离　散　数　学

马昱春
MA Yuchun
清华大学计算机系
myc@mail.tsinghua.edu.cn

考试安排

- 1月2日周四晚19:00-21:00
  - 一教201
  - 一教204
  - 一教205
  - 周二班一教二楼
- 考前答疑
  - AI
  - 12月31日上午？？

概 论　数理逻辑的研究内容

- **简单概括：两个演算加四论**

  命题演算与谓词演算 1-3, 4-5（章）

  集合论（集合、关系、函数、基数）9-12

  模型论（形式语言语法与语义间的关系）7

  递归论（可计算性与可判定性）6

  证明论（数学本身的无矛盾性）8

日期	课次	章 节	主要教学内容（注：*表示非基本要求的内容）
9.10	1	概述，第 1 章 1.1~1.4	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式，重言式，命题形式化
9.24	2	第 1 章 1.5-1.6 第 2 章 2.1 ~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集
9.29	3	第 2 章 2.5~ 2.10	对偶式*，范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则
10.8	4	第 3 章 3.1 ~ 3.6	归结推理法，应用举例，命题逻辑的公理化，公理系统的结构，命题逻辑的公理系统 公理系统的完备性，王浩算法*，非标准逻辑简介*
10.15	5	第 4 章 4.1 ~ 4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法，公式的普遍有效性和判定问题
10.22	6	第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
10.29	7	第 5 章 5.4 ~ 5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例
11.5	8	第 9 章 9.1~9.4	集合的概念和基本表示法，集合间的关系和特殊集合 集合的运算，集合的图形表示法，集合运算性质和证明
11.12	9	第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
11.19	10	第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
11.26	11	第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
12.3	12	第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
12.10	13	第 11 章 11.1, 11.2，11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理，函数的合成，函数的逆
12.17	14	第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合 的基数，可数集合与连续统假设
12.24	15	复习课	课程总结
			考试（具体时间待定）

上课时间：每周二上午 9:50—12:15

注：

1. 标*的内容考试不考。包括王浩算法，对偶式，非标准逻辑简介，存在连词前束范式

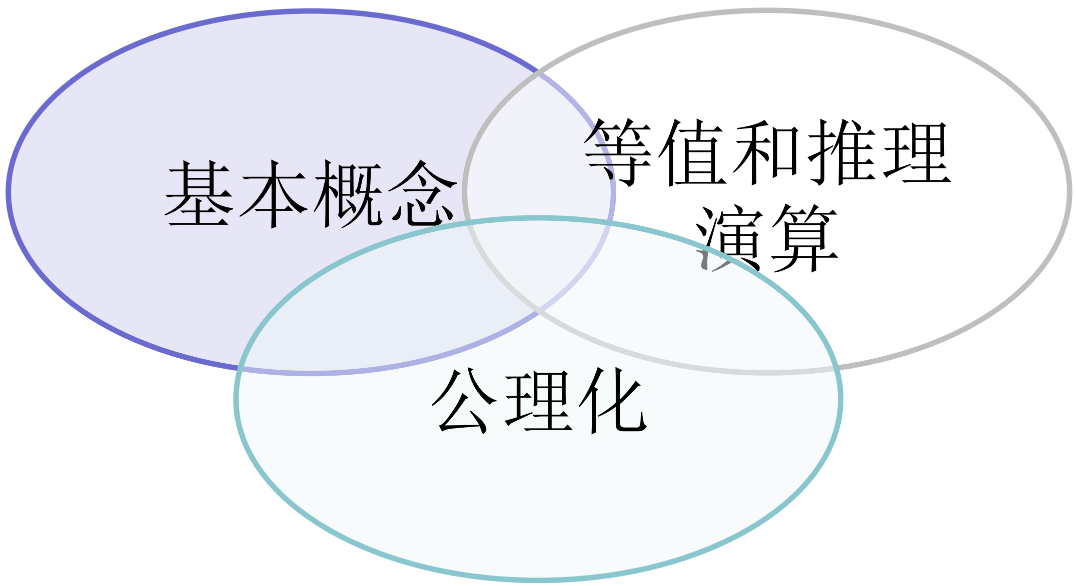
命题

陈述句

语

主要内容

- 命题逻辑



命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个**陈述句**，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。

2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值: 命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题: 与事实相符或表达的判断正确; 真值为真

假命题: 与事实不符或表达的判断错误; 真值为假

规定：任何命题的真值都是唯一的;

不能非真非假，也不能既真又假。

$x+y>5$.

1.2 常用的5个命题联结词

- 常用的5个命题联结词：
- 否定联结词　　　（非，$\neg$ ）
- 合取联结词　　　（与，$\wedge$ ）
- 析取联结词　　　（或，$\vee$ ）
- 蕴涵联结词　　　（如果…，则… ，$\rightarrow$ ）
- 双蕴涵联结词　　（当且仅当，$\leftrightarrow$ ）

基本复合命题
（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

析取及异或联结词举例

- 例1. 5 将下列命题符号化

（1）张明喜欢学数学或计算机。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或计算机专业。

- 解 先将原子命题符号化
- （1） p：张明喜欢学数学。
- q：张明喜欢学计算机。
- 显然（1）中的“或”为相容或，即p与q可以同时为真，符号化为$p \vee q$。

（2）张明报考的第一志愿只选择数学专业或计算机专业。

- 设 r：张明选择数学专业

  s：张明选择计算机专业
- 若将命题符号化为$r \vee s$，由于r，s的联合取值情况有四种：同真，同假，一真一假（两种情况）。张明就可能同时选择数学专业和计算机专业，这不符合报考的实际情形。
- 如何达到只能选择唯一的第一志愿要求呢？

“或”与∨

设 *r*：张明选择数学专业

s：张明选择计算机专业

- 可以使用多个联结词，将该命题符号化为

$$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$$

- 此复合命题为真当且仅当*r*，*s*中一个为真，且另一个为假。
- 由题意可知，（2）中的“或”应为排斥或（不可兼或）。

异或联接词与命题形式化

教材P10例3：给出三个命题

p：今晚我在家里看电视。

q：今晚我去体育场现场看球赛。

r：今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：命题 r和$p \vee q$表达的是否是同一命题？

（注：上述看电视与看球赛均指同一时间段）

异或联接词与命题形式化

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

该表的前三行很容易理解。而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然据题意假设，对同一个人、同一时间段这是不可能发生的事情。从而这时r 的真值为F。

这也说明:

r与$p\vee q$在逻辑上是并不相等的，即r中出现的“或”不能以普通的“$\vee$”来表示。

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的**联结词优先顺序**为：

  （），¬，∧，∨，→，↔，

  $p \vee q \rightarrow p \vee r$

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

1.3 合式公式及其赋值

- 介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q\ \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？
- 如下命题形式定义的符号串表示的才是命题(公式)。

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6　合式公式

（1）单个命题变项是合式公式，并称为**原子命题公式**。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A\wedge B$），（$A\vee B$），（$A\rightarrow B$），（$A\leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有有限次地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为**命题公式**或命题形式，简称**公式。**

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的**子公式**。

$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设*A*为任一命题公式，

（1）若*A*在它的各种赋值下取值均为真，则称*A*是**重言式**或**永真式**。

（2）若*A*在它的各种赋值下取值均为假，则称*A*是**矛盾式**或**永假式**。

（3）若*A*不是矛盾式，则称*A*是**可满足式**

1.4 重言式与代入规则

- **代入规则**

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

1.4 重言式与代入规则

- 代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

1.4 重言式与代入规则

例2:

判断

$$((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$$

为重言式.

不难验证$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$是重言式。

1.4 重言式与代入规则

作代入

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知

$$((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$$

是重言式。

1.5 命题形式化

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

1. 明确给定命题的含义。
2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。
3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

1.5　命题形式化

1. 注意掌握用不同的方式表示同一命题公式的方法

2. 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题形式化中的问题

第一章

- 学会写陈述句
  - 命题形式化
  - 联结词
  - 真值表
  - 合式公式
- 波兰表达式(看ppt)

习题1.1/2

- 判断下列语句是否是命题，如果是求其真值。
  - 火星上有生命存在。
    - 真值待定/真

      这句话几乎无法证伪，如果有相关报道则为真，否则待定
  - 这句话是错的。
    - 不是命题，悖论

      不能“证明”一句话是悖论，要先定义了命题，才能定义“证明”
  - 假如明天是星期天，那么学校放假。
    - 如果“明天”不是星期天：真
    - 如果“明天”是星期天：一般来说是真
    - 错例：如果现在是xx周，假
    - 修改：如果现在是xx周周六，假
    - 如果把日期理解成“变元”，这句话不是命题
- P表示今天很冷，Q表示正在下雪。
  (1)将命题符号化：正在下雪的必要条件是今天很冷
- 正解：$Q \rightarrow P$

易错点：区分充分条件和必要条件

习题1.6

易错点：
1. 逆波兰式单目运算符错写到前面
2. 连续相同运算符结合了后两项

∨是左结合的，从左至右依次计算

波兰式中¬放前面，逆波兰式中放后面

- 写出波兰式和逆波兰式

	原式	波兰式	逆波兰式
(1)	$P \to Q \vee R \vee S$	$\to P \vee\vee QRS$	$PQR \vee S \vee \to$
(3)	$\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$	$\vee\vee \neg\neg P \wedge WR\neg Q$	$P\neg\neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$

不能等值替换，不能交换左右，不能去掉连续的¬这是求原式的另一种形式，而不是化简原式，就像“列出方程”的题目不应该把方程解出来一样

$func(E)$：对表达式 E 求波兰式或逆波兰式

如果E只剩一个命题变项，返回E

如果E满足 (E_1) 的形式，返回 $func(E_1)$

找到**最后**计算的符号@

if @是单目运算（例如¬）

单目运算一定在开头，即$E = @E_1$

返回$@func(E_1)$（波兰式）或$func(E_1)@$（逆波兰式）

else

双目运算将表达式分成了两半，即$E = E_1@E_2$

返回$@func(E_1)func(E_2)$（波兰式）或$func(E_1)func(E_2)@$（逆波兰式）

第二章 命题逻辑的等值和推理演算

2.1 等值定理

$\Leftrightarrow$不是联结词

$A\Leftrightarrow B$与$A\leftrightarrow B$

等值

给定两个命题公式 A和 B，设P_1, P_2, … , P_n为出现于A和B中的所有命题变项，则公式 A和 B共有2^n个解释。

若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的、或称等价，记作

$A=B$ 或 $A\Leftrightarrow B$。

2.1 等值定理

- **定理2-1-1**

  设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为两个命题公式，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$的充分必要条件是$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$为一个重言式。

- 等值定理的证明

重要的等价式

- 双重否定律 $\neg\neg P = P$
- 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

“$\rightarrow$” 不满足结合律

- 3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P$$
$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$
$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

- “$\rightarrow$” 不满足交换律
- 4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$
$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

- “$\leftrightarrow$” 不满足分配律

- 5. 等幂律（恒等律）

  $P \lor P = P$

  $P \land P = P$

  $P \rightarrow P = T$

  $P \leftrightarrow P = T$

- 6. 吸收律

  $P \lor (P \land Q) = P$

  $P \land (P \lor Q) = P$

- 7. 摩根（**De Morgan**）律：

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$ （借助图形）

- 8. 同一律：

$$P \lor F = P \qquad P \land T = P$$
$$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$$
$$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

- 9. 零律：

$$P \lor T = T$$
$$P \land F = F$$
$$P \rightarrow T = T$$
$$F \rightarrow P = T$$

- 10. 补余律：

$$P \vee \neg P = T \qquad P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

- 蕴涵等值式 $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
- 等价等值式：$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- *假言易位：* $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
- *等价否定等值式：* $A \leftrightarrow B = \neg A \leftrightarrow \neg B$
- 归谬论：$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = \neg A$

证明其他等值式

2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:A是一个命题公式，X是A中子公式，如果X＝Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A＝B。

用途1：判别命题公式的类型

- 例1　判别$\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解　原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式,结合律)

$=(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　(双重否定律，幂等律)

$=(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　(交换律)

$=((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　(结合律)

$=Q\vee\neg P$　(吸收律)

可满足式

用途2：验证两个公式等值

例3：证明$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$

- 证明：

$$
\begin{aligned}
P\rightarrow(Q\rightarrow R) &= P\rightarrow(\neg Q\vee R) && （置换）\\
&= \neg P\vee(\neg Q\vee R) && （置换）\\
&= (\neg P\vee\neg Q)\vee R && （结合律）\\
&= \neg(P\wedge Q)\vee R && （摩根律）\\
&= (P\wedge Q)\rightarrow R && （置换）
\end{aligned}
$$

两个重要的命题联结词

- **与非联接词**

与非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非联接词"$\uparrow$"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$。读作P和Q的"与非"。当且仅当P和Q的真值都是T时，$P\uparrow Q$的真值为F，否则$P\uparrow Q$的真值为T。 $P\uparrow Q = \neg(P\wedge Q)$ （真值表）

P	Q	$P\uparrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

两个重要的命题联结词

- **或非联接词**

或非联接词是二元命题联结词。两个命题*P*和*Q*用或非联接词“↓”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P{\downarrow}Q$。读作*P*和*Q*的“或非”。当且仅当*P*和*Q*的真值都是*F*时，$P{\downarrow}Q$的真值为*T*，否则$P{\downarrow}Q$的真值为*F*。

$$P{\downarrow}Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

P	Q	$P{\downarrow}Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

概念

- **真值函项**
- **联结词的完备集**
- **{ ¬, ∨, ∧ }是完备的联结词集合**

逻辑联接词 常用5 ＋ 1（异或）＋ 2（与非、或非）

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

概念

- 对偶式
- 将给定的命题公式 A 中出现的 $\vee, \wedge, T, F$ 分别以 $\wedge, \vee, F, T$ 代换，得到公式 A^*，则称 A^* 是公式 A 的对偶式，或说 A 和 A^* 互为对偶式。

- $A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
  $A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$
  - $\neg(A^*) = (\neg A)^*$
  - $\neg(A^-) = (\neg A)^-$
  - $(A^*)^* = A$，$(A^-)^- = A$
  - $\neg A = A^{*-}$
  - 若 $A = B$，必有 $A^* = B^*$
  - 若 $A \rightarrow B$ 永真，必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真
  - A 与 A^- 同永真，同可满足；
  - $\neg A$ 与 A^* 同永真，同可满足。

范式

- 命题变项及其否定式（如P与$\neg P$）统
  称**文字**。
  且P与$\neg P$称为**互补对**。
- 由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。
- 由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。

- **析取范式是形如**
  $$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$
  的公式，其中A_i $(i = 1,\ldots,n)$为合取式。
- **合取范式是形如**
  $$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$
  的公式，其中A_i $(i = 1,\ldots,n)$为析取式

命题公式的合取范式和析取范式并不唯一

主范式

- n 个命题变项 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 组成的合取式：$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$ 其中 $Q_i = P_i$，或 $\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式 $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$ 为极小项，并以 m_i 表示。
- n 个命题变项 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 组成的析取式：$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$ 其中 $Q_i = P_i$，或 $\neg P_i$。即每个命题变项与它的否定式二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式 $Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$ 为极大项，并以 M_i 表示。

极小项和极大项

- $m_0 = \neg P \wedge \neg Q$
- $m_1 = \neg P \wedge Q$
- $m_2 = P \wedge \neg Q$
- $m_3 = P \wedge Q$
- 2^n个

- $M_0 = \neg P \vee \neg Q$
- $M_1 = \neg P \vee Q$
- $M_2 = P \vee \neg Q$
- $M_3 = P \vee Q$
- 2^n个

主析取范式与主合取范式

- 设由n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。
- 设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

求主析取范式的方法
1. 先求析取范式
2. 再填满变项

$\Leftrightarrow$

求主合取范式的方法
1. 先求合取范式
2. 再填满变项

$\mathbf{A}=\vee_{0,2,4}$

$\neg\mathbf{A}=\vee_{1,3,5,6,7}$

主析取范式与主合取范式的求法

$\mathbf{P \rightarrow Q = \neg P \vee Q}$

因为 $\mathbf{\neg P = \neg P \wedge (Q \vee \neg Q)}$

$\mathbf{= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$

- $\because$ $\mathbf{Q = Q \wedge (P \vee \neg P)}$

  $\mathbf{= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)}$

- $\mathbf{P \rightarrow Q = \underbrace{(\neg P \wedge Q)}_{m_1} \vee \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q)}_{m_0} \vee \underbrace{(P \wedge Q)}_{m_3}}$

  $\mathbf{= m_0 \vee m_1 \vee m_3}$

  $\mathbf{= \bigvee_{0, 1, 3}}$

填满变项的简便方法

$$\neg P \lor Q$$

$$= m^{0x} \lor m^{x1}$$

$$= m_0 \lor m_1 \lor m_3$$

0 0
0 1 0 1
0 1
1 1

主范式的求法与举例

- 综合举例

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合范式

原式 $= \neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\ \vee\ m^{010}\ \vee\ m^{10X}\ \vee\ m^{1X1}$

主范式的求法与举例

- ∴主析范式 = $\vee_{2.3.4.5.7}$

- 主合范式 $=\wedge_{(\{0.1\ldots7\}\ -\ \{2.3.4.5.7\})补}$

  $=\wedge_{\{0.1.6\}补}$

  $=\wedge_{1.6.7}$

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 列写真值表验算

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

习题2.5

易错点:
1. 二进制编码高低位搞反
2. 主析和主合互化只取反，或只取补

- 写出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式，以及所有使公式为真的解释
  - (1) $P \vee \neg P$
  - (3) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$
- 需要区分以下概念
  - 合取范式：用合取连接的若干个析取式，析取式可以为一个或多个命题变项或其否定式，“若干个”也可以是零个、一个或多个。
  - 主合取范式：用合取连接的若干个极大项析取式，每个析取式所有命题变项或其否定式必须出现一次且仅一次的合取范式。
  - 析取/主析取范式：相反
- 注意：不说明的情况下，字典序小的命题变项在写主范式编号时写在高位，假写成0，真写成1，写反了会被判成错的
- 注意：二进制编码形式的主析取范式和主合取范式并不是互补的，而是取反后互补

2.6 空公式（补充）

- 求P ∨ ┐P的主析取和主合取范式

主析取范式： P ∨ ¬ P

主合取范式： 空公式

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

习题2.5（cont）

- (1) $P \vee \neg P$
  - 合取范式（都对）
    - $P \vee \neg P$：合取连接的一个析取式
    - 空/T：合取连接的零个析取式
  - 析取范式（都对）
    - $P \vee \neg P$：析取连接的两个合取式，每个合取式为一个变项的合取
    - 空/T：析取连接的零个合取式
  - 主合取范式：空（永真，没有可排除的情况）
  - 主析取范式： $P \vee \neg P = \vee_{0;1}$（极小项只含一个变项）

基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$ 　　　*但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$*
2. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$ 　　　*1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$*
3. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$ 　　　*1式的直接推论 $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$*
4. $P \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$ 　　　*2式的逆否，4式的推论。*
6. $Q \Rightarrow P \to Q$ 　　　*3式的逆否，4式的推论。*
7. $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 　*非P，而 $P \vee Q$ 又成立，只有Q成立*
8. $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ 　　**假言推理，分离规则，7式的变形*
9. $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$ 　　*7式的变形*

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ **三段论*

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ *类似10式*

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ *8式的推论*

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ *8式的推论*

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$
9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ *P=F时左=右，P=T时右=T*

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ *P=T时左=右，P=F时右=T*

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

2.9 推理演算

- <u>**主要的推理规则**</u>

(1) 前提引入规则；*推理过程中可随时引入前提*

(2) 结论引入规则；*中间结论可作为后续推理的前提*

(3) 代入规则；*仅限于重言式中的命题变项*

(4) 置换规则；*利用等值公式对部分公式进行置换*

(5) 分离规则；*由A及$A \rightarrow B$成立, 可将B分离出来*

(6) 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ *与* $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ *等价*

归结法

- 归结法步骤

  1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）

  2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

     $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

     其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

     $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$

  3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

  4. 直至归结出矛盾式（□）。

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（axiom system）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

公理系统的结构

1. 初始符号

   公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. 形成规则

   公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则。

公理系统的结构(续)

3. 公理

精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. 变形规则

公理系统所规定的推理规则。

5. 建立定理

公理系统所作演算的主要内容，包括所有的重言式和对它们的证明。

具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	**5**	**4**
Frege公理系统	1879	**6**	**3**
Hilbert—Bernays	1934	**15**	
王浩算法	1959	**1** **(10条变形规则)**	
自然演绎系统		**0** **(5条变形规则)**	

谓词逻辑

语文

第四章 谓词逻辑的基本概念

- **4.1** 谓词和个体词
- **4.2** 函数和量词
- **4.3** 合式公式
- **4.4** 自然语句的形式化
- **4.5** 有限域下公式的表示法
- **4.6** 公式的普遍有效性和判定问题

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 + {变元，谓词，量词，函数}
- 这里讨论的是一阶谓词逻辑，
  或称狭谓词逻辑。

概念

- **个体词（主词）**
- **将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母*a, b, c,*…表示；**
- **而将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母*x, y, z,* …表示。**
- **并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以*D* 表示。**
- **约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。**

概念

- 谓词(Predicate)
- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。 $P(x)$, $Q(x, y)$
- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合{T, F}上的一个映射。
- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母P, Q, R,…表示，可根据上下文区分。

概念

- 多元谓词
  - 命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。
- 量词
  - 全称量词和存在量词
- 一阶谓词：在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项。

非一阶示例：$\forall p(p\rightarrow Q(x))$，　$\exists Q(Q(x)\rightarrow P(x))$

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：***a*, *b*, *c*, …**（小写字母）。
- 个体变项：***x*, *y*, *z*, …** （小写字母）。
- 命题变项： ***p*, *q*, *r*, …** （小写字母）。
- 谓词符号：***P*, *Q*, *R*, …** （大写字母）。
- 函数符号： ***f*, *g*, *h*, …** （小写字母）。
- 联结词符号 ¬, ∧, ∨, →, ↔ 。
- 量词符号：∀, ∃ 。
- 括号与逗号：（ ） ,

4.4 自然语句的形式化

- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。
- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“→”而不能使用“∧”。
- 例：所有的有理数都是实数 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 有的实数是有理数 $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$
- 没有无理数是有理数 $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

几种描述

- “唯一性”

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

自然数集的形式描述

。。。。。。

推理

范式

等值式

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

- 5.1 否定型等值式
- 5.2 量词分配等值式
- 5.3 范式(全称量词的前束范式)
- 5.4 基本推理公式
- 5.5 推理演算
- 5.6 谓词逻辑的归结推理法

5.1 等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)$$

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p \to Q(x)) = p \to (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

那些不等于的……

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y)) \neq (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) \neq (\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$$

- ∀ 对∨ 不满足分配率， ∃ 对∧不满足分配率

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

5.3.1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$$

- 其中$Q_i(1\leqslant i\leqslant n)$为$\forall$或$\exists$，$M$为不含量词的公式，称作公式 A的基式或母式。

- **例1: 求下式的前束范式**

$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x)))$

- 可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

得$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x)))$

(2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg (\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

- **(3)** 量词左移（使用分配等值式）得

$$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists z)\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$$

- 使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \wedge P)$$

其中P可以是任一不含量词的普通有效的公式。

5.3.4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，

  便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

基本推理公式 (续 命题逻辑温习)

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式，表示
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/ 析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ if $y \in D$	UI/全称举例
$P(y)$ for an arbitrary $y \in D \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG/全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in D$	EI/存在举例
$P(c)$ for some $c \in D \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG/存在推广

推理

- 全称量词消去规则
- 全称量词引入规则
- 存在量词消去规则
- 存在量词引入规则
- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

5-6-2 归结推理法步骤

- 1. **欲证** $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ **是定理，等价于证** $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_n \wedge \neg B$ **是矛盾式。**
- 2. **将*G*化为前束范式。进而化为**SKOLEM**标准型消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式*G**，**
  - **由于全称量词的前束范式*G**保持原式*G*不可满足的特性，故*G*与*G**在不可满足的意义下是一致的。**
- 3. 略去*G**中的全称量词，*G**中的合取词∧以“，”表示，便得到*G**的子句集*S*。实用中可分别求出诸A_i与¬*B*的子句集。
- 4. 对*S*作归结。直至归结出空子句□。

第九章 集合

- N:全体自然数集合
  - 0是不是自然数？
- N^+:除0以外的其他自然数的全体构成的集合
- Z:全体整数集合
- Z^+:全体正整数集合
- Q:全体有理数集合
- R:全体实数集合
- 若元素a属于集合A，记为$a \in A$,否则记为$a \notin A$

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$ $E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$

$\cup \varnothing = \varnothing$

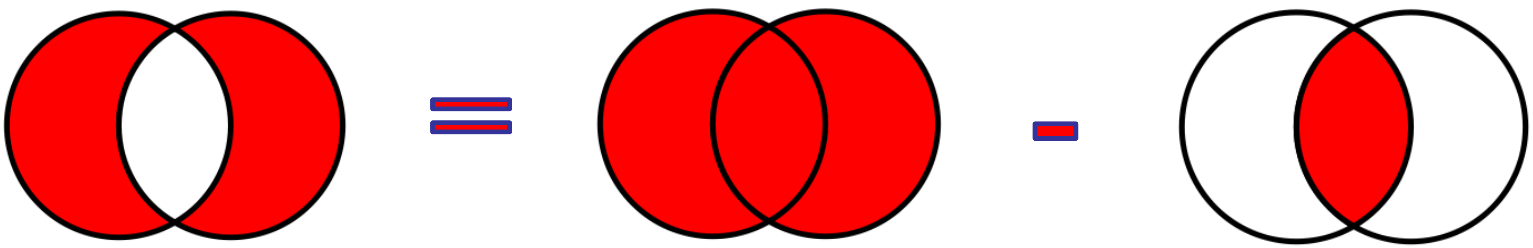
$\cap \varnothing$无意义

$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$

对称差

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$



(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(3) 分配律 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(4) 同一律 $A \oplus \Phi = A$

(5) 零律 $A \oplus A = \Phi$

(6) 吸收律 $A \oplus (A \oplus B) = B$

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

	$-$	$\sim$
D.M 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

概念：幂集(power set)

- 设A为集合，由A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作$\boldsymbol{P(A)}$。符号化表示为

$$P(A) = \{x|x \subseteq A\}$$

对任意的集合A，有$\varnothing \subseteq A$和$A \subseteq A$，因此有$\varnothing \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$。

$$\boldsymbol{x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A}$$

概念：集合A和B的**笛卡儿积** (Descartes product)

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。
- 所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A \times B$。
- A和B的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{< x, y >| x \in A \land y \in B\}$$

概念：n 阶笛卡儿积

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$， $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个集合，它们的n阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

$$= \{< x_1, x_2, \ldots, x_n > | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

概念：传递集合

- 如果集合的集合A的任一元素的元素都是A的元素，就称A为传递集合。该定义可写成

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)$$

由集合组成的集合A

- A是传递集合

x_1，x_2

- 例：$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

y_1，y_2，y_3

- 内层括号里的内容，在外层也能找得到。

9.6 有限集合的基数

- 定义9.6.1 有限集合的基数

  （cardinal number，potency)

  如果存在 $n \in N$，使集合 A与集合

  $$x \mid x \in N \wedge x < n \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

  的元素个数相同，就称集合 A的基数是 n，记作 $|A| = n$ 或 $card(A) = n$。

  空集的基数是 0。

9.6 有限集合的基数

- 定理9.6.1 幂集的基数

  对有限集合 A

$$\left|P(A)\right| = 2^{|A|}$$

- 定理9.6.2 笛卡儿积的基数

  对有限集合 A和 B

$$\left|A \times B\right| = \left|A\right| \bullet \left|B\right|$$

定理9.6.4 包含排除原理 (Principle of inclusion and exclusion)

- 对有限集合A和B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- 该定理可推广到n个集合的情形。若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是“任一集合的所有元素都是集合”。

  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：

  （1）判定集合的<u>存在性</u>；

  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（<u>合法性</u>）

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (8) 无穷公理

  存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\Phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \quad y \quad) \in x))$$

$$(\exists N)(\Phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- **自然数的集合表示方法：**
- Zermelo 1908年曾给出一种方法：
- $0 = \Phi$，$1 = \{\Phi\}$，$2 = \{\{\Phi\}\}$，…
- 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。 但‘$\in$’ 关系不满足传递性。
- 即由 $A\in B \wedge B\in C$ 成立，却推不出 $A\in C$ 成立。
- 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。

后继与自然数

- 定义9.7.3 前驱与后继

  对任意的集合A，定义集合

  $$A^+ = A \cup \{A\}$$

  A^+称为A的后继， A称为A^+的前驱。

- 定义9.7.4 用后继定义自然数

  集合$0 = \Phi$是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n+1 = n^+$也是一个自然数。

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 按照上述定义，每个自然数可表示为:

$$0=\Phi$$

$$1=0^+=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\Phi\}$$

$$2=1^+=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$$

$$3=2^+=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$$

$$\cdots$$

$$n+1=n^+=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

第十章 关系

- 二元关系
  - 关系的定义
  - 表示
  - 性质
  - 运算

关系的性质

自 反:

$$\forall x(x \in X \to xRx)$$

非自反:

$$\forall x(x \in X \to x \not R x)$$

对 称:

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$$

反对称:

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$$

传 递:

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

	自反 Reflexive （10.4.1）	非自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3 ）
定义 要点	$x \in A \to xRx$	$x \in A \to x\not{R}x$ $\langle x, x\rangle \notin R$	$xRy \to yRx$ $\langle x, y\rangle \in R \to$ $\langle y, x\rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\longrightarrow y \not{R} x$ $xRy \wedge yRx$ $\to x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\to xRz$ $\langle x, y\rangle \in R \wedge$ $\langle y, z\rangle \in R \to$ $\langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$ **主对角元均为1**	$r_{ii} = 0$ **主对角元均为0**	**对称矩阵** $r_{ij} = r_{ji}$	**若** $r_{ij} = 1 \wedge i \neq j$ $\to r_{ji} = 0$	**无直观特点或难以直接判断**
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是非自反的。

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A上的空关系 Φ	×	√	√	√	√
N上的整除关系	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

10.5 关系的闭包(closure)

定义10.5.2 闭包的定义

设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）； 满足性质

（2） $R \subseteq R'$； 包含关系

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）关系R''，$R' \subseteq R''$ 。 最小的那个

则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包 闭包

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

10.6 等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R是
  自反的、
  对称的、
  传递的，
- 则称R为A上的等价关系。

10.6 等价关系与划分

等价类

设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \ \wedge \ xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的R等价类
- x为等价类$[x]_R$的表示元素

10.6 等价关系与划分

商集：R是A上的等价关系，R的所有等价类构成的集合

记为A/R：$\{[x]_R \mid x\in A\}$

- 例：A为全班同学的集合，$|A|=n$，$(n\in N)$

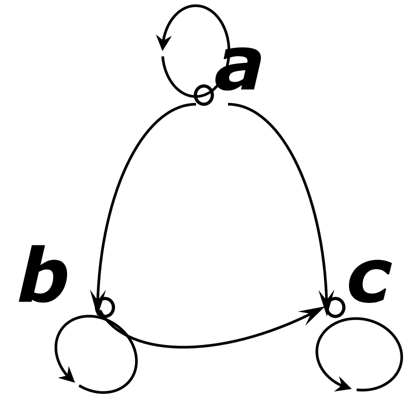
按指纹的相同关系R_1是一个等价关系

$$A/R_1=\{[x_1]_{R_1},\dots[x_{\mathrm{n}}]_{R_1}\}$$

同姓关系R_2是一等价关系

$$A/R_2=\{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\dots\}$$

偏序关系



- 偏序关系R (记作≼)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$<a,a>\in R$
  - 反对称性: $\forall a,b\in$R,如果$<a,b>\in R$且$<b,$a$>\in R$,则必有$a=b$
  - 传递性: $\forall a,b,c\in A$,如果$<a,b>\in R$,$<b,c>\in R$, 必有$<a,c>\in R$

- 例:偏序关系
  - $A=\{a,b,c\}$
  - $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$
  - 哈斯图
  - 链，反链

第10章重点内容

- 二元关系概念与表示
- 关系的主要性质

  自反、非自反、对称、反对称、传递
- 等价关系（与划分）

  自反、对称、传递，掌握证明方法。
- 偏序关系

  自反、反对称、传递，掌握证明方法

第11章 函数

定义11.1.1 （函数-function） 对集合*A*到集合*B*的关系*f*，若满足下列条件：

(1) 对任意的 $x \in dom(f)$ ，存在唯一的 $y \in ran(f)$ ，使 ***xfy*** 成立；

(2) $dom(f) = A$

则称 ***f*** 为从 ***A***到***B***的函数，或称 ***f*** 把***A***映射到***B***（有的教材称 ***f*** 为全函数、映射、变换）。

一个从***A***到***B***的函数 ***f***，可以写成 ***f***：***A***→***B***。

这时若***xfy***，则可记作 ***f***：***x***|→***y*** 或 ***f***(***x***) = ***y***。

- 例3: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.
- 从A到B的函数有多少个？

$$f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, a> \}$$
$$f_2 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, b> \}$$
$$f_3 = \{ <1, a>, <2, b>, <3, a> \}$$
$$f_4 = \{ <1, a>, <2, b>, <3, b> \}$$
$$f_5 = \{ <1, b>, <2, a>, <3, a> \}$$
$$f_6 = \{ <1, b>, <2, a>, <3, b> \}$$
$$f_7 = \{ <1, b>, <2, b>, <3, a> \}$$
$$f_8 = \{ <1, b>, <2, b>, <3, b> \}$$

于是 $A_B = \{ f_1, f_2, f_3, \ldots, f_8 \}$

概念

- 满射
- 单射
- 双射
- 常函数
- 恒等函数
- 单调函数
- 泛函
- 特征函数
- 自然映射

第十二章

第十二章 实数集合与集合的基数

- 12.1 实数集合
  1. 整数集合Z
  2. 有理数集合Q
  3. 实数集合R
- 12.2 集合的等势
- 12.3 有限集合与无限集合
- 12.4 集合的基数
- 12.5 基数的算术运算
- 12.6 基数的比较
- 12.7 可数集合与连续统假设

12.2 集合的等势

定义12.2.1 （**集合的等势**）

对集合*A*和*B*，如果存在从*A*到*B*的双射函数，就称*A*和*B*等势，记作*A*≈*B*;

如果不存在从*A*到*B*的双射函数，就称*A*和*B*不等势，记作 $\neg A \approx B$

- 注意，*A*≈*B*时不一定有*A* =*B*，
  反之一定成立（ *A* =*B* 则必有 *A*≈*B* ）。

12.4 集合的基数

定义12.4.1　对任意的集合A和B，它们的基数分别用 $card(A)$ 和 $card(B)$ 表示，

并且 $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A \approx B$。

(有时把 $card(A)$ 记作 $|A|$ 或 $\#(A)$。)

对有限集合A和$n \in N$，若$A \approx n$，

则 $card(A) = n$。

12.4 集合的基数

12-4-1 （自然数集合*N*的基数）

N的基数不是自然数，因为***N***不与任何自然数等势。通常用**Cantor**的记法，

把 ***card*(*N*)**记作 $\aleph_0$ ，读作"阿列夫零"。（ $\aleph$ 是希伯来语字母中的首字母）

由此可得，

$$card(Z)=card(Q)=card(N\times N)=\aleph_0$$

12.4 集合的基数

12-4-2 （实数集合R的基数）

R的基数不是自然数，也不是 $\aleph_0$（因为 $\neg R \approx N$）。通常把**card(R)**记作 $\aleph_1$，读作“阿列夫壹”。因此，

$$card([0,1]) = card((0,1)) = card(R^+) = \aleph_1$$

12.5 基数的算术运算

定义**12.5.1** 对任意的基数 k 和 l,

(1) 若存在集合 K 和 L, $K \cap L = \Phi$,

$card(K) = k$ ，$card(L) = l$ ，则

$k + l = card(K \cup L)$

(2) 若存在集合K和L，$card(K) = k$,

$card(L) = l$，则 $k \cdot l = card(K \times L)$

(3) 若存在集合K和L，$card(K) = k$,

$card(L) = l$，则 $k^l = card(L_K)$, 其中 L_K 是从L到K的函数的集合。

- **例6:**

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以， $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

12.7 可数集合与连续统假设

定义12.7.1 （可数集合）

对集合K，如果$card(K) \le \aleph_0$，

则称K是可数集合。

12.7 可数集合与连续统假设

定理12.7.1 （可数集的性质）

(1) 可数集的任何子集是可数集。

(2) 两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。

(3) 若K是无限集合，则P(K)是不可数的。

(4) 可数个可数集的并集是可数集

（该结论可表述为：若A是可数集，A的元素

都是可数集，则$\cup A$是可数集）。

- 已知的基数按从小到大的次序排列有

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad 2^{\aleph_1},\quad \cdots$$

12.7 可数集合与连续统假设

12-7-1 （连续统假设 Continuum Hypothesis

1878年，由Cantor提出，简称CH假设）

“连续统假设”就是断言不存在基数*k*，使

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0}$$

这个假设至今已部分解决。

有人已证明：根据现有的（ZF）公理系统，

既不能证明它是对的，也不能证明它是错的。

期末考试主要题型

- 1. 选择/判断题
- 2. 填空题 （直接给出结果）
- 3. 计算题 （列出计算步骤）
- 4. 证明题 （写出证明过程）

- 选择题与填空题需直接答在试卷纸上。
- 网络学堂上的样题供参考。

典型题目：选择题

1. （ ）简而言之，命题逻辑的公理系统是

A. 用来建立公理的系统。

B. 由公理产生推理规则的系统。

C. 用来完善已有公理的系统。

D. 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统。

D

典型题目：选择题

2. （ ）孔子曰：“己所不欲，勿施于人。”以下哪一选项不是这句话的逻辑推论？

A. 只有己所欲，才能施于人。

B. 除非己所欲，否则不施于人。

C. 若己所欲，则施于人。

D. 凡施于人的都应该是己所欲的。

C

典型题目：填空题

对n个命题变元，可定义$\underline{2^{2^n}}$个n元命题联接词。

设A = {1,2,3,4}，B = {a, b, c}，从A到B不同的二元关系共有$\underline{2^{12}}$, |A × B| =$\underline{\ 12\ }$。

从A到B不同的函数共有$\underline{\ 81\ }$个？在集合A上，可定义$\underline{\ 15\ }$个不同的等价关系？

在集合B上，写出等价类数目最多的那个等价关系R=$\underline{\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}}$。

典型题目：填空题

按照连续统假设，用最简洁的形式写出下列计算结果。

$|N_N| =$ $\underline{\aleph_1}$ $|R_R| = \aleph_2$

$|N^P| = \aleph_0$

注：$N^P = \{n | n \in N \wedge n\text{是素数}\}$

12.6 基数的比较

例7: 对任意的无限基数k,$k^k = 2^k$。

证明

$$k^k \le (2^k)^k = 2^{k\cdot k} = 2^k \le k^k$$

所以， $k^k = 2^k$

形式化

没有最大的素数

P(x)表示x是素数，

Q(x, y)表示x比y大

$$\neg(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)\big(P(y) \to Q(x,y)\big)\Big)$$

计算题

用空集∅构造一个集合序列$S_0, S_1, \cdots, S_{i-1}$，满足$|S_i|$ = i，且$S_i \subseteq S_{i+1}$，试写出序列的<u>前 4 个集合</u>S_0, S_1, S_2, S_3。

$$S_0 = \emptyset, S_1 = \{\emptyset\}, S_2 = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, S_3 = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}$$

计算题示例

1. 给定命题公式 **$(P \vee Q) \rightarrow R$**，

试计算该公式在联结词集合**$\{\neg, \rightarrow\}$**中的形式。

证明题示例

- 使用推理规则或归结法证明下列推理：
- 每个人喜欢乘车或（普通或）喜欢骑自行车。
- 每个喜欢步行的人都不喜欢乘车。
- 有的人不喜欢骑自行车。
- 因而有的人不喜欢步行。

计算题：求[99,1000]的范围内不能被5,6,8中任一个数整除的数的个数

- 用A、B、C表示[99,1000]之间分别能被5,6,8整除的整数的个数，则
- |A|=1000/5-98/5 = 181 |B|=1000/6-98/6=150 |C|=1000/8-98/8=113
- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = \frac{1000}{30} - \frac{98}{30} = 30$ $|A \cap C| = \frac{1000}{40} - \frac{98}{40} = 23$
- $|B \cap C| = \frac{1000}{24} - \frac{98}{24} = 37$
- $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = \frac{1000}{120} - \frac{98}{120} = 8$
- $\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = E - |A \cup B \cup C| = E - |A| - |B| - |C| + |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| + |A \cap C| + |B \cap C| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}|$
- = 902-181-150-113+30+23+37-8=540

证明题：利用推理规则或归结推理法证明下列推理

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

① $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	前提
② $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	前提
③ $P(x) \rightarrow Q(x)$	①全称量词消去
④ $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$	②全称量词消去
⑤ $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	③置换
⑥ $R(x) \rightarrow \neg P(x)$	④⑤三段论
⑦ $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg P(x)$	⑥全称量词引入

证明题：利用罗素公理系统证明：

$$\vdash (P \vee Q) \to \left(Q \to \left((P \vee Q)\right)\right)$$

(1) $\vdash (Q \to R) \to \left((P \to Q) \to (P \to R)\right)$ 定理1

(2) $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to \left((P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))\right)$ (1)代入$\frac{Q}{P \vee Q}$，$\frac{R}{Q \vee P}$

(3) $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$ 公理3

(4) $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$ (2)(3)分离

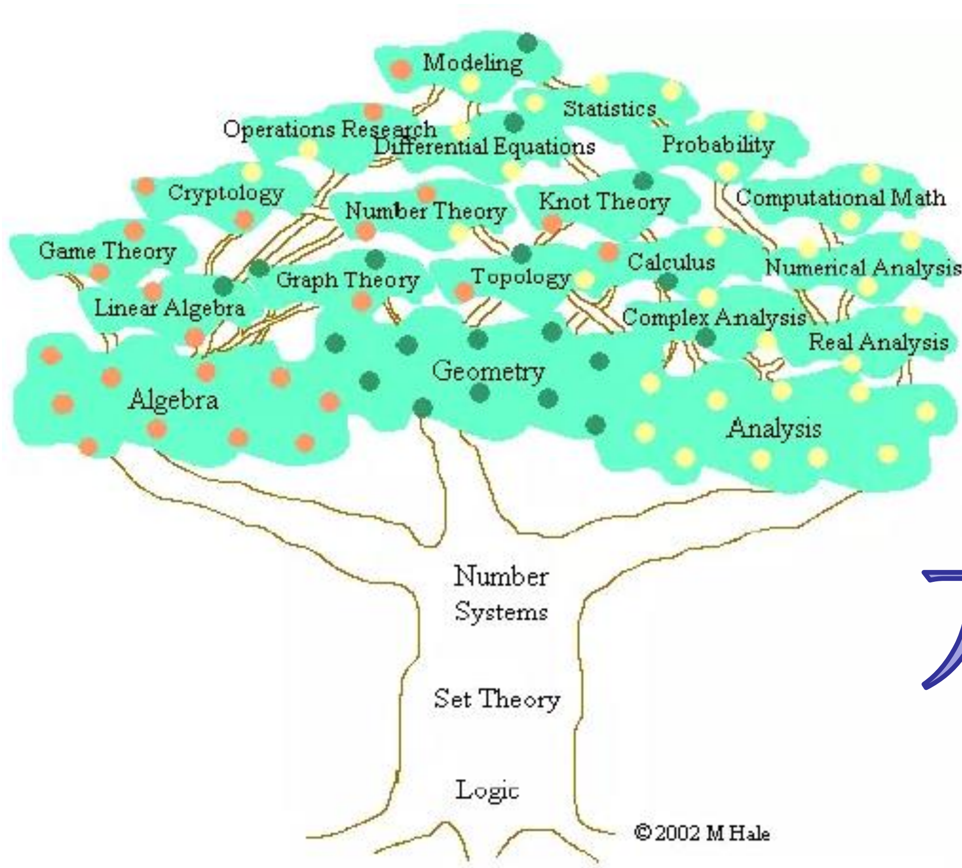
(5) $\vdash P \to (P \vee Q)$ 公理2

(6) $\vdash P \to Q \vee P$ (4)(5)分离

(7) $\vdash P \to \neg Q \vee P$ (6)代入$\frac{Q}{\neg Q}$

(8) $\vdash (P \vee Q) \to \left(\neg Q \vee \left((P \vee Q)\right)\right)$ (7)代入$\frac{P}{P \vee Q}$

(9) $\vdash (P \vee Q) \to \left(Q \to \left((P \vee Q)\right)\right)$ (8)定义1



离散数学
形散神不散
数学与语文
万变不离逻辑

祝大家期末考出好成绩！