

微积分 I 期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分×3=18分)

$$1. I_1 = \int \sqrt{1+3\cos^2 x} \cdot \sin(2x) dx. \quad 2. I_2 = \int (\arcsin x)^2 dx. \quad 3. I_3 = \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx.$$

二、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. \text{求定积分 } I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx.$$

2. 求由 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) 的全长 s .

三、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. \text{求广义积分 } I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+1} dx.$$

2. 已知三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, |\mathbf{c}| = 4$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 又 $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$$\text{五、(10分) 求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}}{n}.$$

六、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L , 使得 L 过点 $P(2, 3, 4)$, 且与平面 $\Pi: 2x + y - 2z + 7 = 0$ 平行, 又与直线 $L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

微积分 I 期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{5}{n^2} + \cos \frac{5}{n} \right)^{3n^2}. \quad 2. \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}. \quad 3. \text{求函数 } y = (x+3)e^{\frac{1}{x}} \text{ 的渐近线.}$$

二、计算下列各题(6分×3=18分)

$$1. I_1 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx. \quad 2. I_2 = \int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. \quad 3. I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^7 \cos^{10} x}{1+x^2} dx.$$

三、计算下列各题 (6分× 2=12分)

1. 已知三个单位向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

2. 将直线的一般式方程 $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(10分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^{\sin x} - x^{\sin x}}{\sin^2 x \arcsin x}$.

五、(10分) 设 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0$. 证明 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2 \int_0^x t f^2(t) dt$.

六、(10分) 求由曲线 $y = \ln x$ 在 $(e, 1)$ 处的切线与 $y = \ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S ,

D 分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x, V_y .

七、(14分) 讨论函数 $y = x \arctan x$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并作出函数图像.

八、(8分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$.

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{6} (b-a)^3 f''(\xi)$.

微积分 I 期末试卷 2022.1.4

一. 计算下列各题 (6分×3 = 18分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. 2. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

3. 设 $f(x)$ 在 a 的一个邻域内二阶连续可导, $f'(a) = \sqrt{2}, f''(a) = 2$, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(x)} \right).$$

二、计算下列各题 (6分×3 = 18分)

1. 计算积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$; 2. 计算积分 $\int x^2 (\ln x)^2 dx$. 3. 计算积分 $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.

三、计算下列各题 (6分×3 = 18分)

1. 求与直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ 及 $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ 都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$. 3. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围图形面积 S .

四、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) > 0$, 求方程 $\int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt = 0$ 在 (a, b) 内根的个数.

五、(12分) 讨论函数 $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图。

六、(10分) 1. 证明 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$. 2. 计算 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二次可微, 并且 $f''(x) > 0$. 设 L_t 为曲线 $C: y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 的切线, $A(t)$ 为曲线 C 与直线 $L_t, x = a, x = b$ 所围图形的面积. 问 $A(t)$ 在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有三阶连续导数,

证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0) \right|$ 存在.

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1 = -\frac{2}{9}(1 + 3 \cos^2 x)^{\frac{3}{2}} + C$; 2. $I_2 = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$;

3. $I_3 = -\int \frac{x}{\cos x} d \frac{1}{x \sin x + \cos x} = -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{x \sin x + \cos x} d \frac{x}{\cos x}$
 $= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C$

二、 1. $e^{\frac{\pi}{2}}$; 2. $\frac{8}{3}$; 3. $8a$. 三、 1. 0; 2. $-\frac{29}{2}$.

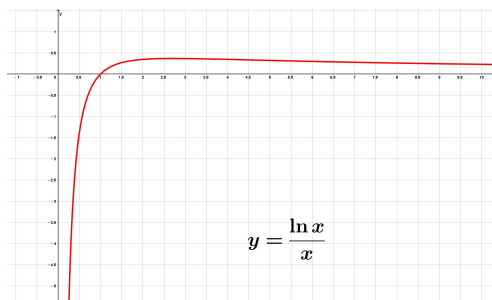
四、 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$

$g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

五、原式 $= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{i}{n}) \frac{1}{n} \right) = \exp \left(\int_0^1 \ln(1+x) dx \right) = \frac{4}{e}$.

六、 定义域 $(0, +\infty)$; 单调增区间 $(0, e)$,
 单调减区间 $(e, +\infty)$; 极大值 $f(e) = \frac{1}{e}$,
 下凹区间 $(0, e^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$; 拐
 点 $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$; $x = 0$ 是铅直渐近线; $y = 0$ 是水
 平渐近线.

七、 $\frac{x-2}{15} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z-4}{8}$.



八、 证明: 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$, $F'''(x) = f''(x)$,
 且 $F(a) = 0$.

$F(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$F(x) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_1)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (1)$$

其中 ξ 在 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 在 (1) 中分别令 $x = a$ 和 $x = b$, 得

$$0 = F\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4} - \frac{1}{6}f'''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad a < \xi_2 < \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{6}f'''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_3 < b \quad (3)$$

(3) - (2) 得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{48}(f'''(\xi_2) + f'''(\xi_3))$$

由 $f''(x)$ 的连续性可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_3]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 再由介值定理, $\exists \xi \in [\xi_2, \xi_3] \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\xi_2) + f'''(\xi_3))$, 所以 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$.

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $e^{-\frac{45}{2}}$; 2. e ; 3. $x = 0$ 是铅直渐近线, $y = x + 4$ 是斜渐近线.

二、 1. $I_1 = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C$. 2. $I_2 = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$; 3. $I_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

三、 1. $-\frac{3}{2}$. 2. $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$.

四、 $-\frac{1}{6}$

五、 设 $F(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 - 2\int_0^x tf^2(t)dt$, 则

$$F'(x) = 2\int_0^x f(t)dt \cdot f(x) - 2xf^2(x) = 2f(x) \cdot x \cdot f(\xi) - 2xf^2(x) = 2xf(x)(f(\xi) - f(x)),$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 因为 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq f(\xi) \geq f(0) = 0$, 故 $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 单调减少, 因此 $F(x) \leq F(0) = 0$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) \leq f(\xi) \leq f(0) = 0$, 故 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 单调增加, 因此 $F(x) \leq F(0) = 0$;

综上所述, $F(x) \leq 0$, 即 $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq 2\int_0^x tf^2(t)dt$.

六、 $S = \int_0^1 (e^y - ey)dy = \left(e^y - \frac{ey^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$.

$$V_x = \frac{1}{3}\pi e - \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \frac{1}{3}\pi e - \pi(x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1)) \Big|_1^e = 2\pi(1 - \frac{e}{3}).$$

$$V_y = \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^2 y^2) dy = \pi \left(\frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{3} e^2 y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (e^2 - 3).$$

七、定义域 $(-\infty, +\infty)$; 偶函数;

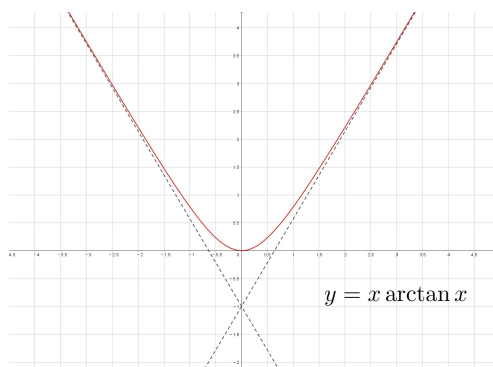
$$y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2},$$

单调增区间 $(0, +\infty)$, 单调减区间 $(-\infty, 0)$;

极小值 $y(0)=0$;

$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, 上凹区间 $(-\infty, +\infty)$; 无拐点;

渐近线 $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.



八、令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x), F'''(x) = f''(x)$, 且 $F(a) = 0, F''(a) = F''(b) = 0$.

函数 $F(x)$ 在 $x = a$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3 \\ &= f(a)(x-a) + \frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3 \end{aligned}$$

其中 $a < \xi_1 < x$. 令 $x = b$, 得 $\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3$, ($a < \xi_2 < b$), (1)

函数 $F(x)$ 在 $x = b$ 处的 2 阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F(b) + F'(b)(x-b) + \frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2 + \frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3 \\ &= \int_a^b f(x)dx + f(b)(x-b) + \frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3 \end{aligned}$$

其中 $x < \eta_1 < b$. 令 $x = a$, 得 $\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) + \frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3$, ($a < \eta_2 < b$), (2)

$$(1)+(2) \text{ 得 } \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a) + \frac{1}{6}\left(\frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}\right)(b-a)^3,$$

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上连续, 由最值定理, $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2, \eta_2]$ (或 $[\eta_2, \xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m , 而 $m \leq \frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2} \leq M$, 则由介值定理, $\exists \xi \in [\xi_2, \eta_2] \subset (a, b)$,

使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_2) + f''(\eta_2)}{2}$, 于是 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a) + \frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

微积分I (第一层次) 期末试卷参考答案 2022.1.4

一、 1. $e^{-1/2}$. 2. $(-1)^n \frac{n!}{6} \left(\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{(n+1)}} \right)$. 3. $\frac{1}{2}$.

二、 1. $\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$; 2. $\frac{1}{3}x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$. 3. $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.

三、 1. $5x + 2y + z + 1 = 0$. 2. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 3. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

四、 方程 $\int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt = 0$ 在 (a, b) 内有并且只有一个根.

五、 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

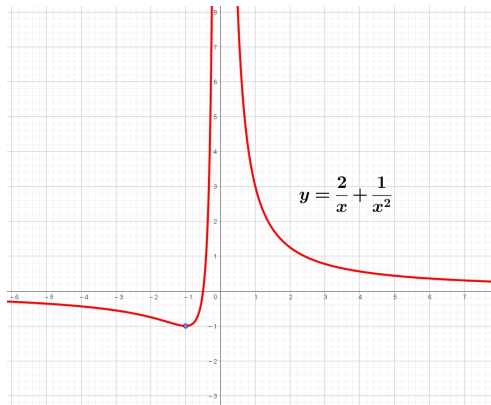
单调增区间 $(-1, 0)$, 单调减区间 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$;

极小值 $f(-1) = -1$, 没有极大值;

下凹区间 $(-\infty, -\frac{3}{2})$, 上凹区间 $(-\frac{3}{2}, 0), (0, +\infty)$;

拐点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{9})$;

$x = 0$ 是铅直渐近线, $y = 0$ 是水平渐近线.



六、 2. $\frac{\pi^2}{4}$.

七、 $f''(x) > 0$, 曲线 C 是凹的,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_a^b (f(x) - f(t) - f'(t)(x-t))dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(t) - \frac{b^2-a^2}{2}f'(t) + (b-a)tf'(t). \end{aligned}$$

$$A'(t) = f''(t)(b-a)(t - \frac{a+b}{2}). \text{ 令 } A'(t) = 0, \text{ 得 } t = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{当 } a < x < \frac{a+b}{2} \text{ 时, } A'(t) < 0, \text{ 当 } \frac{a+b}{2} < x < b \text{ 时, } A'(t) > 0,$$

$$\text{所以 } A(t) \text{ 在 } t = \frac{a+b}{2} \text{ 取到最小值.}$$

八、 证明:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3.$$

$$|k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)| = |k(\frac{2f'(0)}{k} + \frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3} + \frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3}) - 2f'(0)| \leq \frac{M}{3k^2},$$

$$\text{其中 } M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(3)}(x)|.$$

$$\text{设 } x_n = \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|, \text{ 显然 } x_n \text{ 是单调增加数列, 又}$$

$$x_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{3k^2} < \frac{M}{3} \left(1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \right) < M.$$

x_n 是单调有界数列, 因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |k(f(\frac{1}{k}) - f(-\frac{1}{k})) - 2f'(0)|$ 存在.