

微积分 I (第一层次) 期末试卷 2016.12.28

一、填空(3分×8=24分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}};$

2. 设参数方程为 $\begin{cases} x = te^t, \\ y = 2t + t^2, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}};$

3. 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$ 的单调增加区间为 $\underline{\hspace{2cm}};$

4. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 较 $x \cdot \sin x^n$ 为高阶无穷小, 而 $x \cdot \sin x^n$ 较 $e^{x^2} - 1$ 为高阶无穷小, 则正整数 $n = \underline{\hspace{2cm}};$

5. 已知曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相同, 则 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}};$

6. 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x+2}{x-3}} - 1}$, 则 $x = 3$ 是 $f(x)$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 间断点;

7. 设向量 $a = 2i + 3j + k$, $b = 7i - 4j - 2k$, 则向量 a 与向量 b 的夹角 $\theta = \underline{\hspace{2cm}};$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算下列各题(6分×6=36分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - i^2}}.$

2. 求 $I = \int_0^{\pi} x \cos^6 x \sin x dx.$

3. 求过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $x = -t + 2, y = 3t - 4, z = t - 1$ 垂直的平面方程.

4. 计算 $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx.$

5. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x+1} + e^{3-x}} dx.$

6. 计算 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$

三、设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

四、(12分) 讨论函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出函数图像.

五、(10分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数且 $f''(x) < 0$, 直线 L_t 是曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $(t, f(t))$ 处的切线 ($t \in [0, 1]$). 记直线 L_t 与曲线 $y = f(x)$ 以及直线 $x = 0, x = 1$ 所围成的图形的面积为 $A(t)$. 证明 $A(t)$ 的最小值 $\min_{0 \leq t \leq 1} A(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^1 f(x) dx.$

六、(8分, 本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且非负, (1) 试证明: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积; (2) 又

设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

七、(8分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta_1) \cdot f'(\eta_2) = 1$.

微积分 I (第一层次) 期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分 \times 3=18分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{t} \ln(1+xt) dt}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1 = \int \cos(\ln x) dx$. 3. 求不定积分 $I_2 = \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

二、计算下列各题(6分 \times 3=18分)

1. 求定积分 $I_3 = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

2. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y = \ln(1 - x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分 \times 3=18分)

1. 求广义积分 $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

2. 设 $(a+3b) \perp (7a-5b)$, $(a-4b) \perp (7a-2b)$, 求向量 a 与向量 b 的夹角 γ .

3. 求点 $P(1, 2, 3)$ 到直线 $L: \begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0 \end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{1}{x_n^2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L: \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c 均不等于 0, 且 $b = c$, 平面 Π 过直线 L , 求平面 Π 的方程.

八、(6分, 本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $f(x) \neq 0$. 求证: $\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 求证:

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

微积分 I (第一层次) 期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分 \times 4=24分)

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right). \quad 2. y = x^2 e^{3x}, \text{ 求 } y^{(10)}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt) dt}{x^3}.$$

4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分 \times 4=24分)

$$1. \text{求积分 } \int x \ln(2+x) dx. \quad 2. \text{计算积分 } \int_{-1}^1 \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + \sin x}{1+x^2} dx.$$

$$3. \text{计算广义积分 } \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$4. \text{已知 } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \text{ 设 } F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 2), \text{ 求 } F(x).$$

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

$$\text{三、(10分) 求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \frac{n+1}{n}}{n+1} + \frac{\ln \frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\ln \frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right). \sum_{i=1}^n \frac{\ln(1+\frac{i}{n})}{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\ln(1+\frac{i}{n})}{n+\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\ln(1+\frac{i}{n})}{n}$$

四、(10分) 求曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域, 单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线, 并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数.

$$(1) \text{ 如果 } f''(x) > 0 \quad (x \in [-a, a]), \text{ 证明: } \int_{-a}^a f(x) dx \geq 2af(0);$$

$$(2) \text{ 如果 } f(0) = 0, \text{ 证明: 在 } [-a, a] \text{ 上至少存在一点 } \zeta, \text{ 使得 } a^3 f''(\zeta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 满足 $f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt, x \in [0, 1]$. 证明: $f(x) \leq 1+x, x \in [0, 1]$.

微积分I(第一层次)期末试卷参考答案2016.12.28

一、 1. 1; 2. 2; 3. $[0, \frac{2}{5}]$; 4. 2; 5. $y = -x$; 6. 第一类(跳跃); 7. $\frac{\pi}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$;

二、 1. $\frac{\pi}{6}$. 2. $\frac{\pi}{7}$. 3. $x - 3y - z + 4 = 0$. 4. $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1 + \ln x} + C$ 5. $\frac{\pi}{4e^2}$. 6. $\frac{1}{3e} - \frac{1}{6}$.

三、 $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ $\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du, & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$ $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

四、 定义域 $x \neq 0$; 单调减区间 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, 单调增区间 $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$; 极小值 $f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, 下凹区间 $(-1, 0)$, 上凹区间 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$; 拐点 $(-1, 0)$; $x = 0$ 是铅直渐近线; 没有水平渐近线, 没有斜渐近线.

五、 证明: 切线方程为 $y = f(t) + f'(t)(x - t)$, 因此

$$A(t) = \int_0^1 (f(t) + f'(t)(x - t) - f(x))dx = \frac{1}{2}f'(t) - tf'(t) + f(t) - \int_0^1 f(x)dx$$

$$A'(t) = (\frac{1}{2} - t)f''(t) = 0 \text{ 得唯一驻点 } t = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \min_{0 \leq t \leq 1} A(t) = A(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \int_0^1 f(x)dx.$$

六、 证明: (1) 由题意, 即证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x)dx$, 即 $x_0 f(x_0) + \int_1^{x_0} f(x)dx = 0$.

构造函数 $F(x) = x \int_1^x f(x)dx$, 则 $F'(x) = xf(x) + \int_1^x f(x)dx$, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足洛尔定理的条件, 从而存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $F'(x_0) = x_0 f(x_0) + \int_1^{x_0} f(x)dx = 0$.

(2) 由题意, 即证 $F'(x) = xf(x) + \int_1^x f(x)dx$ 在 $(0, 1)$ 内只有一个零点. $F''(x) = 2f(x) + xf'(x)$, $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$ 可得 $F''(x) > 0$, 故 $F'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调增加, 从而在 $(0, 1)$ 内只有一个零点.

七、 (1) 对函数 $F(x) = f(x) - 1 + x$ 在 $[0, 1]$ 上用零点定理即得;

(2) 对函数 $f(x)$ 分别在 $[0, \xi]$ 、 $[\xi, 1]$ 上分别用拉格朗日中值定理即得.

微积分I(第一层次)期末试卷参考答案2018.1.10

一、 1. 1; 2. $I_1 = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. 3. $I_2 = \arctan(x + 1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C$.

二、 1. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2. $\frac{16}{3}p^2$. 3. $\ln 3 - \frac{1}{2}$. 三、 1. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\sqrt{\frac{223}{13}}$. 四、 1. 五、 $\frac{2}{\pi}$.

六、 定义域 $x \neq 1$; 单调减区间 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 单调增区间 $(-1, 1)$; 极小值 $f(-1) = -\frac{1}{4}$, 下凹区间 $(-\infty, -2)$, 上凹区间 $(-2, 1)$, $(1, +\infty)$; 拐点 $(-2, -\frac{2}{9})$; $x = 1$ 是铅直渐近线; $y = 0$ 是水平渐近线.

七、 $7x - 2y - 2z + 1 = 0$.

八、证明：因为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续，且 $f(x) \neq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不变号，不妨设 $f(x) > 0$ 。
 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，由最值定理， $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有最大值 M 。设 $f(x_0) = M > 0, x_0 \in (0, 1)$ 。
 由拉格朗日中值定理， $\exists \alpha \in (0, x_0), \beta \in (x_0, 1)$ ，使得

$$\begin{aligned} f(1) - f(x_0) &= f'(\beta)(1 - x_0), \text{ 即 } f'(\beta) = -\frac{M}{1 - x_0}; \quad f(x_0) - f(0) = f'(\alpha)(x_0 - 0), \text{ 即 } f'(\alpha) = \frac{M}{x_0} \\ \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &> \frac{1}{M} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{M} \int_\alpha^\beta |f''(x)| dx \geq \frac{1}{M} \left| \int_\alpha^\beta f''(x) dx \right| = \frac{1}{M} |f'(\beta) - f'(\alpha)| \\ &= \frac{1}{M} \left| -\frac{M}{1 - x_0} - \frac{M}{x_0} \right| = \frac{1}{x_0(1 - x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x_0)^2} \geq 4. \end{aligned}$$

九、证明：函数 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 展开成泰勒公式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 > f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{两边积分得 } \int_a^b f(x) dx &> \int_a^b \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \Big|_a^b = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \end{aligned}$$

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.1.2

一、 1. $\frac{2}{3}$; 2. $y^{(10)} = 3^8 e^{3x} (9x^2 + 60x + 90)$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$.

二、 1. $\frac{1}{2}x^2 \ln(2+x) - \frac{1}{4}x^2 + x - 2 \ln(x+2) + C$; 2. $2 - \frac{\pi}{2}$; 3. $\frac{\ln 2}{4}$; 4. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

三、 $2 \ln 2 - 1$. 四、切线方程为 $y - \ln \frac{1+e^2}{2} = \frac{2}{1+e^2}x - 1$.

五、单调增区间 $(-\infty, -4), (0, +\infty)$ ，单调减区间 $(-4, -1), (-1, 0)$ ；极大值 $f(-4) = -\frac{256}{27}$ ，极小值 $f(0) = 0$ ；下凹区间 $(-\infty, -1)$ ，上凹区间 $(-1, +\infty)$ ；没有拐点；铅直渐近线 $x = -1$ ；斜渐近线 $y = x - 3$ 。

六、(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \geq f(0) + f'(0)x \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx \geq \int_{-a}^a (f(0) + f'(0)x) dx = 2af(0)$.

$$(2) f(x) = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \int_{-a}^a \frac{f''(\xi)}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx,$$

设 $M = \max_{x \in [-a, a]} f''(x)$, $m = \min_{x \in [-a, a]} f''(x)$ ，则 $m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M$ 。由介值定理， $\exists \zeta \in [-a, a]$,

$$s.t. a^3 f''(\zeta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

七、证明：设 $u(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$ ，则 $u(0) = 1, u'(x) = 2f(x) \leq 2\sqrt{u(x)}$ ，而 $\sqrt{u(x)} - 1 = \int_0^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} dt \leq \int_0^x dt = x$ ，所以 $f(x) \leq \sqrt{u(x)} \leq 1 + x$ 。