



# 解释一下什么叫“任何解释？”

个体域 $D$  个体常项 $a$  谓词符号 $P$  函数符号 $f$

在论域确定之后，一个谓词公式的解释，  
包括对谓词变项、命题变项、  
函数和自由个体的具体设定

程序设计什么时候有解释？



# 个体域D 个体常项a 谓词符号P 函数符号f

```
1  int fibo(int n) {
2      if ((n == 1) || (n == 2)) {
3          return 1;
4      }
5
6      int prev = 1;
7      int curr = 1;
8
9      for (int i = 3; i <= n; i++) {
10         int sum = prev + curr;
11         prev = curr;
12         curr = sum;
13     }
14
15     return curr;
16 }
```

```
1  //根据半径计算圆的周长和面积
2  #include <iostream.h>
3  const float PI=3.1416;           //声明常量(只读变量)PI为3.1416
4  float fCir_L(float);             //声明自定义函数fCir_L()的原型
5  float fCir_S(float);             //声明自定义函数fCir_S()的原型
6
7  //以下是main()函数
8  main()
9  {
10     float r,l,s;                  //声明3个变量
11
12     cout<<"r=";                  //显示字符串
13     cin>>r;                       //键盘输入
14     l=fCir_L(r);                  //计算圆的周长, 赋值给变量l
15     s=fCir_S(r);                  //计算圆的面积, 赋值给变量s
16     cout<<"l="<<l;               //显示计算结果
17     cout<<"\ns="<<s;
18 }
19
```



# Discrete Mathematics

## 离散数学(1)

### 第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

马昱春



清华大学  
Tsinghua University



# 第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式 (全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法



- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算的应用更为广泛。
- 本章从语义的角度进行非形式的描述。



# 温习普遍有效公式(4-6-1)

任何解释，不应该包括个体域，已确定个体域个数。默认为总论域。

设 $A$ 为一个谓词公式，若 $A$ 在任何解释下真值均为真，则称 $A$ 为普遍有效的公式。

例  $(\forall x) (P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$  ( $y$ 是 $x$ 个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) \neg P(x)$

在 $D1$ 上普遍有效，但在 $D2$ 上则不一定。

$D1 = \{0\}; D2 = \{0, 1\}$

令 $P(0) = 1, P(1) = 0$



## 5.1 否定型等值式

### 5-1-1 等值

设  $A, B$  是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若  $A \leftrightarrow B$  是普遍有效的公式，则称  $A$  与  $B$  等值，记作

$$A = B \quad \text{或} \quad A \Leftrightarrow B$$



# 一、从命题公式移植来的等值式

- 命题公式中常常用到的等价式及永真蕴含式也可以看作是谓词演算中的等价式及永真蕴含式

例如

$$A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$$

$$(A(x) \rightarrow B(x)) = (\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$$





# 内容回顾: 命题公式

- 等值公式
- 基本推理公式

## 1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

## 2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

“ $\rightarrow$ ” 不满足结合律

## 3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“ $\rightarrow$ ” 不满足交换律

## 4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“ $\leftrightarrow$ ” 不满足分配律



# 内容回顾

## 5. 等幂律 (恒等律)

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

$$P \leftrightarrow P = T$$

## 6. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

## 7. 摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg (P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q \\ = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

## 8. 同一律:

$$P \vee F = P \quad P \wedge T = P$$

$$T \rightarrow P = P \quad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \quad F \leftrightarrow P = \neg P$$

## 9. 零律:

$$P \vee T = T$$

$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$

$$F \rightarrow P = T$$

## 10. 补余律:

$$P \vee \neg P = T$$

$$P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$



# 常用的等值公式

- 蕴涵等值式  $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式:  $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位:  $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式:  $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论:  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$



# 常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$  从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$  从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$  前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$  前提析取合并



# 基本推理公式

1.  $P \wedge Q \Rightarrow P$ , 但  $P \vee Q \not\Rightarrow P$

2.  $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

1式的直接推论  $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$

3.  $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

1式的直接推论  $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4.  $P \Rightarrow P \vee Q$

5.  $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

2式的逆否, 4式的推论。

6.  $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

3式的逆否, 4式的推论。

7.  $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

非 P, 而  $P \vee Q$  又成立, 只有 Q 成立

8.  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

\*假言推理, 分离规则, 7式的变形

9.  $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$  7式的变形



# 基本推理公式

$$10. (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

\*三段论

$$11. (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$$

类似10式

$$12. (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$$

10式的推论

$$13. (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$$

10式的推论

$$14. (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$$

9式的推论

$$15. (Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$$

$P=F$ 时左=右,  
 $P=T$ 时右=T

$$16. (Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$P=T$ 时左=右,  
 $P=F$ 时右=T



## 二、消去量词等值式

将论域限定为有限集,  $\{1, 2, \dots, k\}$ , 则有:

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \dots \vee P(k)$$



## 5.1 否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$$
$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \dots \vee P(k)$$

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$





$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

证明：设论域为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，则

$$\begin{aligned}\neg\forall xP(x) &= \neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \\ &= \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \\ &= \exists x\neg P(x)\end{aligned}$$



# 解释法

1.  $\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$

2.  $\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

- 证明：从语义上证明2。

对任意赋值  $I(D)$ ，设  $\neg \exists x P(x)$  为真，则  $\exists x P(x)$  为假，即对任意的  $x \in D$ ， $P(x)$  为假，所以，对任意的  $x \in D$ ， $\neg P(x)$  为真，即  $\forall x \neg P(x)$  为真，因此  $\neg \exists x P(x) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$ 。

对任意赋值  $I(D)$ ，设  $\forall x \neg P(x)$  为真，则对任意的  $x \in D$ ， $\neg P(x)$  为真，即对任意的  $x \in D$ ， $P(x)$  为假，所以  $\exists x P(x)$  为假， $\neg \exists x P(x)$  为真，因此  $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists x P(x)$ 。

综上，得证。



$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

- $\{1, 2\}$  域分析
- 否定词越过量词的移动, 使用摩根定律



# 例1. 并非所有的动物都是猫

设  $A(x)$ :  $x$ 是动物

$B(x)$ :  $x$ 是猫

原语句可表示成  $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

依否定型公式得

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x) \neg(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x) \neg(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &= (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))\end{aligned}$$

而  $(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$  的含义是有一个动物不是猫, 显然这句话与原语句等同



- 例: “天下乌鸦一般黑” 的表示  
设 $F(x)$ :  $x$ 是乌鸦,  $G(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 一般黑  
原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$$

即不存在 $x, y$ 是乌鸦但不一般黑。

这两句话含义是相同的。

思考：是否需要判断 $x, y$ 不同？



- 经谓词演算有

$$\begin{aligned}& \neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y)) \\&= (\forall x)\neg(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y)) \\&= (\forall x)(\forall y)\neg(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y)) \\&= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x) \wedge F(y)) \vee G(x, y)) \\&= (\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))\end{aligned}$$



### 三、量词分配等值式





## 5.2 量词分配等值式

### 5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

其中 $q$ 是命题变项，与个体变元 $x$ 无关





## 5.2 量词分配等值式

### 5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

其中 $p, q$ 是命题变项, 与个体变元  $x$  无关



给出上面等式的证明。

先证明其中的第一个等式。

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee q)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee q \quad \text{依5.2.1的等值式}$$

$$= \neg(\exists x)P(x) \vee q \quad \text{依5.1.2的等值式}$$

$$= (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$



再证明其中的第三个等式

$$\begin{aligned} & (\forall x)(p \rightarrow Q(x)) \\ &= (\forall x)(\neg p \vee Q(x)) \\ &= \neg p \vee (\forall x)Q(x) \\ &= p \rightarrow (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$

同样可证其余两个等值式。

依5.2.1的等值式



## 5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词对  $\wedge$ ，存在量词对  $\vee$  的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x) P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

用  $\{1, 2\}$  域方法验证：

$\forall$  对  $\vee$  不满足分配律， $\exists$  对  $\wedge$  不满足分配律

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \\ &= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$



- 从  $\{1,2\}$  域上看

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \\ &= (P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2)) \\ &= (P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2)) \\ &= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$



$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) =$$
$$(\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$\begin{aligned} & (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \\ &= (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2)) \\ &= (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2)) \\ &= (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \\ &= (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

$$(\exists x)Q(x) = (\exists y)Q(y) \quad \text{变量易名规则}$$

$$\begin{aligned} (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) &= (\exists x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y) \\ &= (\exists x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y)) \\ &= (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \end{aligned}$$



但需注意:

$$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$



$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$



$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \quad (\text{从}\{1,2\}\text{域上看}) \\ = & (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ = & (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \\ & \vee (Q(1) \wedge P(2)) \\ = & (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee \\ & (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2)) \end{aligned}$$



$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 证明:

假设在论域D和解释I下前件 $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真, 则论域中至少有一个个体 $x_0$ , 使得  $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ 为真

于是 $P(x_0)$ 和 $Q(x_0)$ 都为真, 所以 $(\exists x)P(x)$ 以及 $(\exists x)Q(x)$ 为真, 进而得 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ 为真。

于是有

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$



$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

- 用解释法证明:

设在一解释I、D下，有 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 为T，  
则对D中的任何一个个体x，有 $P(x) \rightarrow Q(x)$ 为T  
这必能保证 $(\forall x)P(x)$ 为T时， $(\forall x)Q(x)$ 为T  
从而 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$ 为T。

为什么不等价？

任取x  $P(x)$  如果为假？



# 等值演算规则

- 置换规则
- 换名规则
- 代替规则



# 置换规则

- 设  $\Phi(A)$  是含公式  $A$  的公式，若  $A \Leftrightarrow B$ ，则  $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ .
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里  $A$ ， $B$  是一阶逻辑公式.



# 换名规则（约束变元的换名）

- 目的是使每个变元性质唯一
- 设 $A$ 为一公式，将 $A$ 中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为 $A'$ ，则 $A' \Leftrightarrow A$

例：  $\forall x A(x) \vee B(x)$

由于公式中的 $x$  即是自由的又是约束的，可利用此规则进行换名为：

$\forall t A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B(x)$  后可利用量词的扩充得到：

$$\forall t A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall t (A(t) \vee B(x))$$

# 代替规则（自由变元的代替）



设 $A$ 为一公式，将 $A$ 中某个自由出现的个体变项的**所有出现**用 $A$ 中未曾出现过的个体变项符号代替， $A$ 中其余部分不变，设所得公式为 $A'$ ，则 $A' \Leftrightarrow A$ 。

例：  $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

(代替规则) 自由的 $y$ 用 $t$ 代换

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(w, y, z)$

(代替规则) 自由的 $x$ 用 $w$ 代换

## 要不要换 $z$ ?



- 如何表达整个谓词逻辑里使用同一个 $z$ 的情况呢？

例:  $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

(代替规则) 自由的 $y$ 用 $t$ 代换

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(w, y, z)$

(代替规则) 自由的 $x$ 用 $w$ 代换

```
int x = 1;  
int y = 2;  
int z = 3;
```

```
for (int x = 0; x < 10; x++) {  
    F(x, y, z); //谓词逻辑F  
}  
for (int y = 0; y < 10; y++) {  
    G(x, y, z); //谓词逻辑G  
}
```





## 例5. 5

例5.5 证明下列等值式。

$$(1) \quad \neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$(2) \quad \neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$(3) \quad \neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$$

$$(4) \quad \neg \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \\ \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$



$$(1) \quad \neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \\ \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg M(x) \vee \neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$(2) \quad \neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg F(x) \vee G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



$$\begin{aligned} 3) \quad & \neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \neg (\forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y \neg (\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee H(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)) \end{aligned}$$



$$(4) \quad \neg \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \\ \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$

$$\begin{aligned} & \neg \exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x \neg (\exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))) \\ & \Leftrightarrow \forall x \forall y \neg (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee \neg L(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y)) \end{aligned}$$



## 5.3 范式 (Normal Form)

### 前束范式 Skolem标准型

6	第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
---	--------------------	--





## 5-3-1 前束范式

设 $A$ 为一阶谓词逻辑公式，如果满足

- (1) 所有量词都位于该公式的最左边；
  - (2) 所有量词前都不含否定词；
  - (3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，
- 则称 $A$ 为前束范式。



## 5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n)M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中  $Q_i (1 \leq i \leq n)$  为  $\forall$  或  $\exists$ ， $M$  为不含量词的公式，称作公式  $A$  的基式或母式。





## 5-3-2 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。



## 5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词蕴含和双蕴含，。
2. 右移否定词 $\neg$ （利用否定型等值式与摩根律）。
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。



例1: 求下式的前束范式

$$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x)))$$

可按下述步骤实现:

(1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$ ; 得

$$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b) \vee R(x)))$$

(2)  $\neg$ 内移 (反复使用摩根律)

$$\begin{aligned} &\text{得 } (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$



(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists z)\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z) \end{aligned}$$



使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的 $S(a, b, x, y, z)$ 是原公式的母式。

$(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$ 是否唯一？

由于前束形中量词的次序排列，如 $(\exists y)(\exists z)$ 也可以写成 $(\exists z)(\exists y)$ 以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \wedge P)$$

其中 $P$ 可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

# 前束范式存在定理



**定理5.1** 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

**证明：**通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等值的前束范式。



说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及三条变换规则（置换规则、换名规则、代替规则）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。



$$(1) \quad \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

解

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y) \quad (\text{否定型等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \forall y \neg G(y)) \quad (\text{量词对}\wedge\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y)) \quad (\text{量词对}\wedge\text{分配律})$$

或者

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \quad (\text{否定型等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x)) \quad (\text{量词对}\wedge\text{分配律})$$

由此可知, (1)中公式的前束范式是不唯一的.



(2)  $\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$   
 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x)$  (否定型等值式)  
 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall y \neg G(y)$  (换名规则)  
 $\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall y \neg G(y))$  (量词分配律)  
 $\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \vee \neg G(y))$  (量词分配律)

问: (2)的下述求法是否正确?

$$\begin{aligned} & \forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x (F(x) \vee \neg G(x)) \end{aligned}$$





## 例5.8 求公式的前束范式

$$(1) \forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall t F(t, y) \rightarrow \exists w G(x, w) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists w (F(t, y) \rightarrow G(x, w)) \quad (\text{分配律})$$

或者

$$\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x, t) \rightarrow \exists y G(w, y) \quad (\text{代替规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x, t) \rightarrow G(w, y)) \quad (\text{分配律})$$

说明

解本题时一定要注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

# 5-3-4 SKOLEM 标准型 (SNF)

## Skolem normal form



**Thoralf Skolem** worked on **Diophantine equations (丢番图方程)**, mathematical logic, group theory, lattice theory and set theory.



Born: 23 May 1887 in Sandsvaer, Norway  
Died: 23 March 1963 in Oslo, Norway



## 5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式  $A$ ，若其
  - (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词；
  - (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，便得到公式  $A$  的 SKOLEM 标准型。
- 公式  $A$  与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。



# 定义？

收藏 | 0 | 分享

## Skolem标准型 [编辑](#)

本词条由“科普中国”百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

Skolem标准型是Skolem于1920年提出的一个使一阶公式标准化的方法，其定义如下：Skolem标准型是如下任意一种形式的一阶命题：(1) $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_n Ux_1x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n$  (II  $\Sigma$ 型)；(2) $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m Ux_1x_2 \dots x_m$  (II型)；(3) $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_m Ux_1x_2 \dots x_m$  ( $\Sigma$ 型)。其中，U是不含量词且连接符仅仅为 $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ 的公式。

中文名	Skolem标准型	别 称	斯柯林标准型，斯柯林标准范式等
外文名	Skolem standard model	相关概念	谓词公式，存在量词，全称量词等
所属学科	数学	提出者	斯柯林(Skolem)

WIKIPEDIA  
The Free Encyclopedia

[Main page](#)  
[Contents](#)  
[Featured content](#)  
[Current events](#)  
[Random article](#)  
[Donate to Wikipedia](#)  
[Wikipedia store](#)

[Interaction](#)  
[Help](#)

## Skolem normal form

From Wikipedia, the free encyclopedia

In [mathematical logic](#), a [formula](#) of [first-order logic](#) is in **Skolem normal form** if it is in [prenex normal form](#) with only [universal first-order quantifiers](#).

Every first-order [formula](#) may be converted into Skolem normal form while not changing its [satisfiability](#) via a process called **Skolemization** (sometimes spelled **Skolemization**). The resulting formula is not necessarily [equivalent](#) to the original one, but is [equisatisfiable](#) with it: it is satisfiable if and only if the original one is satisfiable.<sup>[1]</sup>

Reduction to Skolem normal form is a method for removing [existential quantifiers](#) from [formal logic](#) statements, often performed as the first step in an [automated theorem prover](#).



## 5-3-7 $\forall$ 前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式  $A$  的  $\forall$  前束范式（或称 SKOLEM 标准型）是仅保留全称量词的前束范式。



例3: 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$ 的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。

该例已是前束形, 便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的 $(\exists x)$ 消去, 而将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $x$ 均以论域中的某个常项 $a$ (未在 $P$ 中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词 $(\exists u)$ , 因 $(\exists u)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ , 而将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $u$ 均以 $y, z$ 的某个二元函数 $f(y, z)$  (未在 $P$ 中出现过)代入。



例3: 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$ 的Skolem标准形。

消去存在量词 $(\exists w)$ ，因 $(\exists w)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ 和 $(\forall v)$ ，需将谓词 $P$ 中出现的所有变元 $w$ 均以 $y$ 、 $z$ 、 $v$ 的某个三元函数 $g(y, z, v)$  (未在 $P$ 中出现过也不同于 $f(y, z)$ )代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$$



消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，如 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的Skolem标准形是 $(\forall x)P(x, f(x))$ 。因为 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的意思是对任一 $x$ ，都有一个 $y$ 使 $P(x, y)$ 成立，那么这个 $y$ 通常是依赖于 $x$ 的，可视作 $x$ 的某个函数 $f(x)$ 。

函数会取某个值来判定是否满足

从而有Skolem标准形 $(\forall x)P(x, f(x))$ ，然而所能找到的 $y$ 不必然是 $x$ 的函数 $f$ ，于是 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$ 不等值。





在 $\{1, 2\}$ 域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。  
不等值举例取 $P(x, y)$ 为 $x=y$ 则  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$  为真  
对于 $f(x) = \neg x$ ;  $(\forall x)P(x, f(x))$  为假;  
**这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。**



## 5-3-8 $\forall$ 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式  $A$  都可化成相应的  $\forall$  前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称 SKOLEM 标准型），并且  $A$  是不可满足的当且仅当其  $\forall$  前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说对于不可满足的公式，它与其 Skolem 标准形是等值的，而一般的公式与其 Skolem 标准形并不是等值的。自然仅当  $A$  是不可满足的方使用 Skolem 标准形。



## 5-3-5 $\exists$ 前束范式\*

- 一阶谓词逻辑的任一公式的 $\exists$ 前束范式的形式为

$$(\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_i)(\forall x_{i+1}) \dots (\forall x_n)M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词( $i \geq 1$ ),同时 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中不含量词也无自由个体变项。



## 5-3-6 $\exists$ 前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式  $A$  都可以化为相应的  $\exists$  前束范式，并且  $A$  是普遍有效的当且仅当其  $\exists$  前束范式是普遍有效的。



# 第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式 (全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法



谢谢