t^2 \end{aligned}$$

Esto produce la ecuación de movimiento clásica final:

$$y(t) = y_0 + u_{y0}t - \frac{F}{2m}t^2$$

La fórmula relativista se reduce correctamente a la clásica.

A.9. Derivación Directa del Caso No Relativista

Como confirmación final, podemos derivar la ecuación de movimiento clásica directamente del Teorema del Trabajo y la Energía no relativista, $W_{neto} = \Delta K$.

- **Trabajo Realizado:** $W_{neto} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = -F(y(t) - y_0)$.
- **Cambio en la Energía Cinética:** $\Delta K = K_{final} - K_{inicial} = \frac{1}{2}mu(t)^2 - \frac{1}{2}mu_0^2$.

Usando las velocidades clásicas $u_x(t) = u_{x0}$ y $u_y(t) = u_{y0} - \frac{F}{m}t$:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m \left[(u_{x0}^2 + (u_{y0} - \frac{F}{m}t)^2) - (u_{x0}^2 + u_{y0}^2) \right] = \frac{1}{2}m \left[(u_{y0} - \frac{F}{m}t)^2 - u_{y0}^2 \right]$$

Estableciendo $W_{neto} = \Delta K$:

$$\begin{aligned} -F(y(t) - y_0) &= \frac{1}{2}m \left[(u_{y0}^2 - 2u_{y0}\frac{F}{m}t + \frac{F^2}{m^2}t^2) - u_{y0}^2 \right] \\ -F(y(t) - y_0) &= -u_{y0}Ft + \frac{F^2}{2m}t^2 \end{aligned}$$

Dividiendo por $-F$ se obtiene el resultado idéntico:

$$y(t) - y_0 = u_{y0}t - \frac{F}{2m}t^2$$

B. Derivación de las Transformaciones de Lorentz a partir de Simetrías del Espacio–tiempo

B.1. El Enfoque de Ignatowski

Este documento presenta una derivación de las transformaciones de Lorentz basada en principios fundamentales de simetría, en lugar de postular la constancia de la velocidad de la luz. Este enfoque, a veces llamado la derivación de Ignatowski, se basa en el Principio de Relatividad y la homogeneidad e isotropía del espaciotiempo. Mostraremos que estos principios conducen lógicamente a la existencia de una velocidad universal e invariante, que identificamos con la velocidad de la luz.

Ver [?]

B.2. Principios Fundamentales

La derivación se basa en tres supuestos centrales:

1. **El Principio de Relatividad:** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. **Homogeneidad del Espaciotiempo:** Las leyes de la física son independientes de la posición en el espacio y el tiempo.
3. **Isotropía del Espacio:** Las leyes de la física son independientes de la dirección.

B.3. Paso 1: Linealidad a partir de la Homogeneidad

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales, $S(x, t)$ y $S'(x', t')$, con S' moviéndose a una velocidad v relativa a S a lo largo del eje x. Buscamos las funciones de transformación $x' = f(x, t)$ y $t' = g(x, t)$.

La homogeneidad del espaciotiempo implica que las ecuaciones de transformación deben ser **lineales**. Si no lo fueran, un movimiento uniforme en un sistema (una línea recta en un diagrama de espaciotiempo) aparecería como un movimiento acelerado en otro. Esto significaría que las leyes de la física dependerían de la elección del origen, violando la homogeneidad. Por lo tanto, la forma más general de las transformaciones debe ser lineal:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Dx + Et \end{aligned}$$

donde los coeficientes A, B, D, E solo pueden depender de la velocidad relativa, v .

B.4. Paso 2: Usando Cinemática Básica

Podemos simplificar los coeficientes usando el movimiento de los orígenes de los sistemas.

- El origen del sistema S' ($x' = 0$) se mueve con velocidad v en el sistema S . Su posición en S es por lo tanto $x = vt$. Sustituyamos esto en nuestra primera ecuación:

$$0 = A(vt) + Bt \implies 0 = (Av + B)t$$

Esto debe ser válido para todo tiempo t , por lo que debemos tener $B = -Av$. La transformación para x' se convierte en:

$$x' = Ax - Avt = A(x - vt)$$

Renombremos el coeficiente $A(v)$ con la notación más familiar $\gamma(v)$.

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \tag{105}$$

B.5. Paso 3: Aplicando la Relatividad y la Isotropía

El Principio de Relatividad establece que la transformación de S' de vuelta a S debe tener exactamente la misma forma matemática. La única diferencia es que desde la perspectiva de S' , el sistema S se mueve con velocidad $-v$. Por lo tanto, la transformación inversa debe ser:

$$x = \gamma(-v)(x' + vt') \tag{106}$$

Ahora, invocamos la **isotropía del espacio**. La isotropía significa que la física no debe depender de la dirección del vector velocidad. Por lo tanto, cualquier efecto físico de la transformación solo puede depender de la *rapidez*, $|v|$, no de la dirección de la velocidad. Esto implica:

$$\gamma(v) = \gamma(-v)$$

Esto simplifica nuestro par de transformaciones a:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x - vt) \\ x &= \gamma(v)(x' + vt') \end{aligned}$$

B.6. Paso 4: Encontrando la Transformación del Tiempo

Todavía necesitamos determinar la transformación para el tiempo. Podemos mostrar que debe tomar la forma simétrica:

$$t' = \gamma(v)(t - \alpha(v)x) \quad (107)$$

donde $\alpha(v)$ es alguna función de la velocidad. Por el Principio de Relatividad, la transformación inversa debe ser:

$$t = \gamma(v)(t' + \alpha(v)x') \quad (108)$$

Nótese que la isotropía implica $\alpha(-v) = -\alpha(v)$ (debe ser una función impar).

B.7. Paso 5: La Propiedad de Grupo y la Constante Universal

Este es el paso crucial que reemplaza el postulado de la velocidad de la luz. Consideraremos tres sistemas: S , S' y S'' . Sea la velocidad de S' relativa a S v_1 , y la velocidad de S'' relativa a S' v_2 . La composición de estas dos transformaciones debe dar como resultado una transformación de la misma forma.

Sustituyendo (105) y (107) en (106) y (108), podemos resolver para las funciones. Un método más directo es requerir consistencia entre las transformaciones. Sustituimos (105) en (106):

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)(x' + vt') \\ x &= \gamma(v)[\gamma(v)(x - vt) + vt'] \end{aligned}$$

Ahora sustituimos nuestra expresión para t' (107):

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)[\gamma(v)(x - vt) + v\gamma(v)(t - \alpha(v)x)] \\ x &= \gamma(v)^2[(x - vt) + v(t - \alpha(v)x)] \\ x &= \gamma(v)^2[x - vt + vt - v\alpha(v)x] \\ x &= \gamma(v)^2x(1 - v\alpha(v)) \end{aligned}$$

Como esto debe ser válido para cualquier x , debemos tener:

$$1 = \gamma(v)^2(1 - v\alpha(v))$$

Esto relaciona nuestras dos funciones desconocidas, $\gamma(v)$ y $\alpha(v)$.

A partir del argumento de la propiedad de grupo (considerando tres sistemas), se puede mostrar que la razón $\alpha(v)/v$ debe ser una constante universal, independiente del sistema de referencia. Llamemos a esta constante K .

$$\frac{\alpha(v)}{v} = K \implies \alpha(v) = Kv$$

Ahora sustituimos esto de nuevo en nuestra relación de consistencia:

$$1 = \gamma(v)^2(1 - v(Kv)) = \gamma(v)^2(1 - Kv^2)$$

Resolviendo para $\gamma(v)$:

$$\boxed{\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}}$$

B.8. Paso 6: La Naturaleza Física de la Constante K

Hemos derivado la forma completa de las transformaciones basándonos únicamente en principios de simetría. La física está contenida en la constante universal K .

1. Caso 1: $K = 0$

Si $K = 0$, entonces $\gamma = 1$ y $\alpha = 0$. Las transformaciones se convierten en $x' = x - vt$ y $t' = t$. Esta es la **transformación de Galileo**. En este universo, no hay límite de velocidad.

2. Caso 2: $K < 0$

Si K es negativo, sea $K = -1/R^2$. Entonces $\gamma = 1/\sqrt{1 + v^2/R^2}$. Esto corresponde a transformaciones en un espacio euclíadiano 4D (rotaciones). Esto es matemáticamente posible pero no describe nuestro universo.

3. Caso 3: $K > 0$

Si K es positivo, debe tener unidades de $(1/\text{velocidad}^2)$. Definamos una nueva constante c tal que $K = 1/c^2$. Esta constante c debe ser una velocidad universal e invariante. El factor de Lorentz y las transformaciones se convierten en:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

Estas son las **transformaciones de Lorentz**.

B.9. Conclusión

Sin asumir nunca que la luz viaja a una velocidad constante, hemos demostrado que las simetrías fundamentales del espaciotiempo (homogeneidad e isotropía) y el principio de relatividad conducen a una conclusión sorprendente: **debe existir una velocidad universal e invariante en nuestro universo**.

Toda la evidencia experimental, desde el electromagnetismo hasta la desintegración de partículas, confirma que vivimos en un universo donde $K > 0$. Llamamos a esta velocidad universal c , y la identificamos con la velocidad de la luz en el vacío. La constancia de la velocidad de la luz no es una suposición separada, sino una consecuencia directa de la estructura del espaciotiempo mismo.

C. Número Imaginario

Definimos

$$i \equiv \sqrt{-1}. \quad (109)$$

Por lo tanto

$$i^2 = i \cdot i = (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1+1}{2}} = (-1)^1 = -1. \quad (110)$$

D. Demostración de la Fórmula de Euler mediante Cálculo

La fórmula de Euler es

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Se puede construir una prueba utilizando cálculo básico.

1. Definir una función $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.
2. Derivar $f(\theta)$ con respecto a θ :

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta$$

3. Factorizar una i de la derivada, usando $i^2 = -1$:

$$\frac{df}{d\theta} = i(i \sin \theta + \cos \theta) = if(\theta)$$

4. Ahora tenemos una ecuación diferencial simple de primer orden: $\frac{df}{f} = i d\theta$.
5. Integrando ambos lados se obtiene $\ln(f) = i\theta + C$, donde C es la constante de integración.
6. Exponenciando se obtiene $f(\theta) = e^{i\theta+C} = e^C e^{i\theta}$.
7. Para encontrar la constante e^C , evaluamos la función en $\theta = 0$:

$$f(0) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0 = 1$$

De nuestra solución, también tenemos $f(0) = e^C e^{i \cdot 0} = e^C$.

8. Por lo tanto, la constante $e^C = 1$, y nuestra solución final es $f(\theta) = e^{i\theta}$. Como definimos $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, la identidad queda demostrada:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (111)$$

E. Derivando Seno y Coseno de la Fórmula de Euler

Una aplicación poderosa de la fórmula de Euler es expresar el seno y el coseno en términos de exponenciales complejas. Esto se logra tratando la fórmula de Euler y su conjugada como un sistema de dos ecuaciones lineales.

E.1. El Sistema de Ecuaciones

Comenzamos con la fórmula de Euler y una segunda versión donde θ es reemplazado por $-\theta$:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (A.1)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta \quad (A.2)$$

La segunda ecuación utiliza la propiedad par del coseno ($\cos(-\theta) = \cos \theta$) y la propiedad impar del seno ($\sin(-\theta) = -\sin \theta$).

E.2. Resolviendo para $\cos \theta$

Para aislar $\cos \theta$, sumamos las ecuaciones (A.1) y (A.2) para eliminar los términos del seno:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) \\ e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

Resolviendo para $\cos \theta$ se obtiene:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

E.3. Resolviendo para $\sin \theta$

Para aislar $\sin \theta$, restamos la ecuación (A.2) de la ecuación (A.1) para eliminar los términos del coseno:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i \sin \theta \end{aligned}$$

Resolviendo para $\sin \theta$ se obtiene:

$$\boxed{\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Estas definiciones son fundamentales en muchas áreas de la física y la ingeniería, particularmente en el análisis de Fourier.

E.4. Conexión con las Funciones Hiperbólicas

Estas formas exponenciales son sorprendentemente similares a las definiciones de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Por comparación directa, podemos ver la relación formal utilizada en el texto principal para la rotación de Wick.

- Comparando $\cos \theta$ con $\cosh(x)$, vemos que si establecemos $x = i\theta$, obtenemos $\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$.
- Comparando $\sin \theta$ con $\sinh(x)$, vemos que $\sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = i \sin \theta$.

Esto demuestra la profunda consistencia matemática entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas en el plano complejo.

E.5. La Matriz de Lorentz

Podemos escribir la transformación $X' = \Lambda X$ como:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Inspeccionando las ecuaciones de transformación, podemos escribir la matriz Λ primero en términos de γ y v , y luego sustituir las funciones hiperbólicas:

$$\Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma \\ -v\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}}$$

Esto revela que un impulso de Lorentz es una **rotación hiperbólica** en el espaciotiempo.

F. La Rotación de Wick: Impulsos como Rotaciones Imaginarias

La conexión con la geometría se vuelve aún más sorprendente si tratamos la rapidez como un ángulo imaginario. Este procedimiento es parte de una técnica conocida como **rotación de Wick**.

F.1. De Funciones Hiperbólicas a Trigonométricas

Establezcamos la rapidez ξ como un ángulo imaginario, $\xi = i\theta$. Usando las definiciones de las funciones hiperbólicas en términos de exponentiales, encontramos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \cosh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta \\ \sinh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = i \sin \theta \end{aligned}$$

F.2. La Transformación Completa en el Espaciotiempo Euclíadiano

Ahora, realicemos una rotación de Wick completa aplicando dos cambios simultáneamente:

1. **Rapidez Imaginaria:** $\xi \rightarrow i\theta$
2. **Tiempo Imaginario:** $t \rightarrow i\tau$ (y por lo tanto $t' \rightarrow i\tau'$)

Aplicamos esto a la ecuación matricial $X' = \Lambda X$, centrándonos en las componentes (t, x) :

$$\begin{pmatrix} i\tau' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\tau \\ x \end{pmatrix}$$

Multiplicando esto se obtienen dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} i\tau' &= (\cos \theta)(i\tau) + (-i \sin \theta)(x) = i(\tau \cos \theta - x \sin \theta) \\ x' &= (-i \sin \theta)(i\tau) + (\cos \theta)(x) = (-i^2)\tau \sin \theta + x \cos \theta = \tau \sin \theta + x \cos \theta \end{aligned}$$

Después de cancelar la i de la primera ecuación, obtenemos el resultado final:

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau \cos \theta - x \sin \theta \\ x' &= x \cos \theta + \tau \sin \theta \end{aligned}$$

Esto es precisamente una rotación euclíadiana estándar en el plano (τ, x) . En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix}$$

Cuadro 6: Resumen de la Rotación de Wick: Mapeo de un Impulso de Lorentz a una Rotación Euclíadiana.

| Característica | Espaciotiempo de Minkowski (Impulso) | Espaciotiempo Euclíadiano (Rotación) |
|------------------------|--|---|
| Coordenadas | (t, x) | (τ, x) , donde $t = i\tau$ |
| Intervalo Invariante | $s^2 = t^2 - x^2$ | $d^2 = \tau^2 + x^2$ |
| Tipo de Transformación | Rotación Hiperbólica | Rotación Circular |
| Parámetro | Rapidez, $\xi = \tanh^{-1}(v)$ | Ángulo, θ (donde $\xi = i\theta$) |
| Forma Matricial | $\begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi \\ -\sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ |
| Interpretación Física | Cambio de velocidad | Rotación geométrica formal |

G. Producto escalar en forma matricial (rotación)

Sea

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X^T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

y

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos definir el producto escalar como

$$\begin{aligned} X^T \cdot X &\equiv X^T \cdot \delta \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

H. Producto escalar en forma matricial (impulso)

Sea

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad X^T = \begin{pmatrix} t & x \end{pmatrix},$$

y

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos definir el producto escalar como

$$\begin{aligned} X^T \cdot X &\equiv X^T \cdot g \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} t & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix} \\ &= t^2 - x^2. \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \textcolor{green}{u} \\ \textcolor{red}{d} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} \textcolor{green}{\nu} \\ \textcolor{red}{e} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_\mu &\gg m_e \\ L_e &= \begin{pmatrix} \textcolor{green}{\nu}_e \\ \textcolor{red}{e} \end{pmatrix} \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \textcolor{green}{\nu}_\mu \\ \textcolor{red}{\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Producto escalar de Lorentz

$$\begin{aligned} \partial_\mu \cdot \partial_\mu V &= 0 \\ \frac{\partial^2 V}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza que la corriente I_1 ejerce sobre una carga q_2 que fluye con la corriente I_2 a una velocidad \mathbf{v} , para recorrer la distancia L en un tiempo t , es

$$\begin{aligned} F_2 &= q_2 v B_1 \\ &= q_2 \frac{L}{t} B_1 \\ &= \frac{q_2}{t} L B_1 \\ &= I_2 L B_1. \end{aligned}$$

Reemplazando la magnitud del campo magnético a una distancia r del alambre con corriente I_1 (donde se encuentra el alambre con corriente I_2) dado por

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

tenemos que la magnitud fuerza por unidad de longitud que ejerce I_1 sobre I_2 es

$$\frac{F_2}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r},$$

en la dirección hacia el cable con corriente I_1 , como se muestra en la figura.

Derivación de las Transformaciones de Lorentz usando las dos ecuaciones

Introducción

Las transformaciones de Lorentz son el conjunto de ecuaciones que relacionan las coordenadas de espacio y tiempo de un evento, medidas por dos observadores en diferentes sistemas de referencia iniciales. La derivación se basa en los dos postulados fundamentales de la Relatividad Especial:

1. **El Principio de Relatividad:** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia iniciales.
2. **La Constancia de la Velocidad de la Luz:** La velocidad de la luz en el vacío, c , es la misma para todos los observadores iniciales.

Configuración Inicial

Consideramos dos sistemas de referencia iniciales, $S(x, t)$ y $S'(x', t')$. El sistema S' se mueve con una velocidad constante v relativa a S a lo largo del eje x. En $t = t' = 0$, sus orígenes coinciden. Nuestro objetivo es encontrar las funciones que conectan sus coordenadas.

Paso 1: La Suposición de Linealidad

Debido a la homogeneidad del espaciotiempo, las ecuaciones de transformación deben ser lineales. Por lo tanto, podemos escribir las formas más generales:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Dx + Et \end{aligned}$$

donde los coeficientes A, B, D, E solo pueden depender de la velocidad relativa v . Las coordenadas perpendiculares al movimiento no se ven afectadas ($y' = y$, $z' = z$).

Paso 2: Encontrar los Coeficientes para x'

Consideramos el origen del sistema S' ($x' = 0$), que se mueve con velocidad v en el sistema S , por lo que su posición es $x = vt$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$0 = A(vt) + Bt \implies 0 = (Av + B)t$$

Como esto debe ser cierto para todo tiempo t , se deduce que $B = -Av$. Sustituyendo de nuevo en la ecuación para x' :

$$x' = Ax - Avt = A(x - vt)$$

Renombramos la constante $A(v)$ con el símbolo convencional $\gamma(v)$, el factor de Lorentz:

$$\boxed{x' = \gamma(v)(x - vt)} \quad (112)$$

Paso 3: Encontrar los Coeficientes D y E para t'

Ahora aplicamos el segundo postulado. Imaginemos que en $t = t' = 0$ se emite un pulso de luz desde el origen común.

Caso 1: Pulso de luz hacia la derecha (+x)

En S , el frente de luz se describe por $x = ct$. En S' , por $x' = ct'$. Sustituimos estas condiciones en nuestras ecuaciones de transformación:

- De la ecuación para x' : $ct' = \gamma(ct - vt) \implies t' = \gamma t(1 - v/c)$.
- De la ecuación para t' : $t' = D(ct) + Et = t(Dc + E)$.

Igualando ambas expresiones para t' (el factor t se cancela):

$$\gamma(1 - v/c) = Dc + E \quad (113)$$

Caso 2: Pulso de luz hacia la izquierda (-x)

En S , el frente de luz es $x = -ct$. En S' , es $x' = -ct'$. Sustituimos de nuevo:

- De la ecuación para x' : $-ct' = \gamma(-ct - vt) \implies t' = \gamma t(1 + v/c)$.
- De la ecuación para t' : $t' = D(-ct) + Et = t(E - Dc)$.

Igualando las expresiones para t' :

$$\gamma(1 + v/c) = E - Dc \quad (114)$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales para las incógnitas D y E :

$$\begin{cases} E + Dc = \gamma(1 - v/c) \\ E - Dc = \gamma(1 + v/c) \end{cases}$$

Para encontrar E, sumamos las dos ecuaciones:

$$(E + Dc) + (E - Dc) = \gamma(1 - v/c) + \gamma(1 + v/c) \implies 2E = 2\gamma \implies \boxed{E = \gamma(v)}$$

Para encontrar D, restamos la segunda ecuación de la primera:

$$(E + Dc) - (E - Dc) = \gamma(1 - v/c) - \gamma(1 + v/c) \implies 2Dc = \gamma(-2v/c) \implies \boxed{D = -\frac{\gamma(v)v}{c^2}}$$

Paso 4: Formular la Transformación del Tiempo y Encontrar $\gamma(v)$

Con los coeficientes D y E , la transformación para t' es:

$$t' = Dx + Et \implies t' = -\frac{\gamma v}{c^2}x + \gamma t$$

Reordenando, obtenemos la forma familiar:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (115)$$

Para encontrar la forma explícita de $\gamma(v)$, usamos el Principio de Relatividad. La transformación inversa de (115) es $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. Sustituimos en ella las expresiones para x' y t' que hemos encontrado:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left[\gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) + \frac{v}{c^2} \gamma(x - vt) \right] \\ t &= \gamma^2 \left[t - \frac{vx}{c^2} + \frac{vx}{c^2} - \frac{v^2 t}{c^2} \right] \\ t &= \gamma^2 \left[t - \frac{v^2 t}{c^2} \right] = \gamma^2 t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Cancelando t de ambos lados, nos queda $1 = \gamma^2(1 - v^2/c^2)$. Finalmente, resolvemos para $\gamma(v)$:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Resumen de las Transformaciones de Lorentz

Habiendo encontrado todos los coeficientes y la forma de γ , tenemos el conjunto completo de las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$