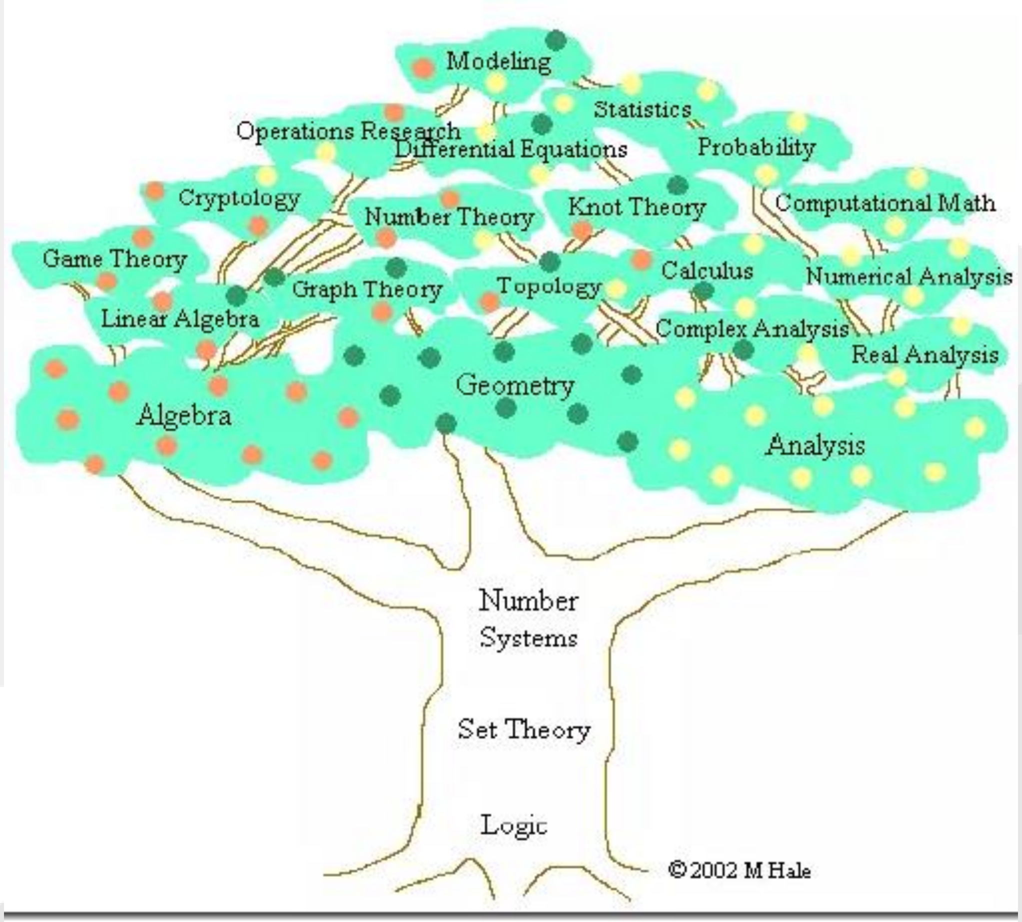
第九章　集 合

后半部分（9.5-9.7）

内容回顾

- 集合论



Modeling
Statistics
Operations Research
Differential Equations
Probability
Cryptology
Number Theory
Knot Theory
Computational Math
Game Theory
Calculus
Numerical Analysis
Graph Theory
Topology
Linear Algebra
Complex Analysis
Real Analysis
Geometry
Algebra
Analysis
Number Systems
Set Theory
Logic
©2002 M Hale

第九章 集合

9.3 集合的运算

$A \cup B = \ x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \ x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \ x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \ x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$

元素x ∈ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$　　$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

空白

$\varnothing = \ x \mid x \neq x$　　对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$　　$E = \ x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \ x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$　　$\cup \varnothing = \varnothing$

$\bigcap A = \ x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$　　$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \ x \mid x \subseteq A$$

定义9.3.3 幂集(power set)

- 设A为集合，由A的所有子集组成的集合称为A的幂集，记作$P(A)$。符号化表示为

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

对任意的集合A，有$\varnothing \subseteq A$和$A \subseteq A$，因此有 $\varnothing \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$ 。

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$

子集的个数

- 定理：设A为一个有限集，且|A|=n，则A的子集个数为2^n
  - 证明：集合A的子集最多有n个元素，最少有0个元素。

  0个元素的子集共有C(n,0)个；

  1个元素的子集共有C(n,1)个；

  ……

  n个元素的子集共有C(n,n)个.

  因此，集合A共有子集C(n,0)+ C(n,1)+… C(n,n)= 2^n个。

9-3-4 有序对

- 由两个元素x和y（允许$x=y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中

  x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。

- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

  1. 当$x \neq y$ 时，$<x, y> \neq <y, x>$。

  2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是

     $x = u$ 且 $y = v$。

定义9.3.4

- 用集合的形式，有序对<x, y>定义为

$$\langle x, y \rangle = \quad x \ , \quad x, y$$

定理9.5.1 集合恒等式

- 对任意的集合 A, B, C，下列恒等式成立：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

- (5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$　　$A\cap(A\cup B)=A$

(6) 狄摩根律

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

$$-(B\cup C)=-B\cap -C$$

$$-(B\cap C)=-B\cup -C$$

(7) 同一律 $A\cup = A$　　$A\cap E=A$

定理9.5.1 集合恒等式(续)

- (8) 零律 $A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

  (9) 补余律 $A \cup -A = E$ (排中律)

  $A \cap -A = \emptyset$ (矛盾律)

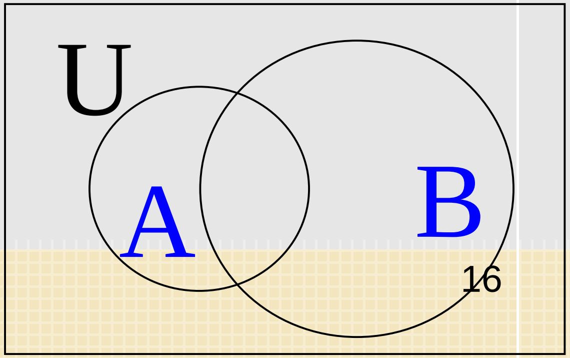
  (10) 补律 $-\emptyset = E$ $-E = \emptyset$

  (11) 双补律 $-(-A) = A$

- **[德摩根De Morgan定理]**

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证：(a)的证明。

设$\boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}$,则$x \notin A \cup B$ 相当于$x \notin A$ 和$x \notin B$ 同时成立，亦即

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

反之，若$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, 即 $x \in \overline{A}$和 $x \in \overline{B}$

故 $x \notin A, x \notin B$即$x \notin A \cup B$

$$\therefore\ x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \qquad (2)$$

由（1）和（2）得

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

(b)的证明和(a)类似，从略.

DeMogan定理的推广：设$A_1, A_2, \ldots. A_n$是U的子集，

则 (a) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

(b) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

证:采用数学归纳法

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$ 正确

则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}} = \overline{(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}}$$

$$= \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}}$$

$$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}$$

即定理对n+1也是正确的。

定理9.5.2 差集的性质

- 对任意的集合 A, B, C

$$(1)\ A-B=A-(A\cap B)$$

$$(2)\ A-B=A\cap -B$$

$$(3)\ A\cup(B-A)=A\cup B$$

$$(4)\ A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$$

- 上面公式(2)和(3)推导时经常使用

证(1) $A-B = A-(A\cap B)$

证 $A-(A\cap B)$ 由摩根律$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$= (A-A)\cup(A-B)$

$= \varnothing \cup(A-B)$

$= A-B$

证 (2) $A-B = A\cap -B$

证 $x \in (A-B)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in -B$

$\Leftrightarrow x\in (A\cap -B)$

证(3) $A \cup (B-A) = (A\cup B)$

证 $A \cup (B-A)$ $A-B = A\cap -B$

$= A \cup (B\cap -A)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

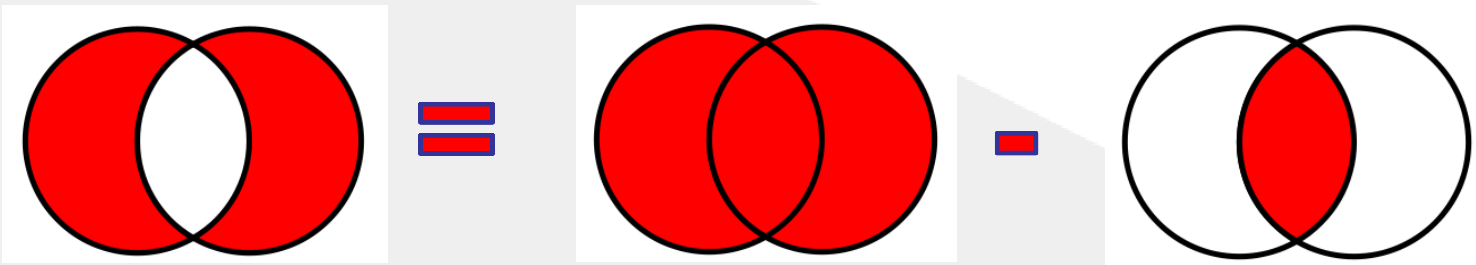
$= (A\cup B) \cap (A\cup -A)$

$= (A\cup B) \cap E$

$= A\cup B$

后面会用到该结果。

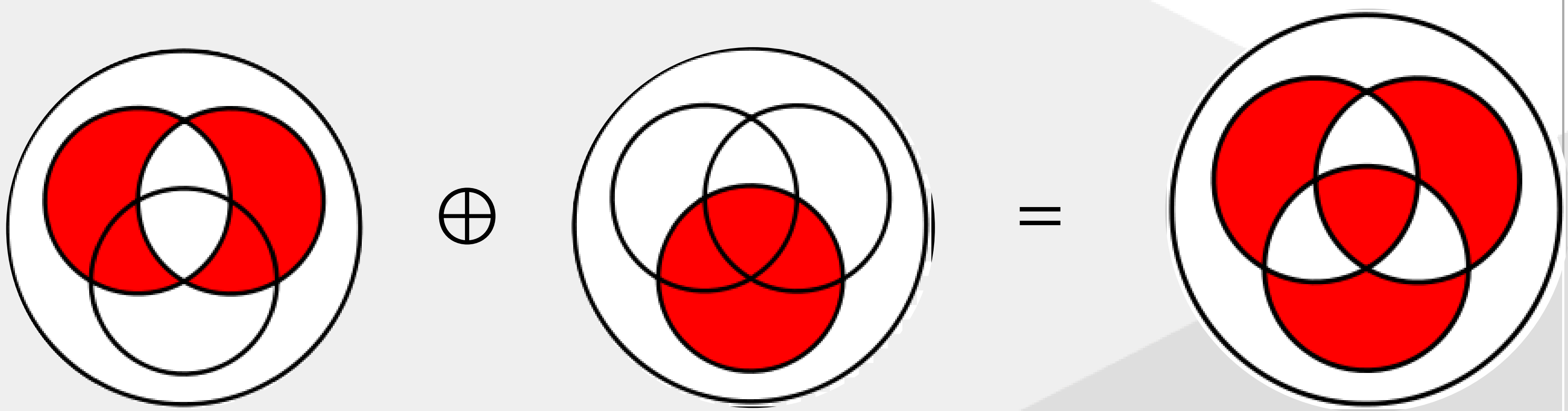
对称差



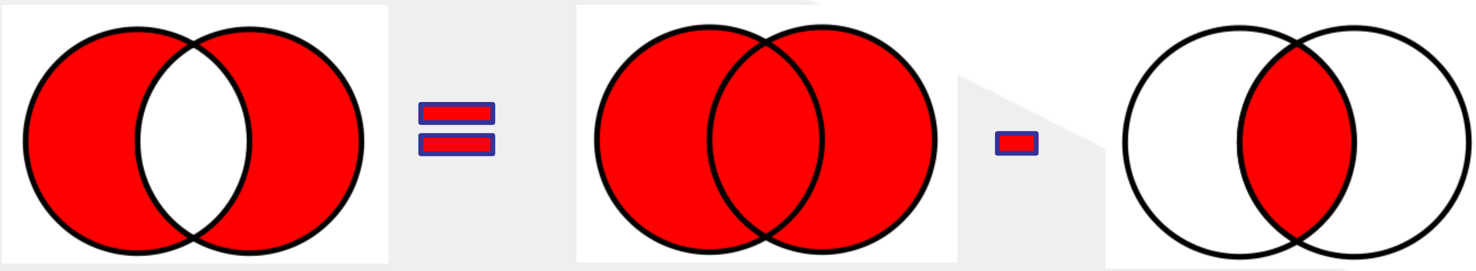
$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$$

对称差是否符合结合律？

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



对称差



- 对任意的集合 A, B, C

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(3) 分配率 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

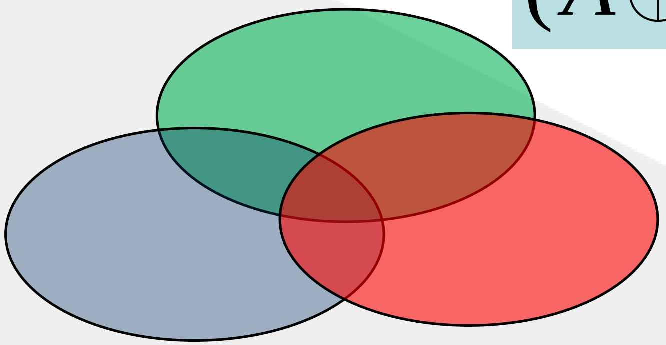
(4) 同一律 $A \oplus \emptyset = A$

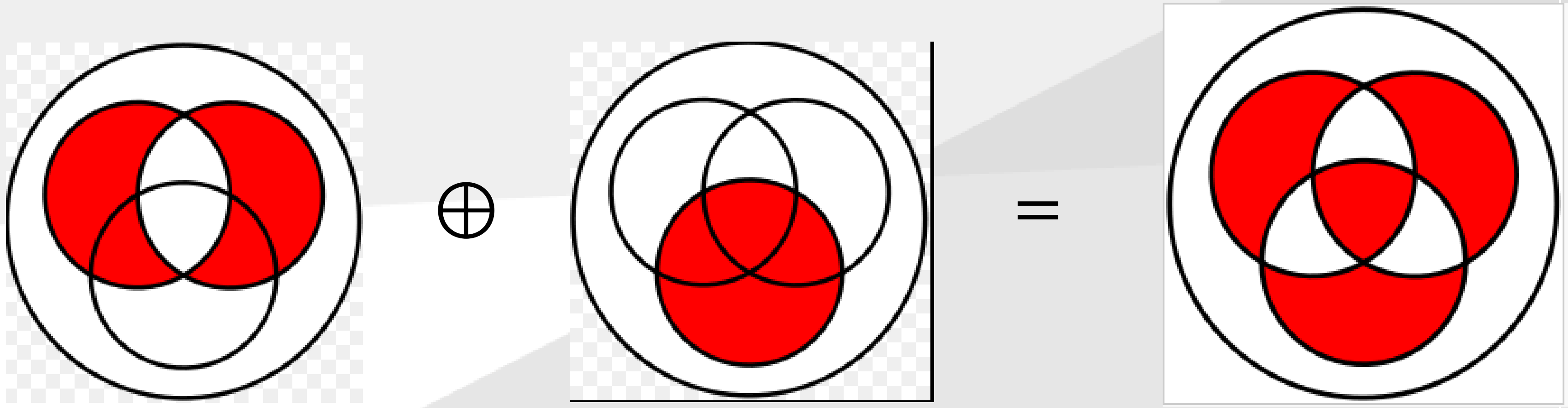
(5) 零律 $A \oplus A = \emptyset$

(6) 吸收率 $A \oplus (A \oplus B) = B$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$?





定理9.5.4 集合间的⊆关系的性质

- 对任意的集合 A, B, C 和 D

$$(1)\ A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$$

$$(2)\ A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

$$(3)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$

$$(4)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

$$(5)\ (A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$$

$$(6)\ C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$$

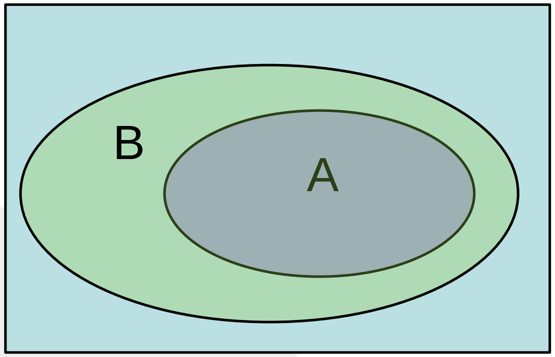
类比≤

- 求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \emptyset$ (4)



证 四个命题相互等价?

(1)$\Rightarrow$ (2), (2)$\Rightarrow$ (3)，(3)$\Rightarrow$ (4), (4)$\Rightarrow$ (1)

(1)$\Rightarrow$ (2), 已知$A \cup B = B$, 证$A \subseteq B$

对于任意的x, $x \in A \Rightarrow (x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in B$

因此$A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

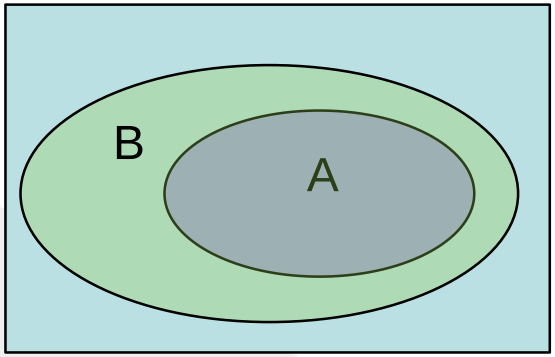
单向证明

- 求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \varnothing$ (4)



证 (2) $\Rightarrow$ (3) 已知$A \subseteq B$，证$A \cap B = A$

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

对于任意的x, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

$x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$

因此$A \cap B = A$

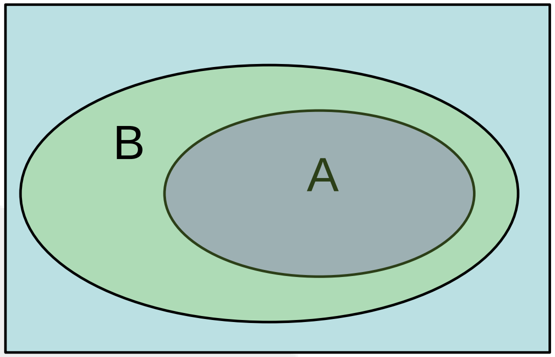
双向证明

- 求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \emptyset$ (4)



证 (3) $\Rightarrow$ (4) 已知 $A \cap B = A$，证 $A - B = \emptyset$

$A - B = A \cap -B$

$= A \cap B \cap -B$

$= \emptyset$

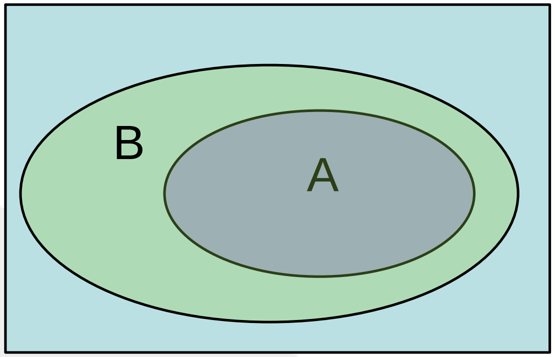
因此 $A - B = \emptyset$

- 求证 $A \cup B = B$ (1)

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ (2)

$\Leftrightarrow A \cap B = A$ (3)

$\Leftrightarrow A - B = \emptyset$ (4)



证 (4) $\Rightarrow$ (1), 已知 $A - B = \emptyset$，求证$A \cup B = B$

$A \cup B$

$= B \cup A$ 由差集的性质(3) $A \cup (B - A) = A \cup B$

$= B \cup (A - B)$ $B \cup (A - B) = B \cup A$

$= B \cup \emptyset$

$= B$

因此$A \cup B = B$

- 例2 对任意的集合A, B和C, 有
- $A \cup B = A \cup C,\ A \cap B = A \cap C \ \Rightarrow B = C$
- 证明 方法1:集合恒等式
- $B = B \cap (A \cup B)$ 吸收律

  $= B \cap (A \cup C)$ 已知前提

  $= (B \cap A) \cup (B \cap C)$ 分配律

  $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 已知前提

  $= (A \cup B) \cap C$ 分配律

  $= (A \cup C) \cap C$ 已知前提

  $= C$ 吸收律

- **例2 对任意的集合A, B和C, 有**
- $A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \Rightarrow B=C$
- **证明 方法2，谓词逻辑**
- 由定义并利用反证法
- 假设B≠C，**不妨设**存在x, 使$(x\in B \wedge x\notin C)$

若$x\in A \Rightarrow (x\in A\cap B) \wedge (x\notin A\cap C)$

若$x\notin A \Rightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\notin A\cup C)$

均与已知条件$A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C$矛盾

因此只有 B=C。

- 问题：仅由$A\cup B = A\cup C$
  是否可推出 $B = C$?
  或仅由$A\cap B = A\cap C$是否可推出 $B = C$?
  答案显然是否定的。

例 $A\cup A = A\cup \emptyset \ ?\Rightarrow A = \emptyset$

$A\cap -A = A\cap \emptyset \ ?\Rightarrow -A = \emptyset$

可见必须同时满足两个条件

$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$

幂集合的性质

- 定理9.5.5 幂集合的性质1
  对任意的集合 A和B

$$(1)\ A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$(2)\ A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

- 定理9.5.6 幂集合的性质2
  对任意的集合 A和B

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

A= Ø , $P(A)$={Ø}
P(B)={Ø, {Ø }} B={Ø}

A={Ø} B={{Ø}}
P(A)={Ø,{Ø}}
P(B) = {Ø,{{Ø}}}
$P(A) \in P(B)$??

$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$

$$P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$$

- 证：$P(A) \in P(B) \Leftrightarrow P(A) \subseteq B$
- $\Leftrightarrow P(A) \subseteq B \wedge (A \in P(A))$
- $\Rightarrow A \in B$

$A=\{\emptyset\}$ $B=\{\{\emptyset\}\}$
$P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
$P(B) = \{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}$
$P(A) \in P(B)$??

幂集合的性质(续)

- 定理9.5.7 幂集合的性质3

  对任意的集合 A和B

  $$(1)\ P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$$

  $$(2)\ P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$$

- A={a},B={b},则$P(A)\cup P(B)$={Ø,{a},{b}}
- $P(A\cup B)$={Ø,{a},{b},{a, b}}

- 定理9.5.8 幂集合的性质4

  对任意的集合 A和B

  $$P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\ \varnothing$$

- 证（2） $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
- $x\in (P(A)\cup P(B))$

$\Leftrightarrow x\in P(A) \lor x\in P(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A \lor x\subseteq B$

$\Leftrightarrow (\forall y)(y\in x \rightarrow y\in A) \lor (\forall y)(y\in x \rightarrow y\in B)$

$\Rightarrow (\forall y)((y\in x \rightarrow y\in A) \lor (y\in x \rightarrow y\in B))$

$\Leftrightarrow (\forall y)(y\in x \rightarrow y\in (A\cup B))$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\cup B$

$\Leftrightarrow x\in P(A\cup B)$

$x \subseteq A \vee x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq A \cup B$

- 但 $x \subseteq A \cup B$ ？ $\Rightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B$
- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$\Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$，*$x$为单独一个元素*

但当 x 是集合时，相应的子集关系下

由 $x \subseteq A \cup B$ 推不出 $x \subseteq A \vee x \subseteq B$

如 $A=\{1,3\}$ $B=\{2,4\}$ $x=\{1,2\}$

定义9.5.1 传递集合

- 如果集合A的任一元素的元素都是A的元素，就称A为传递集合(Transitive_set)。该定义可写成
  A是传递集合
  $$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A)$$
- x_1， x_2
- 例：$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$
- y_1， y_2， y_3
- 内层括号里的内容，在外层也能找到。

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$$

- 重要性质：
- 若 A是传递集合，则有 $x \in A \Rightarrow x \subseteq A$
- 即，任一传递集合，它的元素一定是它的子集。
- 反之并不成立，$x \subseteq A \not\Rightarrow x \in A$
- 上例中，$\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \subseteq A$，

  但$\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \notin A$。

传递集合的性质(续)

- 定理9.7.8 传递集合的性质7
  对不包含本元(非集合元素)的传递集合 A，有$\emptyset \in A$。

传递集合的性质

- 定理9.5.9　传递集合的性质1

  对任意的集合 A，A是传递集合$\Leftrightarrow A \subseteq P(A)$
- 定理9.5.10　传递集合的性质2

对任意的集合 A，A是传递集合$\Leftrightarrow P(A)$是传递集合

$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$$

若 A是传递集合，则有　$x \in A \Rightarrow x \subseteq A$

$\bigcup A = \ x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$ $\bigcap A = \ x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$

广义并和广义交的性质

- 定理9.5.11 广义并和广义交的性质1

  对任意的集合 A和B

  (1) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcup A \subseteq \bigcup B$

  (2) $A \subseteq B \Rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A$

- 定理9.5.12 广义并和广义交的性质1

  对任意的集合 A和B

  (1) $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

  (2) $\bigcap(A \cup B) = (\bigcap A) \cap (\bigcap B)$ (其中A和B非空)

A={{1,2},{1,2,3}} B={{1,2},{1,2,3},{1,3,4}}

定理9.5.13 广义并和幂集运算的关系性质

A={{1,2}, {1,2,3}}

- 对任意的集合 A

$$\bigcup(P(A)) = A$$

证明：$x \in \bigcup(P(A)) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in P(A))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \subseteq A)$

$\Leftrightarrow x \in A$

- 该定理说明，广义并是幂集的逆运算。？？
- 运算次序不可逆：$P(\bigcup A) \neq A$

广义并与传递集合的性质

$$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

- 定理9.5.14 传递集合的性质3

  若集合 A是传递集合，则$\cup A$是传递集合。

- 定理9.5.15 传递集合的性质4

  若集合 A的元素都是传递集合，则$\cup A$是传递集合。

广义交与传递集合的性质

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$$

- 定理9.5.16 传递集合的性质5
  若非空集合 A是传递集合，则$\cap A$是传递集合，且$\cap A= \emptyset$ 。

- 定理9.5.17 传递集合的性质6
  若非空集合 A的元素都是传递集合，则$\cap A$是传递集合。

定理9. 5. 18 幂集的性质

- 若 A是集合，$x \in A$, $y \in A$,

  则 $<x, y> \in PP(A)$ 。

  其中 $PP(A)$ 表示 $P(P(A))$。

$$\langle x, y \rangle = \quad x \quad , \quad x, y$$

定理9.5.18 幂集的性质

- 若 A是集合，$x \in A$,　$y \in A$，则 $\langle x, y \rangle \in PP(A)$，其中 $PP(A)$ 表示 $P(P(A))$。

$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$，且

$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq A \Leftrightarrow \{x, y\} \in P(A)$

由上面两式可得

$x \in A \wedge y \in A \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A)$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \subseteq P(A) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in PP(A)$

当 $x = y$时，　$\langle x, x \rangle = \{\{x\}\} \subseteq P(A)$，定理依旧成立

$$\langle x, y \rangle = \quad x \quad, \quad x, y$$

定理9.5.19 笛卡儿积与∩, ∪运算的性质

- 对任意的集合A, B和C

$$(1)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(2)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(3)\ (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$(4)\ (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

笛卡儿积与$\subseteq$运算的性质

- 定理9.5.20 性质1
  对任意的集合 A, B和C，若$C \neq \emptyset$，则

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$$

- 定理9.5.21 性质2
  对任意的集合 A, B, C和D

$$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$$

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

	$-$	$-$
D.M 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$-(-A)=A$
	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap -A=\varnothing$	$A\cup -A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$-\varnothing=E$	$-E=\varnothing$

9.6 有限集合的基数

9.6 有限集合的基数

- 定义9.6.1 有限集合的基数

（cardinal number，potency)

如果存在 $n \in N$，使集合 A与集合

$$x \mid x \in N \wedge x < n \ = \ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

的元素个数相同，就称集合 A的基数是 n，记作 $|A| = n$ 或 $card(A) = n$。

空集的基数是 0。

- 定义9.6.2 有限集合

  如果存在 $n \in N$，使 n 是集合 A的基数，就称 A是有限集合。如果不存在这样的n，就称 A是无限集合。

9.6 有限集合的基数

- 定理9.6.1 幂集的基数
  对有限集合 A

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

- 定理9.6.2 笛卡儿积的基数
  对有限集合 A和 B

$$|A \times B| = |A| \bullet |B|$$

- 例
- A={a, b, c}
- $P(A)$ = { Ø,
- {a}, {b}, {c},
- {a, b}, {a, c}, {b, c},
- {a, b, c}
- }
- $|A| = 3$ $|P(A)| = 2^3$

定理9.6.3 基本运算的基数

- 对有限集合A和B

$$(1)\ |A\cup B| \le |A|+|B|$$

$$(2)\ |A\cap B| \le \min(|A|, |B|)$$

$$(3)\ |A-B| \ge |A|-|B|$$

$$(4)\ |A\oplus B| = |A|+|B|-2|A\cap B|$$

定理9.6.4 容斥原理
(Principle of inclusion and exclusion)

- 对有限集合A和B

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

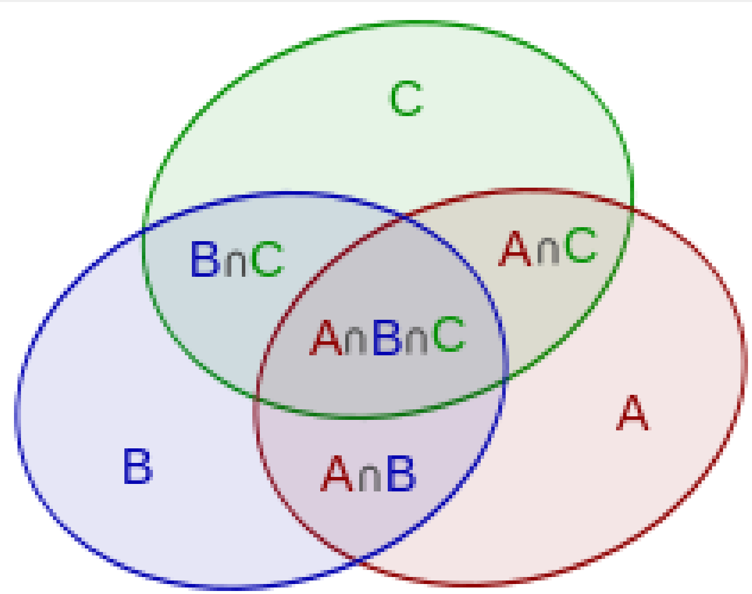
- 该定理可推广到n个集合的情形。若 $n\in N$ 且 $n>1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，则

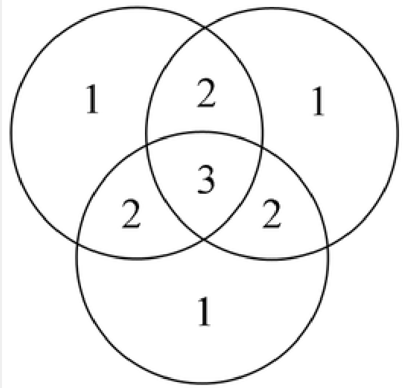
$$|A_1\cup A_2\cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap \cdots\cap A_n|$$

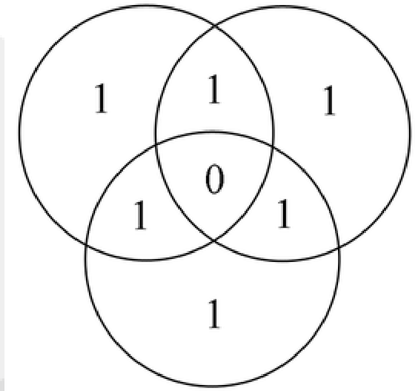
§3.2 容斥原理

定理： $$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B| - |A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \quad (2)$$

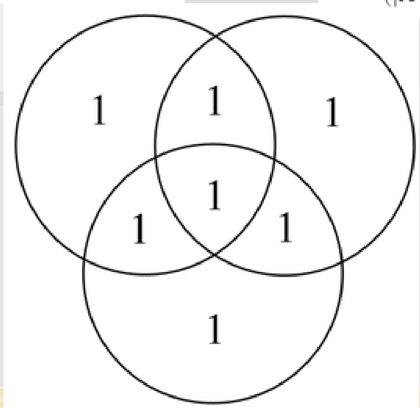




$|A|+|B|+|C|$



$|A|+|B|+|C|$
$-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$



$|A|+|B|+|C|$
$-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$
$+|A\cap B\cap C|$

§3.2 容斥原理

又 $\left|\overline{A}\right| = N - |A|,$

其中N是集合U的元素个数，即不属于A的元素个数等于集合的全体减去属于A的元素的个数。一般有：

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i \cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \qquad (5)$$

$$+(-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Inclusion-Exclusion Principle

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

计算不在 A_1 也不在 A_2中的元素个数

若x不属于A_1 或A_2

1　1-0-0+0 = 1

*若x 属于*A1 但不属于A2

0　1-1-0+0 = 0

*若x 属于*A2 但不属于A1

0　1-0-1+0 = 0

*若x 属于*A2 且属于A1

0　1-1-1+1 = 0

两边相等

$(x+y)^m = C(m,0)x^m + C(m,1)x^{m-1}y + \ldots + C(m,m)y^m$

If $x=1$, $y=-1$

$0 = C(m,0) - C(m,1) + \ldots + (-1)^m C(m,m)$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m \sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

计算不满足任意属性的元素.

x不满足任何属性

1　　1-0-0…+(-1)^{m}0 = 1

x只满足1个属性

0　　1-1-0 …+(-1)^{m}0 = 0

………

x只满足n个属性, n≤m

0　　C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)+…+(-1)^{m}C(n,m)

= C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)+…+(-1)^{n}C(n,n) +0… +0

=0

两边相等，同样计算不满足任何属性的元素个数

§ 容斥原理

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i \cap A_j\right|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots$$

$$+(-1)^{n}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

容斥原理

- 应用举例见教材P149例1与例2

§ 3.3 举例

例4。求不超过120的素数个数。

因11^2=121，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设A_i为不超过120的数 i的倍数集， i=2，3，5，7。

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60, |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24, |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{21}\right\rfloor=5,|A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{35}\right\rfloor=3,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{2\times3\times5}\right\rfloor=4,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{2\times3\times7}\right\rfloor=2,$$

$$|A_2\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{2\times5\times7}\right\rfloor=1,$$

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}\right|&=120-|A_2|-|A_3|-|A_5|\\&-|A_7|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|\\&+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|\\&-|A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_7|\\&-|A_2\cap A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|\\&+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|\\&=120-(60+40+24+17)+(20+12+8\\&+8+5+3)-(4+2+1+1)\\&=27.\end{aligned}$$

注意：因为27个数中排除了2，3，5，7四个素数，又包含了1这个非素数。故所求的不超过120的素数个数为：

27+4-1=30

就是在所有比1大的整数中，除了1和它本身以外没有别的约数，这种整数叫做质数，质数又叫做素数。

在计算机领域中广泛使用的RSA公钥密码算法也正是以欧拉函数为基础的。

例7。欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数

- 分析的化身

  欧拉进行计算看起来毫不费劲儿，就像人进行呼吸，像鹰在风中盘旋一样。

- 他是历史上最多产的数学家。
  - 彼得堡学院为了整理他的著作整整花了47年。
  - 欧拉确实常常在两次叫他吃晚饭的半小时左右的时间里赶出一篇数学论文
  - 欧拉是史上发表论文数第二多的数学家，全集共计75卷；他的纪录一直到了20世纪才被保羅·埃尔德什打破
  - “读欧拉的著作吧，在任何意义上，他都是我们的大师” ------拉普拉斯
- 人生波折：失明，火灾
- 1783年9月18日，他77岁的时候，欧拉写出了他对天王星轨道的计算。他在喝着茶跟孩子玩的时候，中风发作。手中烟斗掉了，只说出一句话"我要死了","欧拉便停止了生命和计算。"

$\Phi(8)=4$

$8 = 2^3$，小于8且与8互素有1 3 5 7

举例

例。欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

解：若n分解为不同素数的乘积 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$

设1到n的n个数中为p_i倍数的集合为A_i $|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2\ldots k$

对于$p_i \neq p_j$, $A_i \cap A_j$既是p_i的倍数也是p_j的倍数。

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, i, j = 1,2\ldots, k, i \neq j$$

$$\phi(\mathrm{n}) = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}\right|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2}\right.$$

$$\left. + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_1 p_n}\right) - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\phi(\mathrm{n})=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

- **例7续。**欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

  $\Phi(8)=8(1-1/2) = 4$

  $8 = 2^3$，小于8且与8互素有1 3 5 7

例如$n = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$则

$$\phi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 16$$

即比60小且与60无公因子的数有16个：

7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，49，53，59，此外还有一个1。

9.7 集合论公理系统

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统(axiom systems for set theory)是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理。集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的定理。
  - 悖论的发现促使人们借助于公理化方法，以期排除集合论中的已知悖论并系统地整理G.康托的理论和方法

- ZFC公理系统用10组公理描述集合的基本性质和集合实例的定义方式。
- ZFC公理系统已经被普遍接受为现代数学的基础，其基本思想是：
  - 把“集合”当作整个数学的第一概念，没有定义，也不可能定义。
  - 建立一个一阶逻辑语言，用于精确地表达关于集合的命题。
- 设定若干公理，用于指定集合的构造方法和必须具备的性质，以避免出现矛盾。
- 应用一阶逻辑推理系统证明集合定理，即关于集合的永真命题。

(ZF1)外延公理：一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

(ZF2)空集合存在公理：即存在一集合s，它没有元素。

(ZF3)无序对公理：也就是说，任给两个集合x、y，存在第三个集合z，而w∈z当且仅当w=x或者w=y。这个公理实际说的是，给定两个集合x和y，我们可以找到一个集合A，它的成员完全是x和y。

(ZF4)并集公理：也就是说，任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使w∈y当且仅当存在z使z∈x且w∈z"。

ZF公理系统

(ZF5)幂集公理：也就是说，任意的集合x，P（x）也是一集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使z∈y当且仅当对z的所有元素w，w∈x"。

(ZF6)无穷公理：也就是说，存在一集合x，它有无穷多元素。

准确的定义："存在一个集合，使得空集是其元素，且对其任意元素x，x∪{x}也是其元素。"

根据皮亚诺公理系统对自然数的描述，此即：存在一个包含所有自然数的集合。

(ZF7)分离公理模式："对任意集合x和任意对x的元素有定义的逻辑谓词P(z)，存在集合y，使z∈y当且仅当z∈x而且P(z)为真"。

(ZF8)替换公理模式：也就是说，对于任意的函数F（x），对于任意的集合t，当x属于t时，F（x）都有定义（ZF中唯一的对象是集合，所以F（x）必然是集合）成立的前提下，就一定存在一集合s，使得对于所有的x属于t，在集合s中都有一元素y，使y=F（x）。也就是说，由F（x）所定义的函数的定义域在t中的时候，那么它的值域可限定在s中。

(ZF9)正则公理：也叫基础公理。所有集都是良基集。说明一个集合的元素都具有最小性质，例如，不允许出现x属于x的情况。

（AC）选择公理：对任意集c存在以c为定义域的选择函数g，使得对c的每个非空元素x，g(x)∈x。

ZFC公理系统

- 公理集合论是由德国数学家策梅洛(Zermelo)所开创。
  - 1908年他首先 提出了7组集合公理。这些公理是用自然语言和数学语言进行描述的。
  - 1921年弗兰克尔（Frankel）指出这些公理不足以证明某些特定集合的存在性。
  - 1922年弗兰克尔用一阶逻辑语言对策梅洛的公理系统进行完善，形成了ZFC公理系统，其中Z指策梅洛，F指弗兰克尔，C指选择公理（axiom of choice）。
  - 几乎同时斯克莱姆（Skolem）也在做这项工作，并于1922年独立于弗兰 克尔提出了ZFC公理系统中的替换公理。
  - 1925年，冯诺依曼在其博士论文中指出这个公理系统不能排除包含自己的集合，并提出正则公理（axiom of regularity）以排除这个现象。目前，ZFC公理系统共有10组公理，被普遍接受为数学的严格基础。

9.7.1 ZFC集合论公理系统

- **ZFC公理系统是著名的集合论公理系统**
- 其它还有**GB(Godel & Bernays)**公理系统等
- **ZFC**公理系统共包含10条集合论公理
- 但并非彼此独立

  第（3）无序对集合存在与

  第（5）子集公理模式可由其它公理推出

- 公理化是一种数学方法。
- 最早出现在二千多年前的欧几里德几何学中，当时认为“公理’(如两点之间可连一直线)是一种不需要证明的自明之理，而其他所谓“定理”则是需要由公理出发来证明的。
- 18世纪德国哲学家康德认为，欧几里德几何的公理是人们生来就有的先验知识。

- 19世纪末，德国数学家希尔伯在他的几何基础研究中系统地提出数学的公理化方法。他认为每一种数学理论部应以“**基本概念——公理——定理**”的模式来建立：这里的公理是作为理论出发点的科学假设，它们要求有完备性(任何定理可由此导出)，独立性(去掉其中之一有的定理就不能成立)和相容性(公理间是无矛盾的),但公理本身也由人们作各种解释。20世纪以来，整个数学几乎都已按希尔伯特的模式得到公理化处理。

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是"任一集合的所有元素都是集合"。
  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。
- 集合论公理系统的主要目的：
  （1）判定集合的存在性；
  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

$A\cup B = \quad x \mid x\in A \lor x\in B$

$A\cap B = \quad x \mid x\in A \land x\in B$

$A-B = \quad x \mid x\in A \land x\notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x\in E \land x\notin A$

$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = \quad x \mid x\in A \;\nabla\; x\in B$

$= (A\cup B)-(B\cap A)$

元素x $\in$ 集合A

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A\neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \rightarrow x\in B)$

$A\subset B \Leftrightarrow (A\subseteq B \land A\neq B)$

$\varnothing = \quad x \mid x\neq x$

对任意的集合A，$\varnothing\subseteq A$

$E = \quad x \mid x=x$

$A\subseteq A$

$(A\subseteq B \land B\subseteq C) \Rightarrow A\subseteq C$

$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B \land B\subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z\in A \land x\in z)$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z\in A \rightarrow x\in z)$

$\cup\,\varnothing = \varnothing$

$\cap\,\varnothing$无意义

$P(A) = \quad x \mid x\subseteq A$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

- (1) 外延公理(**Axiom of extensionality**)

两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。

$$(\forall x)(\forall y)(x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

与定理9.2.1形式相同。

这个公理表明一个集合由其元素唯一确定。

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap \varnothing$无意义

$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (2) 空集存在公理
- 存在不含任何元素的集合(空集)。

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集。
- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (3) 无序对集合存在公理
- 对任意的集合 x 和y，存在一个集合 z, 它的元素恰好为 x 和y。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$$

- 已知 x 和y 是集合，由该公理可构造 $z = \{ x, y\}$ 也是集合。

当x=y时则构造出恰好有一个元素的集合。

有了该公理，便可无休止地构造许多具体的集合。

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

元素x ∈ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap \varnothing$无意义

$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统 (续)

- (4) 并集合存在公理

  对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好为 x 的元素的元素。

  $$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x))$$

任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

- 解决了集合的广义并的存在性
  (集合的广义并是集合)

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \nabla x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ $\quad$ $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ $\quad$ 对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$ $\quad$ $E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$ $\quad$ $\cup \varnothing = \varnothing$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$ $\quad$ $\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)

- (5) 子集公理模式(分离公理模式)

对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素 z 恰好既是 x 的元素又使 $P(z)$ 为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$$

对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.

不只是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，可解决交集、差集、广义交、广义并和笛卡儿积的存在性。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统（续）

- 例：以交集和差集为例
- 定理9.7.1 对任意的集合A，交集A$\cap$B是集合。

对任意的集合x，存在x的子集y， y的元素z使$P(z)$为真。

对任意的集合A，存在A的子集A$\cap$B，其元素使$z\in B$为真

$y = \{ z \mid z\in x \wedge P(z)\}$ $y\subseteq x$，y是 x的子集，

$A\cap B = \{ z \mid z\in A \wedge z\in B\}$

子集公理保证了上述集合的存在性。

$A-B = \{ z \mid z\in A \wedge z\notin B\}$ 差集仅需将$P(z)$ 代为$z\notin B$。

- (5) 子集公理模式(分离公理模式)

对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素 z 恰好既是 x 的元素又使 $P(z)$ 为真。

对任意的集合x，存在x的子集y, y的元素z使$P(z)$为真.

集合不能独立定义，需要从已经存在的集合中分离出来；

所有集合的集合不存在！

集合的存在性(续)

- 定理9.7.5 万有集不存在定理

  不存在集合A，使任一集合都是 A的元素。
- Russell悖论

罗素悖论的解决

- H = { x | x 是一个集合 ∧ $x \notin x$ }
- 子集公理模式(分离公理模式)：对任意的集合x，存在x的子集y, y的元素z使$P(z)$为真.
- $P(z)= z \notin z$ -> $H=\{x|P(x)\}$ **是集合吗?**
- **子集公理成立的才是ZFC公理系统认可的**
- **套用**子集公理模式(分离公理模式)

$P(x)= x \notin x$ -> $H=\{x|P(x)\}$成立吗？

- 定理9.7.5 万有集不存在定理
  不存在集合A，使任一集合都是A的元素。
- 证明：假设存在集合A，使任一集合都是A的元素。选$P(x)$为$x\notin x$, 依据子集公理，存在集合

$$A_0=\{x \mid x\in A_0 \wedge x\notin x\}$$

即$x\in A_0$ 等价于 $x\in A_0 \wedge x\notin x$

取$x=A_0$，则代入上一行

$A_0\in A_0$等价于$A_0\in A \wedge A_0\notin A_0$。这是不可能的所以，假设矛盾，定理得证。

$$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$$

$$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$$

$$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$$

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

元素x　　∈　　集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \qquad A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$　　对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$　　$E = \quad x \mid x = x$

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

为什么∩∅无意义？

- 假设∩Ø为集合，则有广义交的定义，

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$$x \in \bigcap \varnothing \Leftrightarrow \left| (\forall y)(\boxed{y \in \varnothing} \rightarrow x \in y) \right.$$

$x \in \bigcap \varnothing$ **永真**

- 则∩Ø为所有集合的集合，与上述定理矛盾，因此规定∩Ø不存在。

$$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$$

$$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$$

$$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \; \nabla \; x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$

$$E = \quad x \mid x = x$$

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (6) 幂集合公理 (集合的幂集是集合)

对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好是 x 的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x))$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall z)(z \in P(A) \leftrightarrow z \subseteq A))$$

对任意的集合A，存在一个集合P(A)，恰好以A的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。

注：后一写法非正式，仅用于帮助理解。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (7) 正则公理

  对任意的非空集合 x，存在 x 的一个元素，它和 x 不相交。

  $$(\forall x)(x \neq \varnothing \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \varnothing)))$$

对任意非空集合x，x至少有一元素y使$x \cap y$为空集

- 此时称该元素为集合 x 的一个极小元。
- 结论：任一非空集合都有极小元。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- 例:

设 $B=\{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, $B_1=\{\emptyset\}$,

则 $B_1 \in B$ 且 $B_1 \cap B = \emptyset$,

所以B_1是B中的极小元。

设 $B_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 尽管 $B_2 \in B$,

但 $B_2 \cap B = \{\{\emptyset\}\}$,

所以B_2不是B中的极小元。

- 利用正则公理可以证明不存在下列形式的集合：
- $x \in x$(不存在以自身为元素的集合)：
- 如果这样的集合x存在，那么{x}只有x一个元素， x既是x的元素，也是自己本身，则$\{x\} \cap x = \{x\}$非空，不合于正则公理。
- 不存在无限递降的集合序列。
- 对任何非空的传递集合A，必有$\emptyset \in A$

- 思考题：
- 公理对计算机学科的意义？

谢 谢

myc@mail.Tsinghua.edu.cn