线性代数期中试卷 (2023.4.22)

一、 简答与计算(每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&2&2\\2&2&2&2&2\\2&2&3&2&2\\2&2&2&4&2\\2&2&2&2&5\end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，计算 A^{2023}.

3. 已知线性方程组 $\left\{\begin{array}{lcl}\lambda x_1+x_2+x_3&=&1\\x_1+\lambda x_2+x_3&=&\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3&=&\lambda^2\end{array}\right.$ 无解，求 λ 的值.

4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

5. 举例说明下列命题是错误的.
   (1) 若 A 为 n 阶方阵，$A^2=A$，则 $A=E$ 或 $A=O$.
   (2) 若 A 为 n 阶方阵，$A^2=O$，则 $A=O$.

二、(12分) 设 A,B 分别为 m,n 阶可逆矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 求 $X=\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 X^*. (2) 求 $G=\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&2&0&1\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 G^*.

三、(12分) 设向量 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}$，$n\geq 2$. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 有相同的秩.

四、(12分) 设 $\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,k_1+k_2+k_3=1$.

(1) 求方程组 $Ax=0$ 的通解. (2) 求 $\mathrm{rank}(A)$.

五、(12分) 解线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&1&0\\1&4&-4&3\\4&6&-1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}6\\6\\12\\18\end{pmatrix}$.

六、(12分) 设 A 为 n 阶方阵($n\geq 3$)，证明 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

线性代数期中试卷 答案 (2023.4.22)

一、 简答与计算(每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&2&2\\2&2&2&2&2\\2&2&3&2&2\\2&2&2&4&2\\2&2&2&2&5\end{vmatrix}$.

解：$D\overset{r_i-r_1,i=2,\ldots,5}{=}\begin{vmatrix}1&2&2&2&2\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&2&0\\1&0&0&0&3\end{vmatrix}\overset{r_2\text{展开}}{=}1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&2&2&2\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-12.$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，计算 A^{2023}.

解：$A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},A^4=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix},\cdots,A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{1}{2}n(n-1)\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$

所以 $A^{2023}=\begin{pmatrix}1&2023&1011\times2023\\0&1&2023\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2023&2045253\\0&1&2023\\0&0&1\end{pmatrix}.$

解法二：用数学归纳法证明 $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{1}{2}n(n-1)\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$. 然后得到 $A^{2023}=\begin{pmatrix}1&2023&2045253\\0&1&2023\\0&0&1\end{pmatrix}$.

3. 已知线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3&=&1\\x_1+\lambda x_2+x_3&=&\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3&=&\lambda^2\end{cases}$ 无解，求 λ 的值.

解：对方程组的增广矩阵 (A,b) 作初等行变换得到行梯形矩阵，

$$(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&\lambda\\0&1-\lambda&\lambda-1&(\lambda-1)\lambda\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&(1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{pmatrix}.$$

方程组无解等价于 $\mathrm{r}(A)<\mathrm{r}(A,b)$，即 $\mathrm{r}(A)=2,\mathrm{r}(A,b)=3$，于是 $\lambda=-2$.

4. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：利用初等行变换.

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

解法二：对 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 用初等列变换.

解法三：利用伴随矩阵. $|A|=2$. $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$，所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

5. 举例说明下列命题是错误的.

(1) 若 A 为 n 阶方阵，$A^2=A$，则 $A=E$ 或 $A=O$.

(2) 若 A 为 n 阶方阵，$A^2=O$，则 $A=O$.

解：(1) 取 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&x\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1)$ 等.

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等.

二、(12分) 设 A,B 分别为 m,n 阶可逆矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 求 $X=\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 X^*. (2) 求 $G=\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&2&0&1\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 G^*.

解：(1) 由于 A,B 可逆，所以 $|A|\neq0,|B|\neq0$. $|X|=\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|\neq0$，即 X 可逆.

由 $XX^*=|X|E$ 可得 $X^*=|X|X^{-1}$. 不妨设 $X^{-1}=\begin{pmatrix}P&Q\\M&N\end{pmatrix}$，由 $XX^{-1}=E$ 得

$\begin{cases}AP+CM&=E\\AQ+CN&=O\\BM&=O\\BN&=E\end{cases}$ 解得 $X^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$.

所以 $X^*=|X|X^{-1}=|A|\cdot|B|\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$. （或$=\begin{pmatrix}|B|A^*&-A^*CB^*\\O&|A|B^*\end{pmatrix}$）

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix},B^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}0&-3\\-2&-1\end{pmatrix}$,

所以 $G^*=|A|\cdot|B|\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&18&-6&-9\\0&-6&2&1\\0&0&0&-6\\0&0&-4&-2\end{pmatrix}$.

三、(12分) 设向量 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}$，$n\geq2$. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 有相同的秩.

证明：由条件知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

$\begin{cases}\beta_1&=&\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\\\beta_2&=&\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\\\quad\cdots,\\\beta_n&=&\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1},\end{cases}$ 可得 $\sum\limits_{i=1}^n\beta_i=(n-1)\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$，即 $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n\beta_i=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$，

可得 $\alpha_k=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n\beta_i-\beta_k,i=1,2,\cdots,n$. 这表明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示，从而两个向量组等价，有相同的秩.

证法二：由条件知 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$，其中 $P=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$,

则有 $|P|=\begin{vmatrix}n-1&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq0$，即 P 可逆，

从而有 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}$，即两个向量组可以相互表示，故等价，有相同的秩.

四、(12**分**) 设 $\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3, k_1+k_2+k_3=1$.

(1) 求方程组 $Ax=0$ 的通解. (2) 求 $\mathrm{rank}(A)$.

解：(1) 由条件知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 $Ax=b$ 的特解，方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_3.$$

于是方程组 $Ax=0$ 的通解为 $\eta=k_1(\alpha_1-\alpha_3)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)$.

注意到 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_3=(0,0,2,2)^{\mathrm{T}},\beta_2=\alpha_2-\alpha_3=(0,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的，

因此方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_3=(0,0,2,2)^{\mathrm{T}},\beta_2=\alpha_2-\alpha_3=(0,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 方程组的变量是4维向量，所以 $\mathrm{r}(A)=4-2=2$.

五、(12**分**) 解线性方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&1&0\\1&4&-4&3\\4&6&-1&2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}6\\6\\12\\18\end{pmatrix}$.

解：基于初等行变换. $(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&6\\2&2&1&0&6\\1&4&-4&3&12\\4&6&-1&2&18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&6\\0&-2&3&-2&-6\\0&2&-3&2&6\\0&-2&3&-2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-3/2&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

于是非齐次方程组的解可表示为 $\begin{cases}x_1 &= -2x_3+x_4\\ x_2 &= \dfrac{3}{2}x_3-x_4+3\end{cases}$，令 $x_3=x_4=0$ 可得一个特解 $\eta=(0,3,0,0)^{\mathrm{T}}$.

分别令 $(x_3,x_4)=(1,0),(0,1)$ 可得齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为$\alpha_1=(-2,\dfrac{3}{2},1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 于是原方程组的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \forall k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

六、(12**分**) 设 A 为 n 阶方阵($n\geq 3$)，证明 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

证明：当 $|A|\neq 0$ 时(当 $\mathrm{r}(A)=n$ 时)，由 $AA^*=|A|E$ 得 $A^*=|A|A^{-1}$，

所以 $(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*=|(|A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$.

当 $|A|=0$ 时分类讨论：

若 $\mathrm{r}(A)=n-1, AA^*=|A|E=O$，即 A^* 的列向量均为方程组 $Ax=0$ 的解，于是 A^* 的秩不超过 $Ax=0$ 的基础解系的向量个数，$\mathrm{r}(A^*)\leq n-\mathrm{r}(A)=1$. 从而 A^* 的任意一个 $n-1(\geq 2)$ 阶的子式均为0，即 $(A^*)^*=O=|A|^{n-2}A$.

若 $\mathrm{r}(A)\leq n-2$，则 A 的任意一个 $n-1$ 阶的子式均为0，$A^*=O$，仍然有 $(A^*)^*=O=|A|^{n-2}A$.

综上，命题得证.