图论与代数结构

匹配(最大/完全/最佳)

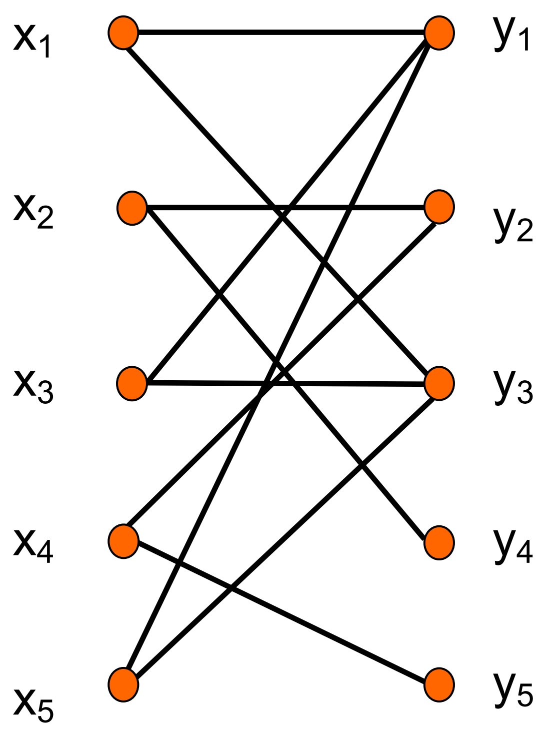
崔 勇
清华大学计算机系
网络技术研究所

主要内容：匹配

- 二分图的最大匹配
  - 掌握概念、定理和匈牙利算法
- 完全匹配（特殊情况）
  - 掌握概念和定理及其应用
- 最佳匹配及其算法（最优）
  - 掌握K-M算法的基本思路

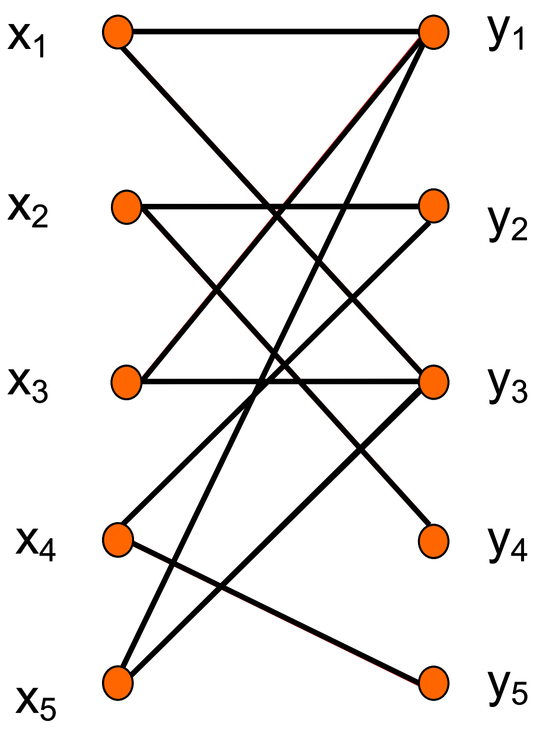
二分图的最大匹配

- 分配n个人来做m项工作
- 图论建模，G=(V,E)
  - 边(x_i,y_j)表示x_i可以从事y_j
- 约束条件
  - 每个人最多从事其中一项
  - 每项工作只能由其中一个人来承担
- 问怎样才能让更多的人安排上工作？
  - 该问题的图论建模？



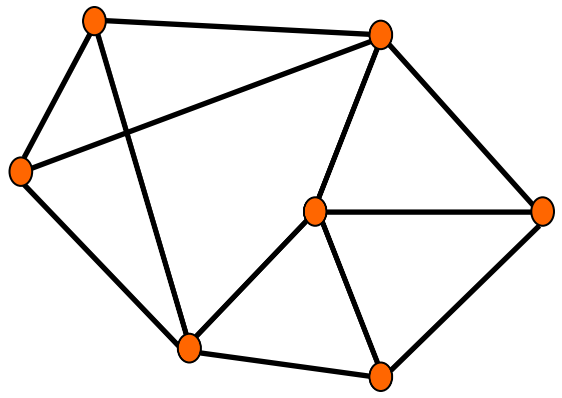
二分图的最大匹配

- 该图是一个二分图（二部图）
  - 按照要求，如果x_i从事了y_j，就不允许再从事y_k，同时y_j也不再允许其它人承担
- 如何描述呢？
  - 因此它相当于用一种颜色比如红色对G的边进行着色，保证每个结点最多只与一条红色边相关联
  - 这种红色边的集合记为M，它就称为匹配
- 原问题就是计算G中包含边数最多的一个匹配M



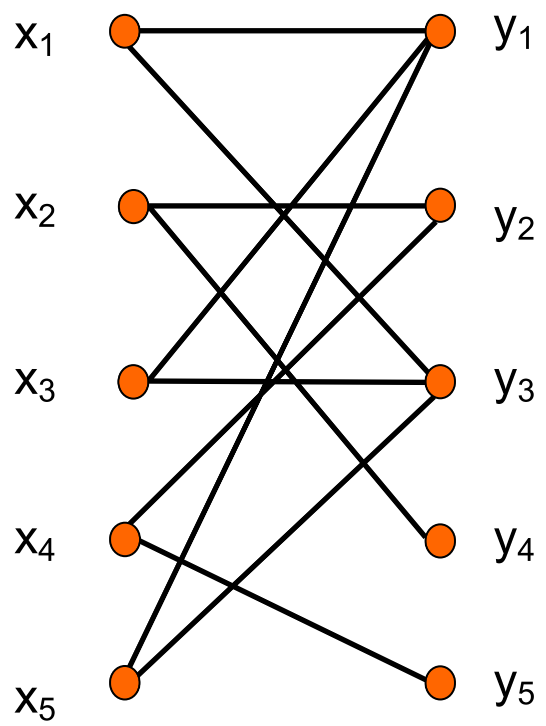
二分图的最大匹配

- 例5.1.2
  - 二战期间，盟军派飞行员到英国参加对德的空袭，每架飞机需要领航员和飞行员各1人
  - 有些人只会领航，一些人只会驾驶，也有两者均会的
  - 求最多的编队方案（要求二人语言相通）
  - 图论建模
    - 以点表示人
    - 边表示二人语言相通并且一人可领航一人可驾驶
  - 那么最多的编队方案就是计算G的一个最大匹配



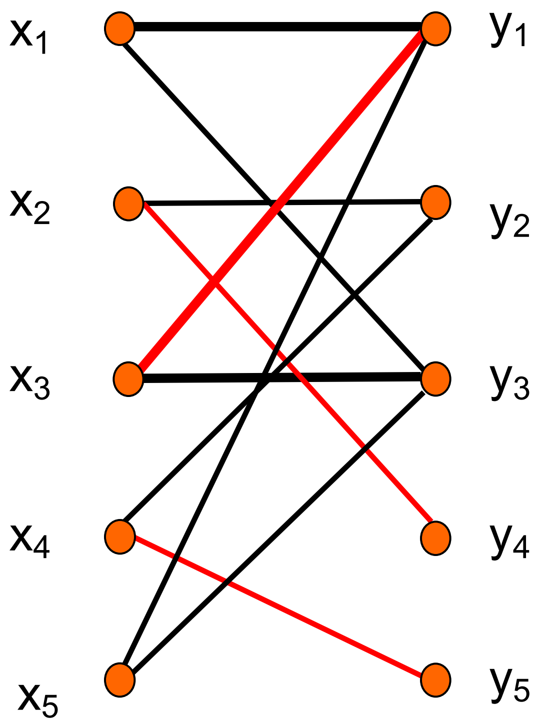
二分图的最大匹配

- 定义5.1.1：匹配
  - 令M是图G的边集，若M中任意两条边都没有共同顶点，则称M为G的一个匹配
- 关键术语定义
  - 图中与M边相关联的结点称为饱和点，否则称为非饱和点
  - 饱和点：$x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_3,y_4,y_5$
  - 非饱和点：x_5,y_2
- 最多的任务分配是什么？



二分图的最大匹配

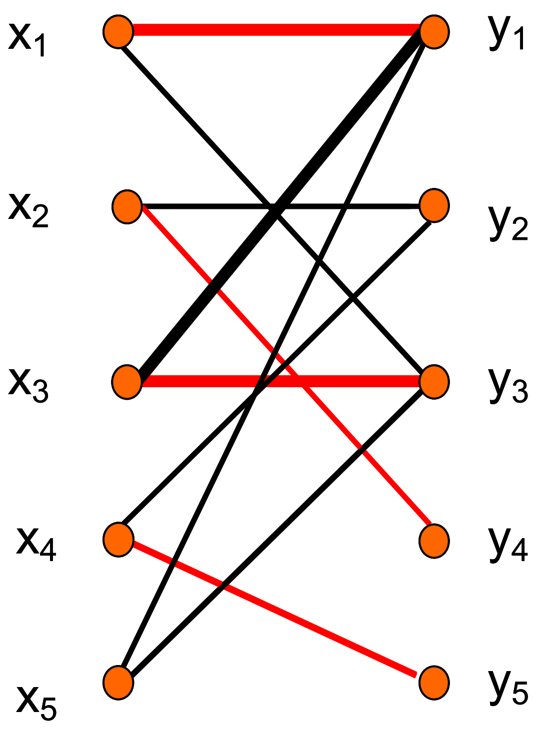
- 定义5.1.2：设M是G=(V,E)中的一个匹配，如果对G的任意匹配M'，都有|M|≥|M'|，则称M为一个最大匹配



- 定义5.1.3：给定了G的一个匹配M，G中属于M与不属于M的边交替出现的道路称为交互道路（ x_1-y_1-x_3-y_3 ）

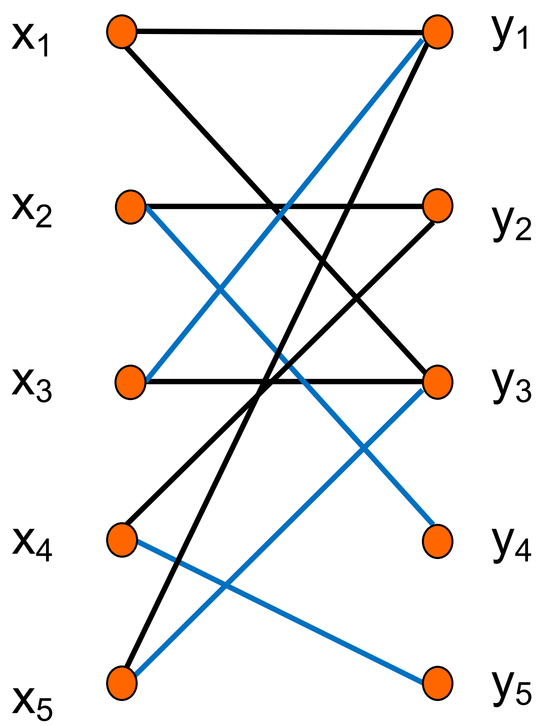
二分图的最大匹配

- 定义5.1.4：可增广道路
  - 设P是G中关于匹配M的一条交互道路
  - 如果P的两个端点是关于M的非饱和点，那么它就称为可增广道路
  - 例如：x_1-y_1-x_3-y_3（黑-红-黑）
- 可增广道路的基本特点
  - 可增广道路P一定包含奇数条边，且其中不属于匹配M的边比M中的边多一条
  - $M'=P \oplus M$仍然是一个匹配
  - M'使P的两个端点变成了饱和点
  - $|M'|=|M|+1$，即M'是比M更大的匹配



二分图的最大匹配

- 例
  - 蓝色的边构成图的匹配M
  - 关于该匹配的饱和点是 $\{x_3, y_1, x_2, y_4, x_4, y_5, x_5, y_3\}$
  - 非饱和点是$\{x_1, y_2\}$
  - 道路 (x1, y1, x3, y3, x5)是一条交互道路，但不是可增广道路



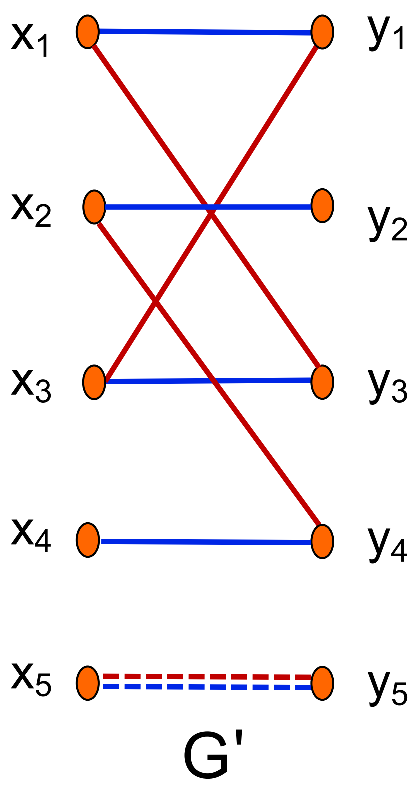
二分图的最大匹配

- 定理5.1.1(Berge 1957)（重点）
  - M是G的最大匹配当且仅当G中不存在关于M的可增广道路
- 证明
  - 必要性(反证法)
    - 若存在M的可增广道路P，则M⊕P=M'是G的一个新匹配，且|M'|>|M|，与M是最大匹配矛盾
  - 充分性(反证法)：要证M不是最大匹配，则存在M的可增广道路
    - 如果匹配M不是G的最大匹配，则存在一个最大匹配M'，做G'=M'⊕M，我们逐一分析G'中三种可能的连通支

二分图的最大匹配

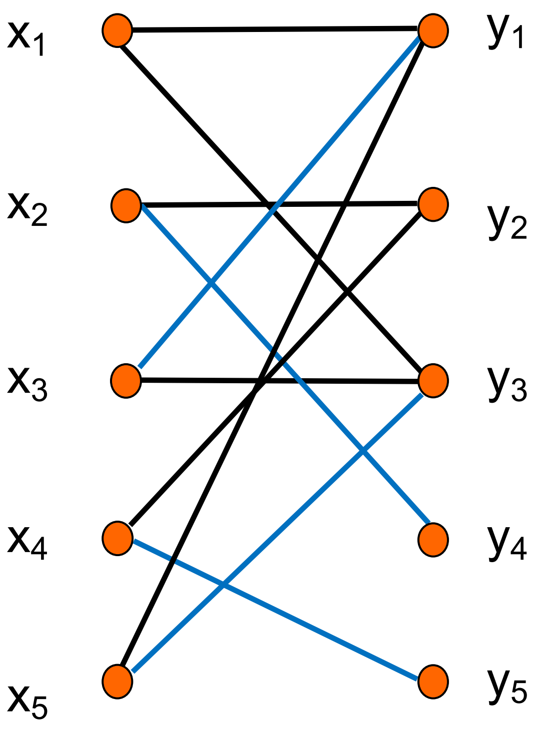
- 要证：M不是最大匹配则存在M的可增广道路；已有G'= M'⊕M，且M'是最大匹配， 即|M'|>|M|
- 1. 孤立结点v_i (M'和M均为不连通的边集)
  - 关联v_i的边$(v_i,v_j)\in$ M'∩M，对M'和M的贡献相同
- 2. 交互回路(例如x_1-y_1-x_3-y_3)
  - 该回路必为偶回路，其中属于M'和M的边数相同
- 3. 交互道路
  - 若不存在增广道路，则|M'|=|M|，与假设矛盾
  - 若只存在M关于M'的增广路/红蓝红，与M'是最大匹配矛盾
  - 由于|M'|>|M|，故必定存在M'关于M的可增广交互道路，例如x_4-y_4-x_2-y_2 ，即G中存在关于M的可增广道路

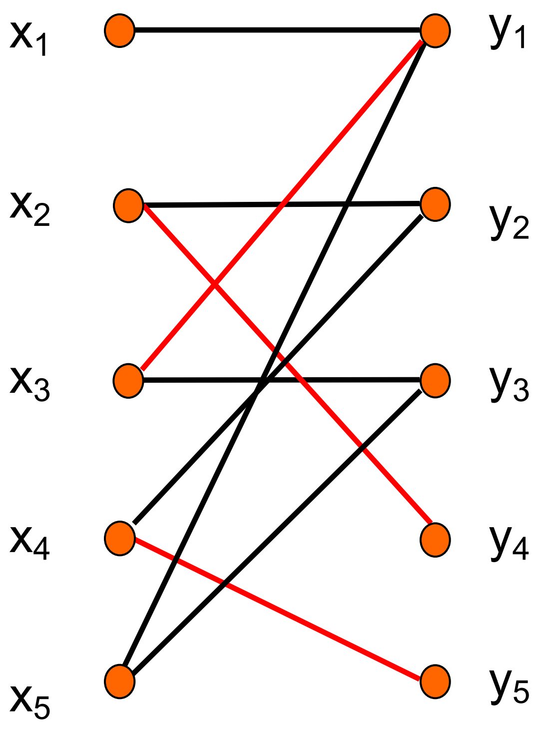
最大匹配M'



二分图的最大匹配

- 例：
  - 蓝色边构成的匹配
    - 不存在可增广道路
    - 是最大匹配
  - 红色边构成的匹配
    - 不是最大匹配
    - 存在可增广道路



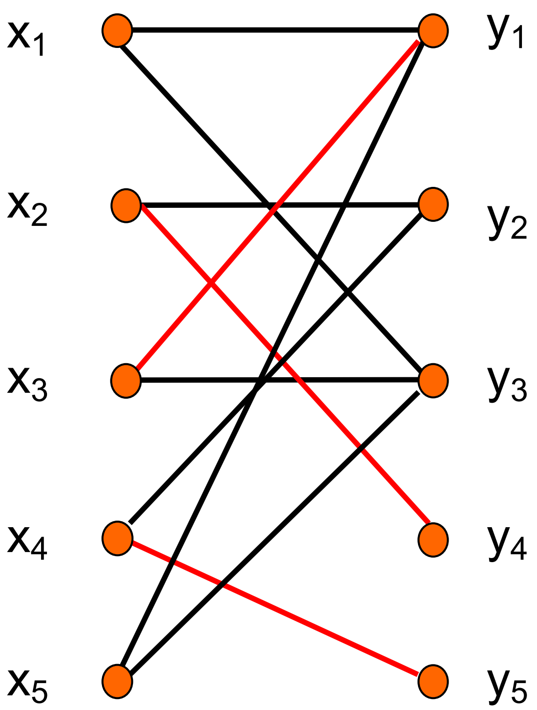


二分图的最大匹配

- 计算二分图的最大匹配算法匈牙利算法
  - 输入为二分图G=(X,Y,E)；
  - 结点标记
    - 0：表示尚未搜索
    - 1：表示饱和点
    - 2：表示无法扩大匹配的点(仅对X中的结点)
  - 1. 任给初始匹配M，给饱和点“1”标记
  - 2. 判断X各结点是否都已有非零标记
    - 2.1 是，M是最大匹配，结束
    - 2.2 否，找一个“0”标记点$x_0 \in X$，开始本轮搜索

令$U \leftarrow \{x_0\}$，为本轮搜索的X结点集

令$V \leftarrow \Phi$，为本轮已检查过的Y结点集



x_1y_3或

$x_1y_1x_3y_3$

二分图的最大匹配

- 3、判断集合U的邻接点集Γ(U)=V(访问过的Y)
  - 3.1 是，x_0无扩大匹配，标x_0 "2"，转2
  - 3.2 否，在Γ(U)-V中找一点y_i，判断y_i的饱和性
    - (1)非饱和点（如y_3）：

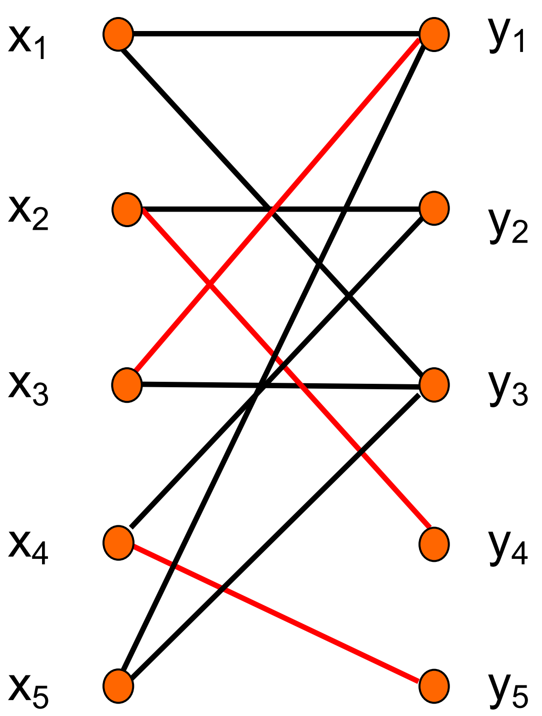
      存在从x_0到y_j的可增广路P

      令$M \leftarrow M \oplus P$，给x_0，y_i标记1转2
    - (2)饱和点（如y_1）：

      则存在x_i使得边$(x_i, y_i) \in M$

      令 $U \leftarrow U + \{x_i\}$，$V \leftarrow V + \{y_i\}$，转3

      （如$U = \{x_1, x_3\}$）

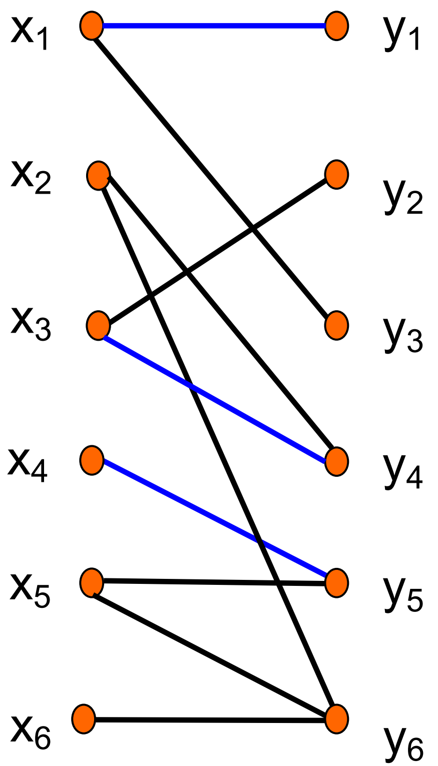


向右走非匹配边

向左则走匹配边

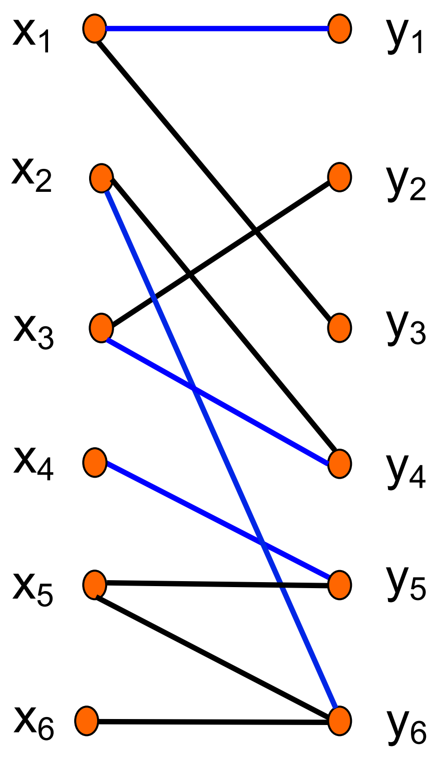
二分图的最大匹配

- 例5.1.3 设初始匹配：$M=\{ (x_1,y_1), (x_3,y_4), (x_4,y_5) \}$
- 用匈牙利算法求最大匹配
  - 进行节点标记
  - $U=\{x_2\}$，$V=\Phi$ (为本次已访问过的Y结点集)
    $\Gamma(U)=\{y_4,y_6\}$，$y_6 \in \Gamma(U)-V$，且无标记
  - 得到增广路$P=(x_2,y_6)$
  - 更改节点标记
  - $M=\{ (x_1,y_1), (x_3,y_4), (x_4,y_5), (x_2,y_6) \}$



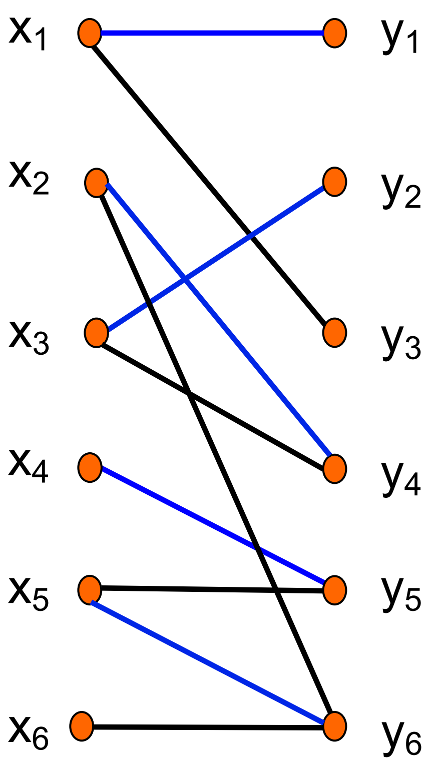
二分图的最大匹配

- U={x_5},访问过的y节点集V= Φ
  Γ(U)={y_5,y_6}，y_5∈Γ(U)-V，不可增广
- U={x_5,x_4}，V={y_5}
  Γ(U)={y_5,y_6}，y_6∈Γ(U)-V
- U={x_5,x_4,x_2}，V={y_5,y_6}
  Γ(U)={y_5,y_6,y_4}，y_4∈Γ(U)-V
- U={x_5,x_4,x_2,x_3}，V={y_5,y_6,y_4}
  Γ(U)={y_5,y_6,y_4,y_2}，y_2∈Γ(U)-V 且无标记
- ∴增广路P=(x_5,y_6,x_2,y_4,x_3,y_2)
  M=M⊕P={(x_1,y_1)，(x_4,y_5)，(x_5,y_6)，(x_2,y_4)，(x_2,y_3)}



二分图的最大匹配

- (3)$U=\{x_6\}$，$V=\Phi$
  $\Gamma(U)=\{y_6\}$，$y_6\in\Gamma(U)-V$
- $U=\{x_6,x_5\}$，$V=\{y_6\}$
  $\Gamma(U)=\{y_6,y_5\}$，$y_5\in\Gamma(U)-V$
- $U=\{x_6,x_5,x_4\}$，$V=\{y_6,y_5\}$
  $\Gamma(U)=\{y_6,y_5\}$，$\Gamma(U)=V$
- 给x_6标记2。结束。
- 因此其最大匹配是
  $M=\{(x_1,y_1),(x_4,y_5),(x_5,y_6),(x_2,y_4),(x_3,y_2)\}$



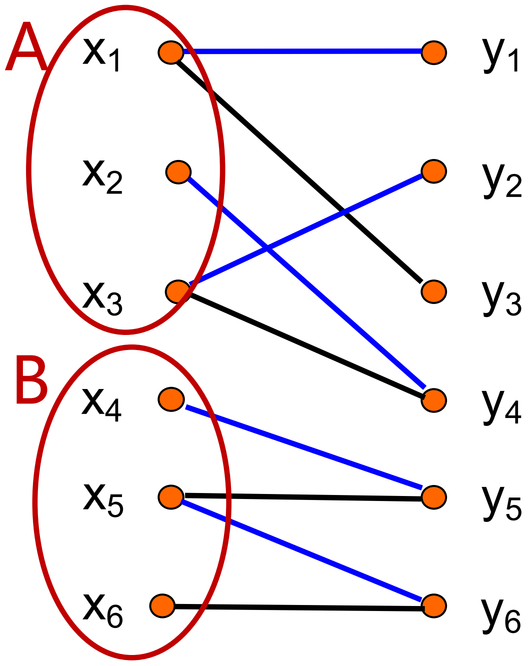
二分图的最大匹配

- 定理5.1.2
  - 最大匹配的匈牙利算法，计算复杂度为O(mn)，其中n是二分图G中X的结点数
- 证明
  - 初始匹配可以是空匹配
  - 算法最多找n条增广路
  - 每找一条增广路时，最多判断m条边
  - 因此其计算复杂性是O(mn)

- 二分图的最大匹配
- 完全匹配
- 最佳匹配及其算法

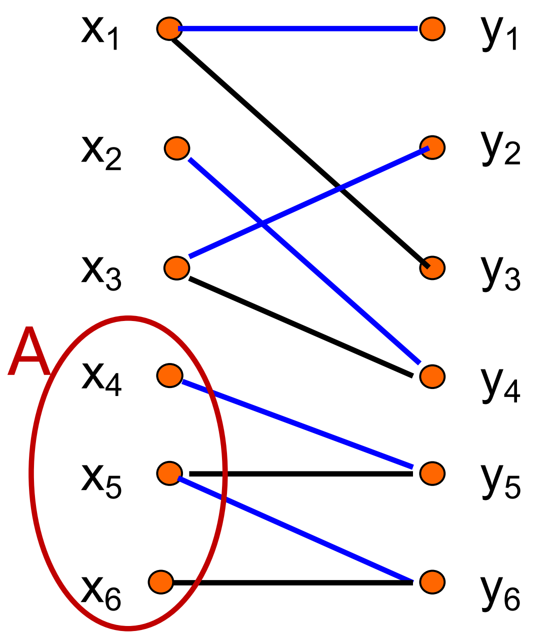
完全匹配

- 完全匹配
  - 二分图G=(X,Y,E)的最大匹配M包含的边数不会超过|X|，若|M|=|X|，则称M是完全匹配
- 完美匹配
  - 如果|M|=|X|=|Y|，则称M是完美匹配
- 呼唤定理：完全匹配的存在性？
- 定理5.2.1(Hall定理)
  - 在二分图G=(X,Y,E)中，X到Y存在完全匹配的充要条件为：对于X的任意子集A，恒有|Γ(A)|≥|A|



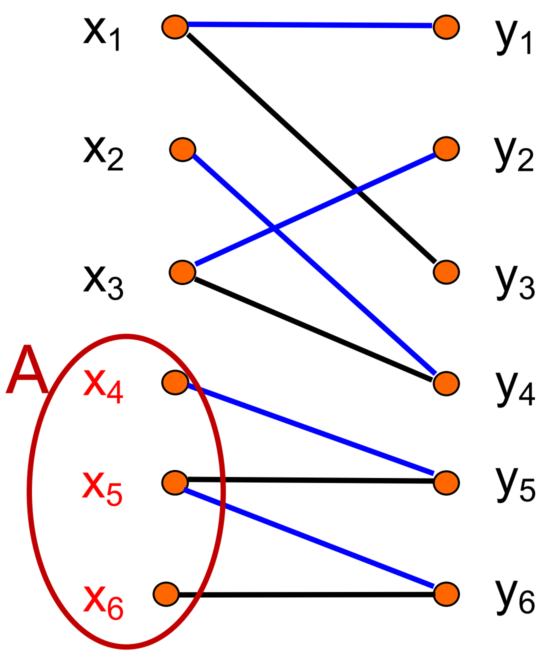
完全匹配

- 证明(存在完全匹配的充要条件：任意子集A有$|\Gamma(A)| \geq |A|$)
  - 必要性(反证法)
    - 若存在子集$A \subseteq X$，使$|A| > |\Gamma(A)|$
    - 则A中的结点无法全部匹配
    - 因此X到Y不可能有完全匹配
  - 充分性（重点）
    - 要证：不存在完全匹配，则存在A满足$|\Gamma(A)|<|A|$)
    - 假定G的一个最大匹配M不是完全匹配
    - 一定存在结点$x_0 \in X$是关于M的非饱和点(如x_6)
    - 如果$\Gamma(x_0)=\Phi$，则令$A=\{x_0\}$，于是$|\Gamma(A)|< |A|$，不满足条件



完全匹配

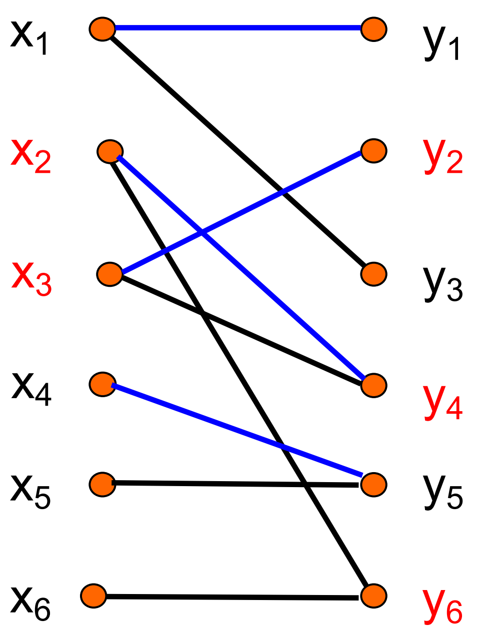
- 证(续) (要证存在子集$|A| > |\Gamma(A)|$)
  - 若$\Gamma(x_0) \neq \Phi$，对某$y_i \in \Gamma(x_0)$
  - 若y_i关于M为非饱和点，则存在增广路(x_0，y_i)，与M是最大匹配矛盾
  - 因此$y_i \in \Gamma(x_0)$ 都是关于M的饱和点，但是x_0y_i为非匹配边
  - 这样可以寻找以x_0为端点的相对于M的一切交互道路
  - 记交互道路中结点y_i的集合为Y_1，结点x_i的集合为X_1（新增的x与y一一对应）
  - 根据匹配的性质，Y_1结点与X_1-x_0的结点之间存在一一对应，于是$|X_1|>|Y_1|$，即$|X_1|>|\Gamma(X_1)|$
  - 对非完全匹配，构造子集$|A|$，满足$|A| > |\Gamma(A)|$。
  - 证毕充分性



X到Y存在完全匹配，$\Leftrightarrow$X的任意子集A，恒有$|\Gamma(A)| \geq |A|$

完全匹配

- 回顾：Hall定理
  - 在二分图G=(X,Y,E)中，X到Y存在完全匹配的充要条件为：对于X的任意子集A，恒有$|\Gamma(A)| \ge |A|$
- 推论5.2.1
  - 若二分图G=(X,Y,E)的每个结点$x_i \in X$, 都有$d(x_i) \ge k$, 每个结点$y_j \in Y$， 都有$d(y_j) \le k$，则X到Y存在完全匹配
- 证明
  - 对任意子集$A \subseteq X$
  - 设A共与m条边相关联，由$d(x_i) \ge k$且边不重复，于是$m \ge k\,|A|$
  - 这m条边又与Y中的$|\Gamma(A)|$个结点相关联，由$d(y_j) \le k$，又有$m \le k\,|\Gamma(A)|$
  - 因此$|\Gamma(A)| \ge |A|$，由定理5.2.1即得



完全匹配

- 例5.2.1
  - 在一个舞会上男女各占一半，假定每位男士都认识k位女士，每位女士都认识k位男士，那么一定可以安排得当，使每位都有认识的人作为舞伴
- 证明（图论建模）
  - 图论建模：用结点x_i表示每位男士，结点y_j表示每位女士，互相认识者用边连之，则存在完美匹配
  - 于是得到二分图G=(X,Y,E)，图中每个x_i 结点有$d(x_i)=k$，每个y_j 结点有$d(y_j)=k$
  - 满足$d(x_i)\ge k$，$d(y_j)\le k$
  - 由推论5.2.1，X到Y有完全匹配M(即完美匹配)
  - M就是一种安排方案

最大匹配是多少？
呼唤个定理？

完全匹配

- 定理5.2.2（最大匹配数）
  - 在二分图G=(X,Y,E)中，X到Y的最大匹配边数是|X|-δ(G)，其中δ(G)为不能匹配的X节点数

$$\delta(G)=\max_{A\subseteq X}\delta(A),\delta(A)=|A|-|\Gamma(A)|,\delta(A)\geq 0$$

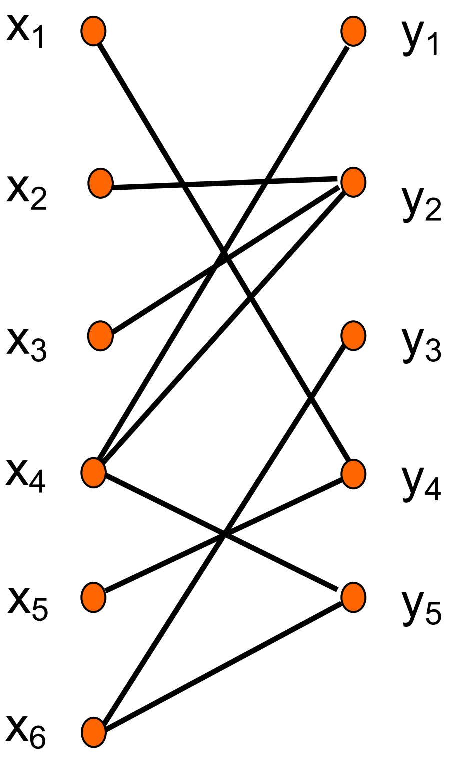
- 例5.2.2
  - 10个人有10件不同的乐器，其中3人只会拉小提琴，其余7人每件乐器都会。若每人只用一件乐器，问最多有几人能同时登台演出？
  - 图论建模
  - 由定理5.2.2，最多只有8人能同时登台演出

完全匹配

- 二分图邻接矩阵
  - 简化为|X|×|Y|矩阵
- 最大匹配是多少？
  - A中不同行且不同列的非零元的最大数目
  - 如果矩阵A是p×q矩阵，则：最大匹配数≤min(p,q)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二分图
邻接矩阵



最大匹配是多少？
考虑x_2和x_3、x_1和x_5

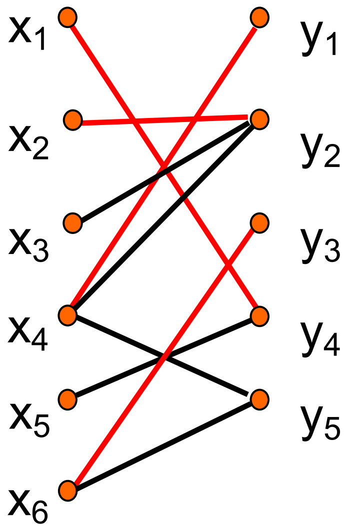
完全匹配

- 矩阵覆盖
  - 适当地选取A的某些行和列，使这些行和列能盖住A的全部非零元，称为A的覆盖
  - 覆盖数为所选取的行和列的个数
  - 矩阵A中如果盖住第4、6行，第2、4列，就可以覆盖其全部非零元，覆盖数为4
- 最小覆盖
  - 如果选取最少的行与列就能覆盖A的全部非零元，则称这样的覆盖为最小覆盖
  - 在矩阵A的各种覆盖中，一定存在最小覆盖，其覆盖数为s，显然s<=min(p,q)
  - 二分图：最大匹配数r P.K. 其邻接矩阵的最小覆盖数s

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

完全匹配

- 二分图的最大匹配数r，与其邻接矩阵的最小覆盖数s相等
- 证明（重点）：
  - 先证明：最小覆盖数s ≥最大匹配数r
  - 设M是二分图G的一个最大匹配
  - M在邻接矩阵中是r个既不同行也不同列的非零元
  - 一个覆盖必然把这r个非零元都盖住
  - 覆盖s中的任一行或列，都最多只能覆盖这r个非零元的其中一个，因此覆盖s的行列数之和至少为r，即s≥r



最大匹配M

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

完全匹配

- 证明：
  - 再证明：最大匹配数$r \geq$最小覆盖数s
  - 设G的一个最小覆盖由c行d列组成
  - 最小覆盖数$s=c+d$
  - 对邻接矩阵进行换行、换列操作，将这c行d列交换至前c行和后d列
  - 换行换列操作不改变矩阵的最小覆盖数
  - 换行换列操作本质上是结点重新编号，因此不影响二分图的最大匹配数

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Y-Y_d & Y_d \end{array} \\ \begin{array}{c} X_c \\ X-X_c \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

完全匹配

- 证明：
  - 为证明最大匹配数$r \geq$最小覆盖数s，需找一个匹配M，使得$|M| = s = c+d$
  - A_{11}，A_{12}，A_{22}都被覆盖了，A_{21}没被覆盖，必有$A_{21}=0$
  - 后续证明思路：
    X_c到$Y-Y_d$存在完全匹配（大小即为c），Y_d到$X-X_c$存在完全匹配（大小即为d），从而X到Y存在大小为c+d的匹配
  - 考虑Hall定理（存在完全匹配的充要条件$|\Gamma(A)| \geq |A|$）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ X_c \\ X-X_c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Y-Y_d & Y_d \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

完全匹配

- 证明：
  - 任取X_c的子集V，设V在$Y-Y_d$中的邻接点集为Γ(V)，证|V|≤|Γ(V)|
  - V在矩阵中对应着|V|行，Γ(V)在矩阵中对应着|Γ(V)|列。这|V|行中的非零元均在这|Γ(V)|列或Y_d中
  - 假设|Γ(V)|<|V|，从覆盖这|V|行改为覆盖|Γ(V)|列即可减少覆盖数，与当前是最小覆盖矛盾

$$\begin{array}{c|ccc|} & \Gamma(V) & Y-Y_d-\Gamma(V) & Y_d \\ \hline V & B_{11} & 0 & B_{13} \\ X_c-V & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ X-X_c & 0 & 0 & B_{33} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \Gamma(V) & Y-Y_d-\Gamma(V) & Y_d \\ \hline V & B_{11} & 0 & B_{13} \\ X_c-V & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ X-X_c & 0 & 0 & B_{33} \end{array}$$

即任意V有|V|≤|Γ(V)|，对X_c，有| X_c |≤|Γ(X_c)|

完全匹配

- 证明：
  - 综上，由Hall定理知，存在一个X_c的完全匹配，即X_c与$Y-Y_d$之间的匹配M_1，使得$|M_1|=|X_c|=c$
  - 同理，Y_d与$X-X_c$也满足Hall定理的条件，故存在一个Y_d与$X-X_c$之间的匹配M_2，使得$|M_2|=|Y_d|=d$
  - 令$M=M_1\cup M_2$，则M是X与Y之间的匹配，且$|M|=c+d=s$
  - 即X与Y的最大匹配数$r \ge |M| = $ 最小覆盖数s
  - 结合先前证的$s\ge r$，得$r=s$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & Y-Y_d & Y_d \\
\hline
X_c & A_{11} & A_{12} \\
X-X_c & A_{21} & A_{22}
\end{array}
$$

$$
A=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

第五章 匹配与网络流

- 二分图的最大匹配
- 完全匹配
- 最佳匹配及其算法

最佳匹配及其算法

- 从旅行商问题想到了什么？
  - 边权为1的H回路（存在性、唯一性）
  - 给定正权完全图，求最短H回路

- 最佳匹配
  - 如果边权是非负实数，而且存在多个完全匹配，那么其中权和最大或最小的匹配就叫最佳匹配（如最大权匹配）
- 例5.3.1
  - 5个码农要完成5个模块
  - i从事工作j的利润

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 4 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

最佳匹配及其算法

- 若C_{ij}表示i从事工作j的利润
  - 如果每个人只从事一项工作
  - 那么最大利润是 $\max\sum C_{ij}$
  - C_{ij}不在相同的行与列
- 若C_{ij}表示i从事工作j成本
  - 那么最小成本是 $\min\sum C_{ij}$
  - C_{ij}不在相同的行与列
- 此最佳匹配为二分图的最大权或是最小权匹配

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 4 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

最大匹配数r
=
最小覆盖数s

最佳匹配及其算法

- 最大权匹配 (已知利润矩阵C)：KM算法 (Kuh_Munkras)
  - 1.在C的每行中选一最大值作为本行的界值$l(x_i)$，每列的界值$l(y_j)=0$.
    构造矩阵$B=(b_{ij})_{n\times n}$，其中$b_{ij}= l(x_i)+ l(y_j)- c_{ij}$
  - 2.在B中对0元素进行最小覆盖，覆盖数为r
    - 2.1 若r=n，转4
    - 2.2 更新B矩阵

      在未覆盖的元素中选最小非零元δ

      若x_i行、y_j列均已覆盖，则$b_{ij}\leftarrow b_{ij}+\delta$

      若x_i行、y_j列均未覆盖，则$b_{ij}\leftarrow b_{ij}-\delta$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix}
6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}
\end{array}
$$

界值/顶标

最佳匹配及其算法

- 最大匹配算法(续)
  - 3. 修改界值

    若x_i行没覆盖，则$l(x_i) \leftarrow l(x_i)-\delta$

    若y_j列已覆盖，则$l(y_j) \leftarrow l(y_j)+\delta$

    删除覆盖标记，转2
  - 4. $\sum(l(x_i)+l(y_j))=29$ 即为最大权，结束

最佳匹配及其算法

- 例5.3.2
  - 已知利润矩阵，求二分图的最佳匹配(最大利润)
- 解
  - 计算界值(表的两旁标出)
  - 计算矩阵B
  - 求最小覆盖
    - 如1、5两列
  - 在未覆盖的元素中选最小非零元，即δ=2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 4 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

最佳匹配及其算法

- 解(续)
  - 覆盖数r=2<n, δ=2
  - 产生新B:未覆盖的元素均减δ
  - 修改界值
    - 若x_i行没覆盖，则$l(x_i) \leftarrow l(x_i)-\delta$
    - 若y_j列已覆盖，则$l(y_j) \leftarrow l(y_j)+\delta$
  - 重新求最小覆盖
    - 如第1、5两列和第3行
  - 在未覆盖的元素中选最小非零元，即δ=1

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}
\end{array}$$

最佳匹配及其算法

- 解(续)
  - 覆盖数r<n，δ=1
  - B中没覆盖的元素均减1
  - 双重覆盖元加1
  - 修改界值
    - 没覆盖的x_i行: $l(x_i) \leftarrow l(x_i)-\delta$
    - 已覆盖的y_j列: $l(y_j) \leftarrow l(y_j)+\delta$
  - 重新求最小覆盖
    - 如第1，2，3，5列
  - 在未覆盖的元素中选最小非零元，即δ=1

$$\begin{array}{c|ccccc}
7 & 6 & 3 & 1 & 3 & 0 \\
6 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\
4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
6 & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
5 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

最佳匹配及其算法

- 覆盖数r<n, δ=1
- B中没覆盖的元素均减1
- 修改界值
  - 没覆盖的x_i行: $l(x_i) \leftarrow l(x_i)-\delta$
  - 已覆盖的y_j列: $l(y_j) \leftarrow l(y_j)+\delta$
- 重新求最小覆盖
  - 如第3、4、5行和3、5列
- 最小覆盖数r=n
- 循环结束

$$\begin{array}{c|ccccc|}
6 & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
5 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}$$

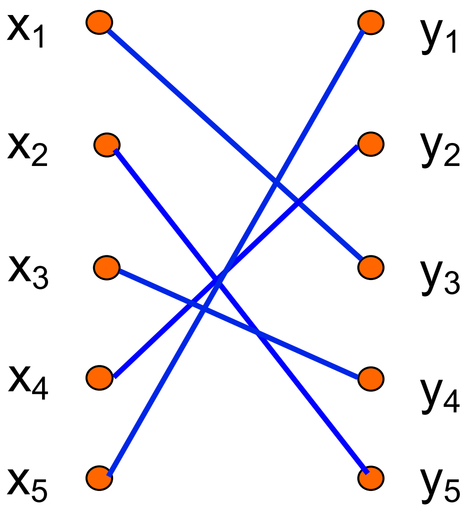
肉眼求解
最小覆盖

$$\begin{array}{c|ccccc|}
5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 6 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 4 & 1 & 1 & 0 & 4
\end{array}$$

最佳匹配及其算法

$$\begin{array}{c}\begin{array}{c}5\\4\\4\\2\\4\end{array}\begin{bmatrix}6 & 2 & 0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 2 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}4 & 1 & 1 & 0 & 4\end{array}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 6 & 4 & 9\\6 & 4 & 5 & 3 & 8\\7 & 5 & 3 & 4 & 2\\6 & 3 & 2 & 2 & 5\\8 & 4 & 5 & 4 & 7\end{bmatrix}$$



- 当前最小覆盖数r=n，停止扩充覆盖的循环
- 得到最大权$\sum(l(x_i)+l(y_j))=29$
- 一个最大权匹配方案是{C_{13}，C_{25}，C_{34}，C_{42}，C_{51}}

- 定理5.3.1:上述K-M算法(最大权匹配算法)的结果是矩阵C的最大权匹配
  - 证明略

总结

- 二分图的最大匹配
  - 从细节定义开始：匹配，饱和点、非饱和点，神奇道路（交互/增广）
  - 呼唤定理：可增广道路的存在性与最大匹配的关系
  - 基于定理给出匈牙利算法：通过找可增广道路求解最大匹配
- 完全匹配
  - Hall定理：完全匹配的充要条件是任意子集A恒有$|\Gamma(A)|\geq|A|$
  - 最大匹配数是$|X|-\delta(G)$ ☹
  - 最大匹配数r=最小覆盖数s
- 最佳匹配及其算法
  - 从旅行商到最佳匹配（玩命化简）
  - 基于最小覆盖的最大权匹配算法（K-M算法）

作业

- P119习题五
  - 最大匹配：第1题
  - 完美匹配：第5题（题目改为“完美匹配”）
  - 最佳匹配：第13题