



# cálculo II

etsiccpc

práctica 2, EDOs no explícitas en la derivada, curvas y trayectorias, curso 2007/08. (fecha de entrega 16/11/07)

1. Obtener la solución general y singular de la ecuación diferencial

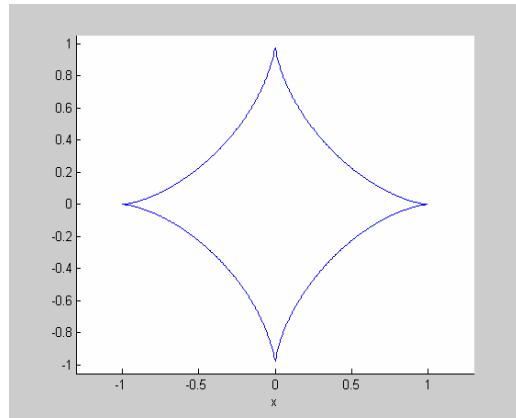
$$x^2 - 2y^2 + 2y'xy - y'^2y^2 = 0$$

(1<sup>er</sup> parcial 2006)

- 2.- La **astroide**, también conocida en ocasiones como tetracúspide o cubocicloide, es una curva plana de ecuación analítica:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (1)$$

donde el parámetro  $a$  da los cortes con los ejes coordenados. Su longitud es  $6a$  y su área es  $3pa^2/8$ . Se puede generar como resultado del giro de una circunferencia de radio  $a/4$  en el interior de otra de radio  $a$



$$\text{Astroide } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a=1$$

La curva fue descrita por primera vez a finales del siglo XVII por *Johann Bernouilli y Leibniz*. Gottfried **Leibniz** (Leipzig, Alemania, 1646- Hannover, Alemania 1716), filósofo racionalista y matemático, ha pasado a la historia, junto con su rival científico *Newton*, como el padre del cálculo.



G. Leibniz (1646-1716)

Leibniz fue discípulo de *Weigel* en Jena (Alemania) y de *Huygens* en París. Es responsable, junto con *Newton* con quién polemizaría de manera intensa, de sentar las bases del cálculo diferencial. En 1684 publicó en *Acta Eruditorum*, su artículo '*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus*'. En dicho artículo estableció las bases de lo que llamó el '*Calculus Diferentialis*'. En 1686 publica en la misma revista '*Calculus Summatorius*', que sienta las bases del cálculo integral (término acuñado por *Jacob Bernoulli* hacia 1690).

También es el padre del cálculo infinitesimal al que se refiere como '*Calcul de l'infiniment petit*' (durante la segunda mitad del siglo XVII los idiomas de la ciencia son el francés y el latín, el alemán no adquirirá esta categoría hasta bien entrado el siglo XVIII). Leibniz es también responsable de la notación diferencial que ha trascendido hasta nuestros días. Dentro de su obra filosófica, de importancia fundamental, destacan *Discurso de Metáfísica* (1686), y *La Monadología* (1714). Se pide:

- Obtener la familia ortogonal a la familia de astroides (1)
- Obtener la familia isogonal a  $p/4$  de la familia de astroides (1)

(septiembre 2005)

- 3.- Dada la familia de curvas

$$x^2 + y^2 = cx$$

Se pide

- Describir las curvas de dicha familia con ayuda de un croquis
- Obtener las trayectorias ortogonales a la familia anterior
- Describir las curvas obtenidas en b) con ayuda de un croquis

(1er Parcial 2005)

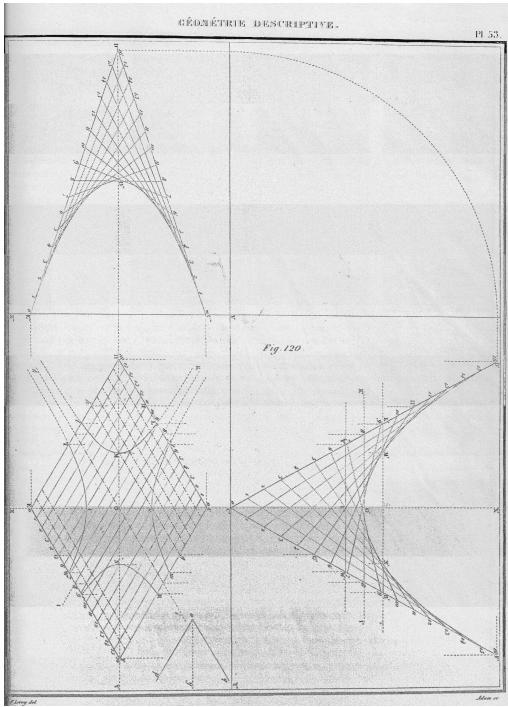


Figura 1. Representación en el sistema diédrico de un paraboloide hiperbólico (Géometrie Descriptive, C. Leroy)

Una de las grandes aportaciones de **Antoni Gaudí i Cornet** (Reus 1878- Barcelona 1926) a la historia de la Arquitectura fue el **uso constructivo de las superficies regladas**. Al respecto de este tipo superficies Gaudí afirma lo siguiente:

‘El uso de superficies regladas es lógico por su superioridad plástica y su facilidad constructiva’

Muchas de estas superficies eran sobradamente conocidas y estaban geométricamente descritas desde hace mucho tiempo, pero se debe sin embargo a Gaudí la autoría de su materialización como superficies de interés constructivo. Gran parte de la genialidad del arquitecto reside en un análisis geométrico profundo de las formas y en una investigación espacial sin precedentes en la historia de la arquitectura. La geometría es omnipresente en la obra de Gaudí. Su presencia es resultado del interés que por esta ciencia mostró el autor desde su niñez. Hijo de un calderero de Riudoms, mostró desde un principio gran interés por el estudio de esta disciplina, a la que dedicaría mucho tiempo de estudio durante su formación como arquitecto en la Escuela de Bellas Artes de Barcelona. Allí estudia entre otros el tratado de *Géométrie Descriptive de C.F.A. Leroy*, una de cuyas páginas se reproducen en este enunciado (figura 1).

La primera obra en la que Gaudí utilizó un paraboloide hiperbólico fue la *Glorieta del Campo de la Higueras de la Finca Güell*, en Les Corts de Sarriá (1884). En ella proyecta dos paraboloides simétricos de ladrillo que soportan una parte del suelo del mirador. En una primera etapa también aparecen en pequeños acabados de las chimeneas del *Palau Güell*. Las obras en las que los paraboloides hiperbólicos aparecen de forma más significativa son la *Cripta de la Colonia Güell* (techo), pabellón de entrada al *Parque Güell* (cubierta) y sobre todo en la *Sagrada Família*, donde aparece en las bases y capiteles de las columnas y pináculos, y en las cubiertas de las naves, sacristías, campanarios y cimborrios.

Una de las obras en las que Gaudí utiliza paraboloides hiperbólicos en la definición geométrica de cubiertas es la Iglesia de la Colonia Güell, que aparece en la imagen 1. Dicha iglesia se construyó entre 1898 y 1914 como parte de la colonia industrial textil fundada por Eusebi Güell, principal mecenas del arquitecto. Este encargo no sólo le permitió ensayar un revolucionario sistema de cálculo de cargas, sino también experimentar *in situ* muchas de las

**4.- El Paraboloide Hiperbólico** es un tipo de cuádrica de ecuación geométrica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (1)$$

Se trata ésta de una superficie espacial doblemente reglada, esto es susceptible de ser generada por una familia de rectas. Su naturaleza reglada permite una materialización constructiva sencilla. Este hecho, unido a sus evidentes cualidades estéticas, la convierten en una superficie espacial muy utilizada en ingeniería y arquitectura, fundamentalmente en cubiertas.

El Paraboloide Hiperbólico está formado por rectas, que se apoyan en otras dos, que se cruzan de una manera ordenada, es decir estableciendo una correspondencia biyectiva entre los puntos de apoyo correspondientes (por ejemplo haciendo que las rectas generadoras sean todas paralelas a un plano dado, perpendicular a una de las rectas directrices).

soluciones que después aplicaría en las construcciones posteriores, como si se tratara de una maqueta a gran escala. El edificio más singular de esta colonia, que quedó inacabada, es sin duda la Cripta de la Iglesia, tanto por la utilización de soluciones estructurales novedosas como por el adecuado empleo de los materiales estructurales y decorativos.



Imagen 1. Iglesia de la Colonia Güell

Como es sabido, en el sistema de planos acotados se representan superficies tridimensionales mediante la proyección horizontal de las curvas de la superficie formadas por puntos de igual cota, las **Curvas de Nivel**. Dada una superficie tridimensional  $F(x, y, z) = 0$ , la proyección horizontal de las curvas de nivel de dicha superficie sobre el plano  $z = 0$  constituirán la **familia de curvas de nivel de parámetro  $c$** ,  $F(x, y, c) = 0$ . Se quiere obtener la expresión analítica de la familia de curvas que representa las curvas de nivel de una cubierta con forma de Paraboloides Hiperbólico. Así mismo, se quieren obtener las curvas de máxima pendiente de dicha cubierta, para estudiar las características de la escorrentía sobre el Paraboloides Hiperbólico. Las **Curvas de Máxima Pendiente** son la proyección horizontal de las curvas que describe una gota de agua en su deslizamiento sobre una superficie bajo la acción de la gravedad. Geométricamente constituyen la **familia de curvas ortogonales a la familia de Curvas de Nivel**. Se pide:

- a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la familia de curvas de nivel y la familia de curvas de máxima pendiente de un Paraboloides Hiperbólico de Ecuación (1).  
Representar cualitativamente ambas familias para el caso particular  $a = b = 1$
  - b) Obtener la ecuación paramétrica de la familia de curvas isogonales a  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p}}{4}$  radianes a la familia de curvas de nivel de dicho paraboloides para el caso particular  $a = b = 1$ .
- (1<sup>er</sup> Parcial 2003)**

**5.-** Obtener la solución general (y la solución singular, si procede) de la ecuación diferencial

$$ayy'^2 + (2x - b)y' - y = 0 \quad b \in \mathfrak{R}, \quad a < 0$$

(Se recomienda efectuar previamente el cambio de variable dependiente  $v = y^2$ ).

**(1<sup>er</sup> Parcial 1996)**