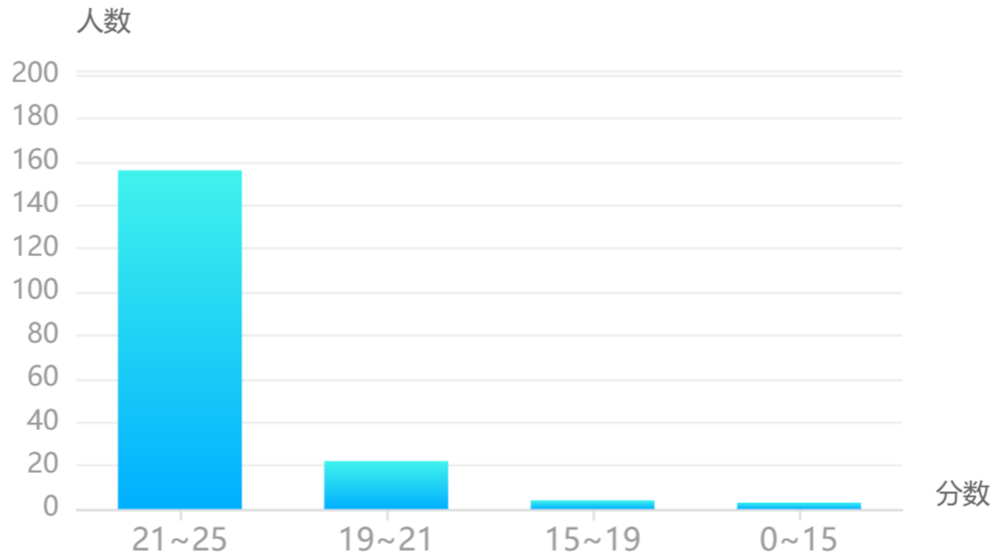



| 题型 | 完成率 | 正确率/平均分 |
|---|---|---|
| 单选 | -- | 97% |
| 单选 | -- | 94% |
| 单选 | -- | 94% |
| 单选 | -- | 97% |
| 单选 | -- | 97% |

单选题 5分

(Q→R)→((P→Q)→(P→R)) 是：（单选题，如重言式则不需要选可满足式）

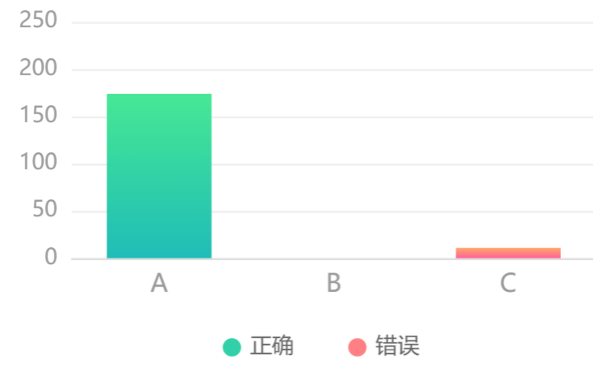
A 重言式

B 永假式

C 可满足式

答题统计　答案解析

| 185 /202 | 92 % | 94 % |
| --- | --- | --- |
| 完成人数 | 完成率 | 正确率 |




**答题分布**

| | | |
| --- | --- | --- |
| A | ✓ | 共174人，占比94% |
| B | | 共0人，占比0% |
| C | | 共11人，占比6% |

## $p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$ 的真值表

| $p$ | $q$ | $p\rightarrow q$ | $p\wedge(p\rightarrow q)$ | $p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设$A$为任一命题公式，

1. 若$A$在它的各种赋值下取值均为真，则称$A$是重言式或永真式。

2. 若$A$在它的各种赋值下取值均为假，则称$A$是矛盾式或永假式。

3. 若$A$不是矛盾式，则称$A$是可满足式

# 命题公式的分类（续）

真值表可用来判断公式的类型：

（1）若真值表最后一列(公式结果)全为1，则公式为重言式；

（2）若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

（3）若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。

# 真值表及其构造方法

定义1.8　真值表

将命题公式$A$在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的具体步骤：

（1）找出公式中所含的全体命题变项$p_1$，$p_2$，…，$p_n$（若无下角标就按字典顺序排列），列出$2^n$个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。

（2）按照运算的优先次序写出各子公式。

（3）对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

# Discrete Mathematics

# 离散数学(1)

## 第一章 命题逻辑的基本概念

马昱春

清華大學
Tsinghua University

# 命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。
2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值：命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题：与事实相符或表达的判断正确；真值为真

假命题：与事实不符或表达的判断错误；真值为假

规定：任何命题的真值都是唯一的；
不能非真非假，也不能既真又假。

# 内容回顾

- 命题
  - 是一个能判断真假且非真即假的陈述句
  - 两个特征
- 简单命题与复合命题
- 否定联结词 （非，¬ ）
- 合取联结词 （与，∧ ）
- 析取联结词 （或，∨ ）
- 蕴涵联结词 （如果…，则… ， → ）
- 双蕴涵联结词 （当且仅当， ↔ ）

# 基本复合命题
# （5个常用联结词）的真值表

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $p\rightarrow q$ | $p\leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

  （），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

# 合式公式或命题公式

## 合式公式或命题公式的表示

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词时，合式公式定义如下

# 合式公式(命题公式)的定义

定义1.6　合式公式 ( wff ) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若$A$是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若$A$，$B$是合式公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），（$A \rightarrow B$），（$A \leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有有限次地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设$A$为合式公式，$B$为$A$中的一部分，若$B$也是合式公式，则称$B$为$A$的子公式。

递推定义

# 命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是出现在公式$A$中的全部的命题变项，给$p_1$，$p_2$，…，$p_n$各指定一个真值，称为对$A$的一个赋值或解释。

若指定的一组值使$A$的真值为1，则称这组值为$A$的成真赋值；

若使$A$的真值为0，则称这组值为$A$的成假赋值。

# 1.4 重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的**命题变项**都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，$A$是一个公式，对$A$使用代入规则得到公式$B$，若$A$是重言式，则$B$也是重言式。

# 1.4 重言式与代入规则

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

# 1.5 命题形式化

所谓命题形式化（符号化），就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

化繁为简，各个击破

# 例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

该命题若写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$？？？

**IF $\neg$ *P* THEN *Q* ELSE *R***

***逻辑是否完全表达了例6呢？***

Q=1 and R=1？

因为原命题表示："天不下雨时我做Q，天下雨我做R"的两种作法，但是我不能同时做Q和R。

# 问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

| P Q R | ¬P | ¬P→Q | P→ R | (¬P→Q)∧(P→ R) |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ~~0 1 1~~ | ~~1~~ | ~~1~~ | ~~1~~ | ~~1~~ |
| 1 0 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| ~~1 1 1~~ | ~~0~~ | ~~1~~ | ~~1~~ | ~~1~~ |

# 例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge\neg(Q\wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\nabla}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

| P Q R | $\neg P$ | $\neg P\rightarrow Q$ | $P\rightarrow R$ | $\neg(Q\wedge R)$ | $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$ $\neg(Q\wedge R)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$ |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 0 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $(P\wedge\neg Q\wedge R)$ |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 1 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |

# 例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

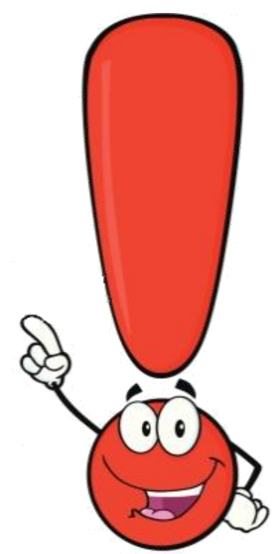
还可以形式化为： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

还可以形式化为： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

**两项不会同时为1**

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \bar{\vee} q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



# 1.6 波兰表达式

括号的使用，联结词的中辍、前辍、后辍形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。

若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

# 1.6.1 计算机识别括号的过程

合式公式的定义中使用的是联结词的中辍表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

计算机识别处理这种中辍表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。

如考察下面公式真值的计算过程

$$(P\vee(Q\wedge R))\vee(S\wedge T)$$

# 1.6.1 计算机识别括号的过程

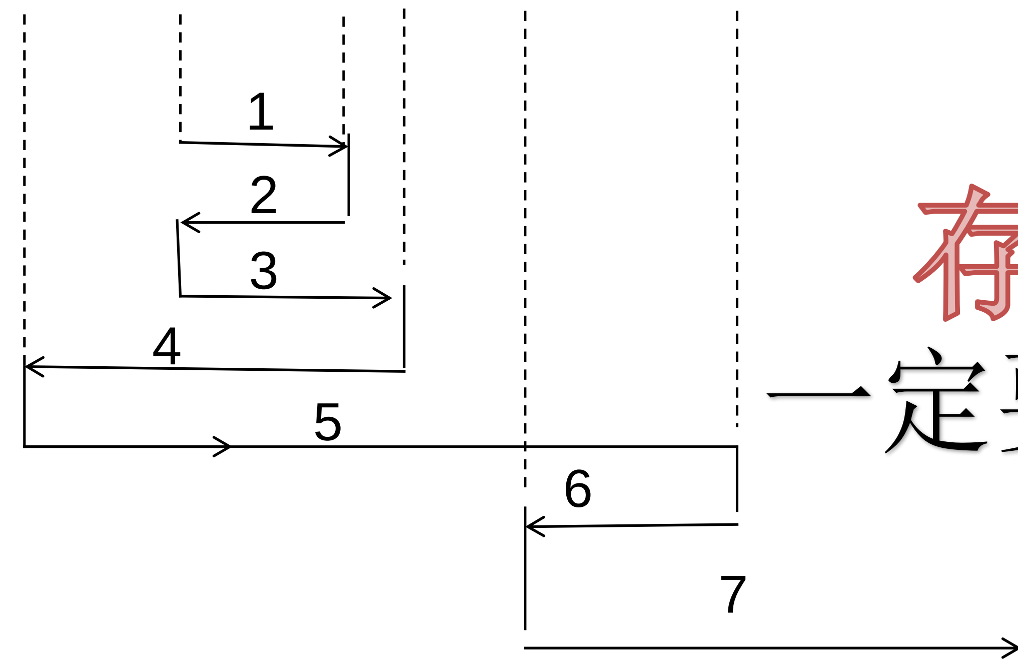
开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式$(Q \wedge R)$方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式$(P \vee (Q \wedge R))$并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

# 1.6.1 计算机识别括号的过程

如图1.6.1所示的扫描过程1→2→3→…→6→7。

$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$




繁

存储状态

一定要括号吗？

开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式(Q∧R)方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式(P∨(Q∧R))并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

# 1.6.1 计算机识别括号的过程

公式中的运算符是否非要括号才能定义呢？

若一个式子中同时使用**两种或两种以上**运算符放置方式时，无论对运算符的优先级怎样进行规定，括号都不能完全避免。

例如：对数运算符 log 是前缀运算符;

阶乘运算符！是后缀运算符;

$$5!+\lg 10 + 3*(5+10)$$

如果想去掉括号该怎么办？

是不是不要考虑a+b, 而考虑"a和b相加"？

操作符放前还是放后？

# 1.6.2 波兰式

一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

| | | |
|---|---|---|
| 中置式如 | $P \vee Q$ | （中缀式） |
| 前置式如 | $\vee PQ$ | （前缀式） |
| 后置式如 | $PQ \vee$ | （后缀式） |

前置式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家 J. Lukasiewicz提出的，故称之为波兰表达式。

解决方案：将中置、后置全部换成前置
或将中置、前置全部换成后置
这样，便可不使用任何括号。

# 1.6.2 波兰式

- 如将公式P∨((Q∧R)∧S)的这种中置表示化成波兰式（前缀表达式），可由内层括号逐步向外层脱开(或由外层向内逐层脱开）的办法。

# 1.6.2 波兰式

$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

1

$\vee$**QR**

**2**

$\wedge\vee$**QRS**

3

$\vee$**P**$\wedge\vee$**QRS**

# 1.6.2 波兰式

举例：中置变前置 $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

由里向外：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$P\vee(\vee QR\wedge S)$

$P\vee\wedge\vee QRS$

$\vee P\wedge\vee QRS$

由外向里：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\ ((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\wedge(Q\vee R)\ S$

$\vee P\wedge\vee QRS$

主观题 10分

设置

中置变后置 $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

# 1.6.2 逆波兰式

举例：**中置变后置** $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$$

$$P\ ((Q\vee R)\wedge S)\vee$$

$$P\ (Q\vee R)\ S\wedge\ \vee$$

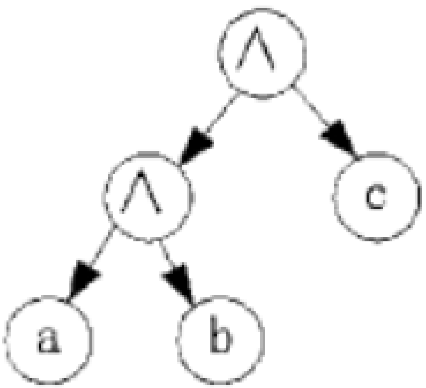
$$P\ QR\vee S\wedge\vee$$

思考题：
单目运算符怎么处理？

# 二叉树表示法

注意从左到右的结合性

$B = a \land b \land c$



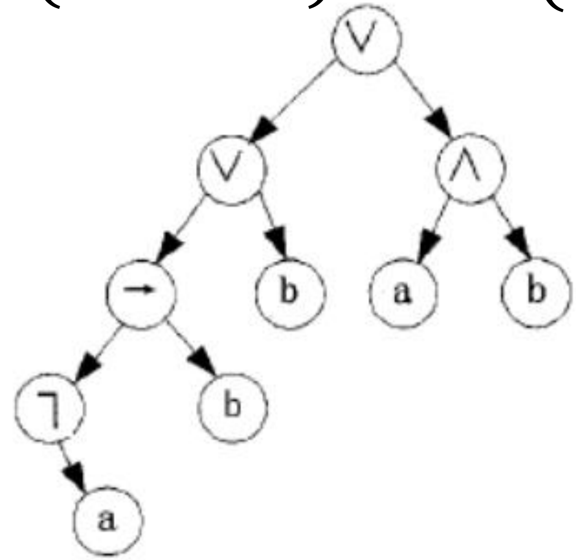

波兰表达式：

$\land\land abc$

逆波兰表达式：

$ab \land c \land$

$D = (\neg a \rightarrow b) \lor b \lor (a \land b)$




波兰表达式：

$\lor\lor \rightarrow \neg abb \land ab$

逆波兰表达式：

$a\neg b \rightarrow b \lor \ ab \land\lor$

# 1.6.2 波兰式

- $(P \vee (Q \wedge R))\ \vee\ (S \wedge T)$
- 波兰式：$\vee \vee P \wedge QR \wedge ST$
- 计算机如何进行求值？

$\vee\ \vee\ P\ \wedge\ Q\ R\ \wedge\ S\ T$

$(P \vee (Q \wedge R))\ \vee (S \wedge T)$

# 1.6.2 波兰式

- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自**右向左**扫描一次完成，避免了重复扫描。
- 同样**后置表示（逆波兰式）**也有类似的优点。而且**自左向右**一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。
- 只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

# 第一章小结

命题逻辑(Logic)

- 研究命题的推理演算
- 命题逻辑的应用
  - 数学上定理的推导
  - 在计算机科学上，验证程序的正确性

主要内容

- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题合式公式、重言式
- 自然语句的形式化

# 第一章小结（续）

- 本章主要介绍了命题逻辑的基本概念，它是后面两章的基础；
- 介绍了命题、命题变项、简单命题和复合命题；
- 介绍了命题联结词及其真值表
  - 否定联结词$\neg$
  - 合取联结词$\wedge$
  - 析取联结词$\vee$
  - 蕴涵联结词$\rightarrow$
  - 双蕴涵联结词$\leftrightarrow$

# 第一章小结（续）

- 介绍了合式公式及其递归定义；
- 介绍了重言式、矛盾式和可满足式；在此基础上，介绍了代入规则以及如何利用代入规则证明重言式；
- 介绍了如何形成自然语句的合式公式（命题的形式化）以及较为复杂的自然语句形式化；
- 介绍了计算机识别合式公式（括号）的过程，在此基础上，介绍了波兰表达式及其在计算机识别处理过程的优势。

# Discrete Mathematics

## 离散数学(1)

# 第二章：命题逻辑的等值和推理演算

马昱春

Tsinghua University

# 主要内容

- 主要讨论命题逻辑的等值和推理演算，是命题逻辑的核心内容。
- 介绍命题公式等值的概念，并通过等值定理给出命题公式等值的充要条件。
- 介绍推理形式和推理演算，给出近于数学的推理

# 主要内容

2.1 等值定理
2.2 等值公式
2.3 命题公式与真值表的关系
2.4 联接词的完备集
2.5 对偶式
2.6 范式
2.7 推理形式
2.8 基本的推理公式
2.9 推理演算
2.10 归结推理法
补充：应用举例

# 前言

- 推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容
- 推理形式是由前提和结论经蕴涵词联结而成的
- 推理过程是从前提出发，根据所规定的规则来推导出结论的过程
- 重言式是重要的逻辑规律，正确的推理形式、等值式都是重言式

# 2.1 等值定理

等值:

给定两个命题公式 $A$和 $B$，设$P_1, P_2, \ldots, P_n$为出现于$A$和$B$中的所有命题变项，则公式A和B共有$2^n$个解释。

若在任一解释下，公式$A$和$B$的真值都相同，则称$A$和$B$是等值的、或称等价记作

$A$=$B$ 或 $A \Leftrightarrow B$。

# 判断公式是否等值

- $P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
- $(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

# $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$
# $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

| $P\ Q\ R$ | $Q\rightarrow R$ | $P\wedge Q$ | $P\rightarrow Q$ | $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ | $(P\wedge Q)\rightarrow R$ | $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | | | | | |
| 0 0 1 | 1 | | | | | |
| 0 1 0 | 0 | | | | | |
| 0 1 1 | 1 | | | | | |
| 1 0 0 | 1 | | | | | |
| 1 0 1 | 1 | | | | | |
| 1 1 0 | 0 | | | | | |
| 1 1 1 | 1 | | | | | |

# $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$
# $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

| $P\ Q\ R$ | $Q\rightarrow R$ | $P\wedge Q$ | $P\rightarrow Q$ | $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ | $(P\wedge Q)\rightarrow R$ | $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | | | 1 | | |
| 0 0 1 | 1 | | | 1 | | |
| 0 1 0 | 0 | | | 1 | | |
| 0 1 1 | 1 | | | 1 | | |
| 1 0 0 | 1 | | | 1 | | |
| 1 0 1 | 1 | | | 1 | | |
| 1 1 0 | 0 | | | 0 | | |
| 1 1 1 | 1 | | | 1 | | |

# $P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
# $(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

| $P$ $Q$ $R$ | $Q\to R$ | $P\wedge Q$ | $P\to Q$ | $P\to(Q\to R)$ | $(P\wedge Q)\to R$ | $(P\to Q)\to R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | | 1 | | |
| 0 0 1 | 1 | 0 | | 1 | | |
| 0 1 0 | 0 | 0 | | 1 | | |
| 0 1 1 | 1 | 0 | | 1 | | |
| 1 0 0 | 1 | 0 | | 1 | | |
| 1 0 1 | 1 | 0 | | 1 | | |
| 1 1 0 | 0 | 1 | | 0 | | |
| 1 1 1 | 1 | 1 | | 1 | | |

# $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$
# $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

| $P\ Q\ R$ | $Q\rightarrow R$ | $P\wedge Q$ | $P\rightarrow Q$ | $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ | $(P\wedge Q)\rightarrow R$ | $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | | 1 | 1 | |
| 0 0 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 0 | 0 | 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 1 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | |
| 1 0 0 | 1 | 0 | | 1 | 1 | |
| 1 0 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | |
| 1 1 0 | 0 | 1 | | 0 | 0 | |
| 1 1 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | |

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$$

# $P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
# $(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

| $P\ Q\ R$ | $Q\to R$ | $P\wedge Q$ | $P\to Q$ | $P\to(Q\to R)$ | $(P\wedge Q)\to R$ | $(P\to Q)\to R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

$$P\to(Q\to R)\text{与}(P\wedge Q)\to R$$
$$(P\to Q)\to R\text{与}(P\wedge Q)\to R$$

| $P$ $Q$ $R$ | $Q\to R$ | $P\wedge Q$ | $P\to Q$ | $P\to(Q\to R)$ | $(P\wedge Q)\to R$ | $(P\to Q)\to R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 1 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$(P\to Q)\to R \neq (P\wedge Q)\to R$$

# 2.1 等值定理

- 定理2.1.1
  设$A$，$B$为两个命题公式，$A = B$的充分必要条件是$A \leftrightarrow B$为一个重言式。

# 等值定理的证明

1．必要性：←

若$A \leftrightarrow B$是重言式，则在任一解释下，$A \leftrightarrow B$的真值均为真。

由 $A \leftrightarrow B$的定义，仅当$A$、$B$真假值相同时，才有$A \leftrightarrow B = \mathrm{T}$。

所以在任一解释下，$A$、$B$都有相同的真值，从而有$A = B$。

# 等值定理的证明

2．充分性：→

　　若有$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，则在任一解释下，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都有相同的真值，依 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$的定义，$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$的取值一定为真，故推出 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$是重言式。

证毕

# 等值定理

等值定理的实用性之一：

若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。

等值关系满足等价关系的三个性质：

自反性　　$A = A$.

对称性　　若$A = B$，则$B = A$.

传递性　　若$A = B$，$B = C$，则$A = C$

等价关系

# 逆命题、否命题与逆否命题

逆命题：　若将$P \to Q$视为原命题，则称$Q \to P$为它的逆命题。

否命题：　若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg P \to \neg Q$为它的否命题。

逆否命题：若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg Q \to \neg P$为它的逆否命题。

# 四种命题

- 四种命题
  - 原命题 —— 表述形式：若$P$，则$Q$
  - 逆命题 —— 表述形式：若$Q$，则$P$
  - 否命题 —— 表述形式：若$\neg P$，则$\neg Q$
  - 逆否命题 —— 表述形式：若$\neg Q$，则$\neg P$

# 逆命题、否命题与逆否命题

两个重要结论

1. 一个命题（**原命题**）与它的逆否命题等值

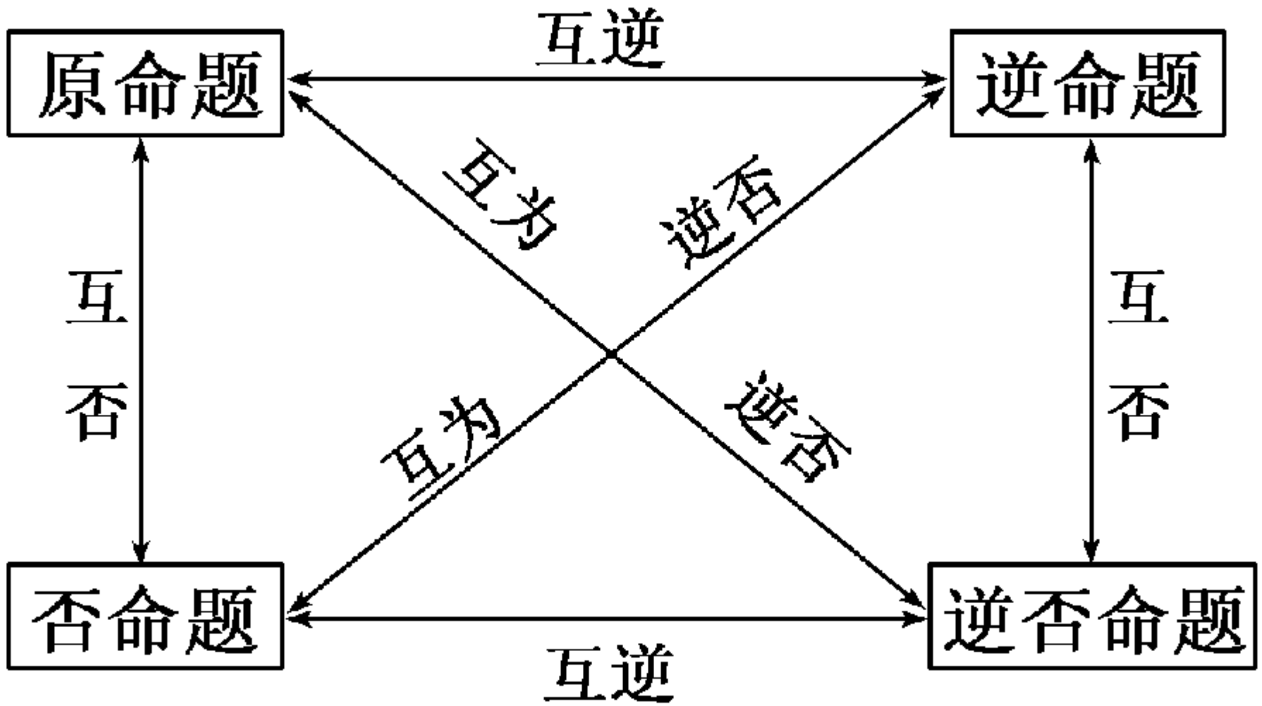
即 $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$

2. 一个命题的逆命题与它的否命题等值

即 $Q \rightarrow P = \neg P \rightarrow \neg Q$

*举例* 证明 若$a^2$是偶数，则$a$是偶数。利用结论1。

# 四种命题间的逆否关系



# 2.2 等值公式

## 2.2.1　子公式

若$X$是合式公式$A$的一部分，且$X$本身也是一个合式公式，则称$X$为公式$A$的子公式。

# 2.2 等值公式

## 2.2.2 置换规则

设$X$为公式$A$的子公式，**用与$X$等值的公式$Y$将$A$中的$X$施以代换**，称为**置换**，该规则称为置换规则。

置换后公式$A$化为公式$B$，置换规则的性质保证公式$A$与公式$B$等值，即$A=B$。

且当$A$是重言式时，置换后的公式$B$也是重言式。

# 2.2 等值公式

定理2.2.1：

设$\Phi(A)$是含命题公式$A$的命题公式，$\Phi(B)$是用命题公式$B$置换了$\Phi(A)$中的$A$之后得到的命题公式

如果$A = B$，则$\Phi(A) = \Phi(B)$。

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"→" 不满足结合律

*思考当P=0, R=0*

| $P$ $Q$ $R$ | $Q \rightarrow R$ | $P \rightarrow Q$ | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P$$
$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$
$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

"→" 不满足交换律

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$$

***若P=1，则Q->R成立与否；若P=0,则两边都为真***

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

比如P=0, Q=0, R=1

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

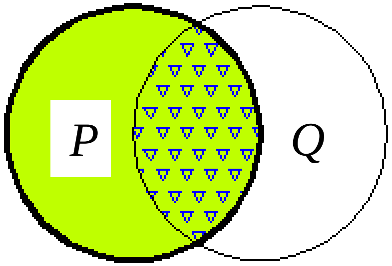
5. 等幂律（恒等律）

$$P \lor P = P$$
$$P \land P = P$$
$$P \to P = T$$
$$P \leftrightarrow P = T$$

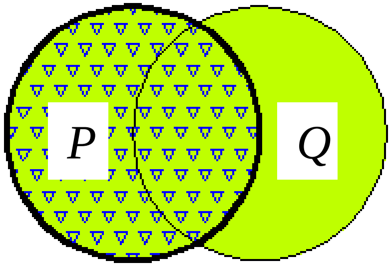
# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

6. 吸收律

$$P \lor (P \land Q) = P$$
$$P \land (P \lor Q) = P$$




$P \lor (P \land Q)$




$P \land (P \lor Q)$

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

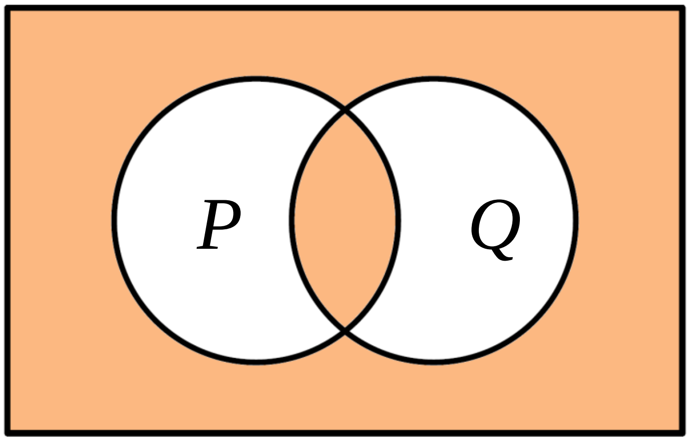
$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

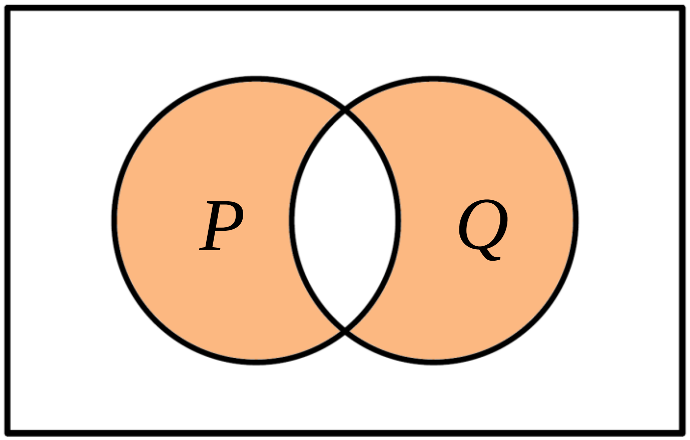
$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$ （借助图形）

# $P\leftrightarrow Q$ 和$\neg(P\leftrightarrow Q)$的文氏图

- $P\leftrightarrow Q = (P\rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = (\neg P\vee Q) \wedge (P\vee \neg Q)$
- $\neg(P\leftrightarrow Q) = (\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$




$P\leftrightarrow Q$




$\neg(P\leftrightarrow Q)$

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律:

$$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$$

$$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律:

$P \vee T = T$

$P \wedge F = F$

还有

$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}$

$\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{T}$

# 2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律：

$P \vee \neg P = T \qquad P \wedge \neg P = F$

还有

$P \rightarrow \neg P = \neg P$

$\neg P \rightarrow P = P$

$P \leftrightarrow \neg P = F$

# 常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式：$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位：$P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论：$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

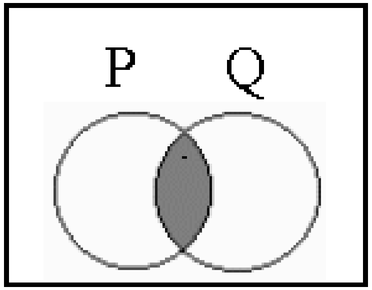
# 常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

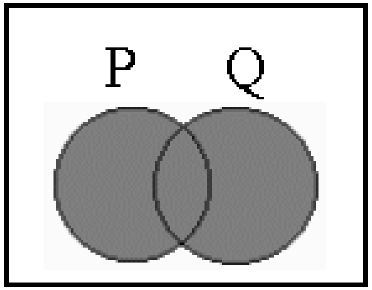
证明其他等值式

# 文氏图(Venn Diagram)

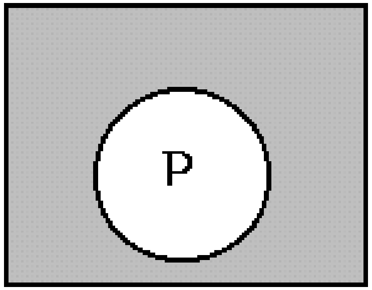
- 将P、Q理解为某总体论域上的子集合，并规定：
  - P∧Q为两集合的公共部分(交集合)
  - P∨Q为两集合的全部(并集合)
  - ¬P为总体论域(如矩形域)中P的余集




P∧Q




P∨Q

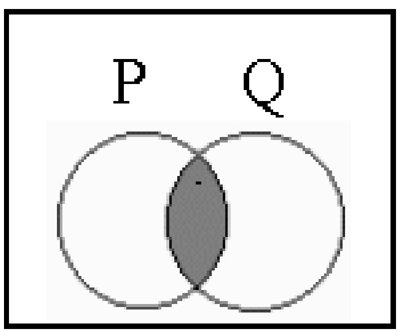



¬P

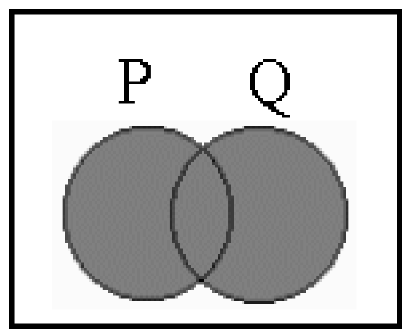
# 文氏图

从Venn 图，因P∧Q较P来得“小”， P∨Q较P来得“大”，从而有

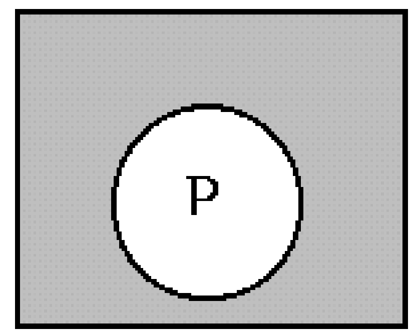
$P\vee(P\wedge Q) = P$　　　　$P\wedge(P\vee Q) = P$




$P\wedge Q$




$P\vee Q$




$\neg P$

# 2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:$A$是一个命题公式，$X$是$A$中子公式，如果$X=Y$，用$Y$代替$A$中的$X$得到公式$B$，则$A=B$。

# 公式等值演算的用途

- 判别命题公式的类型
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 验证两个公式等值
- 解决实际问题

# 用途1：判别命题公式的类型

- 例1　判别$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解　原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式,结合律)

$= (P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　(双重否定律，幂等律)

$= (P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　(交换律)

$= ((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　(结合律)

$= Q\vee\neg P$　(吸收律)

可满足式

# 用途1：判别命题公式的类型

- 例2　　判别$\neg(P \to (P \vee Q)) \wedge R$公式类型.

解　原式

$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R$　　(蕴涵等值式)

$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R$　　(摩根律)

$= \mathrm{F} \wedge R$　　(补余律，零律)

$= \mathrm{F}$　　(零律)

矛盾式

# 用途2：**验证两个公式等值**

**例3：证明$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$**

- 证明：

$$
\begin{aligned}
P\rightarrow(Q\rightarrow R) &= P\rightarrow(\neg Q\vee R) && \text{（蕴含等值式）}\\
&= \neg P\vee(\neg Q\vee R) && \text{（蕴含等值式）}\\
&= (\neg P\vee\neg Q)\vee R && \text{（结合律）}\\
&= \neg(P\wedge Q)\vee R && \text{（摩根律）}\\
&= (P\wedge Q)\rightarrow R && \text{（蕴含等值式）}
\end{aligned}
$$

**山无棱且天地合，乃敢与君绝**

**山若无棱，只要再等天地合，就能与君绝**

## 例4：证明$(P\to R)\wedge(Q\to R)=(P\vee Q)\to R$

$(P\to R)\wedge(Q\to R)$

$=(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ 蕴含等值式

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee R$ 分配律

$=\neg(P\vee Q)\vee R$ 摩根律

$=(P\vee Q)\to R$ 蕴含等值式

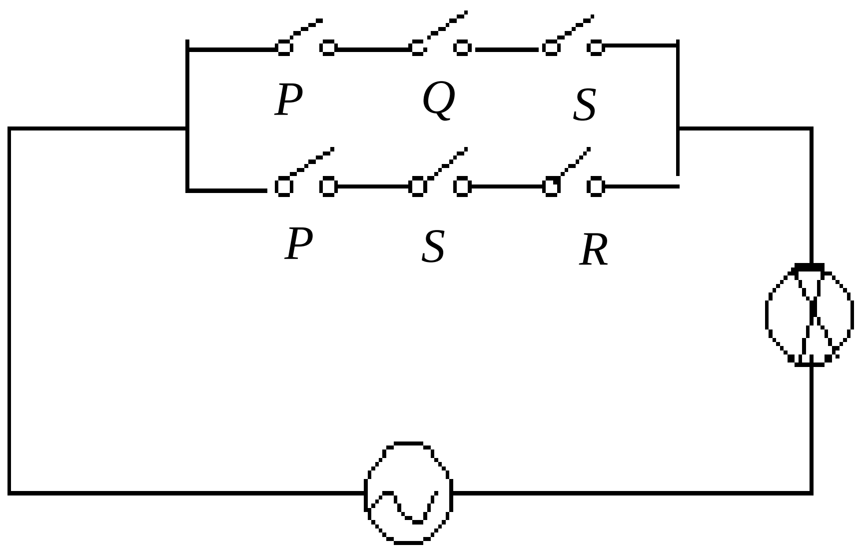
例5：$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)=P$

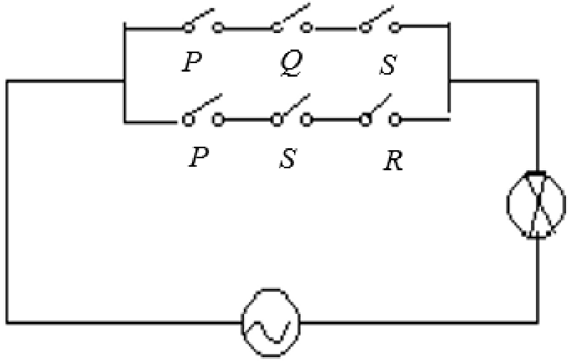
**证明：**

$$
\begin{aligned}
& (P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R) & \\
=\ & P\wedge((Q\vee R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)) & \text{分配律} \\
=\ & P\wedge((Q\vee R)\vee\neg(Q\vee R)) & \text{摩根律} \\
=\ & P\wedge \mathrm{T} & \text{同一律} \\
=\ & P &
\end{aligned}
$$

# 用途3：解决实际问题

- **例6：试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。**






**解：可将该图所示之开关电路用下述命题公式表示：**

$$(P\wedge Q\wedge S)\vee(P\wedge R\wedge S)$$

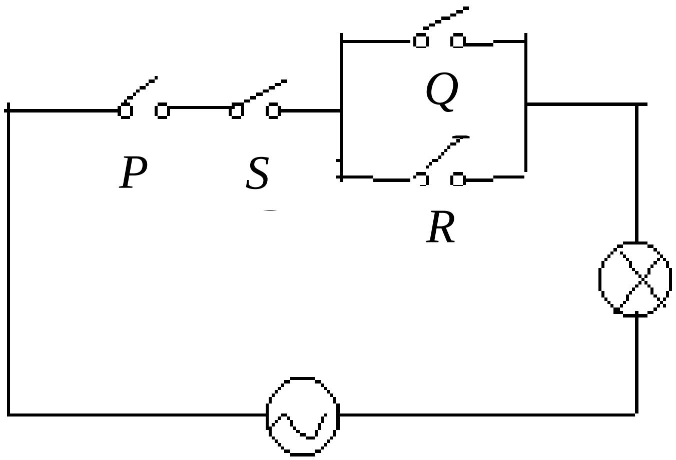
**利用基本等值公式，将上述公式转化为：**

$$(P\wedge Q\wedge S)\vee(P\wedge R\wedge S)$$

$$=((P\wedge S)\wedge Q)\vee((P\wedge S)\wedge R)$$

$$=(P\wedge S)\wedge(Q\vee R)$$

**所以其开关设计图可简化为**



# 2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式 $A$ 来说，可由$P_1, P_2, \ldots, P_n$的真值，根据命题公式 $A$，给出$A$的真值，从而建立起由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 $A$的真值表。
- 反之，若给定了由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 $A$的真值表，可以用下述方法写出命题公式$A$对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的逻辑表达式：

| $P$ | $Q$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | T |
| T | F | F | F |
| T | T | T | F |

# 例1：从取1的行来列写

$$A= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

# 例2：从取0的行来列写

$\neg A= P \wedge \neg Q$ $A=(\neg P \vee Q)$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

# 2.3 命题公式与真值表的关系

## 1. 从取1的行来列写

考查命题公式 A的真值表中取1 的行，若取1的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中 $Qi = (R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $\neg P_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的$P_i = 1$，则$R_i = P_i$;否则$R_i = \neg P_i$

| $P$ | $Q$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | T |
| T | F | F | F |
| T | T | T | F |

# 进一步理解

- 从取1的行来列写

$$A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_m$$

- 故从取0的行来列写

$\neg A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_l$ 从而

$$A = (\ \vee\ )_1 \wedge (\ \vee\ )_2 \wedge \ldots \wedge (\ \vee\ )_l$$

其中$(\ \vee\ )_1$中每一项也相应取反，因此

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

# 2.3 命题公式与真值表的关系

## 2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有$k$行，则命题公式$A$可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中 $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$ ，

$R_i = P_i$ 或 $R_i = \neg P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

**若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$**

**若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.**

# 例2：从取0的行来列写

$A = (\neg P \vee Q)$

$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

| *P* | *Q* | *A* | *B* |
|---|---|---|---|
| F | F | T | T |
| F | T | T | T |
| T | F | $\boxed{F}$ | F |
| T | T | T | F |

# 两个重要的命题联结词

## 与非联接词

与非联接词是二元命题联结词。两个命题$P$和$Q$用与非联接词“↑”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$。读作$P$和$Q$的“与非”。当且仅当$P$和$Q$的真值都是1时，$P\uparrow Q$的真值为0，否则$P\uparrow Q$的真值为1。

$$P\uparrow Q = \neg (P \wedge Q)$$

（真值表）

| $P$ | $Q$ | $P\uparrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# 两个重要的命题联结词

## 或非联接词

或非联接词是二元命题联结词。两个命题$P$ 和$Q$用或非联接词"$\downarrow$"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\downarrow Q$。读作$P$ 和$Q$的"或非"。当且仅当$P$和$Q$的真值都是0 时，$P\downarrow Q$的真值为1，否则$P\downarrow Q$的真值为$F$。

$$P\downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

| $P$ | $Q$ | $P\downarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

# 异或联结词

- 不可兼或。$P \bar{\vee} Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
  - 当且仅当$P$和$Q$的值不一样的时候，的真值为1；
  - 当$P$和$Q$的值相同，异或结果为0。

| $P$ | $Q$ | $P \bar{\vee} Q$ |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# 2.4 联接词的完备集

## 2.4.1 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

*举例*：N=2时的所有真值函项

# N = 2时的所有真值函项

| $P$ | $Q$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | $g_7$ | $g_8$ | $g_9$ | $g_{10}$ | $g_{11}$ | $g_{12}$ | $g_{13}$ | $g_{14}$ | $g_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

***注意*** 真值函项方向的设定。

$g_0 = F$　　$g_1 = P \wedge Q$　　$g_6 = P \,\overline{\vee}\, Q$

$g_7 = P \vee Q$　　$g_8 = P \downarrow Q$　　$g_9 = P \leftrightarrow Q$

$g_{13} = P \to Q$　　$g_{14} = P \uparrow Q$　　$g_{15} = T$

$g_3 = P$　　$g_5 = Q$

$g_{10} = \neg Q$　　$g_{12} = \neg P$

尚余

$g_2 = P \wedge \neg Q$　　$g_4 = \neg P \wedge Q$

$g_{11} = P \vee \neg Q = Q \to P$

对于二值逻辑，

n个命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$可定义 $2^{2^n}$ 个 n元联接词

若推广到多值逻辑结果如何

$m^{m^n}$ ？

# 2.4 联接词的完备集

## 2.4.2 联接词的完备集

$C$是一个联结词的集合，如果任何$n$元$(n\geq 1)$真值函项都可以由仅含$C$中的联结词构成的公式表示，则称$C$是完备的联结词集合，或说$C$是联结词的完备集。

# 联结词的完备集

定理2.4.1

{ ¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬, ∨, ∧表示，从而{¬, ∨, ∧}是完备的。
- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

# 联结词的完备集

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

# 证明{↑}，{↓}都是联结词完备集

- 已知 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是完备集，证明其中每个联结词都可以由↑来表示

$\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$

$P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$

证毕

# 一些重要的全功能联结词集合

- {¬, ∧}, {¬, ∨}可以构成功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- {¬, →}也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- {↑}， {↓}是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

# 小结

- 等值定理
  – 若在任一解释下，公式$A$和$B$的真值都相同，则称$A$和$B$是等值的
- 等值公式
  – 置换规则
  – 基本的等值公式
  – 常用等值公式
  – 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  – 从取T的行来写
  – 从取F的行来写

# 小结

- 联结词的完备集
  - 可以证明，$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$，$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$都是联结词功能完全组；
  - 而$\{\neg,\leftrightarrow\}$，$\{\neg\}$，$\{\wedge\}$，$\{\vee\}$，$\{\wedge,\vee\}$都不是联结词功能完全组；
  - 使用联结词集$\{\neg,\wedge,\vee\}$.

谢谢

myc@tsinghua.edu.cn