微积分 I 期末试卷 2021.1.4

一、计算下列各题(6分×3=18分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{5}{n^2}+\cos\dfrac{5}{n}\right)^{3n^2}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}}$.

3. 求函数 $y=(x+3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

二、计算下列各题 (6分× 3=18分)

1. $I_1=\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

2. $I_2=\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

3. $I_3=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^7\cos^{10}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6分× 2=12分)

1. 已知三个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2. 将直线的一般式方程 $\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 化为点向式方程.

四、(10 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sin x)^{\sin x}-x^{\sin x}}{\sin^2 x\arcsin x}$.

五、(10分) 设 $f(x)$ 在 R 上可导且 $f(0)=0, f'(x)\geq 0$. 证明 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\leq 2\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、(10分) 求由曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线与 $y=\ln x$ 以及 x 轴所围成的平面图形 D 的面积 S, D 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_x, V_y.

七、(14分) 讨论函数 $y=x\arctan x$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数图像.

八、(8 分) 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$.

求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi)$.

微积分 I 期末试卷 2022.1.4

一. 计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

3. 设$f(x)$ 在 a 的一个邻域内二阶连续可导，$f'(a)=\sqrt{2}, f''(a)=2$, 求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(x)}\right).$$

二、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 计算积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$;

2. 计算积分 $\displaystyle\int x^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求与直线 L_1: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 及 L_2: $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 都平行且与它们等距的平面方程.

2. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

3. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围图形面积 S.

四、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，求方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 (a,b) 内根的个数.

五、(12分) 讨论函数 $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图。

六、(10分) 1. 证明$\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$. 2. 计算$\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

七、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二次可微, 并且 $f''(x)>0$. 设 L_t 为曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 的切线, $A(t)$ 为曲线 C 与直线 $L_t, x=a, x=b$ 所围图形的面积. 问 $A(t)$ 在哪些点取到最小值? 说明你的理由.

八、(8分) 设函数$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上有三阶连续导数.

证明: 极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)\right|$ 存在.

微积分I期末试卷 2023.2.21

一. 计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{5}{x^2}}$.

2. 设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\displaystyle\int_{-\infty}^{c}te^{2t}\mathrm{d}t$, 求 c 的值.

二、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x$;　　2. 计算 $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$.　　3. 计算 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

三、计算下列各题 (6 分 $\times 3 = 18$ 分)

1. 设直线 L 的方程为 $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$, 平面 Π 的方程为 $3x+y+2z+20=0$, 求直线 L 与平面 Π 的夹角 θ 与交点 M.

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\ln(n+i)-\ln n\right)$.

3. 计算由曲线 $y=\sin x, y=\cos x, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围的最小的平面图形的面积.

四、(10分) (1) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, $g(x)$ 是偶函数, $f(x)+f(-x)\equiv A$(A 为常数), 证明：

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 利用 (1) 的结论求 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\arctan(e^x)\mathrm{d}x$.

五、(12分) 讨论函数 $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹向与拐点, 渐近线, 并作出草图.

六、(8分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线，以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$ 上有连续的一阶导数, 证明 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$|f(x)|\le\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t.$$

八、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二阶连续导数，且 $\forall x\in(0,+\infty)$, 都有 $f(x)\ge 0, f'(x)\le 0$. 又存在正数 M 使得 $|f''(x)|\le M, (x\in(0,+\infty))$. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(注：此题中的条件 $|f''(x)|\le M$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，二者只需一个成立即可)

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2021.1.4

一、 1. $\mathrm{e}^{-\frac{45}{2}}$; 2. e; 3. $x=0$是铅直渐近线，$y=x+4$是斜渐近线.

二、 1. $I_1=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C$. 2. $I_2=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 3. $I_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$.

三、 1. $-\dfrac{3}{2}$. 2. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. 四、 $-\dfrac{1}{6}$

五、设 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-2\displaystyle\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-2xf^2(x)=2f(x)\cdot x\cdot f(\xi)-2xf^2(x)=2xf(x)(f(\xi)-f(x)),$$

其中ξ在0与x之间. 因为$f'(x)\geq 0$, 所以$f(x)$单调增加.

当$x>0$时，$f(x)\geq f(\xi)\geq f(0)=0$, 故$F'(x)\leq 0, F(x)$单调减少, 因此$F(x)\leq F(0)=0$;

当$x<0$时，$f(x)\leq f(\xi)\leq f(0)=0$, 故$F'(x)\geq 0, F(x)$单调增加, 因此$F(x)\leq F(0)=0$;

综上所述，$F(x)\leq 0$, 即 $\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\leq 2\displaystyle\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t$.

六、$S=\displaystyle\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^y-\dfrac{\mathrm{e}y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{e}{2}-1.$

$$V_x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}-\pi(x\ln^2 x-2x(\ln x-1))\Big|_1^{\mathrm{e}}=2\pi(1-\frac{\mathrm{e}}{3}).$$

$$V_y=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\pi(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^2y^3)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(\mathrm{e}^2-3).$$

七、 定义域$(-\infty,+\infty)$; 偶函数;

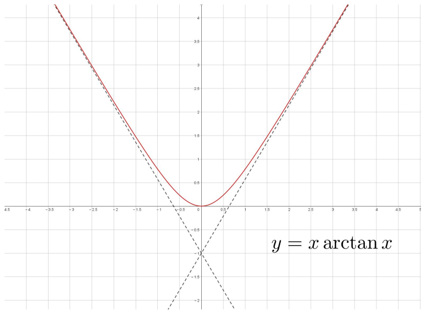
$y'=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}$,

单调增区间$(0,+\infty)$, 单调减区间$(-\infty,0)$;

极小值$y(0)=0$;

$y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$, 上凹区间$(-\infty,+\infty)$; 无拐点;

渐近线$y=\dfrac{\pi}{2}x-1, y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$.



八、令$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x)$, 且$F(a)=0, F''(a)=F''(b)=0$.

函数$F(x)$在$x=a$处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3=f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3$$

其中$a<\xi_1<x$. 令$x=b$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3$, $(a<\xi_2<b)$, (1)

函数$F(x)$在$x=b$处的2阶泰勒公式为

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)(x-b)+\frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3$$

其中$x<\eta_1<b$. 令$x=a$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3$, $(a<\eta_2<b)$, (2)

(1)+(2)得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}\Big(\frac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\Big)(b-a)^3$,

因为 $f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上连续，由最值定理，$f''(x)$ 在区间 $[\xi_2,\eta_2]$ (或 $[\eta_2,\xi_2]$) 上有最大值 M 与最小值 m，而$m\le\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}\le M$，则由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_2,\eta_2]\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\eta_2)}{2}$，于是 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2022.1.4

一、1. $e^{-1/2}$.　　2. $(-1)^n\dfrac{n!}{6}\Big(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{(n+1)}}\Big)$.　　3. $\dfrac{1}{2}$.

二、1. $\ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C$;　　2. $\dfrac{1}{3}x^3\ln^2x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C$.　　3. $\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$.

三、 1. $5x+2y+z+1=0$.　　2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.　　3. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$.

四、方程$\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在(a,b)内有并且只有一个根.

五、定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

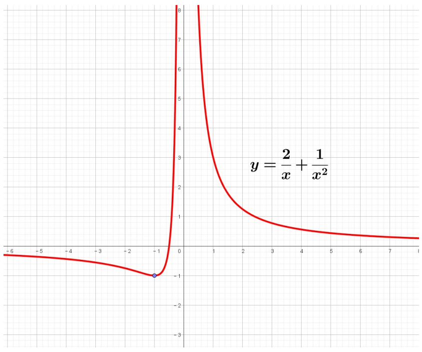
单调增区间$(-1,0)$, 单调减区间$(-\infty,-1),(0,+\infty)$;

极小值$f(-1)=-1$, 没有极大值；

下凹区间$(-\infty,-\frac{3}{2})$, 上凹区间$(-\frac{3}{2},0),(0,+\infty)$;

拐点$\Big(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{8}{9}\Big)$;

$x=0$是铅直渐近线，$y=0$是水平渐近线.



六、2. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

七、 $f''(x)>0$,曲线C是凹的,

$$A(t)=\int_a^b(f(x)-f(t)-f'(t)(x-t))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(t)-\frac{b^2-a^2}{2}f'(t)+(b-a)tf'(t).$$

$A'(t)=f''(t)(b-a)(t-\dfrac{a+b}{2})$. 令 $A'(t)=0$, 得 $t=\dfrac{a+b}{2}$.

$a<x<\dfrac{a+b}{2}$ 时, $A'(t)<0$, $\dfrac{a+b}{2}<x<b$时, $A'(t)>0$, 所以 $A(t)$ 在 $t=\dfrac{a+b}{2}$ 取到最小值.

八、证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f^{(3)}(\zeta)}{6}x^3$.

$$|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|=|k(\frac{2f'(0)}{k}+\frac{f^{(3)}(\alpha_k)}{6k^3}+\frac{f^{(3)}(\beta_k)}{6k^3})-2f'(0)|\le\frac{M}{3k^2},$$

其中 $M=\max\limits_{-1\le x\le1}|f^{(3)}(x)|$.

设 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$, 显然 x_n 是单调增加数列，又

$$x_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{3k^2} < \frac{M}{3}\Big(1 + (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\Big) < M.$$

x_n 单调增加有上界，因此收敛，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|k(f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k}))-2f'(0)|$ 存在.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案 2023.2.21

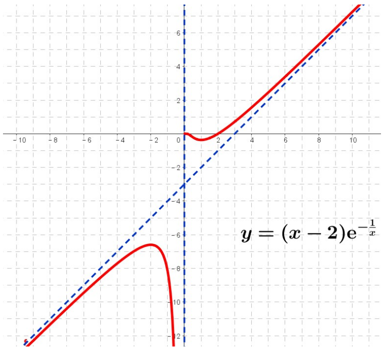
一、 1. e^{-10}; 2. $90\times 7!$; 3. $c=\dfrac{5}{2}$.

二、 1. $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$; 2. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C$; 3. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

三、 1. $\theta=\dfrac{\pi}{3}, M(-5,3,-4)$. 2. 原式$=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$. 3. $\sqrt{2}-1$.

四、(2) $\cos x$ 是偶函数，$\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=\dfrac{\pi}{2}$, 所以原式$=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

五、 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
单调增区间$(-\infty,-2),(1,+\infty)$,
单调减区间$(-2,0),(0,1)$;
极大值 $f(-2)=-4\sqrt{e}$, 极小值$f(1)=-\dfrac{1}{e}$;
下凹区间$(-\infty,0),(0,\dfrac{2}{5})$, 上凹区间$(\dfrac{2}{5},+\infty)$;
拐点$\Big(\dfrac{2}{5},-\dfrac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\Big)$;
$x=0$是铅直渐近线，$y=x-3$ 是斜渐近线.



六、所求切线方程为 $y=\dfrac{2}{e^2+1}x+\ln\dfrac{e^2+1}{2}-1$.

七、方法一：$f(t)$ 连续，则 $|f(t)|$ 也连续，由积分中值定理，存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得 $\displaystyle\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=|f(\zeta)|$.

又 $f(x)=f(\zeta)+\displaystyle\int_\zeta^x f'(t)\mathrm{d}t$, 所以 $|f(x)|\le|f(\zeta)|+\displaystyle\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)\mathrm{d}t$.

八、方法一：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$; 又 $f'(x)\le 0$ 且 $f(x)\ge 0$, 所以 $f(x)$ 单调减少有下界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$. 由微分中值定理，存在 $\xi\in(x,x+1)$, 使得 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$, 上式两边令 $x\to+\infty$ 取极限可得 $B-B=A$, 所以 $A=0$.

方法二：由 $f'(x)\le 0$ 且 $f(x)\ge 0$, 可知 $f(x)$ 单调减少有下界，故极限存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

对于任意给定的常数 $\delta>0$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\dfrac{A-A}{\delta}=0$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists G>0$, 当 $x>G$ 时，总有 $\Big|\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ $(\forall\delta>0)$. 由泰勒公式，$f(x+\delta)=f(x)+f'(x)\delta+\dfrac{1}{2}f''(\xi)\delta^2$,
则 $\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=f'(x)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)\delta\Longrightarrow|f'(x)|\le\Big|\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\Big|+\dfrac{1}{2}\delta M$,
则 $\forall\varepsilon>0,\exists G>0$, 当$|x|>G$ 时，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$, 总有 $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.