数学的基本概念？

序

数

函数

关系

大部分数学家相信……

- 任何数学理论都在某种意义上是关于集合的理论；
- 任何数学命题是真的都意味着它在ZFC中得到证明。
  - 集合论来刻画经典数学的**基本概念**
    - **关系，函数，序，数**
  - 困难：有很多数学问题，包括连续统假设。

第十章 关系

马昱春
清华大学计算机系

关 系

关系是数学中最重要的概念之一

- ❖父子关系、师生关系
- ❖等于、大于、小于关系
- ❖直线的平行、垂直关系

在计算机科学中有广泛应用

- ❖人工智能
- ❖程序设计
- ❖数据库管理—关系数据库

第十章　关系

二元关系

- 最简单的关系
- 可看作对应(Correspondence)或者映射(Map)
- 关系的要素成对出现，且这两个对象有顺序的。

有序对

- 由两个元素x和y（允许$x=y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。

用集合的形式，有序对$<x, y>$定义为

$$\langle x, y \rangle = \quad x \; , \quad x, \; y$$

- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

无序对集合存在公理

1. 当$x \neq y$ 时，$<x, y> \neq <y, x>$。

2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是
   $x = u$ 且 $y = v$。

笛卡儿积(CARTESIAN PRODUCT)

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素， B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$。

 A和B的笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B = \langle x,\ y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B$$

- **$A=\{\varnothing\}$,**
- **$P(A)\times A$**
- **$=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$**

笛卡尔(1596年-1650年)

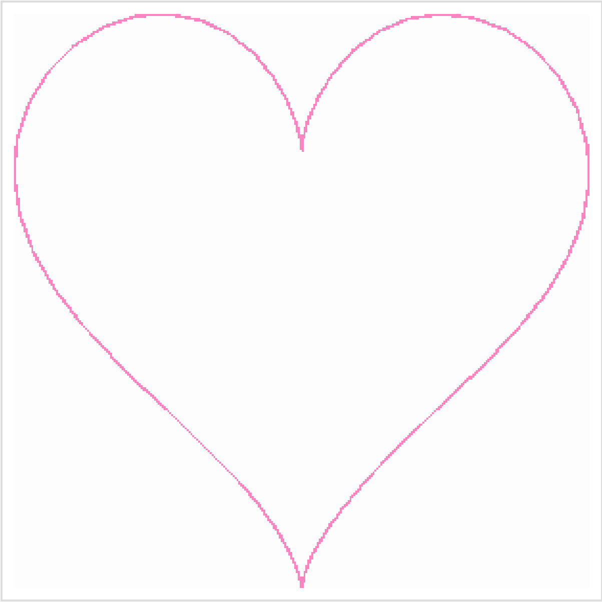
- René Descartes
- 法国哲学家、数学家、物理学家
- “我思故我在”
  - “普遍怀疑”的终点。他从这一点出发确证了人类知识的合法性。
- 解析几何之父，西方现代哲学思想的奠基人
- 数学史上最浪漫的故事
  - 瑞典一个小公国18岁的公主克里斯蒂娜
  - 日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信。笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了。

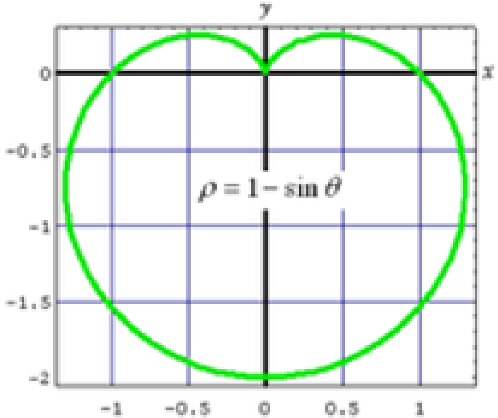
笛卡尔(1596年-1650年)

$$r = a(1 - Sin\,\theta\,)$$

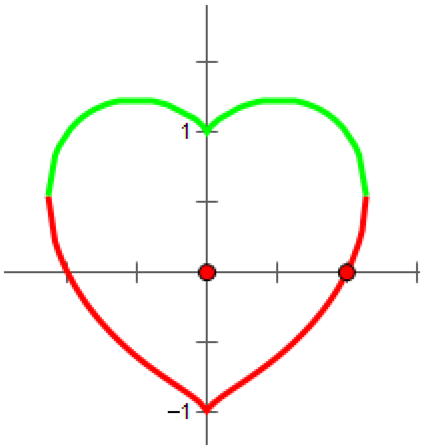
- 心形线

$$x = 16(\sin t)^3$$
$$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$$

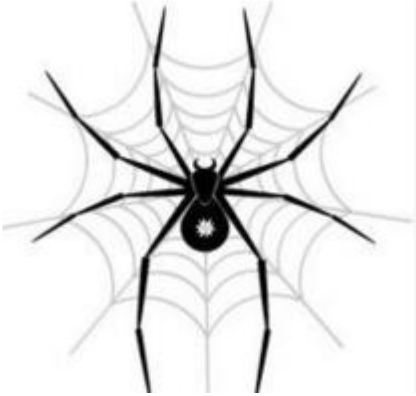




$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2y^3$$



解析几何的创立



- 据说有一天，笛卡尔生病卧床，病情很重
  - 几何图形是直观的，而代数方程是比较抽象的，能不能把几何图形和代数方程结合起来，也就是说能不能用几何图形来表示方程呢?
  - “点”和“数”联系起来。
  - 屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来。一会功夫，蜘蛛又顺这丝爬上去，在上边左右拉丝。
  - 把蜘蛛看作一个点。他在屋子里可以上，下，左，右运动，能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢?
  - 屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数。
  - 反过来，任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点P与之对应，同样道理，用一组数(x,y)可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示，这就是坐标系的雏形。

【笛卡尔积及其性质】

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$

有序对与笛卡儿积

证明：

❖对任意三个集合*A*，*B*，*C*有

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明： $<x, y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times B\vee <x, y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

单选题 1分

设置

设A, B, C, D是任意集合，判断下列命题是否正确?

❖ $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$

A 正确

B 不正确

提交

有序对与笛卡儿积

例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

- $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$
  - 不正确。取$A=\varnothing$，$B\neq C$，$A\times B=A\times C=\varnothing$

单选题 1分

设置

设 A，B，C，D 是任意集合，判断下列命题是否正确?

❖ $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

A 正确

B 不正确

提交

有序对与笛卡儿积

例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

- $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$
  - 不正确。取$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$，

    $A-(B\times C)=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$

    而$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对（见定义9.3.4）；

（2）集合是空集；

则称该集合为一个二元关系，记作R。二元关系也简称关系。对于二元关系R，如果〈x, y〉$\in R$，也可记作xRy。

如果$<x,y> \notin R$，则记作$x \not R\, y$。

- 实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.
- R是二元关系，当a, b不是有序对时，S不是二元关系
- 根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not R\, c$ 等.

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

定义10.1.1 **A到B的二元关系**

设A, B为集合，A×B 的任一子集所定义的二元关系称为A到B的二元关系。

特别当 A=B 时，A×A的任一子集称为 A上的一个二元关系。

- 例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

N元关系

定义10.1.2 **n元关系（n元组的集合）**

若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的任一子集称为从 A_1到 A_n上的一个n元关系。

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

- 小于等于关系 L_A, 整除关系 D_A, 包含关系 $R_{\subseteq}$ 定义:
- $L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\leq y\}, A\subseteq R$，$R$ 为实数集合
- $D_B=\{<x,y>|\ x,y\in B\wedge x$ 整除 $y\}$,
- $B\subseteq Z^*, Z^*$ 为非0整数集
- $R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\subseteq y\}, A$ 是集合族.
- A上的真包含关系可定义为: $R_{\subset}=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in \mathrm{A}\wedge x\subset y\}$

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

例如， 对任意的集合A，A的幂集P(A)上的包含关系可定义为：

$$R_{\subseteq} = \left\{ \langle x, y \rangle \,\middle|\, x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y \right\}$$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 $P(B)$上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

定义10.1.3 三个特殊的关系 — 恒等关系、全域关系和空关系）

对任意的集合A,

A上的恒等关系I_A定义为 $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

A上的全域关系（全关系）E_A定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

对任意的集合A,

空集Φ是$A \times A$的子集，定义为A上的空关系。

例如，A={1,2}，则

E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}

I_A={<1,1>,<2,2>}

单选题 1分

设置

思考：若 $|A| = n$

A 上共可定义多少个不同的二元关系？

A $2n$

B n^2

C 2^{n^2}

D $2n^2$

提交

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

定义10.1.4 定义域和值域(domain & range)

设**R**是**A**到**B**的二元关系

（1）**R**中所有有序对的第一元素构成的集合称为**R**的定义域，记作***dom*(R)**。形式化表示为：

$$dom(R) = \left\{ x \,\middle|\, (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R) \right\}$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

（2）R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作*ran*(R)。形式化表示为：

$$ran(R)=\{y\mid(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R)\}$$

（3）R的定义域和值域的并集称为R的域(*field*)，记作*fld*(R)。形式化表示为：

$$fld(R)=dom(R)\cup ran(R)$$

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$，则

dom$R=\{1, 2, 4\}$

ran$R=\{2, 3, 4\}$

fld$R=\{1, 2, 3, 4\}$

$\cup R=?$

$\cup\cup R=?$

10.1 二元关系(BINARY RELATIONS)

- $\boldsymbol{R}$**={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>},**
- $\boldsymbol{R}$**={{{1},{1,2}}, {{1},{1,3}}, {{2},{2,4}}, {{4},{4,3}}}**
- $\cup R=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2\},\{2,4\},\{4\},\{4,3\}\}$
- $\cup\cup R=\{1,2,3,4\}$

$\cup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$

- **定理 10.1.1** 对A到B的关系R，如果$<x,y>\in R$,则$x\in\cup\cup R$, $y\in\cup\cup R$。
- **证明：** 已知$<x,y>\in R$,即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$
- $\{x,y\}\in\cup R$
- $x\in\cup\cup R, y\in\cup\cup R$
- **定理 10.1.2** 对A到B的关系R，则$fld(R)=\cup\cup R$.

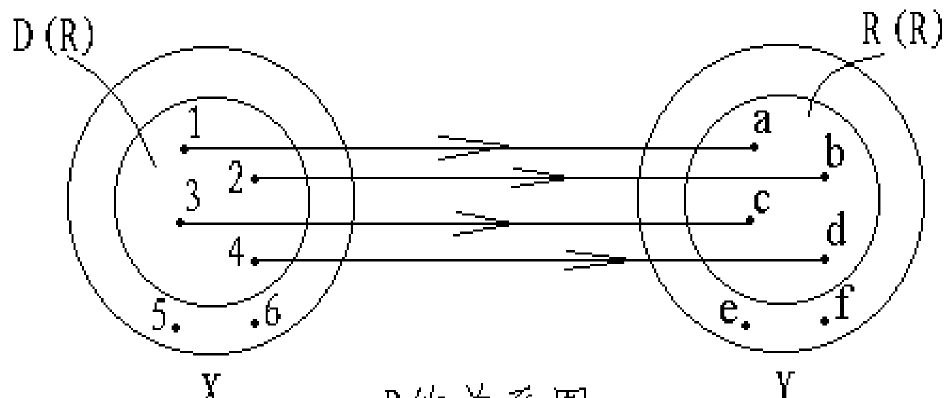
关系的运算

二元关系的定义域和值域

- 定义域：$domR = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$
- 值域：$ranR = \{y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$

例

- ***X={1,2,3,4,5,6},Y={a,b,c,d,e,f}***
- ***R={<1,a>,<2,b>,<3,c>,<4,d>}***
- ***domR={1,2,3,4}***
- ***ranR={a,b,c,d}***



R的关系图

关系的表示方法

- 关系的表示方法有三种：集合表示法，关系矩阵和关系图。
- 1\. 集合表示法

因为关系是一个集合，因此可以用集合的列举法或描述法来表示它。在前面的叙述中，已经多次采用了这两种方法。

例：$R1=\{(a,b)|(a+b)/5$是整数$\}$ 用的是描述法，

$R2=\{(1,2),(2,4),(3,3)\}$ 用的是列举法。

10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.1 关系矩阵 设集合

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

若R是X到Y的一个关系。则R的关系矩阵是$m\times n$矩阵，矩阵元素是r_{ij}。

$$M(R)=[r_{ij}]_{m\times n}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}\langle x_i,\ y_j\rangle\in R\\ 0 & \text{当}\langle x_i,\ y_j\rangle\notin R\end{cases}\quad(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

若R是X上的一个关系，则R的关系矩阵是$m\times m$方阵，定义与上述类似。

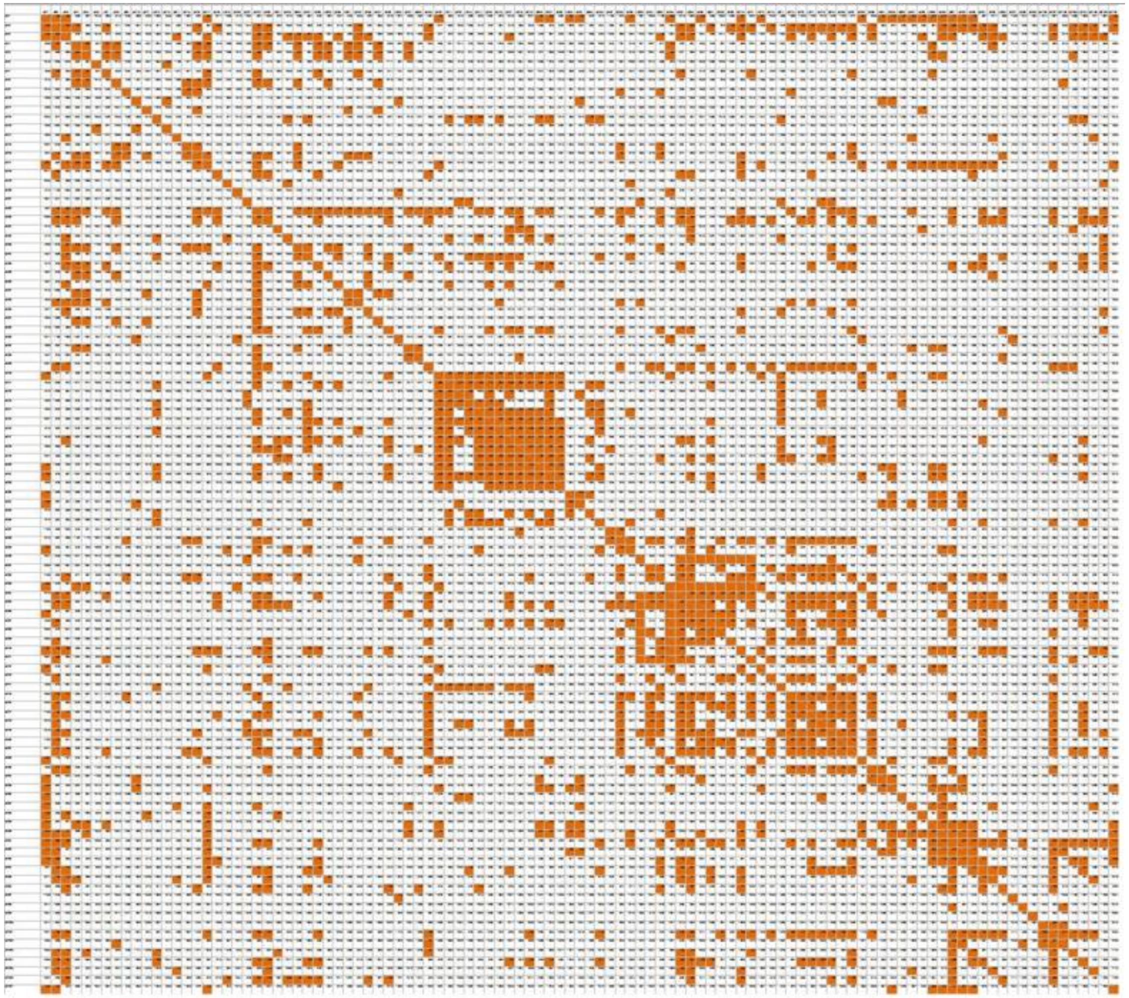
例

- 设$A=\{2, 3, 4, 5\}$，$B=\{6, 7, 8, 9\}$，由A到B的关系R定义为$R=\{(a, b) \mid a$与b互质$\}$。试写出R的关系矩阵M_R。
- 解

$R=\{(2, 7), (2, 9), (3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 9), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9)\}$，所以关系矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

关系矩阵表示法



10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.2 关系图

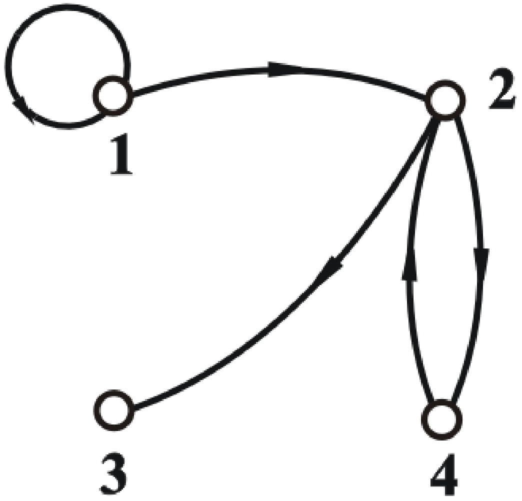
- 设集合$X=\{x_1, x_2,\dots, x_m\}$ $Y=\{y_1,y_2,\dots y_n\}$。若R是X到Y的一个关系，则R的关系图是一个**有向图(digraph)** $\boldsymbol{G(R)=(V,E)}$,它的顶点集是 $V=X\cup Y$，边集是E，从x_i到y_j的有向边$e_{ij}\in E$，当且仅当$<x_i,y_j>\in R$。
- 若**R**是**X**上的一个关系，则**R**的关系图是上述情形的特例。

$A=\{1,2,3,4\}$,

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



【关系及其表示】

- 关系图

情形1：R是从A到B的关系，采用如下的图示：

1）用大圆圈表示集合A和B，里面的小圆圈（或实心圆）表示集合中的元素；

2）若$a \in A$，$b \in B$，且$(a,b) \in R$，则在图中将表示a和b的小圆圈用直线或弧线连接起来，并加上从结点a到结点b方向的箭头。

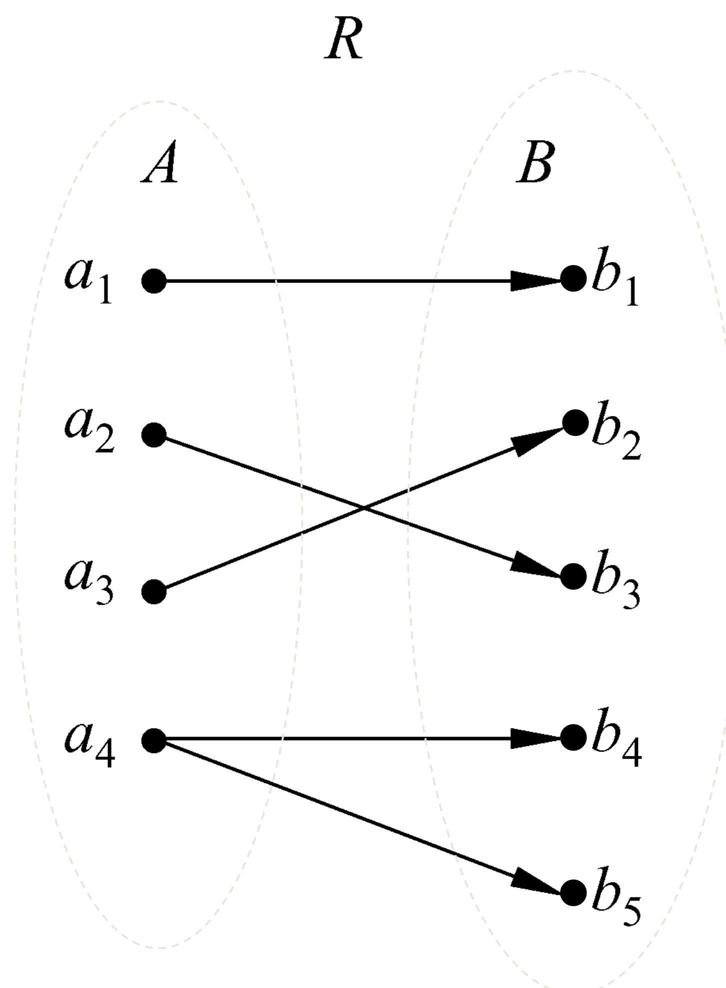
【关系及其表示】

例如：

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$R=\{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2),$
$(a_4, b_4), (a_4, b_5)\}$



【关系及其表示】

- **情形2**：R是A上的关系，其画法如下：

  1) 集合A中的每一个元素a用带有元素符号的顶点(称作顶点a)表示。

  2) 若a, $b \in A$, 且$(a,b) \in R$, 则将顶点a和顶点b用一条带有箭头的有向边连接起来，其方向由顶点a指向顶点b。

【关系及其表示】

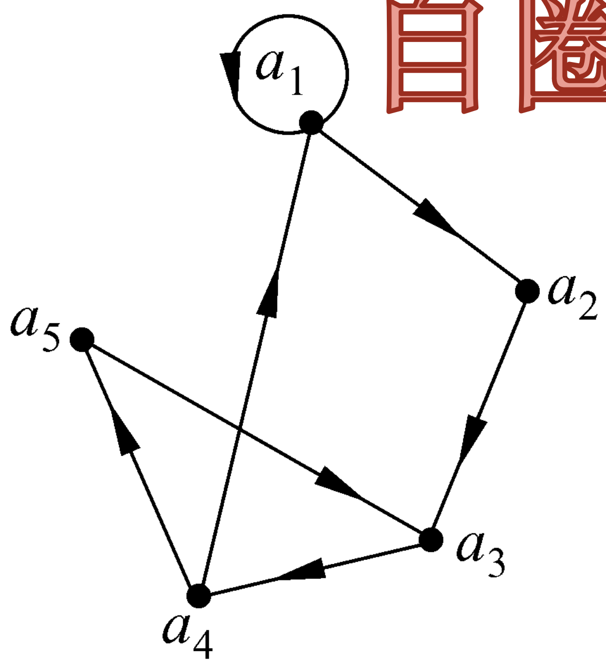
【例】$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，

$R=\{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3),$

$(a_3, a_4), (a_4, a_1), (a_4, a_5), (a_5, a_3)\}$。

求R的关系图。

自圈



10.3 关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1 **关系的逆、合成、限制和象**

对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义：

（1）R的**逆(inversion)**R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in R\}$$

- 例1　令A={1,2,3,4},
- $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$
- $R^{-1}=\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$
- 显然有：设R是任意的关系，则$(R^{-1})^{-1}=R$

关系的运算

二元关系的逆关系

$$R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$$

- ❖***R***$^{-1}$就是将***R***中的所有有序对的两个元素交换次序成为***R***$^{-1}$， 故|***R***|=| ***R***$^{-1}$ |

说明

- ❖***R***$^{-1}$ 的关系矩阵是***R***的关系矩阵的转置，即 $\mathbf{M}_{\mathbf{R}^{-1}}=(\mathbf{M}_{\mathbf{R}})^{\mathbf{T}}$
- ❖***R***$^{-1}$的关系图就是将**R**的关系图中的弧改变方向即可以

关系的运算

例：

- $R=\{<a,a>，<a,d>，<b,d>，<c,a>，<c,b>，<d,c>\}$
- $R^{-1}=\{<a,a>，<d,a>，<d,b>，<a,c>，<b,c>，<c,d>\}$

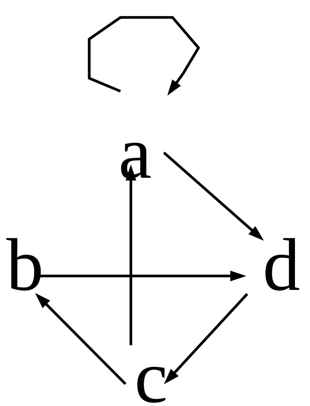
$$M_R=\begin{matrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{matrix} \quad M_R^{-1}=M_R^T=\begin{matrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{matrix}$$

关系的运算

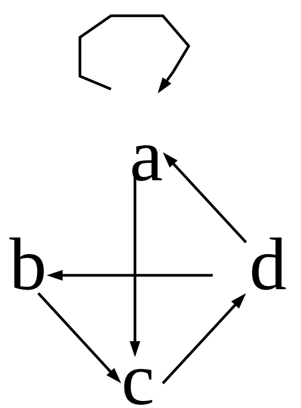
例：

- ❖ ***R={<a,a>，<a,d>，<b,d>，<c,a>，<c,b>，<d,c>}***
- ❖ ***R^{-1}={<a,a>，<d,a>，<d,b>，<a,c>，<b,c>，<c,d>}***

R的关系图



R^{-1}的关系图



10.3 关系的逆、合成、限制和象

（2） R与S的合成(composite relation) $S \circ R$（也称之为关系的左复合）为X到Z的关系

$$S \circ R=\{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$$

先R后S，先右后左

7.3 关系的运算

关系的左复合

$$S\circ R=\{<x,y>|\exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)\}$$

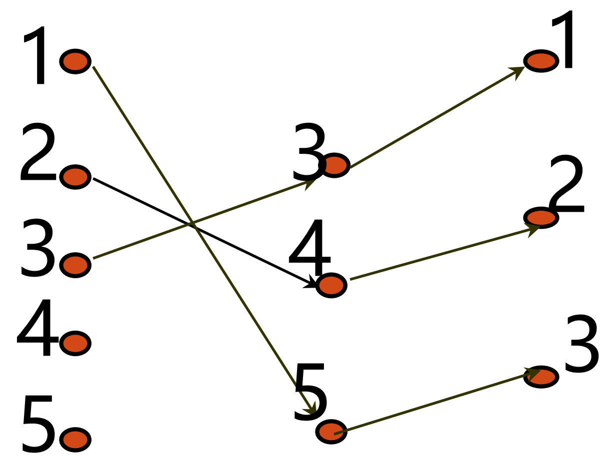
例

- $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$
- $R=\{<x,y>|x+y=6\}$
  $=\{<1,5>,<2,4>,<3,3>\}$
- $S=\{<y,z>|y-z=2\}$
  $=\{<3,1>,<4,2>,<5,3>\}$
- $S\circ R=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

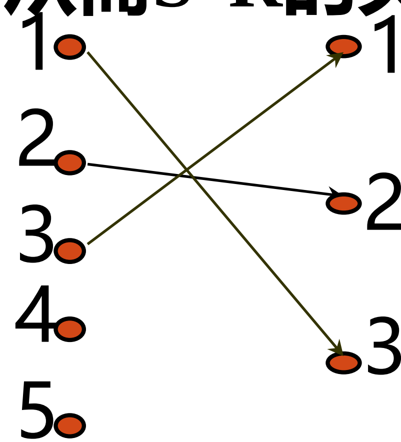
7.3 关系的运算

例（续）

- $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$
- $R=\{<x,y> \mid x+y=6\}$
  $=\{<1,5>,<2,4>,<3,3>\}$
- $S=\{<y,z> \mid y-z=2\}$
  $=\{<3,1>,<4,2>,<5,3>\}$
- $S \circ R=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$



从而S•R的关系图



7.3 关系的运算

例： $A=\{a,b,c,d,e\}$

- $R=\{<a,b>,<c,d>,<b,b>\}$
- $S=\{<d,b>,<b,e>,<c,a>\}$
- $S\circ R=\{<a,e>,<c,b>,<b,e>\}$
- $R\circ S=\{<d,b>,<c,b>\}$
- $R\circ R=\{<a,b>,<b,b>\}$
- $S\circ S=\{<d,e>\}$

注意： $R\circ S\neq S\circ R$

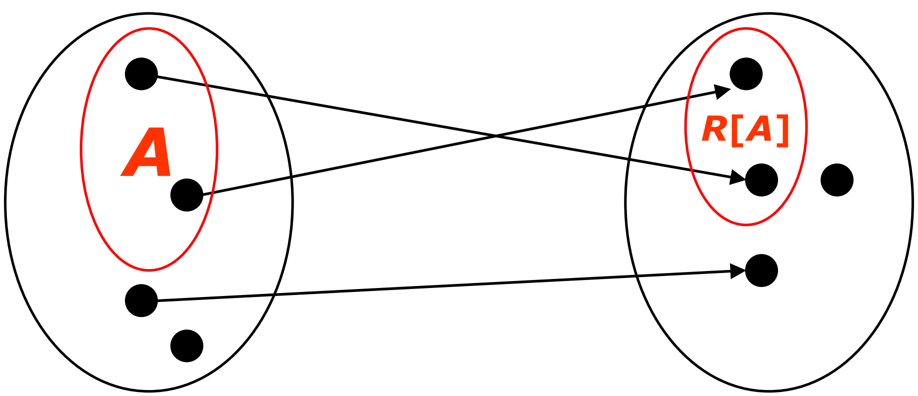
10.3 关系的逆、合成、限制和象

（3） 对任意的集合A，定义**R在A上的限制$R\uparrow A$**为A到Y的关系，其中R是X到Y的关系。

$$R\uparrow A=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\wedge x\in A\}$$

（4）**A在R下的象$R[A]$**为集合

$$R[A]=\{y \mid (\exists x)(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)\}$$



7.3 关系的运算

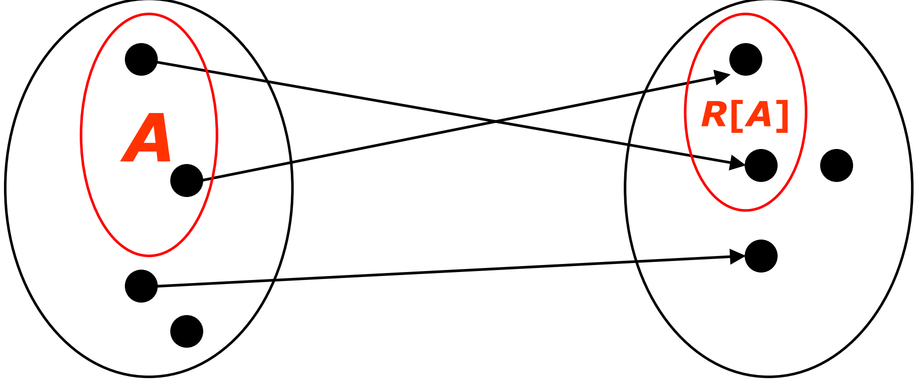
- 例：$R=\{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,4>, <3,2>\}$，求：

$$R\uparrow\{1\} \qquad R\uparrow\varnothing \qquad R\uparrow\{2,3\}$$

$$R[\{1\}] \qquad R[\varnothing] \qquad R[\{2,3\}]$$

$$R\uparrow A=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\wedge x\in A\}$$

$$R[A]=\{y \mid (\exists x)(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)\}$$



7.3 关系的运算

- 优先顺序：
  - 逆运算优先于其他运算
  - 关系运算优先于集合运算
  - 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

7.3 关系的运算

定理：设*F*是任意的关系，则

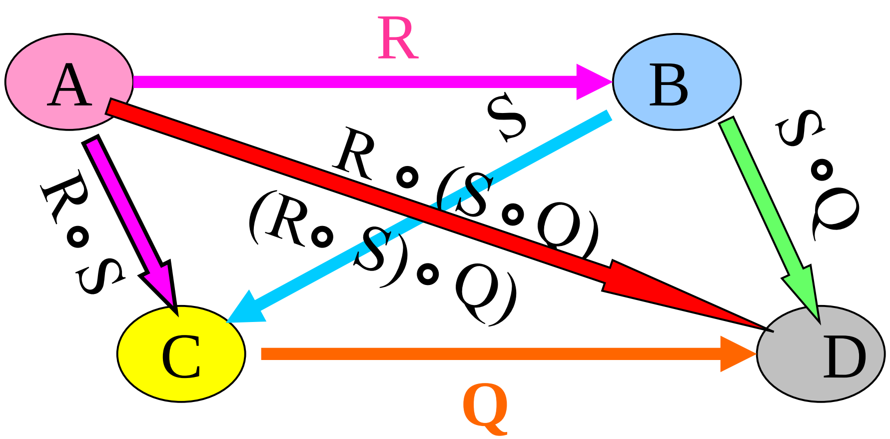
- $(F^{-1})^{-1}=F$
- $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

关系的运算

- 定理：设R，S，是任意的关系
  ① $(R\circ S)\circ Q = R\circ(S\circ Q)$
  ② $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

令 **R⊆A×B　S⊆B×C　Q⊆C×D**

可以用右图形象表示:



$$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$$

证明：$<x, y> \in (R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x> \in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists t(<y, t> \in S \wedge <t, x> \in R)$

$\Leftrightarrow \exists t(<x, t> \in R^{-1} \wedge <t, y> \in S^{-1})$

$\Leftrightarrow <x, y> \in S^{-1}\circ R^{-1}$

7.3 关系的运算

例

- $R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$
- $S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$
- $S \circ R=\{<a,1>, <a,4>,<a,5>,<b,2>,<c,2>, <c,4>,<c,5>\}$
- $(S \circ R)^{-1}=\{<1,a>, <4,a>, <5,a>, <2,b>, <2,c>, <4,c>,<5,c>\}$
- $R^{-1}=\{<a,a>, <c,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$
- $S^{-1}=\{<1,a>,<4,a>,<2,b>,<4,c>, <5,c>\}$
- $R^{-1} \circ S^{-1}=\{<1,a>, <4,a>,<2,b>,<2,c>, <4,c>,<5,a>,<5,c>\}$

7.3 关系的运算

定理：设R为A上关系，则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

定理：

- $R\circ(S\cup T) = R\circ S\cup R\circ T$
- $R\circ(S\cap T) \subseteq R\circ S\cap R\circ T$
- $(S\cup T)\circ X = S\circ X\cup T\circ X$
- $(S\cap T)\circ X \subseteq S\circ X\cap T\circ X$

7.3 关系的运算

定理:

- $R\upharpoonright(A\cup B) = R\upharpoonright A\cup R\upharpoonright B$
- $R[A\cup B] = R[A]\cup R[B]$
- $R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$
- $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

A和B的输出可能相同，但是不一定是同一个输入

7.3 关系的运算

定理: $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

证明: $\forall y \in R[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R \wedge x \in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((<x,y> \in R \wedge x \in A) \wedge (<x,y> \in R \wedge x \in B))$

$\Rightarrow \exists x(<x,y> \in R \wedge x \in A) \wedge \exists x(<x,y> \in R \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$

$\Leftrightarrow y \in R[A]\cap R[B]$

7.3 关系的运算

***R*的*n*次幂**

- 记为R^n
- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

定理：设*R*是集合*A*上的关系，$m,n \in N$

- $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
- $(R^m)^n = R^{mn}$

证明思路：使用归纳法并利用复合关系的结合律

7.3 关系的运算

例$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$

- $R^0=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$
- $R^1=R$
- $R^2=\{<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>\}$
- $R^3=R^2\circ R$

  $=\{<1,2>,<2,1>,<1,4>,<2,3>,<2,5>\}$
- $R^4=R^3\circ R$

  $=\{<1,1>,<2,2>,<1,5>,<2,4>,<1,3>\}$
- $R^5=R^4\circ R$

  $=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10-3-1 **$S\circ R$的关系矩阵** 设A是有限集合，$|A|=n$。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$M(R)=[r_{ij}]$和$M(S)=[s_{ij}]$都是$n\times n$的方阵。于是R与S的合成$S\circ R$的关系矩阵

$$M(S\circ R)=[W_{ij}]_{n\times n}$$

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作$M(S\circ R)=M(R)\cdot M(S)$

其中

$$w_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

- 复合关系运算不满足交换律，但关系的复合运算满足结合律。
- 复合关系可以用图形表示，也可以用矩阵来求。
- 关系的矩阵运算是布尔运算，只涉及0和1。

布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

- 矩阵表示

R={<1,2>,<3,4>,<2,2>}
S={<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>}

- 则

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R\circ S} = \mathbf{M}_S * \mathbf{M}_R,$$

$$M_{S\circ R} = M_R * \mathbf{M}_S$$

$$M_{R^2} = \mathbf{M}_R{}^2$$

$$M_{R^3} = \mathbf{M}_R{}^3$$

注意复合顺序

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

谢　谢

myc@mail.Tsinghua.edu.cn