线性代数期中试卷 (2021.11.20)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. $B=A^*$，计算 B 的所有代数余子式的和，即 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}$，此处 $A=\begin{pmatrix}0&0&4&5\\3&0&5&6\\3&0&13&16\\5&0&7&0\end{pmatrix}$.

2. 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&5&7\\1&3^2&5^2&7^2\\1&3^3&5^3&7^3\end{vmatrix}$.

3. 证明：如果 $A\xrightarrow{c}B$，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^k=O$，$k>1$ 是正整数，证明：$E-A$ 可逆.

5. $\eta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的特征向量，计算 a,b 与 A 的所有特征值，此处：$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&b\\1&b&2\end{pmatrix}$.

二.(12分) 计算矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

三.(14分)
(1) 计算矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$的秩,计算$A$列向量组的一个极大线性无关组,并用以表示其余向量(6分)；
(2) 判断 $Ax=b$ 解的存在性，如有解则计算其通解(8分).

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&-1\\1&2&0&-1&-4\\0&-1&-1&1&1\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\\-6\end{pmatrix}.$$

四. (10分) A 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A)=r>0$，证明必有 m 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 n 维向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使得 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm{T}}$.

五.(10分) $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维向量，$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，计算 A 的 n 个线性无关的特征向量.

六.(14分) $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$, $A\alpha_3=-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. 计算 A 的特征值与特征向量(用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合表示).

线性代数期中试卷 答案 (2021.11.20)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. $B=A^*$，计算 B 的所有代数余子式的和，即 $\sum\limits_{i,j=1}^{4}B_{ij}$，此处 $A=\begin{pmatrix}0&0&4&5\\3&0&5&6\\3&0&13&16\\5&0&7&0\end{pmatrix}$.

解：$A\to\begin{pmatrix}1&0&3&12\\0&0&4&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{r}(A)=3$，由 $AA^*=|A|E=O$，$0=\mathrm{r}(O))=\mathrm{r}(AA^*)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-4$，

故 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A^*)\leq 1$，于是 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4$. 得 $\sum\limits_{i,j=1}^{4}B_{ij}=0$.

解法二：$\mathrm{r}(A)=3,AA^*=|A|E=O$，故 $B=A^*$ 的列为 $Ax=\theta$ 的解，

故 $\mathrm{r}(B)\leq(Ax=\theta$的基础解系向量个数)=4-3=1，于是 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4$. 得 $\sum\limits_{i,j=1}^{4}B_{ij}=0$.

解法三：易知 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4$，于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{4}B_{ij}=0$.

解法四：$A_{12}=200,A_{22}=100,A_{32}=-100,A_{42}=0$，其余代数余子式因为含0列故均为0，

于是 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\200&100&-100&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4$. 于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{4}B_{ij}=0$.

2. 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&5&7\\1&3^2&5^2&7^2\\1&3^3&5^3&7^3\end{vmatrix}$.

解：范德蒙行列式 $D_5=(7-1)(7-3)(7-5)(5-1)(5-3)(3-1)=768$.

解法二：$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&4&6\\0&3\times2&5\times4&7\times6\\0&3^2\times2&5^2\times4&7^2\times6\end{vmatrix}=2\times4\times6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&7\\2^2&5^2&7^2\end{vmatrix}=48\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&5\times2&7\times4\end{vmatrix}=768$.

3. 证明：如果 $A\overset{c}{\to}B$，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

证：一系列的列初等变换等价于右乘可逆矩阵，即 $B=AP$，P可逆，此表示B的列是A的列的组合，P的列为组合系数. P可逆，故有 $A=BP^{-1}$，则A的列是B的列的组合，A,B的列可相互表示，故等价.

证法二：易知 A 进行列初等变换得到 A_1，则 A_1 的列可以表示成 A 的列的组合，A_1 再进行列变换得到 A_2，则 A_2 的列可以由 A_1 的列表示，从而也可以由 A 的列表示，依次下去，A 经过一系列的列初等变换得到 B，则 B 的列可由 A 的列表示出来.

由于列初等变换有逆变换，故 B 也可以经过一系列的列初等变换得到 A，故 A 的列可由 B 的列表示，A、B 的列可以相互表示，则 A 与 B 的列向量组等价.

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^k=O$，$k>1$ 是正整数，证明：$E-A$ 可逆.

证：$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E+A+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k=E-A^k=E$，故 $E-A$ 可逆.

证法二：反证法，假设 $E-A$ 不可逆，则存在 $\xi\neq\theta$，使得 $(E-A)\xi=\theta$，即 $A\xi=E\xi=\xi$，

于是 $A^k\xi=A^{k-1}A\xi=A^{k-1}\xi=\cdots=A\xi=\xi\neq\theta$，但是 $A^k\xi=O\xi=\theta$，矛盾，故 $E-A$ 可逆.

证法三：设 λ 为 A 的任意特征值，则 λ^k 是 $A^k=O$ 的特征值，故 $\lambda^k=0$，从而 $\lambda=0$，

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 则 $|E-A|=(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n)=1\neq0$，故 $E-A$ 可逆.

5. $\eta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的特征向量，计算 a,b 与 A 的所有特征值，此处：$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&b\\1&b&2\end{pmatrix}$.

解：因为 $A\eta=\lambda\eta$，即 $(4,a+b+1,b+3)^{\mathrm{T}}=(\lambda,\lambda,\lambda)^{\mathrm{T}}$，解得 $\lambda=4,b=1,a=2$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0\text{，故特征值为 }\lambda=1(\text{二重}),4.$$

二.(12分) 计算矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

解：方程写成 $AXB=C$，则有 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0.5&-0.5&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0.5&-0.5&1\end{array}\right)\text{，故 }A^{-1}=\begin{pmatrix}0.5&-0.5&0\\0&1&-1\\0.5&-0.5&1\end{pmatrix}.$$

$$\text{同理可得 }B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&4&0\\1&2&3\end{pmatrix}.\text{ 故 }X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&4&-3\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{pmatrix}.$$

解法二：方程写成 $AXB=C$，先解方程 $AY=C$，有

$$(A,C)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&-1&1&0\\-1&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-0.5&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&1&-1.5&1\end{array}\right)\text{，故 }Y=\begin{pmatrix}1&-0.5&0\\-1&2&-1\\1&-1.5&1\end{pmatrix}.$$

$$\text{再解方程 }XB=Y\text{，}\begin{pmatrix}B\\Y\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\\\hline 1&-0.5&0\\-1&2&-1\\1&-1.5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{array}\right)\text{，故 }X=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{pmatrix}.$$

三.(14分)

(1) 计算矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$的秩,计算$A$列向量组的一个极大线性无关组,并用以表示其余向量(6分)；

(2) 判断 $Ax=b$ 解的存在性，如有解则计算其通解(8分).

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&-1\\1&2&0&-1&-4\\0&-1&-1&1&1\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\\-6\end{pmatrix}.$$

$$\text{解：(1) }A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&-1\\1&2&0&-1&-4\\0&-1&-1&1&1\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-2\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{r}(A)=2$，一个极大无关组为：α_1,α_2，并且有 $\alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

$$\text{(2) }(A,b)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&-2&10\\0&1&1&-1&-1&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$，故有解，其中一个特解为：$\eta=(10,-4,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应齐次方程组的基础解系为：$\beta_1=(2,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-1,1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$Ax=b$ 的通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$.

$$\text{解法二：}(A,b)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&-2&10\\0&1&1&-1&-1&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\qquad(*),$$

(1) 由(*)式的系数部分可知，$\mathrm{r}(A)=2$，一个极大无关组为：α_1,α_2，并且有 $\alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

(2) 由(*)式知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$，故有解，其中一个特解为：$\eta=(10,-4,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应齐次方程组的基础解系为：$\beta_1=(2,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-1,1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$Ax=b$ 的通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$.

四. (10分) A 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A)=r>0$，证明必有 m 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 n 维向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使得 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm{T}}$.

证：因为 $\mathrm{r}(A)=r>0$，故有可逆矩阵 $P\in\mathrm{R}^{m\times m}$ 和 $Q\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}Q$.

按列分块：$P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),Q^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，

则有 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm{T}}$.

证法二：因为$\mathrm{r}(A)=r>0$，故可进行一系列的行初等变换化成行简化梯形$B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm{T}}\\ O\end{pmatrix}$，$\beta_1^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_r^{\mathrm{T}}$非零.

此变换等价于 A 左乘一个可逆矩阵 P，即 $PA=B$，于是有 $A=P^{-1}B$，将 P^{-1} 按列分块得

$$P^{-1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\text{，则有}A=P^{-1}B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm{T}}.$$

证法三：按列分块 $A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，因为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}=r>0$，故极大无关组含$r$个向量，设一个极大无关组为 $\gamma_{k_1},\cdots,\gamma_{k_r}$，记为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，则它可以表示所有列向量，

设为 $\gamma_j=b_{1j}\alpha_1+\cdots+b_{rj}\alpha_r,j=1,2,\cdots,n$，再设 $B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \cdots & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix}$，

则 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)B=\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm{T}}$.

五.(10分) $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维向量，$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，计算 A 的 n 个线性无关的特征向量.

解：$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\,1\cdots 1\\ 1\,1\cdots 1\\ \vdots\,\vdots\quad\vdots\\ 1\,1\cdots 1\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$，

故 A 的特征值为 $\lambda=n,0$(n-1重).

当 $\lambda=n$ 时，$nE-A=\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=0$ 时，$0E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=n\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 即为 n 个无关特征向量.

解法二：因为 $A\alpha=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=n\alpha$，故 $\alpha_1=\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为特征值 n 的特征向量.

$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，故$Ax=\theta$有基础解系$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$，

即为0的无关特征向量. 又 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=n\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 即为 A 的 n 个无关特征向量.

六.(14**分**) $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,$ $A\alpha_3=-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. 计算 A 的特征值与特征向量(用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合表示).

解：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 P 可逆，

于是有 $P^{-1}AP=B$，即 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征值.

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-3)^2$，故特征值为 $\lambda=-3,3$(二重).

当 $\lambda=-3$ 时，$-3E-B=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=3$ 时，$3E-B=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为由 $B\eta=\lambda\eta$ 可得 $AP\eta=PB\eta=\lambda P\eta$，

故 A 有特征值 $\lambda=-3$，对应无关特征向量 $\xi_1=P\eta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，特征向量为$k_1\xi_1$.

特征值$\lambda=3$(二重)，对应无关特征向量$\xi_2=P\eta_2=-\alpha_1+\alpha_2, \xi_3=P\eta_3=-\alpha_1+\alpha_3$，特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3$.

解法二：由条件 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3个线性无关的3维向量，故任意3维向量都可以由这3个向量表示.

设 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq\theta$ 是 A 的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$.

将 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3, A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_3=-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$

代入 $A\xi=\lambda\xi$ 得 $(k_1-2k_2-2k_3-\lambda k_1)\alpha_1+(-2k_1+k_2-2k_3-\lambda k2)\alpha_2+(-2k_1-2k_2+k_3-\lambda k_3)\alpha_3=\theta$.

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故组合系数为零，即$\begin{pmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\-2&-2&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=B\eta=\theta$.

由于 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq\theta$，故 k_1,k_2,k_3 不全为零，即 $\eta=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}\neq\theta$.

因为 $B\eta=\theta$ 要求非零解 η，故必须满足 $|B|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\-2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+3)(\lambda-3)^2=0$.

故必须有 $\lambda=-3,3$(二重).

当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\xi_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则 $c_1\xi_1, c_1\neq 0$ 为特征向量.

当 $\lambda=3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令$\xi_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_2=-\alpha_1+\alpha_2, \xi_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_3=-\alpha_1+\alpha_3$,则$c_2\xi_2+c_3\xi_3, c_2,c_3\neq 0$为特征向量.