线性代数期中试卷

2022.5.8

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}$，此处 A_{ij} 为 $A=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ 的代数余子式.

2. 用克莱姆法则求解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.

3. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是实向量，计算 $y=Ax=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 与 $A^{\mathrm{T}}A$，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \sin\theta=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}},\quad \cos\theta=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}.$$

4. $A=(a_{ij})_{n\times n},A^k=O,k>1$ 是正整数，计算 $|E+3A|$.

5. $A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&b\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-1$(3重)，计算 a,b.

二.(12分) 计算矩阵 $2X+XA=B$，此处 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

三.(12分) (1) 计算 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的所有极大无关组（6分）;
(2) 计算 $AX=0$ 的基础解系（基本解组）（6分）

其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1&1\\1&8&6&-3&0\\1&-11&-8&4&1\\0&19&14&-7&-1\end{pmatrix}$.

四. (12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_3+\alpha_4,\alpha_2=\alpha_4+\alpha_5$，$\beta=-2\alpha_1+3\alpha_2$，计算 $Ax=\beta$ 的通解.

五.(12分) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 可逆，$B=A^{-1},B^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 试计算 $C=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$ 的特征值与特征向量.

六.(12分) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\{c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_r\eta_r\mid c_i\in\mathbf{C},\ 1\le i\le r\}$，
$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，$\gamma_j=c_{1j}\eta_1+c_{2j}\eta_2+\cdots+c_{rj}\eta_r,(1\le j\le r)$. 证明：
(1) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆;
(2) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

线性代数期中试卷 答案 2022.5.8

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}$，此处 A_{ij} 为 $A=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ 的代数余子式.

解：$A_{31}-2A_{32}+2A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\1&-2&0&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=-76.$

解法二：$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&1\\1&2&3\end{vmatrix}=4, A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3&4\\2&4&1\\4&2&3\end{vmatrix}=44, A_{34}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&1&2\end{vmatrix}=4.$

故有 $A_{31}-2A_{32}+2A_{34}=4-2\times 44+2\times 4=-76.$

2. 用克莱姆法则求解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}.$

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&3^2&5^2\end{vmatrix}=16, D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&5\\5&3^2&5^2\end{vmatrix}=-8, D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&5\\1&5&5^2\end{vmatrix}=32, D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&3\\1&3^2&3\end{vmatrix}=-8.$

故方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{1}{2}.$

3. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是实向量，计算 $y=Ax=(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 与 $A^{\mathrm{T}}A$，此处

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \sin\theta=\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}},\quad \cos\theta=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}.$$

解：$y=Ax=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\cos\theta+x_3\sin\theta\\-x_2\sin\theta+x_3\cos\theta\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\0\\x_4\end{pmatrix},$

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，易知 $B^{\mathrm{T}}B=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$

则有 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B^{\mathrm{T}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&B&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

解法二：$y=Ax=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\cos\theta\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\\sin\theta\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\sqrt{x_2^2+x_3^2}\\0\\x_4\end{pmatrix}.$

易知 A 的 4 列构成标准正交向量组，故 A 为正交矩阵，于是 $A^{\mathrm{T}}A=E_4$.

4. $A=(a_{ij})_{n\times n}, A^k=O, k>1$ 是正整数，计算 $|E+3A|$.
解：设 λ 为 A 的任意特征值，则由 $A^k=O$ 可得 $\lambda^k=0$，即 $\lambda=0$，故 A 只有 0 特征值.
故 $E+3A$ 的特征值都为 $1+3\lambda=1$，于是 $|E+3A|=1\times 1\times\cdots\times 1=1.$

5. $A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&b\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-1$(3重)，计算 a,b.
解：因为 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，故 $\mathrm{tr}(A)=a-3-2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$，

$|A| = b-10+3a = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$，解得 $a=2, b=3$.

解法二：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & 1 & -a \\ -5 & \lambda+3 & -b \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (5-a)\lambda^2 + (11-4a)\lambda + 10 - b - 3a$，

又有 $|\lambda E - A| = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$. 比较系数得 $a=2, b=3$.

二.(12分) 计算矩阵 $2X + XA = B$，此处 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

解：易知 $X(2E+A) = B$，故 $X = B(2E+A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

解法二：易知 $X(2E+A) = B$，

解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2E+A \\ B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{列变换}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1/2 & -1/2 & -7/2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 3/2 \end{array}\right)$. 故 $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

三.(12分) (1) 计算 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的所有极大无关组（6分）；
(2) 计算 $AX = 0$ 的基础解系（基本解组）（6分）

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & -3 & 0 \\ 1 & -11 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 19 & 14 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

解：(1) $A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/19 & -1/19 & 8/19 \\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19 & -1/19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 向量组的秩为 2，由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

除α_3,α_4外两两都不成比例，故除α_3,α_4外任意两个向量都组成极大无关组，

即 α_1, α_2; α_1, α_3; α_1, α_4; α_1, α_5; α_2, α_3; α_2, α_4; α_2, α_5; α_3, α_4; α_3, α_5; α_4, α_5，共 10 组.

(2) 由(1)的行简化梯形得基础解系为：

$$\beta_1 = (-\frac{2}{19}, -\frac{14}{19}, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (\frac{1}{19}, \frac{7}{19}, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (-\frac{8}{19}, \frac{1}{19}, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

四. (12分) $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_5$，$\beta = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$，计算 $Ax = \beta$ 的通解.

解：等式重写为：$\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = \theta, \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5 = \theta, -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta$.

故知 $\xi_1 = (1, 0, -1, -1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (0, 1, 0, -1, -1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax = \theta$ 的两个线性无关解.

$\eta = (-2, 3, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax = \beta$ 的一个特解.

由于 $\alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，故 $\mathrm{r}(A) \geq n-2$，而 $Ax = \theta$ 至少有两个线性无关解，故 $\mathrm{r}(A) = n-2$，$Ax = \theta$ 的基础解系就是 ξ_1, ξ_2，$Ax = \beta$ 的通解为 $\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

五.(12分) $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 可逆，$B = A^{-1}, B^{\mathrm{T}} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. 试计算 $C = \alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}$ 的特征值与特征向量.

解：因为 $BA = A^{-1}A = E$，即 $\beta_i^{\mathrm{T}}\alpha_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，其中 $\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0, i \neq j$.

故 $C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \theta, \cdots, \theta)$.

由于 A 可逆，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，即 C 有特征值 1 和 0.

其中1 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, k_1, k_2不全为0，

0 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 + \cdots + k_n\alpha_n$, $k_3, k_4, \cdots, k_n \in \mathbf{R}$, $k_3, \cdots, k_n$不全为0.

六.(10分) $\mathrm{span}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r) = \{c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_r\eta_r \mid c_i \in \mathbf{C},\ 1 \leq i \leq r\}$，

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，$\gamma_j=c_{1j}\eta_1+c_{2j}\eta_2+\cdots+c_{rj}\eta_r,(1\le j\le r)$. 证明：

(1) $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆；

(2) $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

证：易知有 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)C.$

(1) 令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$，考虑 $x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+\cdots+x_r\gamma_r=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)Cx=\theta$.

因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，故有 $Cx=\theta$，

于是 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow Cx=\theta$ 只有零解 $x=\theta\ \Leftrightarrow C$ 可逆.

(2) 若 C 可逆，则有 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)C^{-1}$，即 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 可相互表示，故 $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$.

若 $\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 可表示 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$，

故存在 r 阶的矩阵 D，使得 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)D$，又由 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)C$ 有 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)CD$，由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，可得 $CD=E$，故 C 可逆.

(2) 证法二：$\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 线性无关，

由(1)的结论，$\mathrm{span}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)=\mathrm{span}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$ 当且仅当 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.