



十一章重点内容

- 任意集合上的函数的概念
- 关系与函数的区别
- 单射、满射与双射函数



10.6 等价关系与划分

商集： R 是 A 上的等价关系， R 的所有等价类构成的集合

记为 A/R : $\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例： A 为全班同学的集合， $|A| = n$, ($n \in N$)

按指纹的相同关系 R_1 是一个等价关系

$$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \dots [x_n]_{R_1}\}$$

同姓关系 R_2 是一等价关系

$$A/R_2 = \{[张]_{R_2}, [李]_{R_2}, \dots\}$$



清华大学

Tsinghua University

离散数学(1) Discrete Mathematics

第十二章 实数集合与集合的基数

马昱春
myc@tsinghua.edu.cn



第十二章

实数集合与集合的基数

12.1 实数集合 $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 整数集合 } \mathbb{Z} \\ 2. \text{ 有理数集合 } \mathbb{Q} \\ 3. \text{ 实数集合 } \mathbb{R} \end{array} \right.$

12.2 集合的等势

12.3 有限集合与无限集合

12.4 集合的基数

12.5 基数的算术运算

12.6 基数的比较

12.7 可数集合与连续统假设

记笔记



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

元素 x \in 集合 A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

对任意的集合 A , $\emptyset \subseteq A$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap \emptyset$ 无意义

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

欢迎进入康托乐园



集合A

集合B

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$$|A| < |B|?$$

无限集合比大小?

$$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$$

$$\text{令 } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = e^x.$$

实数集合与集合的基数

- 基数——集合中元素的个数.
- 本章主要借助于函数讨论集合的所谓“大小”问题。
- 无限集合
 - 整数集
 - 实数集
 - 有理数集
 -



【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？



【课前思考】

- 无限集合，所含的元素有无穷多个，
- 基数如何定义？
- 怎样比较两个无限集合的大小？
- $|N| = ?$ $|Q| = ?$
- $|R| = ?$ $|R^+| = ?$
- $|P(N)| = ?$

伽利略 (1564-1642)



- 《两种新科学》
 - 是自然数多呢?还是完全平方数多呢?
 - 直观上看, 自然数多。
 - 但从另一个角度看, 有一个自然数, 便有一个完全平方数:
- 最后伽利略据此得出结论说:
 - 比较无穷量是不可能的
 - 所有无穷量都一样!

1 2 3 4 ... n ...

1 4 9 16 ... n^2 ...

一一对应



部分 = 全体 (Galileo悖论)

- 1638年著名天文学家Galileo提出下列问题:
- $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
- $N^2 = \{0, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$
- 哪个集合元素更多?
- 一方面, $N^2 \subseteq N$, 因为2, 3, 5等均不在 N^2 中;
- 另一方面, 对于 N 中的每个元素, 在 N^2 中都能找到一个元素与之对应。
- 当时它不仅困惑了Galileo, 也使许多数学家束手无策。



部分 = 全体 (Galileo悖论)

- 1874-1894年间, Cantor圆满地解决了Galileo悖论。
- 基本思想: “一一对应”
- $A = \{a, b, c, d\}$

$$\updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \quad f: A \rightarrow n \quad n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$0, 1, 2, 3$$

- 结论: N 与 N^2 之间存在着——对应 (双射)

$$|N| = |N^2| \quad \underline{\text{等势}}$$

自然数集合

- 每个自然数可表示为：

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

$$n+1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}.$$

思考一下：
比较大小？
负数？



12.1 实数集合

定义12.1.1 (整数)

- 对自然数集合 N , 令

$$Z_+ = N - \{0\}$$

$$Z_- = \{\langle 0, n \rangle \mid n \in Z_+\}$$

$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$

- 则称 Z_+ 的元素为正整数, Z_- 的元素为负整数, Z 的元素为整数。



12.1 实数集合

定义12.1.2

- 一个整数的相反数分别是 $-n = \langle 0, n \rangle$ 当 $n \in Z_+$,
 $-0 = 0$,
 $-\langle 0, n \rangle = n$ 当 $n \in Z_+$ 。



12.1 实数集合

定义12.1.3

- 在集合 Z 上定义小于等于关系 \leq_Z 为, 对任意的, $x, y \in Z$, $x \leq_Z y$ 当且仅当

$$(x \in N \wedge y \in N \wedge x \leq_N y) \vee (x \in Z_- \wedge y \in N) \\ \vee (x \in Z_- \wedge y \in Z_- \wedge -y \leq_N -x).$$

- 在集合 Z 上定义小于关系 $<_Z$ 为, 对任意的 $x, y \in Z$, $x <_Z y$ 当且仅当

$$(x \leq_Z y) \wedge (x \neq y)$$

分数?
有理数?

$$Z_+ = N - \{0\}$$

$$Z_- = \{\langle 0, n \rangle \mid n \in Z_+\}$$

$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$



12.1 实数集合

定义12.1.4 (等价关系 \cong)

- 对整数集合 Z , 令

$$Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0 \}$$

并称 Q_1 是 Z 上的因式的集合。

- 对 $\langle a, b \rangle \in Q_1$, 可以 a/b 代替 $\langle a, b \rangle$ 。
- 在 Q_1 上定义关系 \cong 为对任意的 $a/b \in Q_1$, $c/d \in Q_1$, $a/b \cong c/d$ 当且仅当 $a \cdot d = b \cdot c$,
- 其中 $a \cdot d$ 是在 Z 上定义的乘法, $=$ 是 Z 上的相等关系。



12.1 实数集合

定理12.1.1

- Q_1 上的关系 \cong 是等价关系。
 1. 自反的
 2. 对称的
 3. 传递的



12.1 实数集合

定义12.1.5 (有理数集合)

- $Q = Q_1 / \cong$,
- 即 Q 是集合 Q_1 对等价关系 \cong 的商集,
- 则称 Q 的元素为有理数,
- 一般用 a/b 表示 Q 中的元素 $[< a, b >_{\cong}]$,
- 并习惯上取 a 、 b 是互素的整数, 且 $b > 0$ 。
- $[1/2] = [< 1, 2 >_{\cong}] = \{1/2, 2/4, -1/-2, \dots\}$.

商集: R 是 A 上的等价关系, R 的所有等价类构成的集合
记为 $A/R: \{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例: A 为全班同学的集合, $|A| = n$, ($n \in \mathbb{N}$)
按指纹的相同关系 R_1 是一个等价关系

$$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \dots, [x_n]_{R_1}\}$$

同姓关系 R_2 是一等价关系

$$A/R_2 = \{[\text{张}]_{R_2}, [\text{李}]_{R_2}, \dots\}$$



12.1 实数集合

定义12.1.6

- 在 Q 上定义小于等于关系 \leq_Q 为,
- 对任意的 $a/b, c/d \in Q$,
- $a/b \leq_Q c/d$ 当且仅当 $a \cdot d \leq_Z b \cdot c$ 。
- $1/2 \leq_Q 3/4$

绕不过去的坎

$$\sqrt{2}$$



- 无理数
 - 无理数不能用有穷个有理数来表示。
 - 无理数存在
 - 柯西提出极限的概念，
 $\sqrt{2}$ 可以看作有理数序列：1.4, 1.41, 1.414……. 的极限
- 逻辑上的循环，需要先知道 $\sqrt{2}$ ，才能确定这个有理序列是否收敛于 $\sqrt{2}$ ；但是在定义无理数之前，我们并不知道 $\sqrt{2}$ 是什么？



绕不过去的坎

- Karl Weierstrass (1815—1897)
 - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414\cdots\}$ 为“完成了的整体”
 - 序列 $1.4, 1.41, 1.414\cdots$ 的极限看作集合。
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414\cdots\}$
- **实**无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位，是已经构造完成了的东西，换言之，即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.



12.1 实数集合

定义12.1.7 (基本函数)

- 如果 $f: N \rightarrow Q$ 满足条件,

(1) $(\exists x)(x \in Q \wedge (\forall n)(n \in N \rightarrow |f(n)| < x))$ 有界的

(2) $(\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)(\forall i)((m \in N \wedge i \in N \wedge n \leq m \wedge n \leq i \wedge m \leq i) \rightarrow (f(m) \leq f(i))))$ 单调非递减的

- 则 f 称是一个基本函数, 或有界非递减函数。



12.1 实数集合

- 当 f 是一个基本函数时, 则函数值

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$$

称为一个基本序列, 它有时写为

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

- 在以下定义与定理中, B 表示所有基本函数的集合。 $BF(f)$ 表示 f 是一个基本函数。



12.1 实数集合

定理12.1.2

- 当 $f: N \rightarrow Q$ 取常数值时, f 是基本函数。
即对任意的 $r \in Q$,

$$r, r, r \dots$$

是一个基本序列。

定理12.1.3

- 存在不是常值函数的基本函数。

$$f(n) = 1 - 1/(n+1)$$



12.1 实数集合

定义12.1.8

- 对基本函数的集合 B ，定义 B 上的关系为 \cong ，对任意的 $f, g \in B$ ， $f \cong g$ 当且仅当 $(\forall \varepsilon)((\varepsilon \in \mathbb{Q} \wedge \varepsilon > 0) \rightarrow (\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge (\forall m)$

$$((m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m) \rightarrow |f(m) - g(m)| < \varepsilon)))$$

- 直观上说， $f \cong g$ 等价于 f 和 g 的序列的极限相同。
- $f(n) = 1 - 1/(n+1)$ 和 $g(n) = 1$ ，有 $f \cong g$
-



12.1 实数集合

定理12.1.4

- B 上的关系 \cong 是等价关系.

定理12.1.5

- 设 $f: N \rightarrow Q$ 和 $g: N \rightarrow Q$ 都是常值函数, 且 $f \cong g$, 则 $f = g$.



12.1 实数集合

定义12.1.9 (实数集)

- 令 $R = B/\simeq$ ，即 R 是集合 B 对等价关系 \simeq 的商集，则称 R 的元素为实数，称 R 为实数集合。

(基本函数的集合 B)

X 的等价类中有一个常数函数 $f(n)=r$, 则 x 为一个有理数, 否则 x 是无理数



对比

- 对**基本函数的集合** B ，定义 B 上的关系为 \cong ， $R = B/\cong$ ，即 R 是集合 B 对等价关系 \cong 的商集，则称 R 的元素为实数，称 R 为实数集合。
- 对**整数集合** Z ，令
$$Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0 \}$$
- 并称 Q_1 是 Z 上的因式的集合。 $Q = Q_1 / \cong$ ，即 Q 是集合 Q_1 对等价关系 \cong 的商集，则称 Q 的元素为有理数。



12.1 实数集合

定义12.1.10

- 在 B 上定义小于关系 $<_B$ 为, 对任意的 $f, g \in B$ (基本函数集合)
 $f <_B g$ 当且仅当

$$(\exists \varepsilon)((\varepsilon \in \mathbb{Q} \wedge 0 < \varepsilon) \wedge (\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge (\forall m) \\ ((m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m) \rightarrow g(m) - f(m) > \varepsilon))))$$



12.1 实数集合

定义12.1.11

- 在 R 上定义小于等于关系 $f, g \in B$
 \leq_R 和小于关系 $<_R$ 为,
- 对任意的 $f, g \in B$, 即对 $[f]_{\cong} \in R$ 和 $[g]_{\cong} \in R$,
 $[f]_{\cong} \leq_R [g]_{\cong}$ 当且仅当 $f \leq_B g$,
 $[f]_{\cong} <_R [g]_{\cong}$ 当且仅当 $f <_B g$ 。



【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？



12.2 集合的等势

定义12.2.1 (集合的等势)

- 对集合 A 和 B ，如果存在从 A 到 B 的**双射函数**，就称 A 和 B 等势，记作 $A \approx B$;
- 如果不存在从 A 到 B 的双射函数，就称 A 和 B 不等势，记作 $\neg A \approx B$
- 注意， $A \approx B$ 时不一定有 $A = B$,
- 反之一定成立 ($A = B$ 则必有 $A \approx B$) 。



12.2 集合的等势

- 例1: $N \approx Z$ 。因为存在双射函数

$$f : N \rightarrow Z, f(n) = \begin{cases} -\frac{1+n}{2} & \text{当} n \text{是奇数} \\ \frac{n}{2} & \text{当} n \text{是偶数} \end{cases}$$

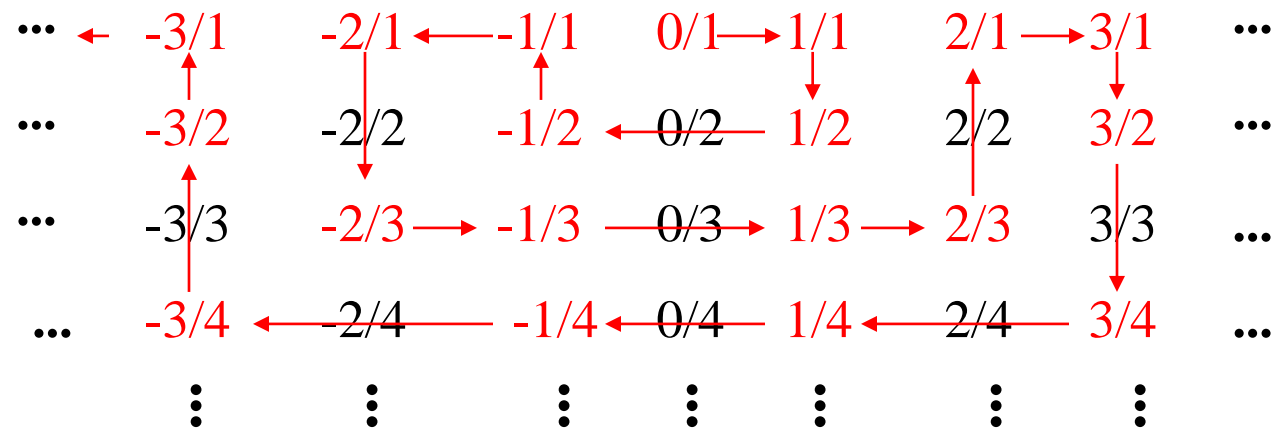


12.2 集合的等势

- 例2: $R \approx R^+$, 其中 R^+ 是正实数集合。因为存在双射函数
- $f : R \rightarrow R^+, f(x) = e^x$
- 所以 $R \approx R^+$ 。

例： $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

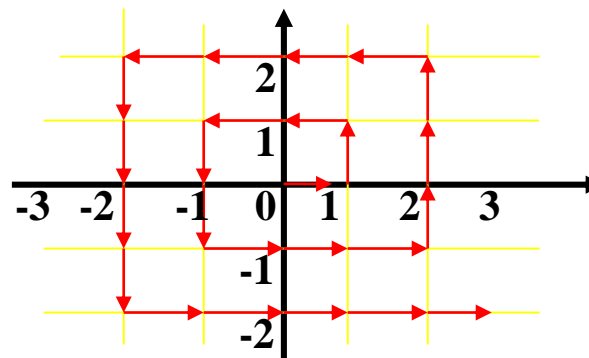
因为每个有理数都可以写成一个分数形式如下：



可以从0/1开始按照箭头指定次序排列Q中元素

所以 $N \approx Q$ 。

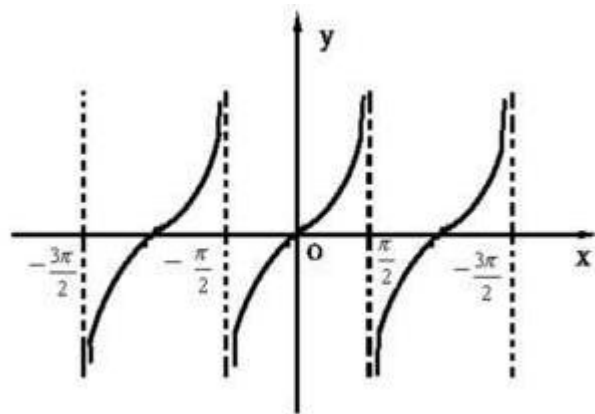
另外 $Z \times Z \approx N$ 如右图所示。





12.2 集合的等势

- 例6: $(0,1) \approx R$ 。
- 构造双射函数 $f: (0,1) \rightarrow R$,
- 已知 $\tan(x): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$
- 设 $f(x) = \tan(ax + b)$,
- 由 $f(0) = \tan(b)$, $b = -\frac{\pi}{2}$
- 由 $f(1) = \tan(a + b)$, $a = \pi$
- 代入
$$f(x) = \tan \frac{\pi(2x-1)}{2}$$





12.2 集合的等势

- 例7: $[0,1] \approx (0,1)$, 构造双射函数
- $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{当 } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } x = 1 \\ \frac{x}{4} & \text{当 } x = 2^{-n}, n = 1, 2, 3, \dots \\ x & \text{当 } x \text{ 取其它值} \end{cases}$$

- 当 $x = 2^{-n}$ 时, 多乘一个 $\frac{1}{4}$



12.2 集合的等势

定理12.2.1

- 对任意的集合 A , 有

$$P(A) \approx A_2$$

A_2 是所有函数 $f : A \rightarrow \{0,1\}$ 组成的集合。

$$P(A) \approx A_2$$



- 证明*: 这里 $2 = \{0,1\}$, 所以 A_2 是所有函数 $f: A \rightarrow \{0,1\}$ 组成的集合。

定义11.1.10 特征函数

- 设 E 是全集, 对任意的 $A \subseteq E$, A 的特征函数 χ_A 定义为:

$$\chi_A: E \rightarrow \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

- 构造函数 $H: P(A) \rightarrow A_2$,
- 对于任意 $B \in P(A)$, $H(B) = \chi_B(x): A \rightarrow \{0,1\}$ 。
- 其中 $\chi_B(x)$ 是以 A 为全集时 B 的特征函数。
- 1. 证 H 是单射的;
- 设 $B_1, B_2 \in P(A)$ 且 $B_1 \neq B_2$, 则
 $H(B_1) = \chi_{B_1} \neq \chi_{B_2} = H(B_2)$, 所以, H 是单射的。
- 2. 证 H 是满射的;
- 对任意的 $g \in A_2$, $g: A \rightarrow \{0,1\}$, 存在集合
 $B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$, 则 $B \subseteq A$, 即存在
 $B \in P(A)$, 且 $H(B) = g(x)$ 。所以, H 是满射的。



12.2 集合的等势

定理12.2.2

- 对任意的集合 A 、 B 和 C ,
 - (1) $A \approx A$,
 - (2) 若 $A \approx B$, 则 $B \approx A$,
 - (3) 若 $A \approx B$ 且 $B \approx C$, 则 $A \approx C$ 。
- 该定理表明, 等势具有自反性, 对称性和传递性。



12.2 集合的等势

- 由定理可知

$$N \approx N \times N \approx Z \approx Q$$

- 且

$$R \approx R^+ \approx (0,1) \approx [0,1].$$



12.2 集合的等势

- 若由简单直觉来观察，有理数的排列与整数的排列迥然不同。
- Q 中元素的排列似乎远比 N 稠密，但其个数却竟然与 N 中的元素一样多，确实出乎人们的预料。
- 实际上，一个有理数可以看作是两个整数组成的数对。



12.2 集合的等势

- 当Cantor把这一结果通知Dedekind（比Cantor年长14岁，曾经是高斯的学生，抽象代数学的先驱，最早支持Cantor的集合论）时，Dedekind 在回信中写道：
- “我看到了，但我简直不敢相信！”
- 这便是Cantor的又一个伟大的发现，也正是由于这一发现，使他进一步猜想：

$$|N|? = |R| \quad or \quad N? \approx R$$



12.2 集合的等势

定理12.2.3 康托定理(1890)

(1) $\neg N \approx R$,

(2) 对任意的集合 A , $\neg A \approx P(A)$ 。



对角线方法（1891年）

- Cantor's Diagonal Method
- 假设你把实数区间 $(0, 1)$ 里的所有数按照某种顺序排列起来
- $a_1 = 0. \underline{0}147574628\dots$
 $a_2 = 0. 3\underline{7}21111111\dots$
 $a_3 = 0. 23\underline{2}3232323\dots$
 $a_4 = 0. 000\underline{4}838211\dots$
 $a_5 = 0. 0516\underline{0}00000\dots$
.....

小数点后第一位不等于 a_1 的第一位，
小数点后第二位不等于 a_2 的第二位，
.....

总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。

这个数属于实数区间 $(0, 1)$ ，但它显然不在你的列表里，因为它和你列表里的每一个数都有至少一位是不同的。

我们就证明了实数区间是不可数的。



- 证明:
- (1) 只要证明 $\neg N \approx [0,1]$ 即可。
- 为此只要证明对任何函数 $f : N \rightarrow [0,1]$, 都存在 $x \in [0,1]$, 使 $x \notin \text{ran}(f)$, 即任何函数 $f : N \rightarrow [0,1]$ 都不是双射的。
- 反证: 假设存在一个双射函数 $f : N \rightarrow [0,1]$
则 $[0,1]$ 中的元素必与 N 中的元素一一对应,
那么 $[0,1]$ 中的元素必可排列成如下的形式:
$$\text{ran} f = [0,1] = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$$
- 设每个 x_i 的小数形式是
$$0.a_{i1}a_{i2} \dots a_{ij} \dots, \text{ 且 } a_{ij} \in \{0,1, \dots, 9\}$$
- 对任意一个 $f : N \rightarrow [0,1]$, 顺序列出 f 值



$$f(0) = x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots$$

$$f(1) = x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$

$$f(2) = x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$$

$$f(3) = x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \dots$$

...

$$f(n-1) = x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \dots$$

...

- 依假设
任一 $[0,1]$ 中的实数均应出现在上表中的某一行



- 关键：如何找出一个 $[0,1]$ 区间的小数，并证明该小数不在上表中出现。
- Cantor 提出按对角线构造一个新的小数 x^*

$$x^* = 0.a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* \cdots a_{ii}^* \cdots$$

$$\text{使得 } a_{ii}^* \neq a_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

显然 $x^* \in [0, 1]$ ，然而 x^* 又不在上表中。

$\therefore x^*$ 与上表中的任一 x_i 至少总有一位数字相异。

于是 $x^* \notin \text{ran}(f)$ ，即 f 不可能是满射，故不存在双射函数 $f : N \rightarrow [0, 1]$ 。

$$A=\{1,2\} \quad P(A)=\{0,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

对任意的集合 A , $\neg A \approx P(A)$



(2) 对任意的函数 $g : A \rightarrow P(A)$, 构造集合

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}.$$

- 显然, $B \subseteq A$, $B \in P(A)$ 。对任意的 $x \in A$, 有 $x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$, 则 $B \neq g(x)$ 。
- 所以 $B \notin \text{ran}(g)$, 但 $B \in P(A)$,
- 所以 g 不是满射的。当然也不是双射的。
- 不存在双射函数 $g : A \rightarrow P(A)$ 。



- 例:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

- 设 $B = \{1, 2\}$, 显然, $B \subseteq A, B \in P(A)$

$$g(x) = \{3\} \quad \text{满足 } B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

$$B \neq g(x), B \notin \text{ran}(g), \quad g : A \rightarrow P(A),$$

- 总之, 不管给出的函数 g 为何种情形, 均可按此法构造集合 B , B 是 $P(A)$ 中的元素, 但不在 g 的值域中。
- 所以 g 不是满射的。

$P(A)$ 的元素个数总是多于 A , 不能满射



Cantor 定理及其理论意义

- Cantor 首次对无穷集合从定性与定量两方面进行了深入的研究
- Cantor 定理揭示：
- N 与 R 是有本质区别的；
- 必须了解无穷集合基数的本质区别；
- 著名的证明方法 — *Cantor Diagonal Method*
已成为数学与计算机科学中证明“否定性结论”的强有力工具



12.3 有限集合与无限集合

定义12.3.1 (有限集合与无限集合)

- 集合 A 是有限集合，当且仅当存在 $n \in N$ ，使 $n \approx A$ ；
- 集合 A 是无限集合当且仅当 A 不是有限集合，即不存在 $n \in N$ 使 $n \approx A$ 。



12.3 有限集合与无限集合

- 定理12.3.1 不存在与自己的真子集等势的自然数。
- 推论12.3.1 不存在与自己的真子集等势的有限集合。
- 推论12.3.2 任何与自己的真子集等势的集合均为无限集合。 N 和 R 都是无限集合。
- 推论12.3.3 任何有限集合只与唯一的自然数等势。



12.4 集合的基数

定义12.4.1

- 对任意的集合 A 和 B ，它们的基数分别用 $\text{card}(A)$ 和 $\text{card}(B)$ 表示，并且 $\text{card}(A) = \text{card}(B) \Leftrightarrow A \approx B$ 。
(有时把 $\text{card}(A)$ 记作 $|A|$ 或 $\#(A)$ 。)
- 对有限集合 A 和 $n \in \mathbb{N}$ ，若 $A \approx n$ ，
则 $\text{card}(A) = n$ 。



基数理解

- 集合的基数是刻画一个集合大小（或度量）的精确数学概念
- 可以理解为一个集合中元素“个数”的抽象，是有穷集合元素个数的推广



12.4 集合的基数

12-4-1 (自然数集合 N 的基数)

- N 的基数不是自然数，因为 N 不与任何自然数等势。
- 通常用Cantor的记法，把 $card(N)$ 记作 \aleph_0 ，读作“阿列夫零”。
- \aleph 希伯来字母表的第一个字母
- 因此，

$$card(Z) = card(Q) = card(N \times N) = \aleph_0$$



12.4 集合的基数

12-4-2 (实数集合 R 的基数)

- R 的基数不是自然数，也不是 \aleph_0 (因为 $\neg R \approx N$) 。
- 通常把 $\text{card}(R)$ 记作 \aleph_1 ，读作“阿列夫壹”。
- 因此，

$$\text{card}([0,1]) = \text{card}((0,1)) = \text{card}(R^+) = \aleph_1$$



例: $A=\{a, b, c\}$, $B=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$.

$N_{\text{偶}}=\{n \mid n \in N \wedge n \text{ 为偶数} \}$,

$N_{\text{奇}}=\{n \mid n \in N \wedge n \text{ 为奇数} \}$

$$\text{card}(A)=\text{card}(B)=3$$

$$\text{card}(N_{\text{偶}})=\text{card}(N_{\text{奇}})=\aleph_0$$

$$\text{card}([0, 1])=\text{card}((0, 1))=\aleph_1$$



12.5 基数的算术运算

定义12.5.1

- 对任意的基数 k 和 l ,
 - (1) 若存在集合 K 和 L , $K \cap L = \emptyset$, $\text{card}(K) = k$, $\text{card}(L) = l$, 则 $k + l = \text{card}(K \cup L)$
 - (2) 若存在集合 K 和 L , $\text{card}(K) = k$, $\text{card}(L) = l$, 则 $k \cdot l = \text{card}(K \times L)$
 - (3) 若存在集合 K 和 L , $\text{card}(K) = k$, $\text{card}(L) = l$, 则 $k^l = \text{card}(L^K)$, 其中 L^K 是从 L 到 K 的函数的集合。

11.1 函数和选择公理



从 A 到 B 的所有函数的集合数目

- 若 A 和 B 是有限集合, 且 $|A| = m$, $|B| = n$ 则

$$|A_B| = n^m = |B|^{|A|}$$

- \because 每个 f 恰好有 m 个有序对, 每个有序对的第二元素都有 n 种选择。



例：证明： $2+4=6$, $2 \times 3=6$, $3^2=9$, $0^0=1$.

证：(1) 取 $A=\{0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B = \emptyset$, 且

$$\text{card}(A)=2, \text{card}(B)=4,$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \approx 6$$

$$\therefore 2+4=\text{card}(A \cup B)=6.$$

(2) 取 $A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, 则 $\text{card}(A)=2$,

$$\text{card}(B)=3, \quad A \times B \approx 6, \quad \therefore 2 \times 3 = \text{card}(A \times B) = 6.$$

(3) 取 $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A)=2$, $\text{card}(B)=3$,

$$A_B \approx 9 \quad \therefore 3^2 = \text{card}(A_B) = 9.$$

(4) 取 $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, 则 $\text{card}(A) = \text{card}(B) = 0$

$$0^0 = \text{card}(\emptyset_\emptyset) = \text{card}(\{\emptyset\}) = 1.$$



- 例 5. 对任意集合A, 有

$$\text{card}(\mathcal{P}(A))=2^{\text{card}A}$$

证明: 由定义

$$2^{\text{card}A} = \text{card}(A_2), \text{ 其中}$$

$$A_2 = \{f \mid f: A \rightarrow \{0, 1\}\}$$

$$\because \mathcal{P}(A) \approx A_2,$$

$$\therefore \text{card } A_2 = \text{card}(\mathcal{P}(A))$$

$$\text{即 } \text{card}(\mathcal{P}(A)) = \text{card}(A_2) = 2^{\text{card}A}$$

推论: (1) $\text{card } (\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$

$$(2) \text{card } (\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{\aleph_1}$$



12.5 基数的算术运算

定理12.5.1 对任意的基数 k 、 l 和 m ,

$$(1) \quad k + l = l + k$$

$$k \cdot l = l \cdot k$$

$$(2) \quad k + (l + m) = (k + l) + m$$

$$k \cdot (l \cdot m) = (k \cdot l) \cdot m$$

$$(3) \quad k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$$

$$(4) \quad k^{(l+m)} = k^l \cdot k^m$$

$$(5) \quad (k \cdot l)^m = k^m \cdot l^m$$

$$(6) \quad (k^l)^m = k^{(l \cdot m)}$$



12.6 基数的比较

定义12.6.1

- 对集合 K 和 L , $\text{card}(K) = k$,
 $\text{card}(L) = l$, 如果存在从 K 到 L 的单射函数,
则称集合 L 优势于 K , 记作 $K \leq L$,
且称基数 k 不大于基数 l , 记作 $k \leq l$ 。



12.6 基数的比较

定义12.6.2

- 对基数 k 和 l ,
- 如果 $k \leq l$ 且 $k \neq l$,
- 则称 k 小于 l , 记作 $k < l$ 。



12.6 基数的比较

定理12.6.1

- 对任意的基数 k 、 l 和 m
 - (1) $k \leq k$
 - (2) 若 $k \leq l$ 且 $l \leq m$ ，则 $k \leq m$ ，
 - (3) 若 $k \leq l$ 且 $l \leq k$ ，则 $k = l$ （施罗德-伯恩斯坦定理），
 - (4) $k \leq l$ 或 $l \leq k$



12.6 基数的比较

例5:

- $R \approx N_2$, 即 $R \approx P(N)$ 。

$f: N \rightarrow \{0,1\}$ $G: N_2 \rightarrow [0,1]$

$G(f) = 0.10011\dots$



- $R \approx N_2$

证明: 只需证 $R \leq N_2$, 且 $N_2 \leq R$

(1) 先证 $R \leq N_2$. 为此只需证 $(0, 1) \leq N_2$.

构造函数 $H: (0, 1) \rightarrow N_2$,

对 $\forall z \in (0, 1)$, 有 $H(z) \in N_2 = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$

其中 z 表示二进制无限小数

$H(z): \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $H(z)(n)$ 为 z 的小数点后的第 $(n+1)$ 位数

显然, $z_1 \neq z_2$ 时, $H(z_1) \neq H(z_2)$

$\therefore H$ 为单射, $\therefore (0, 1) \leq N_2$.



(2) 证 $N_2 \leq R$. 只需证 $N_2 \leq [0, 1]$,

设 $G: N_2 \rightarrow [0, 1]$

$$\forall f \in N_2 = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

则 f 的函数值确定一个 $[0, 1]$ 区间上的实数, 例如 $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$ 依次为 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots 时, 取二进制数

$$y = 0.10111000\dots, \text{ 则 } y \in [0, 1]$$

$$\text{即 } G(f) = 0.101110\dots$$

显然 H 是单射. $\therefore N_2 \leq [0, 1]$

• 推论: $\aleph_1 = \text{card } R = \text{card } N_2 = 2^{\aleph_0}$.



12.6 基数的比较

定理12.6.2

• 对任意的基数 k 、 l 和 m ，如果 $k \leq l$ ，

(1) $k + m \leq l + m$

(2) $k \cdot m \leq l \cdot m$

(3) $k^m \leq l^m$,

(4) 若 $k \neq 0$ 或 $m \neq 0$ 则 $m^k \leq m^l$



12.6 基数的比较

定理12.6.3 对基数 k 和 l , 如果 $k \leq l$ 、 $k \neq 0$,

l 是无限基数, 则

$$k * k = k?$$

$$k + l = k \cdot l = l = \max(k, l)$$

定理12.6.4

- (1) 对任意的无限集合 K , $N \leq K$ 。
- (2) 对任意的无限基数 k , $\aleph_0 \leq k$ 。

\aleph_0 是最小的无限基数



12.6 基数的比较

例6:

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以, $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$



12.6 基数的比较

例7: 对任意的无限基数 k , $k^k = 2^k$ 。

证明

$$k^k \leq (2^k)^k = 2^{k \cdot k} = 2^k \leq k^k \quad k * k = k$$

所以, $k^k = 2^k$



12.7 可数集合与连续统假设

定义12.7.1 (可数集合)

- 对集合 K , 如果 $\text{card}(K) \leq \aleph_0$,
- 则称 K 是可数集合。



12.7 可数集合与连续统假设

定理12.7.1 (可数集的性质)

- (1) 可数集的任何子集是可数集。
- (2) 两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。
- (3) 若 K 是无限集合, 则 $P(K)$ 是不可数的。
- (4) 可数个可数集的并集是可数集

(该结论可表述为: 若 A 是可数集, A 的元素都是可数集, 则 $\bigcup A$ 是可数集)。



12.7 可数集合与连续统假设

- 已知的基数按从小到大的次序排列有

$$0, 1, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_1}, \dots$$

$$0, 1, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_i, \aleph_{i+1} \dots$$

$$\text{其中 } \aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$$



12.7 可数集合与连续统假设

12-7-1 (连续统假设 Continuum Hypothesis)

1878年, 由Cantor提出, 简称CH假设)

- “连续统假设”就是断言不存在基数 k , 使

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0} (\aleph_1)$$

- 这个假设至今未经证明。
- 有人已证明: 根据现有的 (ZF) 公理系统, 既不能证明它是对的, 也不能证明它是错的。



关于连续统假设的讨论

- 哥德尔和科恩已经证明，连续统假设和ZF公理系统既是独立的也是相容的。
- 也就是说，ZF公理加上连续统假设或者加上连续统假设的否命题，都不会导出任何矛盾。
- 这是一个确定无疑的结果，建立在严格的证明之上。



关于连续统假设的讨论

- 但上述结果并没有对连续统假设本身的真伪作出判断。
- 不过从80年代后期开始，有人通过构造连续统假设的等价命题，试图说明连续统假设是不合理的。如果这样的观点得到认可，则有理由认为ZF公理体系应该得到进一步加强。
- 但由于这些等价命题都不是“直观正确”或者“直观不正确”的，所以关于这个问题还存在争论。



本章主要内容小结

- 集合的等势
- 康托定理
- 自然数集与实数集的基数
- 典型的无穷集合的基数运算
- 连续统假设与主要结论

康托乐园



优酷



下次课总复习

谢谢

myc@tsinghua.edu.cn