考试安排

2025-01-02(周四)19:00~21:00

一教-201,一教-204,一教-205

第十章 关系

马昱春

清华大学计算机系

回顾：二元关系(BINARY RELATIONS)

定义10.1.1 **A到B的二元关系**

设A, B为集合，A×B 的**任一子集**所定义的二元关系称为A到B的二元关系。

特别当 A=B 时，A×A的**任一子集**称为 A上的一个二元关系。

三个特殊的关系 — 恒等关系(I_A)、全域关系(E_A)和空关系(∅)

回顾：关系的运算

二元关系的定义域和值域

❖定义域： $domR = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$

❖值域： $ranR = \{y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$

❖域： $fld(R) = dom(R) \cup ran(R)$

❖定理 10.1.2 对A到B的关系R，

则$fld(R) = \cup\cup R$.

关系的表示方法有三种：集合表示法，关系矩阵和关系图。

关系的运算：关系的逆、合成、限制和象

7.3 关系的运算

***R*的*n*次幂**

- 记为R^n
- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

定理：设R是集合A上的关系，$m,n \in N$

- $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
- $(R^m)^n = R^{mn}$

证明思路：使用归纳法并利用复合关系的结合律

主观题 0分

设置

航空公司的航线图是怎么做出来的?

作答

7.3 关系的运算

例$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$

- $R^0=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,\underline{<5,5>}\}$
- $R^1=R$
- $R^2=\{<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>\}$
- $R^3=R^2\circ R$
  $=\{<1,2>,<2,1>,<1,4>,<2,3>,<2,5>\}$
- $R^4=R^3\circ R$
  $=\{<1,1>,<2,2>,<1,5>,<2,4>,<1,3>\}$
- $R^5=R^4\circ R$
  $=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10-3-1 $S\circ R$的关系矩阵 设A是有限集合，$|A|=n$。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$M(R)=[r_{ij}]$和$M(S)=[s_{ij}]$都是$n\times n$的方阵。于是R与S的合成 $S\circ R$的关系矩阵

$$M(S\circ R)=[W_{ij}]_{n\times n}$$

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作$M(S\circ R)=M(R)\cdot M(S)$

其中

$$w_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

- 复合关系运算不满足交换律，但关系的复合运算满足结合律。
- 复合关系可以用图形表示，也可以用矩阵来求。
- 关系的矩阵运算是布尔运算，只涉及0和1。

  布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

  布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

- 矩阵表示

R={<1,2>,<3,4>,<2,2>}
S={<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>}

- 则

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S} = \mathbf{M}_S * \mathbf{M}_R,$$

$$\boldsymbol{M}_{S\circ R} = \boldsymbol{M}_R * \mathbf{M}_S$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R{}^2$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3} = \mathbf{M}_R{}^3$$

注意复合顺序

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第十章　关系

7.4 关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有$<a,a> \in R$，则R为A上的*自反*关系
- 非自反性
  - $\forall a \in A$，有$<a,a> \notin R$，R为A上的*非自反*关系
- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<c,a>\}$
    - 自反关系
  - $R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$
    - 非自反关系

单选题 1分

设置

$R_3=\{<a,a>,<b,c>\}$

A R_3不是自反的，也不是非自反的。

B R_3是自反的，不是非自反的。

C R_3不是自反的，是非自反的。

D R_3是自反的，也是非自反的。

提交

7.4 关系的性质

- 例：R是I_+上的整除关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in I_+$，x能整除x，
  - $\therefore \langle x,x\rangle \in R$，$\therefore$R具有自反性
- 例：R是I上的同余关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in I$，$(x-x)/k=0 \in I$，
  - $\therefore$x与x同余$\therefore \langle x,x\rangle \in R \therefore$R具有自反性
- 其它≤，≥关系，均是自反关系
- 实数上的<,>关系,均是非自反关系

关系的性质

- 关系矩阵的特点?
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为1
  - 非自反关系的关系矩阵的对角元素均为0
- 关系图的特点?
  - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
  - 非自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：R是A上的关系，则：
  - R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - R是非自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

关系的性质

- 对称关系R
  - $\forall a,b \in A$, 如果$<a,b> \in R$, 则必有$<b,a> \in R$
- 例
  - $R_1 = \{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2 = \{<1,1>,<3,3>\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3 = \{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$
  - R_3不是对称的

关系的性质

- 关系矩阵特点?
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点?
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理：R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

证明：必要性

$<x,y>\in R\Leftrightarrow<y,x>\in R\Leftrightarrow<y,x>\in R^{-1}$

充分性

$<x,y>\in R\Leftrightarrow<y,x>\in R^{-1}\Rightarrow<y,x>\in R$

关系的性质

- 反对称关系R
  - $\forall a,b \in A$, 如果 $<a,b> \in R$ 且 $<b,a> \in R$, 则必有 $a = b$
  - $\forall a,b \in A$, 如果 $a \neq b$, $<a,b> \in R$, 则必有 $<b,a> \notin R$
- 例：$A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<b,b>\}$
  - $S = \{<a,b>,<a,c>\}$
  - $T = \{<a,c>,<b,a>,<a,b>\}$
  - R,S是反对称的,T不是反对称的

关系的性质

- 例：实数集合上≤关系是反对称关系
  - $\forall x,y\in$实数集，如$x\neq y$，且$x\leq y$，则$y\leq x$不成立
- 例：≥，<，>关系，均是反对称关系

- 反对称关系矩阵和关系图特点？
  - 若$r_{ij}=1$，且$i\neq j$，则$r_{ji}=0$
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）
- 定理：R在A上反对称当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

关系的性质

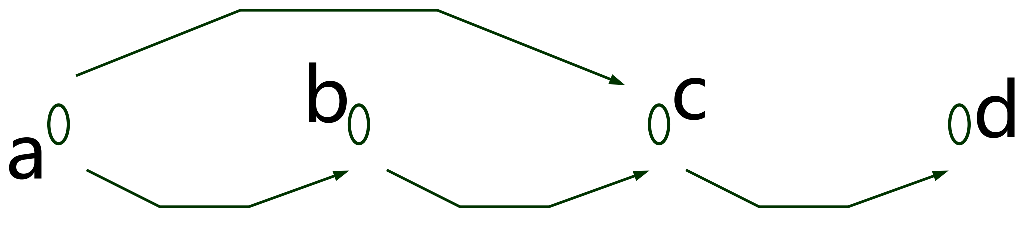
- 传递关系
  - $\forall a,b,c \in A$, 如果 $\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$, 必有 $\langle a,c\rangle \in R$
- 例
  - $R_1 = \{\langle x,y\rangle, \langle z,x\rangle, \langle z,y\rangle\}$
  - 是传递关系
  - $R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$
  - 是传递关系
  - $R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$
  - 不是传递关系

关系的性质

- 例：整除关系D_{I_+}是I_+上的传递关系
  - $\forall x,y,z \in I_+$，如$<x,y> \in D_{I_+}$，$<y,z> \in D_{I_+}$，即x能整除y，且y能整除z，则必有x能整除z，$<x,z> \in D_{I_+}$
- 例：P(A)上的包含关系$\subseteq$具有传递性
  - 若$u \subseteq v$，$v \subseteq w$，则必有$u \subseteq w$
- 例：实数集上的$\leq$关系具有传递性
  - 若$x \leq y$，$y \leq z$必有$x \leq z$

7.4 关系的性质

- 传递关系关系图特点?
  - 如果结点a能通过有向弧组成的有向路径通向结点x,则a必须有有向弧直接指向x,否则R就不是传递的
- 例：R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}



- 定理：R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

7.4 关系的性质

自　反: $\forall x(x \in X \to xRx)$

非自反: $\forall x(x \in X \to x \not R x)$

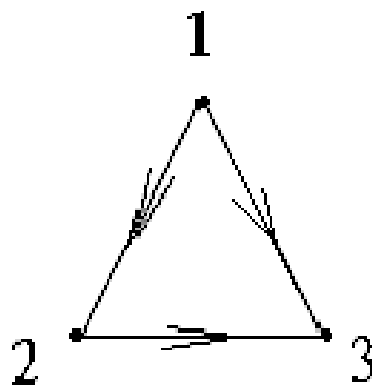
对　称: $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称: $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递: $\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

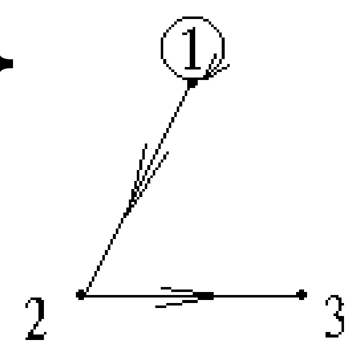
关系的性质

- 例： $X=\{1,2,3\}$，判断关系的性质
  - $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$



- 非自反
- 反对称
- 可传递

- **$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$**



- 反对称

	自反 Reflexive （10.4.1）	非自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3 ）
定义要点	$x \in A \rightarrow xRx$	$x \in A \rightarrow x \not R x$ $\langle x, x\rangle \notin R$	$xRy \rightarrow yRx$ $\langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y \longrightarrow y \not R x$ $xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$	$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$ $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$ 主对角元均为1	$r_{ii} = 0$ 主对角元均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若 $r_{ij} = 1 \wedge i \neq j \rightarrow r_{ji} = 0$	无直观特点或难以直接判断
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算性质

运算性质

- 已知 R，R_1，R_2是A上满足相应性质的关系，
- 问题：经过并，交，补，求逆，合成运算后是否还具有原来的性质?

$$\forall x(x \in X \to xRx)$$

$$\forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land xRy \to yRx)$$

关系的性质

- 设A是集合，R1和R2是A上的关系
  ① 若R1，R2是自反和对称的，则R1∪R2也是自反的和对称的
  ② 若R1和R2是传递的，则R1∩R2也是传递的
- 设A是集合，R1和R2是A上的关系
  若R1，R2是自反的和对称的，则R1∪R2也是自反的和对称的
  证明：R1，R2是自反的⇒ $I_A \subseteq$ R1，$I_A \subseteq$ R2
  所以 $I_A \subseteq$ R1∪R2
  R1，R2是对称的⇒ $R1=R1^{-1}$ 和 $R2=R2^{-1}$
  所以 $(R1 \cup R2)^{-1}=R1^{-1} \cup R2^{-1}=R1 \cup R2$

运算 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注：√表示经过左端的运算仍保持原来的性质，×则表示原来的性质不再满足。

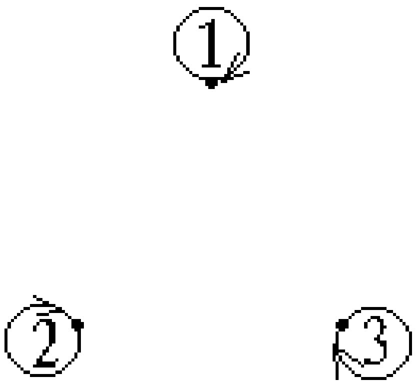
需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是非自反的。

几个主要关系的性质

关系 \ 性质	自反性	非自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A	√	×	√	√	√
全域关系 E_A	√	×	√	×	√
A**上的空关系** Φ	×	√	√	√	√
N**上的整除关系**	√	×	×	√	√
包含关系 $\subseteq$	√	×	×	√	√
真包含关系 $\subset$	×	√	×	√	√

7.4 关系的性质

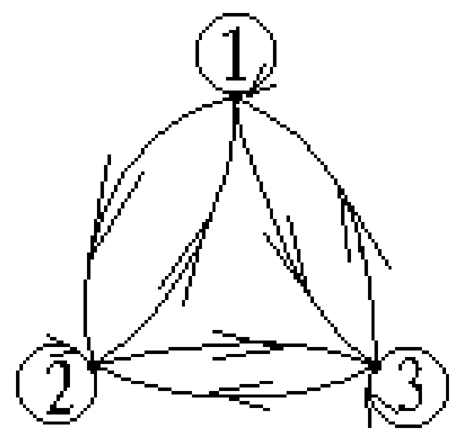
$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$



- 自反，对称，反对称，可传递的

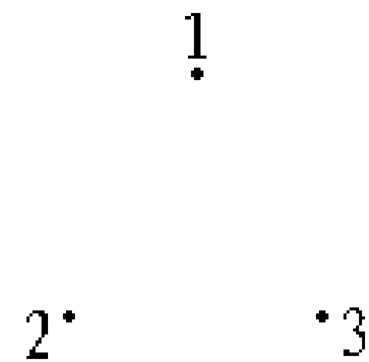
$R_4= E_x$

- 自反，对称，可传递的



7.4 关系的性质

- X={1,2,3}, $R_5 = \varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



自　反：$\forall x(x \in X \to xRx)$

非自反：$\forall x(x \in X \to x \not R x)$

对　称：$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称：$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递：$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

多选题 0.5分

设置

若X= ∅， X上的空关系是?

A 自反

B 非自反

C 反对称

D 传递

E 对称

自 反: $\forall x(x \in X \rightarrow xRx)$

非自反: $\forall x(x \in X \rightarrow x\not{R}x)$

对 称: $\forall x\forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$

反对称: $\forall x\forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$

传 递: $\forall x\forall y\forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

提交

第十章　关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)*
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖*
- 10.8 偏序关系

闭包?

关系

- Closure
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Closure

Mathematics [edit]

- Closure (mathematics), the smallest object that both includes the object as a subset and possesses some given property

Closure (mathematics)

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article **relies largely or entirely u**
Please help improve this article by introd

For other uses, see Closure (disambiguation).

A set has **closure** under an operation if performance of that operation
that the set is **closed** under the operation. For example, the integers
integer even though both 1 and 2 are positive integers. Another exampl
multiplication (because $0+0=0$, $0-0=0$, and $0\times 0=0$).

Similarly, a set is said to be **closed under a *collection* of operatio**

7.4 关系的性质

自　反:

$$\forall x(x \in X \to xRx)$$

非自反:

$$\forall x(x \in X \to xRx)$$

对　称:

$$\forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land xRy \to yRx)$$

反对称:

$$\forall x \forall y(x \in X \land y \in X \land xRy \land yRx \to x = y)$$

传　递:

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \land y \in X \land z \in X \land xRy \land yRz \to xRz)$$

关系的闭包

1. 希望已有的关系具有某些特殊的性质（如自反、对称、传递等）
2. 有些关系原本不具备这些性质，但可以通过对原关系加以扩充，使之满足这些性质。
3. 希望扩充的部分尽量小，即增加的有序对尽量少，便形成了闭包的概念。

关系的运算

***R*的*n*次幂**

- 记为R^n
- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1}=R^n \circ R$

定理：设R是集合A上的关系，$m,n \in N$

- $R^m \circ R^n=R^{m+n}$
- $(R^m)^n=R^{mn}$

证明思路：使用归纳法并利用复合关系的结合律

10.5.1 多个关系的合成举例

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$
- $R^0 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$
- $R^1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$
- $R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$
- $R^3 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\} = R^2 \circ R$
- $R^4 = R^3 \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^2$
- ……
- 对于此例

$$R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \cdots,$$

- 是否具有普遍规律?

思考题

思考：若 $|A| = n$

A 上共可定义多少个不同的关系?

有限集合上的关系的合成?

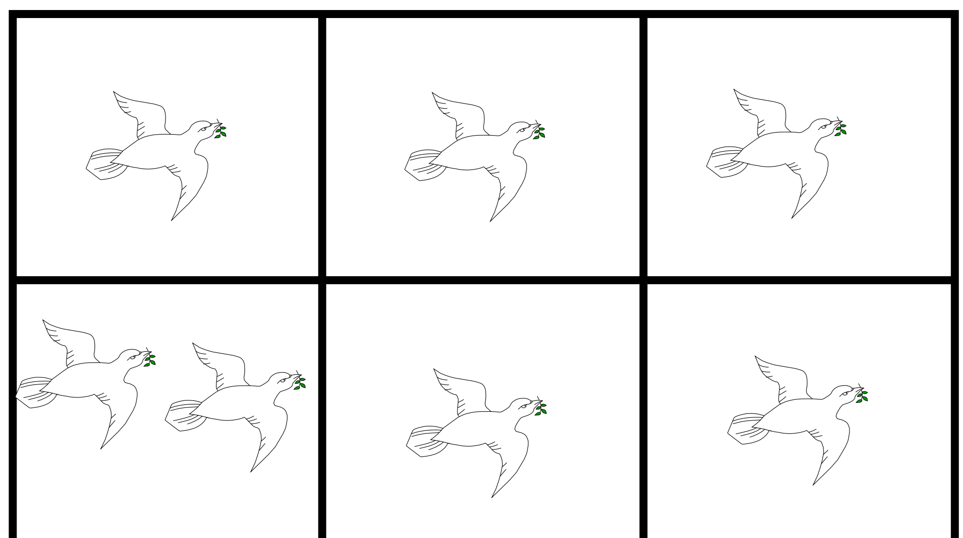
10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.1

设A是有限集合，|A|=n，R是A上的关系，则存在自然数s和t，$s \neq t$ 使得$R^s=R^t$。

所有的关系数量是2^{n^2}

鸽巢原理



10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

设*A*是有限集合，*R*是*A*上的关系，若存在自然数*s*和*t*，使得$R^s = R^t$，则

（1）$R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$;

（2）$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k, i \in N$ $p = t - s$；

（3）令 $B=\{R^0, R^1 \ldots R^{t-1}\}$，则*R*的各次幂均为*B*的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

例 A = {a, b, c, d},R = {‹a, b›, ‹b, a›, ‹b, c›, ‹c, d›}

R^2 = {‹a, a›, ‹a, c›, ‹b, b›, ‹b, d›}= R^4

对应 s = 2, t = 4, $R^{2+k} = R^{4+k}$, $R^{2+2k+i} = R^{2+i}$

$B=\{R^0, R^1, R^2, R^3\}$,

R的幂中不相同的只有以上4种。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t $(s<t)$，使得 $R^s = R^t$ ，则

（1）$R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$;

证明：$R^{s+k} = R^s \bullet R^k$

$= R^t \bullet R^k$

$= R^{t+k}$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t($s<t$)，使得 $R^s = R^t$，则

（2）$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k,i \in N$ $p=t-s$；

证明：数学归纳法。

归纳谁?

对k进行归纳：

$k=0$: $R^{s+0+i}=R^{s+i}$

假设$k=n$时有$R^{s+np+i}=R^{s+i}$

则当$k=n+1$时，

$R^{s+(n+1)p+i}=R^{s+np+p+i}=R^{s+np+i}\bullet R^p$

$= R^{s+i}\bullet R^p=R^{s+(t-s)+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和$t(s<t)$，使得 $R^s = R^t$，则

（3）令 $B=\{R^0,R^1\ldots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

证什么？

$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$

证明：

$q<t$: 则 $R^q \in B$

$q \geq t$：则

有$q>s$。一定存在$q=s+kp+i$, 其中$0 \leq i \leq p-1$，

$R^q=R^{s+np+i}=R^{s+i}$

$s+i \leq s+p-1=t-1$，所以$R^q \in B$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定义10.5.2 闭包的定义

设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

（2）$R \subseteq R'$；

（3）对A上包含R的任何自反的（对称的或传递的）关系R''（$R \subseteq R''$），有$R' \subseteq R''$。

则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

满足性质

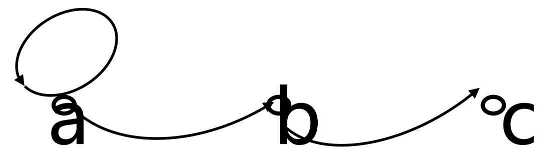
包含关系

最小的那个

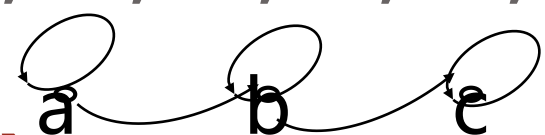
闭包

关系的闭包

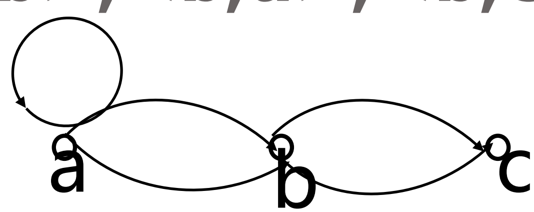
- 例A={a,b,c}，R={<a,a>,<a,b>,<b,c>}



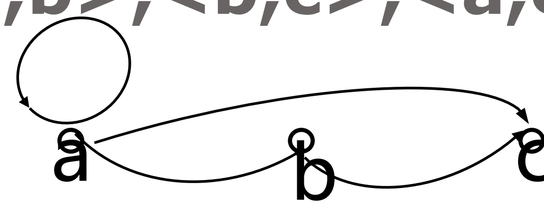
  - 自反闭包r(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,b>,<c,c>}



  - 对称闭包s(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>}



  - 传递闭包t(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>}



自反闭包$r(R)$,

是具有自反性的R的"最小超集合"

对称闭包$s(R)$,

是具有对称性的R的"最小超集合"

传递闭包$t(R)$,

是具有传递性的R的"最小超集合"

若R已经是自反(对称、传递)的，那么R的自反(对称、传递)闭包就是它自身。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.4 **闭包的性质1**

对非空集合A上的关系R,

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$ ；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$ ；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$ 。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.5 闭包的性质2

对非空集合A上的关系R_1, R_2, 若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.6 闭包的性质3

对非空集合A上的关系R_1，R_2，

（1） $$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

（2） $$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

（3） $$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

例A={a,b,c}，R_1={<a,b>}，R_2={<b,c>}

关系的闭包

- 定理：R是非空集合A上的关系，则$r(R)=R\cup I_A$

证明：$R\subseteq R\cup I_A$，$R\cup I_A$是自反的

设R''满足$R\subseteq R''$，R''是自反的

对*A*上任何自反的关系R''，$R'\subseteq R''$

$\forall <a,b>\in R\cup I_A$

则$<a,b>\in R$或$<a,b>\in I_A$

如$<a,b>\in R$，由$R\subseteq R''$知$<a,b>\in R''$

如$<a,b>\in I_A$，由R''的自反性知$<a,b>\in R''$

均有$<a,b>\in R''$

$\therefore R\cup I_A\subseteq R''$

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$
\begin{aligned}
r(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup I_{\mathrm{A}} \\
&= (R_1 \cup I_{\mathrm{A}}) \cup (R_2 \cup I_{\mathrm{A}}) \\
&= r(R_1) \cup r(R_2)
\end{aligned}
$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

例　整数集Z上<（小于）关系的自反闭包是≤（小于等于）关系；

≠关系的自反闭包是全关系；

空关系的自反闭包是恒等关系；

Z上定义关系：$R=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，则 R 的自反闭包 $r(R)=\{(x,y)\mid x+y=2$ 或 $x=y\}$。

关系的闭包

- 定理：设R是非空集A的关系，则

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

证明：

- $R\subseteq R\cup R^{-1}$满足定义第2条
- $\forall <a,b>\in R\cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R \vee <a,b>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R^{-1} \vee <b,a>\in R$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R\cup R^{-1}$

$\therefore R\cup R^{-1}$是对称的

关系的闭包

- 如$R \subseteq R''$，且R''是对称的

$\forall <a,b> \in R \cup R^{-1}$

$<a,b> \in R$或$<a,b> \in R^{-1}$

如$<a,b> \in R$，由$R \subseteq R''$，则$<a,b> \in R''$

如$<a,b> \in R^{-1}$，则$<b,a> \in R$，则$<b,a> \in R''$

因R''对称

$\therefore <a,b> \in R''$，$\therefore R \cup R^{-1} \subseteq R''$

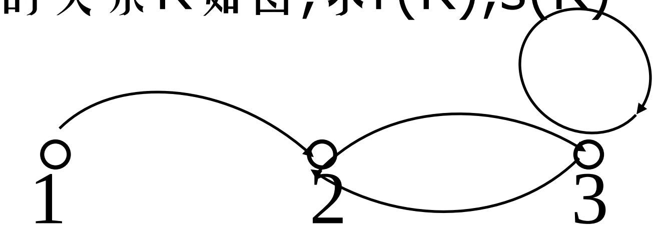
满足定义第3条

$$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$\begin{aligned}
s(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup (R_1)^{-1}) \cup (R_2 \cup (R_2)^{-1}) \\
&= s(R_1) \cup s(R_2)
\end{aligned}$$

关系的闭包

- 例：设$A=\{1,2,3\}$,A上的关系R如图,求r(R),s(R)



解：$R=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$

$r(R)= R\cup I_A$

$=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,2>,<1,1>\}$

$s(R)= R\cup R^{-1}$

$=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,1>\}$

关系的闭包

定理：设R是非空集合A上的关系，则

$$t(R)= R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$

证明：首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n=1$，显然$R^1= R \subseteq t(R)$

假设$R^k \subseteq t(R)$，对任意$<x,y>$有

$<x,y> \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$

$\Leftrightarrow \exists t(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in R^k)$

$\Rightarrow \exists t(<x,t> \in t(R) \wedge <t,y> \in t(R))$

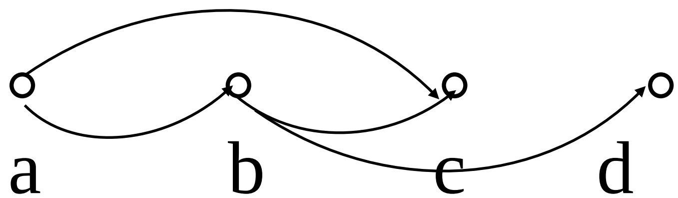
$\Rightarrow <x,y> \in t(R)$

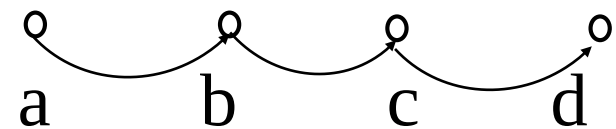
其次，$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$即证$R^1 \cup R^2 \cup \ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，则存在正整数n，使得$t(R)=R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

关系的闭包

- 例 $A=\{a,b,c,d\}$
  - $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$
  - $S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求$t(R),t(S)$





- 解：$R^2=\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\},R^3=\varnothing$

$\therefore t(R)=R\cup\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$

$S^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\},S^3=\{\langle a,d\rangle\},S^4=\varnothing$

$\therefore t(S)=S\cup\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}\cup\{\langle a,d\rangle\}$

关系的闭包

- 给定关系R，r(R)，s(R)，t(R)的关系矩阵分别为M，Mr，Ms，Mt，那么：
  - $M_r = M + I$
  - $M_s = M + M^T$
  - $M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$

关系的闭包

- 关系图分别为G，Gr，Gs，Gt，那么：
  - 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是Gr
  - 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到Gs
  - 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到Gt

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

例

- 设$A=\{a,b,c,d\}$上的关系
  $R=\{<a,b><b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$

(1) 写出$R,r(R),s(R),t(R)$ 的关系图。

(2) 计算$r(R),s(R),t(R)$。

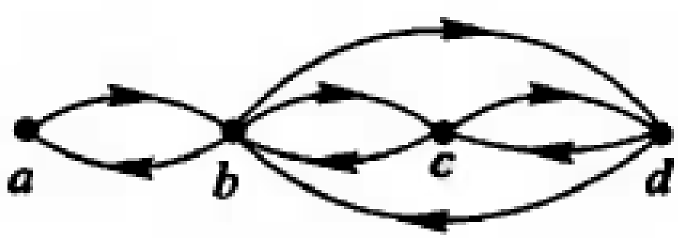
(3) 写出$R,r(R),s(R),t(R)$ 的关系矩阵。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

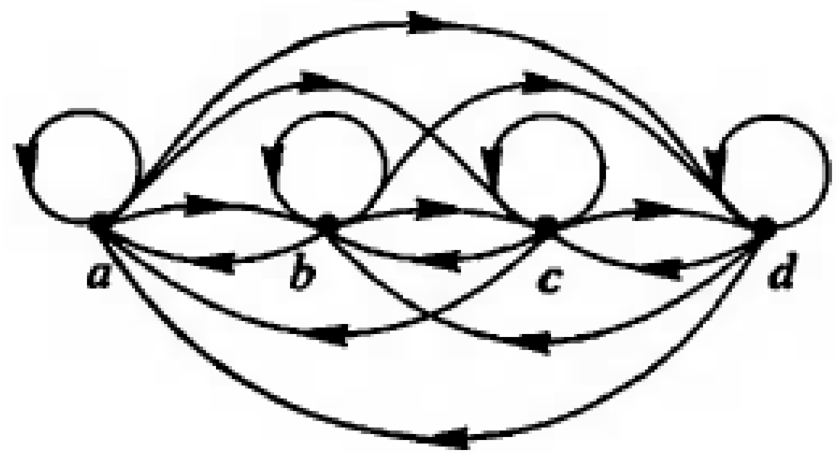
- 设关系$R, r(R), s(R), t(R)$，关系图如下图

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

解 $R=\{<a,b><b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad M_r=M+I=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_s=M+M^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\quad M_t=M+M^2+M^3+M^4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.10 传递闭包的有限构造方法

A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数$k \leq n$，使得

$$t(R) = R^{+} = R \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{k}$$

传递闭包的求解

- 图论中一个非常重要的问题
  - 给定了一个城市的交通地图，可利用求传递闭包的方法获知任意两个地点之间是否有路相连通。
- 求传递闭包的方法
  - 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
  - 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
  - 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包

WARSHALL算法

—计算有限集合上关系的传递闭包的一种有效算法

R

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

传递闭包里的(i, j)边来源于(i, k)和(k,j)

循环所有点为出发点 i

a->b → ***If B(i,k)=1***

b->? → ***for j = 1 to n***

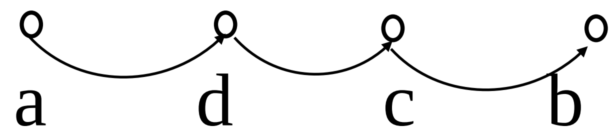
b->a, b->c → $B[i, j]=B[i, j] \vee B[k,j]$

a出发的边添加a->a, a->c

- 令$B[i, j]$表示矩阵B第 i行第 j列的元素，
- 令矩阵$B = M(R)$;
- *for* i =1 *to* n
-     *for* k =1 *to* n
-         *if* $(B[i, k] = 1)$ *then*
-             *for* j=1 *to* n
-                 $B[i, j]=B[i, j]\vee B[k, j]$
-             //（逻辑加）

有没有问题？

- 令$B[i, j]$表示矩阵B第 i行第 j列的元素，
- 令矩阵$B = M(R)$；
- *for* i =1 *to* n
-   *for* k =1 *to* n
-     *if* $(B[i, k] = 1)$ *then*
-       *for* j=1 *to* n
-         $B[i, j]=B[i, j] \vee B[k, j]$
-       //（逻辑加）



B(a,a)=0;
B(a,b)=0;
B(a,c)=0;
B(a,d)=1;B(d,c)=1: **B(a,c)=1**

a->c, c->b就不会被检查

- 令$B[i, j]$表示矩阵B第 i行第 j列的元素，
- 令矩阵$B = M(R)$;
- *for* i =1 *to* n
-   *for* k =1 *to* n
-     *if* ($B[i, k] = 1$) *then*
-       *for* j=1 *to* n
-         $B[i, j]=B[i, j] \vee B[k, j]$
-       //（逻辑加）

怎么改？请投稿

请介绍一下warshall算法

GPT-4 Poe

Warshall算法是一种用于寻找有向图中所有顶点之间的可达性的算法。它是一种简单但有效的动态规划算法，时间复杂度为O(V^3)，其中V是图中顶点的数量。

Warshall算法基于以下的观察：如果顶
到顶点j的一条路径的中间点，那么顶点
通的，前提是顶点i和顶点k，以及顶点
通的。

在实现Warshall算法时，我们通常使用一个二维布尔矩阵，表示图中所有顶点之间的连通性。矩阵的初始状态是，如果有一条从顶点i到顶点j的边，那么矩阵的第i行第j列的元素为true，否则为false。对角线上的元素总是为true，因为每个顶点都与自身连通。

以下是Warshall算法的步骤：

1. **初始化**：创建一个二维布尔矩阵，表示图中所有顶点之间的连通性。
2. **动态规划**：对于每个顶点k，我们更新矩阵，使得如果顶点i和顶点k，以及顶点k和顶点j是连通的，那么顶点i和顶点j也是连通的。这可以通过以下代码实现：

cpp 复制

```cpp
for(int k = 0; k < V; k++)
{
    for(int i = 0; i < V; i++)
    {
        for(int j = 0; j < V; j++)
        {
            matrix[i][j] = matrix[i][j] || (matrix
[i][k] && matrix[k][j]);
        }
    }
}
```

3. **结果**：经过上述步骤，矩阵中的每个元素表示对应的两个顶点之间是否存在一条路径。

需要注意的是，Warshall算法只能确定两个顶点之间是否可达，而不能确定它们之间的最短路径或路径长度。如果你需要最短路径，你应该使用Floyd-Warshall算法或Dijkstra算法。

在Warshall算法中，外层循环遍历的是“中间顶点”k。这是因为，Warshall算法的核心思想是逐步考虑所有可能的路径，并更新所有顶点对之间的可达性信息。

具体来说，该算法检查所有可能的顶点对 (i, j)，并对于每一对顶点，它检查是否存在

过 k 可以从 i 到达 j。如果存在

以表示 i 和 j 是连通的。

事实上，外层循环遍历的是所有可能的“中间顶点”k，而其中两个内部循环遍历的是所有可能的顶点对 (i, j)。这种结构可以保证考虑到所有可能的路径。

代码中的 `matrix[i][j] = matrix[i][j] || (matrix[i][k] && matrix[k][j]);` 这一行，是在检查是否存在一个顶点 k，使得通过 k 可以从 i 到达 j。如果存在这样的 k，那么 `matrix[i][k] && matrix[k][j]` 就会为真，然后 `matrix[i][j]` 就会被设置为真，表示 i 和 j 是连通的。

所以说，外层循环遍历的是 k，是因为算法的目标是逐步考虑所有可能的路径，并更新所有顶点对之间的连通性信息。

动态规划

```
for (k = 1; k <= n; k++) {
        for (i = 1; i <= n; i++) {
            for (j = 1; j <= n; j++) {
                if (dis[i][k] + dis[k][j] < dis[i][j]) {
                    dis[i][j] = dis[i][k] + dis[k][j];
                }
            }
        }
    }
```

假如我们以i, j, k的顺序书写代码。
若 $k>i$，计算 $f(k, i, j)$ 的值时，$f(k-1, i, j)$ 的值就没有准备好，无法正确计算。

for(k←1;k<=n;k++)
  for(i←1;i<=n;i++)
    for(j←1;j<=n;j++)
      $R^{(k)}[i,j] \leftarrow R^{(k-1)}[i,j]$ or $R^{(k-1)}[i,k]$ and $R^{(k-1)}[k,j]$
return $R^{(n)}$

采用动态规划思想，$f[k][i][j]$ 表示 i 和 j 之间可以通过编号为 $1 \ldots k$ 的节点的最短路径。
初值 $f[0][i][j]$ 为原图的邻接矩阵。

则 $f[k][i][j]$ 可以从 $f[k-1][i][j]$ 转移来，表示 i 到 j 不经过 k 这个节点。
也可以从 $f[k-1][i][k]+f[k-1][k][j]$ 转移过来，表示经过 k 这个点。
意思即 $f[k][i][j]=min(f[k-1][i][j], f[k-1][i][k]+f[k-1][k][j])$

关系的闭包

- 定理：设A是集合，R_1和R_2是A上的二元关系，$R_1 \subseteq R_2$，则有：
  - $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
  - $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
  - $t(R_1) \subseteq t(R_2)$
- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明： $r(R_1)=R_1 \cup I_A$， $r(R_2)=R_2 \cup I_A$

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是自反的，则s(R),t(R)也自反
  - 若R是对称的，则r(R),t(R)也对称
  - 若R是可传递的，则r(R)也可传递

s(R)是不是传递的?

关系的闭包

- 若R是传递的，s(R)不一定是传递的
  - 反例：R={<a,b>,<c,b>}，

  R是传递的

  s(R)={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>}

  s(R)不是传递的

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：归纳法证明若R是对称，则R^n也对称

n=1，显然成立

假设R^n对称，对任意<x,y>

$$<x,y>\in R^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists t(<t,x>\in R\wedge <y,t>\in R^n)$$

$$\Rightarrow <y,x>\in R\circ R^n \Rightarrow <y,x>\in R^{n+1}$$

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：任取<x,y>，有

$$<x,y> \in t(R)$$

$$\Rightarrow \exists n(<x,y> \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists n(<y,x> \in R^n)$$

$$\Rightarrow <y,x> \in t(R)$$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.11 闭包同时具有的多种性质1　对非空集合A上的关系R，

（1）若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$是自反的；

（2）若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$是对称的；

（3）若R是传递的，则$r(R)$是传递的。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.12 闭包同时具有的多种性质2

对非空集合A上的关系R,

（1） $rs(R) = sr(R)$

（2） $rt(R) = tr(R)$

（3） $\boxed{st(R) \subseteq ts(R)}$

其中 $rs(R) = r(s(R))$, 其它类似。

$$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$$

传递闭包的应用

- 传递闭包在关系数据库中有很多应用
  - 最短路径选择
  - 最省时加工流程

关系的性质

- 自反？对称？传递？
- 日常生活中的关系？
  - 同龄人
  - 同班同学
  - ……

10.6 等价关系和划分 (EQUIVALENT RELATION & PARTITION)

定义10.6.1 等价关系

设R为非空集合A上的关系，如果R是

自反的、

对称的

和传递的，

则称R为A上的等价关系。

典型的等价关系

- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）
- 非空集合A上的恒等关系、全域关系
- 空关系不是等价关系（满足非自反故不满足自反性）

多选题 1分

设置

以下哪些关系是等价关系?

A 平面几何中三角形间的相似关系

B 同学集合中同班同学的关系

C 朋友关系

D 恒等关系、全域关系

E 空关系

提交

内容

- 闭包
- 等价类
- 划分
- 划分的个数

谢 谢

myc@mail.Tsinghua.edu.cn