微积分II(第一层次)期末试卷(2024.6.17)

一. 计算下列各题$(3\times 6=18$分)

1.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n^2}x^n$收敛半径，收敛区域.

2.求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{3^n}$的和.

3. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2z\}$.

二. 解答下列各题(本题满分$3\times 6=18$分)

1. 判别$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$的敛散性, 若收敛, 计算其值。

2. 求微分方程$y''-2y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的通解.

3. 求微分方程$xy'=y+x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},(x>0)$的通解.

三. 计算下列各题(本题满分$3\times 6=18$分)

1. 计算曲面积分$\displaystyle\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$ 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的上侧.

2. 计算曲线积分$\displaystyle\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$l$为包含单位圆周$x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑简单闭曲线，取逆时针方向.

3.计算二重积分$\iint\limits_D|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$|x|\le 1,0\le y\le 2$.

四. (本题10分) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛域以及和函数, 并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的值.

五. (本题8分)讨论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p(\ln n)^s}$敛散性(绝对收敛, 条件收敛或发散), 这里$p>0,s>0$.

六. (本题8分）设函数$y=f(u)$二阶连续可微, 并且曲线积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}2xyf(x^2)\mathrm{d}x+\big(f'(x^2)-x^4\big)\mathrm{d}y$$

与路径无关，求函数$f(u)$.

七. (本题12分） (1) 求函数$f(x)=\pi^2-x^2,(-\pi\le x\le\pi)$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶展开式

(2) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$的和.　　　(3) 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$的和.

八. (本题8分）(1) 已知$a_n\ge 0,\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？举例说明或证明你的结论.

(2) 设正项数列$\{a_n\}$单调减少, 且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$发散，问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$是否收敛？请说明理由.