大学数学试卷　　2024.6.17

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

2. 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 的三个特征值为 $-1, 1, 3$. 求 $\mathrm{tr}[(A-E)^{2024}]$.

3. 向量组 $\alpha_1 = (1,3,2,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (3,0,-1,-1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (-2,1,1,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (0,5,t,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 求参数 t.

4. 求二次型 $f(x,y,z) = x^2 + yz$ 的正负惯性指数.

二、(本题12分) 将矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 对角化.

三、(本题12分) 证明：如果一个对称正定矩阵 A 也是正交矩阵，那么A一定是单位矩阵.

四、(本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z) = 5x^2 + 2xy + 2xz + 3y^2 + 2yz + 3z^2$ 化成一个标准形.

五、(本题12分) 设 α 为 n 维实系数列向量且 $\|\alpha\| = 1$. 证明
(1) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$，$E - \lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵. (6分)
(2) 求 λ 的范围使得 $E - \lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 半正定. (6分)

六、(本题12分) 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中有一组基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. 已知 $\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. 以及 $\beta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \beta_2 = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \beta_3 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_3$. 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 M.

七、(本题12分) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 是一个非零反对称矩阵. 证明
(1) 存在非零实数 $b \in \mathbb{R}$ 使得 A 的特征值为 $0, bi, -bi$ $(i = \sqrt{-1})$. (5分)
(2) 存在非零实向量 α_1, α_2 使得 $A\alpha_1 = -b\alpha_2, A\alpha_2 = b\alpha_1$. (4分)
(3) 存在正交矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3分)

大学数学试卷 答案 2024.6.17

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. 计算 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

解：原式$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=a(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

2. 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 的三个特征值为 $-1,1,3$. 求 $\mathrm{tr}[(A-E)^{2024}]$.

解：A 的全部特征值为 $-1,1,3$，则 $A-E$ 的全部特征值为 $\lambda(A)-1=-2,0,2$，从而 $(A-E)^{2024}$ 的全部特征值为 $(\lambda(A)-1)^{2024}=(-2)^{2024},0,2^{2024}$，因此 $\mathrm{tr}[(A-E)^{2024}]=(-2)^{2024}+0+2^{2024}=2^{2025}$.

3. 向量组 $\alpha_1=(1,3,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,0,-1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-2,1,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(0,5,t,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 求参数 t.

解：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=8(t-3)=0$，故有 $t=3$.

解法二：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & t \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$，线性相关则秩为3，故 $t=3$.

4. 求二次型 $f(x,y,z)=x^2+yz$ 的正负惯性指数.

解：令 $x=w,y=u+v,z=u-v$，变换显然可逆. 注意到 $f(x,y,z)=x^2+yz=w^2+u^2-v^2$.
因此该二次型正惯性指数为2，负惯性指数为1.

解法二：二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{合同}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$，故正惯性指数为2，负惯性指数为1.

解法三：二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$，由$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-1/2)(\lambda+1/2)$知正负惯性指数为2,1.

二、(本题12分) 将矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 对角化.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 3 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，特征值为 $\lambda=1,2,3$.

$\lambda=1$ 时，解 $(E-A)x=\theta$ 得无关特征向量 $\alpha_1=(6,5,1)^{\mathrm{T}}$.

同理，$\lambda=2$ 时，解得无关特征向量 $\alpha_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda=3$ 时，解得无关特征向量 $\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$. (矩阵$P$的选取不唯一)

三、(本题12分) 证明：如果一个对称正定矩阵 A 也是正交矩阵，那么A一定是单位矩阵.

证：根据条件，可以找到一个正交矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ $(a_i>0)$ 且 $A^2=A^{\mathrm{T}}A=E$，
因此 $E=P^{\mathrm{T}}EP=P^{\mathrm{T}}A^2P=(P^{\mathrm{T}}AP)^2=\mathrm{diag}(a_1^2,\cdots,a_n^2)$. 从而 $a_i=1$. 因此 $A=PEP^{\mathrm{T}}=E$.

四、(本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x,y,z)=5x^2+2xy+2xz+3y^2+2yz+3z^2$ 化成一个标准形.

解：令 $X=(x,y,z)^{\mathrm{T}},A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 我们有 $f(x,y,z)=X^{\mathrm{T}}AX$.

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$，得 A 的特征值 $\lambda=2,3,6$.

$\lambda=2,3,6$ 分别对应无关的特征向量 $\alpha_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，它们相互正交.

单位化后得 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，则有$P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(2,3,6)$，故正交变换$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$下，

原二次型的标准形为 $f(x,y,z)=2u^2+3v^2+6w^2$. (正交变换选取不唯一)

五、(本题12分) 设 α 为 n 维实系数列向量且 $\|\alpha\|=1$. 证明

(1) 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$，$E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵. (6分)

(2) 求 λ 的范围使得 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 半正定. (6分)

证：(1) $(E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-\lambda(\alpha^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}}=E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$. 因此 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 对称.

(2) 由 $\|\alpha\|=1$，知 $\alpha\neq\theta$. 令 $B=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，有 $\mathrm{r}(B)=1$.

因为 $B\alpha=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=\alpha=1\times\alpha$，再令 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 为 $BX=\theta$ 一组基础解系，

故 $\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 为 B 的分别属于 $1,0,\cdots,0$ 的特征向量，且线性无关.

因此 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=E-\lambda B$ 的所有特征值为 $1-\lambda,1,\cdots,1$. 从而当且仅当所有特征值大于等于0，

即 $\lambda\leq 1$ 时 $E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 半正定.

(2)的证法二：因为 $\|\alpha\|=1$，由 α 扩展成一个完整的标准正交向量组 $\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$，

并令 $P=(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})$，则 P 是正交矩阵，且有

$$P^{\mathrm{T}}(E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}})P=P^{\mathrm{T}}((1-\lambda)\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})=\mathrm{diag}(1-\lambda,0,\cdots,0).$$

故 $1-\lambda\geq 0$ 即 $\lambda\leq 1$ 时，$E-\lambda\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 半正定.

六、(本题12分) 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中有一组基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$. 已知 $\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$.

以及 $\beta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\beta_2=2\varepsilon_2+\varepsilon_3,\beta_3=\varepsilon_1+3\varepsilon_3$. 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 M.

解：根据条件有$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$,其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

再由 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M$，知 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M$.

由坐标的唯一性知 $M=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

解法二：我们有

$$\begin{aligned} \beta_1&=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\alpha_2, \\ \beta_2&=2\varepsilon_2+\varepsilon_3=2(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\ \beta_3&=\varepsilon_1+3\varepsilon_3=\alpha_1+3(\alpha_3-\alpha_2)=\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3. \end{aligned}$$

因此 $M=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

七、(本题12分) 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ 是一个非零反对称矩阵. 证明

(1) 存在非零实数 $b\in\mathbb{R}$ 使得 A 的特征值为 $0,bi,-bi$ $(i=\sqrt{-1})$. (5分)

(2) 存在非零实向量 α_1,α_2 使得 $A\alpha_1=-b\alpha_2,A\alpha_2=b\alpha_1$. (4分)

(3) 存在正交矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3分)

证：(1) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & r & s \\ -r & 0 & t \\ -s & -t & 0 \end{pmatrix}$. 我们有 $|\lambda E-A|=\lambda^3+(r^2+s^2+t^2)\lambda$. 令 $b=\sqrt{r^2+s^2+t^2}$.

由于 A 是非零方阵，从而 $b\neq 0$. 特征多项式 $|\lambda E-A|$ 有三个不同的根 $0,bi,-bi$.

从而 A 有特征值 $0,bi,-bi$.

(2) 令 $\alpha_1+i\alpha_2$ 为 A 的属于 bi 的特征向量，其中 α_1,α_2 为实向量. 我们有

$$A\alpha_1+iA\alpha_2=A(\alpha_1+i\alpha_2)=bi(\alpha_1+i\alpha_2)=-b\alpha_2+i(b\alpha_1).$$

按实部虚部分开，我们得到 $A\alpha_1=-b\alpha_2,A\alpha_2=b\alpha_1$. 由于$\alpha_1+i\alpha_2\neq\theta$ 且我们有等式

$A\alpha_1=-b\alpha_2,A\alpha_2=b\alpha_1$. 我们得到 α_1,α_2 均为非零向量.

(3) 对于任意三维实向量β，我们有：$(\beta,A\beta)=\beta^{\mathrm{T}}A\beta=-\beta^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta=-(A\beta)^{\mathrm{T}}\beta=-(A\beta,\beta)=-(\beta,A\beta)$，

从而 $(\beta, A\beta)=0$.

由(2)我们有 $(\alpha_1,\alpha_2)=-\dfrac{1}{b}(\alpha_1, A\alpha_1)=0$.

令 β_3 为 A 的属于特征值0的单位特征向量. 我们有

$(\alpha_1,\beta_3)=\dfrac{1}{b}(A\alpha_2,\beta_3)=\dfrac{1}{b}\alpha_2^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta_3=-\dfrac{1}{b}\alpha_2^{\mathrm{T}}(A\beta_3)=0$，同理 $(\alpha_2,\beta_3)=0$.

取 $\beta_1=\dfrac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1, \beta_2=\dfrac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2$. 三个单位向量 β_1,β_2,β_3 两两正交. 注意到

$A\beta_1=\dfrac{1}{\|\alpha_1\|}A\alpha_1=-\dfrac{b}{\|\alpha_1\|}\alpha_2=-\dfrac{b\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|}\beta_2,\ A\beta_2=\dfrac{1}{\|\alpha_2\|}A\alpha_2=\dfrac{b}{\|\alpha_2\|}\alpha_1=\dfrac{b\|\alpha_1\|}{\|\alpha_2\|}\beta_1.$

令 P 为正交矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 我们有 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b\|\alpha_1\|}{\|\alpha_2\|} & 0 \\ -\dfrac{b\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

注意到 $P^{\mathrm{T}}AP$ 仍然是反对称的，我们有 $\dfrac{b\|\alpha_2\|}{\|\alpha_1\|}=\dfrac{b\|\alpha_1\|}{\|\alpha_2\|}$.

因此 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|$，进而 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.