线性代数期中试卷 答案 (2019.4.27)

一. 简答与计算(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算 $A=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}$ 的第一行所有元素的代数余子式之和。

解：$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&3&-3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&0&0\\2&-2&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=6.$

解法二：$A_{11}=\begin{vmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\3&-3&0\end{vmatrix}=0,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-1&0&0\\2&0&0\\0&-3&0\end{vmatrix}=0, A_{13}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\2&-2&0\\0&3&0\end{vmatrix}=0,$

$A_{14}=-\begin{vmatrix}-1&0&0\\2&-2&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=6$，故 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=6.$

2. 计算 $X=(X_{ij})_{3\times3}$ 使之满足矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}\text{解：}X&=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/2&-1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解法二：$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\1&-1&0&1&-1&0\\0&0&-1&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&3&2\\0&-2&0&0&-4&-2\\0&0&1&0&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&2&1\\0&2&1&0&-2&-2\end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&-1&0\\0&0&1\\\hline1&1&1\\0&2&1\\0&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\\hline2&0&0\\2&1&0\\-2&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline1&0&0\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{array}\right)$，故 $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

3. 已知4阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&3&2\\0&0&0&3\\2&1&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$，求 A。

解：$|A^*|=27$，且 $|A^*|=|A|^3$，故有 $|A|=3$，从而有 $A^*A=|A|E=3E$，可得 A 可逆且有 $A=3(A^*)^{-1}$.

设 $A^*=\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}$，则易知 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}$.

因为 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-2\\0&3\end{pmatrix}, A_2^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，故 $A=3(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2&-1\\0&0&-1&2\\1&-2/3&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

解法二：$|A^*|=27$，又有 $|A^*|=|A|^3$，故有 $|A|=3$，从而有 $A^*A=|A|E=3E$，

$$\begin{aligned}(A^*,3E)=&\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&3&2&3&0&0&0\\0&0&0&3&0&3&0&0\\2&1&0&0&0&0&3&0\\1&2&0&0&0&0&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&3&0&3&-2&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&-1&2\end{array}\right)\\&\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&2&-1\\0&1&0&0&0&0&-1&2\\0&0&1&0&1&-2/3&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0\end{array}\right).\end{aligned}$$

故 $A=\begin{pmatrix}0&0&2&-1\\0&0&-1&2\\1&-2/3&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

4. 给定向量组 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{100}\}$ 与 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{20}\}$，已知 $r(A)=7$，某同学计算出 $r(A\cup B)=31$，请问对吗？说明理由。

解：不对.

由 $r(A)=7$ 可知，A 的极大无关组含 7 个向量，不妨设其中的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_7$，令向量组 $C=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_7\}\cup B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_7,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{20}\}$，则含 27 个向量的向量组 C 可表示出向量组 $A\cup B$ 中的所有向量，反之亦然，故两个向量组 C 和 $A\cup B$ 等价，于是有 $r(A\cup B)=r(C)\le 27<31$.

解法二：不对. 假设 $r(A\cup B)=31$ 成立，则 $A\cup B$ 的极大无关组含 31 个向量，假设其中一个极大无关组为：$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_n}$，则有 $m+n=31,m\le 100,n\le 20$，由 $r(A)=7$ 可知，还需满足 $m\le 7$，故有 $m+n\le 7+20=27<31=m+n$，矛盾.

5. 已知线性方程组 $Ax=b$ 的三个特解为 $\alpha_1=(1,-2,3)^T,\alpha_2=(0,-1,-2)^T,\alpha_3=(-4,2,1)^T,r(A)=1$，试写出 $Ax=b$ 的通解。

解：由 $r(A)=1$ 可知，齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系含 2 个解向量.

令 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2=(1,-1,5)^T,\beta_2=\alpha_1-\alpha_3=(5,-4,2)^T$，则 β_1,β_2 线性无关，又 $A\beta_1=A\alpha_1-A\alpha_2=b-b=0,A\beta_2=A\alpha_1-A\alpha_3=0$，故 β_1,β_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，于是 $Ax=b$ 的通解为：$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\alpha_1,k_1,k_2\in R$.

二.(10分) 假定矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为3阶可逆矩阵：$A^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}$，令 $P=\alpha_2\beta_2^T+\alpha_3\beta_3^T$。

(1) 证明 $P^2=P$ (即 P 是投影矩阵);

(2) P 的秩是多少？

(3) 给定3维向量 x，Px 可否由 α_2 与 α_3 线性表出？如果可以，写出一个表出方式。

解：(1) $E=AA^{-1}=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T+\alpha_3\beta_3^T=\alpha_1\beta_1^T+P$，故 $P=E-\alpha_1\beta_1^T$.

又有 $E=A^{-1}A=(\beta_i^T\alpha_j)$，故有 $\beta_i^T\alpha_j=0,i\ne j,\ \beta_i^T\alpha_i=1$.

于是 $P^2=(E-\alpha_1\beta_1^T)(E-\alpha_1\beta_1^T)=E-2\alpha_1\beta_1^T+\alpha_1(\beta_1^T\alpha_1)\beta_1^T=E-\alpha_1\beta_1^T=P$.

证法二：$E=A^{-1}A=(\beta_i^T\alpha_j)$，故有 $\beta_i^T\alpha_j=0,i\ne j,\ \beta_i^T\alpha_i=1$.

$P=(\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}$，$P^2=(\alpha_2,\alpha_3)(\begin{pmatrix}\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}(\alpha_2,\alpha_3))\begin{pmatrix}\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}=(\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2^T\\\beta_3^T\end{pmatrix}=P$.

(2) $P\alpha_1=\alpha_2\beta_2^T\alpha_1+\alpha_3\beta_3^T\alpha_1=0,P\alpha_2=\alpha_2,P\alpha_3=\alpha_3$，

故 $PA=(P\alpha_1,P\alpha_2,P\alpha_3)=(0,\alpha_3,\alpha_3)$，因为 A 和 A^{-1} 可逆，

故 $r(P)=r(A^{-1}PA)=r(A^{-1}(0,\alpha_2,\alpha_3))=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2$.

解法二：$P\alpha_1=\alpha_2\beta_2^T\alpha_1+\alpha_3\beta_3^T\alpha_1=0,P\alpha_2=\alpha_2,P\alpha_3=\alpha_3$，

故 $PA=P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,\alpha_3,\alpha_3)$，因为 A 可逆，故 $r(PA)=r(P)$，且 α_2,α_3 线性无关，

于是 $r(P)=r(PA)=r(0,\alpha_2,\alpha_3)=2$.

(3) 因为 $Px=\alpha_2\beta_2^Tx+\alpha_3\beta_3^Tx=(\beta_2^Tx)\alpha_2+(\beta_3^Tx)\alpha_3=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 $k_2=\beta_2^Tx,k_3=\beta_3^Tx$，

故 Px 可由 α_2,α_3 线性表出.

三.(10分) 计算 $(A^*)^*$，此处 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}$。

解：因为 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)$，故 $r(A)\le r(b_1,b_2,b_3)\le 1$，故 A 的所有 2 阶子式均为0，

于是 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=O$，故 $(A^*)^*=O^*=O$.

四. (10分) 计算 $f(\pi)$ 与 $f'(\pi)$，此处：

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x^2+b_1x+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x^2+b_2x+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x^2+b_3x+c_3 \end{vmatrix}.$$

解：$f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x^2+b_1x+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x^2+b_2x+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x^2+b_3x+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$ 常数，令 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=w$，则有

$f(\pi)=w$, $f'(\pi)=0$.

五.(12分) 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$，

(1) 计算 $r(A)$；

(2) 计算线性方程组 $Ax=0$ 的基本解组；

(3) 假定 $\eta=(1,-1,0,0,2)^T$ 是 $Ax=b$ 的解，确定 b 并计算 $Ax=b$ 的通解。

解：(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 11 & -1 & 12 \\ 0 & 4 & 11 & -1 & 12 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -9/4 & 0 \\ 0 & 1 & 11/4 & -1/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故 $r(A)=2$.

(2) 由上述过程可知基本解组为：$\alpha_1=(1/4,-11/4,1,0,0)^T,\alpha_2=(9/4,1/4,0,1,0)^T,\alpha_3=(0,-3,0,0,1)^T$.

(3) $b=A\eta=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$，通解为：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\eta, k_1,k_2,k_3\in R$.

六.(10分) 写出向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1+a,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,1+a,1)^T$ 的极大线性无关组；$\beta=(1,1,1,b)^T$ 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？如果可以，表出方式唯一吗？

解：(1) $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ a & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & a & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & a & 1-b \end{array}\right)$.

当 $a=0$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组为：$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$.

当 $a\neq 0$ 时，$B\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1-b)/a \\ 0 & 1 & 0 & (1-b)/a \\ 0 & 0 & 1 & (1-b)/a \\ 0 & 0 & 0 & ((a+3)b-3)/a \end{array}\right)$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组就是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

(2) 由 (1) 的过程可知，当 $a=0,b\neq 1$ 时，不能表示 β.

当 $a=0,b=1$ 时，能表示 β，由 $r(B)=1<3$ 可知表达式不唯一.

当 $a\neq 0,b\neq 3/(a+3)$ 时，不能表示 β.

当 $a\neq 0,b=3/(a+3)$ 时，能表示 β，由 $r(B)=3$ 可知表达式唯一.

七.(8分) $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为实矩阵，b 为 m 维实向量，证明 $A^TAx=A^Tb$ 有解。

(提示：先证明 $r(A^TA)=r(A)$)

证：对方程组 $A^TAx=A^Tb$，有 $r(A^TA)\le r(A^TA,A^Tb)=r(A^T(A,b))\le r(A^T)=r(A)$.

若 $r(A^TA)=r(A)$，则有 $r(A^TA)=r(A^TA,A^Tb)$，于是 $A^TAx=A^Tb$ 有解.

故只要证明 $r(A^TA)=r(A)$.

因为 $Ax=0\Rightarrow A^TAx=0$，且 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)=0\Rightarrow Ax=0$，

故方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解. 若 x 为 n 维，解空间维数为 k，可得 $r(A)=n-k=r(A^TA)$.