

线性代数期中试卷 答案

姓名_____ 学号_____ 专业_____ 考试时间 2018.5.5

一. 简答与计算题(本题共5小题, 每小题8分, 共40分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求行列式 $|A|$, 伴随矩阵 A^* 及逆 A^{-1} .

解: 经计算得 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -2 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $r(A) = 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量,
 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 2, -1)^T, \alpha_1 + \alpha_3 = (1, 0, -1)^T$, 计算方程组的通解.

解: 由题设得 α_1 是 $Ax = b$ 的特解, $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的解,
 且 $\beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha_2 + \alpha_3) = (1, -2, 0)^T, \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) = (1, 0, 4)^T$,
 $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)) = (1, 0, 3/2)^T$. 由 $r(A) = 1$ 可知 $Ax = 0$ 的基础解系含两个向量.
 易见 β_1 与 β_2 线性无关, 所以构成 $Ax = 0$ 的基础解系.
 所以 $Ax = b$ 的通解为 $\alpha_1 + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = (1 + k_1 + k_2, -2k_1, \frac{3}{2} + 4k_3)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

3. 设 A 是实方阵, 证明: $r(A) = r(A^T A)$. 举例说明对复方阵该结论不成立.

证: 对实向量 x 有 $x^T A^T A x = 0$ 当且仅当 $Ax = 0$, 因此 $A^T A x = 0$ 和 $Ax = 0$ 在实数范围同解, 故得证.

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ 是复方阵不成立的例子.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. 求矩阵多项式 $f(A)$.

解: 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A = P^{-1}BP$ 且
 $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2E_3 = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(-1) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix} = O$.
 所以 $f(A) = P^{-1}f(B)P = O$.

5. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + a_0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + a_0 \end{vmatrix}$.

解: $D_n \xrightarrow[r_2 \leftarrow r_2 - r_1]{r_1 \leftarrow r_1 - r_2} \begin{vmatrix} a_1 + a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftarrow c_1 + \sum_{i=2}^n c_i} \begin{vmatrix} a_0 + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$

$$= (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i) a_0^{n-1}.$$

二.(12分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & a \end{pmatrix}$, 向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$. 问当 a, b 取何值时, 线性方程组 $Ax = \beta$

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无穷多解. 有解时, 求出其解.

解: 对增广矩阵 $B = (A, \beta)$ 做初等行变换得

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & a & b \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+24 & b+2 \end{array} \right) \stackrel{\text{记为}}{=} C.$$

根据 a, b 的取值, 结果如下:

(1) 当 $a = -24, b \neq -2$ 时, 有 $r(A) = 3 < r(B) = 4$, 所以方程组无解.

(2) 当 $a \neq -24$ 时, 有 $r(A) = r(B) = 4$, 所以方程组有唯一解. 对 C 做初等行变换得

$$C \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-3t_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6t_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+3t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_0 \end{array} \right),$$

这里 $t_0 = \frac{b+2}{a+24}$. 所以方程组唯一解为 $x = (1-3t_0, 6t_0, 3t_0-1, t_0)^T$.

(3) 当 $a = -24, b = -2$ 时, 有 $r(A) = r(B) = 3 < 4$, 所以方程组有无穷多组解.

方程组的一个特解为 $\eta = (1, 0, -1, 0)^T$ 且对应齐次线性方程组的一个基础解系为

$\alpha = (-3, 6, 3, 1)^T$. 所以方程组的通解为 $x = \eta + t\alpha = (1-3t, 6t, -1+3t, t)^T$, 其中 t 为常数.

三. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -13 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

(1) 求行简化梯形矩阵 B 及可逆阵 P 使得 $PA = B$.

(2) 求 A 的秩及标准形.

(3) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 3)^T, \alpha_3 = (0, -1, 2)^T, \alpha_4 = (-5, -13, 11)^T$. 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组, 并用此极大无关组线性表示其余向量.

解: 对 (A, E_3) 做初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -13 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

(1) 令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 B 为行简化梯形阵, P 为可逆阵且 $PA = B$.

(2) $r(A) = r(B) = 2$, A 的标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 注意到 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. 将 B 按列分块 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 则 β_1, β_2 是 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的一个极大无关组, 且 $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2, \beta_4 = -2\beta_1 + 3\beta_2$. 所以 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

四.(11分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 18 \\ 4 & 9 & 25 & 64 & 164 \\ 8 & 27 & 125 & 512 & 1512 \\ 14 & 78 & 620 & 4088 & 14078 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解: 原行列式} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 18 \\ 4 & 9 & 25 & 64 & 164 \\ 8 & 27 & 125 & 512 & 1512 \\ 14 & 78 & 620 & 4088 & 14078 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_5 \leftarrow c_5 - c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 25 & 64 & 100 \\ 8 & 27 & 125 & 512 & 1000 \\ 14 & 78 & 620 & 4088 & 9990 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 8^2 & 10^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 8^3 & 10^3 \\ 2^4 - 2 & 3^4 - 3 & 5^4 - 5 & 8^4 - 8 & 10^4 - 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_5 \leftarrow r_5 + r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 8^2 & 10^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 8^3 & 10^3 \\ 2^4 & 3^4 & 5^4 & 8^4 & 10^4 \end{vmatrix} \\
&= (3-2) \times (5-2) \times (8-2) \times (10-2) \times (5-3) \times (8-3) \times (10-3) \times (8-5) \times (10-5) \times (10-8) = 302400.
\end{aligned}$$

五.(10分) 设 $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} a_{11} + k & a_{12} + k & \cdots & a_{1n} + k \\ a_{21} + k & a_{22} + k & \cdots & a_{2n} + k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + k & a_{n2} + k & \cdots & a_{nn} + k \end{vmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

求证: $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = \sum_{i,j=1}^n B_{ij}$, 其中 A_{ij} 和 B_{ij} 分别为 A 和 B 的 (i,j) 位元素的代数余子式.

解: 对任意 $1 \leq i \leq n$ 有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n B_{ij} &= \begin{vmatrix} a_{11} + k & a_{12} + k & \cdots & a_{1n} + k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} + k & a_{i-1,2} + k & \cdots & a_{i-1,n} + k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i+1,1} + k & a_{i+1,2} + k & \cdots & a_{i+1,n} + k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + k & a_{n2} + k & \cdots & a_{nn} + k \end{vmatrix} \xrightarrow[r_{(p \neq i)} - k r_i]{r_p - k r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n A_{ij}.
\end{aligned}$$

$$\text{因此 } \sum_{i,j=1}^n B_{ij} = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n B_{ij}) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n A_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

六.(12分) (1) 求证: 任意 r 个线性无关的 n 维列向量都是某 n 元齐次线性方程组的基础解系.

(2) 求一个齐次线性方程组使得 $\alpha_1 = (-1, 1, 1, 0)^T$ 和 $\alpha_2 = (7, 5, 0, 2)^T$ 构成它的一个基础解系.

(1) 证明: 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为线性无关的 n 维列向量. 设方程 $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ 有解 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 则 $(a_1, \dots, a_n) \alpha_1 = \cdots = (a_1, \dots, a_n) \alpha_r = 0$. 因此令 $B = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^T$, 则 $(a_1, \dots, a_n)^T$ 为 $By = 0$ 的解向量. 因为 $r(B) = r\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = r$, 所以 $By = 0$ 的基础解系含 $n - r$ 个向量. 设 $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ 为 $By = 0$ 的一个基础解系. 令 $A = (\beta_1, \dots, \beta_{n-r})^T$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 $Ax = 0$ 的线性无关解向量, 并且 $n - r(A) = n - r\{\beta_1, \dots, \beta_{n-r}\} = r$, 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

(2) 解: 令 $B = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ 并对其做初等行变换

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

得 $By = 0$ 的一个基础解系为 $\beta_1 = (\frac{5}{12}, -\frac{7}{12}, 1, 0)^T, \beta_2 = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, 1)^T$.

由(1)中构造得 α_1, α_2 构成线性方程组

$$\begin{cases} \frac{5}{12}x_1 - \frac{7}{12}x_2 + x_3 = 0, \\ -\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.