图论与代数结构

课程介绍与初识图论

崔 勇
清华大学计算机系
网络技术研究所

序言

欢迎优秀的你来到清华园！

- 祝贺大家成功逃离家长和老师的魔爪
  - 回顾成长道路？
  - 儿时朋友在哪里做什么？——我们是幸运儿☺
- 憧憬中的大学生活
  - 打游戏、刷B站、谈恋爱…
  - 自由，美好 v.s. 辛苦？
  - 知识、实践、创新、素质
  - 比别人强？比昨天的自己强！

不负期待的清华人

有个朋友家的孩子，去年考上了清华大学计算机专业，学了一学期后感觉有些迷茫，甚至有了换专业的想法。他家人想请高人给他指点指点，不知您有空时能否跟这个孩子聊一下？不好意思麻烦您了，如果您没有时间，能否推荐一位合适的老师帮这个孩子指点迷津？

主要内容

- 课程介绍
  - 《离散数学2》（图论及代数结构）
- 初识图论与往届成果
  - 该如何学习图论?
- 图的基本概念和定义

课程小目标

- 课程小目标　　　　从优秀到卓越
- 卓越的特点
  - 从听课/作业/考试/竞赛，到善于发现问题
  - 从知识学习/Input，到发明创造/Output

透过现象看本质
连问三个为什么！

1. 为什么能来清华？
2. 为什么成绩好？
3. 为什么刷题多？

⇨

1. 因为咱成绩好！
2. 因为咱刷题多！
3. 因为咱干劲足！

课程基本信息

- 时间：周一下午 三节 x 45分钟
- 地点：三教 3200
- 同学们
  - 来自各个专业，大一大二……
- 授课老师
  - 崔勇 教授 （图论部分）
  - 李宗鹏 教授 （代数结构部分）
- 答疑
  - 助教答疑：微信群，周四下午2点自强科技楼1-1126
  - 互帮互助：微信群，助教记录助人同学进行加分

群聊：离散数学2-2025春

该二维码7天内(2月19日前)有效，重新进入将更新

上课时间
1:30--3:55?
2:00--4:25?
2:30--4:55?

自我介绍——崔勇

- 个人基本情况
  - 本：95-99，博：99-03
  - 现任计算机系网络所所长，长江学者
  - 高水平论文100余篇，10余项RFC
  - 教学&科研（每学期1~2次出国）
  - cuiyong@tsinghua.edu.cn
- 主要研究方向：互联网体系结构
  - 下一代互联网
  - 低时延/确定性时延网络
  - 可信任下一代互联网
- 最高兴的事：学生被大厂如数家珍

计算机系
长聘教授

部分成果被国内外应用
1. IPv6过渡：RFC
2. 低时延传输

课程基本信息

- 学历及学位
  - 学士，清华大学 1999，计算机科学与技术
  - 博士，多伦多大学 2005，电子与计算机工程
- 研究领域
  - 计算机网络，网络算法，网络编码
  - 清华-绿盟联合实验室主任
  - 国家重点研发项目负责人
  - 加拿大计算机学会优秀学者
  - 国际会议最佳论文奖励：5项
  - H因子 45，论文引用8600，单篇1200
  - 网络编码学科最著名开放问题以其名字命名
  - 发表相关论文200余篇，包括CCF A类论文100余篇
  - 相关技术在华为OceanStor存储网络获得大规模应用

李宗鹏

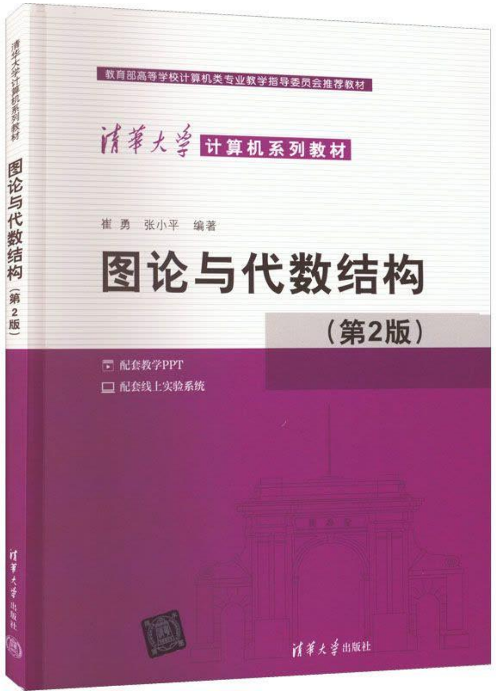
网络研究院
长聘教授

助教信息

- TA联系方式
  - 迟凯文： <ckw24@mails.tsinghua.edu.cn> 编程实验
  - 王文铎： <wwd24@mails.tsinghua.edu.cn> 课程与作业内容答疑
  - 陈昕怡： <1244973858@qq.com> 课程事务组织
  - 自强科技楼1-1126，推荐采用e-mail或微信
- 交作业
  - 动笔写字拍照，第二周上课前提交网络学堂

教材与参考书

- 教材
  - 崔勇，张小平，《图论与代数结构》，清华大学出版社，2022年
- 参考书
  - Douglas West, Introduction to Graph Theory (Second Edition), Pearson Education. 《图论引导》影印版，机械工业出版社，2004.10
  - 智力习题：熊斌 郑仲义《图论/数学奥林匹克小丛书》，华东师范大学出版社，2005.



近两年的评教反馈

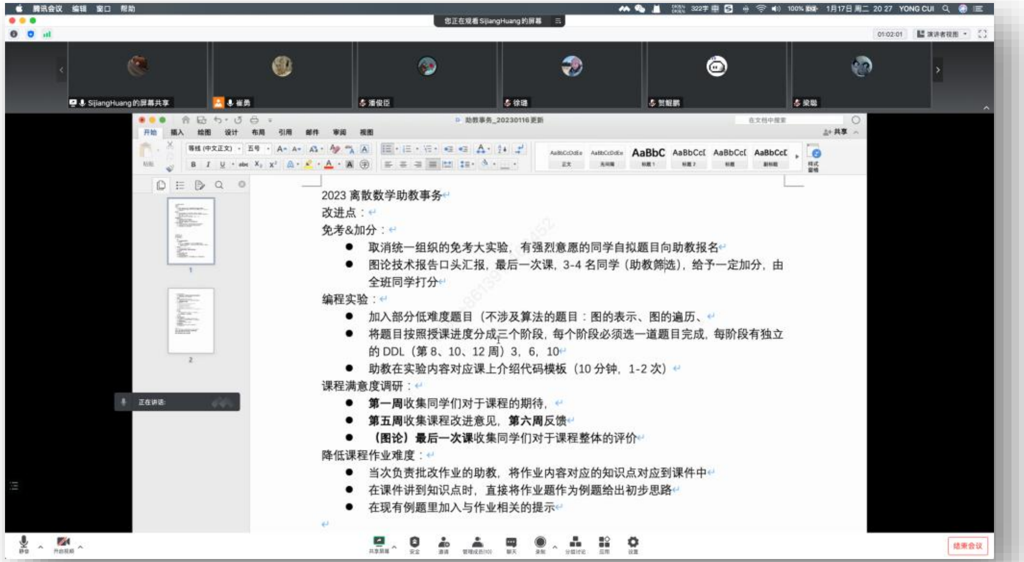
- ✓ 崔老师的教程方式很出色，让学生不断地问“为什么”，了解为什么在图论里会做出种种选择。
- ✓ 老师很负责任，但是课程太卷，对于没有信息竞赛经历的同学太不友好
- ✓ 老师幽默风趣，继续保持
- ✓ 老师注重课本整体思路，注意培养我们的创新思维，而不是仅仅传输知识。另外，老师的讲解细致，生动形象，深入浅出，让我收获很大。

- ✓ 离散数学内容比较离散，老师会关注学生的课堂体验，并听取反馈和建议，总体比较推荐
- ✓ 希望能给出作业错题反馈
- 做欧拉还是太难了一点
  - 在介绍定义定理前最好能加入历史上发展的起源、矛盾和理论的诞生，生动一些。要不然不知道是干嘛的，缺少背景的情况下也不可能做到像欧拉那样
- 讲课有点念ppt了，而且与课程无关的跑题内容比较多，不能够帮助理解课程内容

请同学注意：给两位老师分别评教

不断探索、努力进步

- 主要改进思路
  - 实验门槛高：设计不计分引导实验，帮助同学熟悉平台
  - 实验略卷：每次仅需选取一个算法进行实现
  - 免考太多：大幅缩减免考比例
  - 内容比较离散：尝试增加体系性
  - 代数优化：互相促进
  - 作业错题反馈：及时反馈&答疑



主要教学内容和学时分配

图论32学时和代数结构16学时（含习题课和机动1~2次）

第一章	图的概念与代数表示	4
第二章	道路与回路	8
第三章	树	6
第四章	平面图与图的着色	3
第五章	匹配与网络流	6
第六章	代数结构预备知识	2
第七章	群的基础知识	7
第八章	群论进阶	6
总结	期末复习串讲	3

考核与计分

成绩评定模式	模式1(默认)	模式2	模式3	模式4	模式n
参与课堂	5%+	5%+	5%+	5%+	自定义 第三周前确认
期末考试	55%	45%	45%	-	
作业	40%	40%	40%	40%	
讲习题课		10%		-	
讲应用技术报告			10%	-	
免考项目				55%	
Debug/出题	1~5分附加分				

在第3周前，给助教提交希望采用的模式

支持向默认模式1的回退，其他部分可转为附加分

考核与计分

- 期末考试（55%）
  - 只考课堂上讲过的内容
  - 考试周，闭卷考试

作业合计45%

- 日常作业
  - 每次布置的作业，第二周上课前提交网络学堂
- 图论应用技术报告
  - 10页左右PPT，不需要编程，第13周提交
  - 可以申请做课堂随堂展示(选做)
- 编程实验（15%）
  - 3个必做实验

编程实验

	知识点	题目
引导	基本概念	【不计分选做】图的代数表示
第一段	道路与回路	**最短路**、欧拉回路 **二选一**
第二段	树	**最短树**、最优二叉树、支撑树计数 **三选一**
第三段	匹配与网络流	**二分图最大匹配**、网络最大流 **二选一**

每个阶段仅需选取一个实验， 鼓励同学们完成剩下的实验

编程实验

- 实验时间安排
  - 第一段：2月17日-3月30日（第六周周日） 23:59:59 前
  - 第二段：3月31日-4月20日（第九周周日） 23:59:59 前
  - 第三段：4月21日-5月11日（第十二周周日） 23:59:59 前

如有疑问请联系助教
欢迎任何意见或建议

- 实验分数设置
  - 总分15分，由OJ黑盒测试成绩直接折算
  - 每段得分为各题最高分，总分由三段得分加和得到
  - 例：三段OJ得分为100、90、70，最终得分$15 \times \frac{100+90+70}{300} = 13$分
  - 补交题目得分 * 0.6
- 反作弊
  - 任何形式的作业，都会有查重和复议环节
  - 所有被认定作弊的同学，作弊的实验记为0分
- 实验平台：oj.cs.tsinghua.edu.cn，使用清华ID登录

免考项目

- 图论课程特色
  - 与信息学竞赛相关性强
  - 同学们基础差异度大，授课点选取有难度☹
  - 基础较好的同学如何能得到进一步提升？
- 免考项目：图论创新训练
  - 培养创新能力：题目内容和创新思路自己拟定
  - 鼓励参加过信息学竞赛或学有余力的同学尝试
- 报名方式：请感兴趣的同学**自拟**创新题目，于第二周上课前向助教报名
- 考核方式：期末答辩（老师+全班同学打分），期中检查（助教）

如何学好图论及代数结构

- 离散数学
  - 以离散量为研究对象，为计算机专业的基础数学课
  - 主要内容：集合论、数理逻辑、图论及代数结构
- 课程特点
  - 与三角函数、微积分不同，反证法、构造法是解题主要方法
  - 从基本概念入手充分掌握定义、定理，并重视算法
  - 保质保量完成作业和报告

我们能学习到什么?

- 什么是最重要的?
  - 定义概念? 公式? 定理定律? 证明过程?
  - 一年、十年、三十年后记得什么?
- 本课程有助于训练
  - 基本知识—图论所涉及的概念、定理……
  - 逻辑思维—数学课
  - 思维模式—从问题和为什么入手的分析方法
  - 创新能力—做实验编程序、自己设计定义定理
- 课程特点（希望）
  - 知识 v.s. 故事；学分绩 v.s. 长远发展
  - 融洽、活跃 v.s. 认真、严肃

并非适合所有同学

要求及学习方法

- 1、听课：基础内容，拓展知识面
- 2、参与：积极参与课堂讨论
- 3、作业：巩固基础知识
- 4、实验：编程&理解关键算法
- 5、思考：知其然知其所以然
- 6、实践：拓展应用本领（课外）
- 7、创新：如果我是欧拉
- 8、前沿：学术前沿研究成果

为减少工作量，不用预习课本；但课后要认真看书

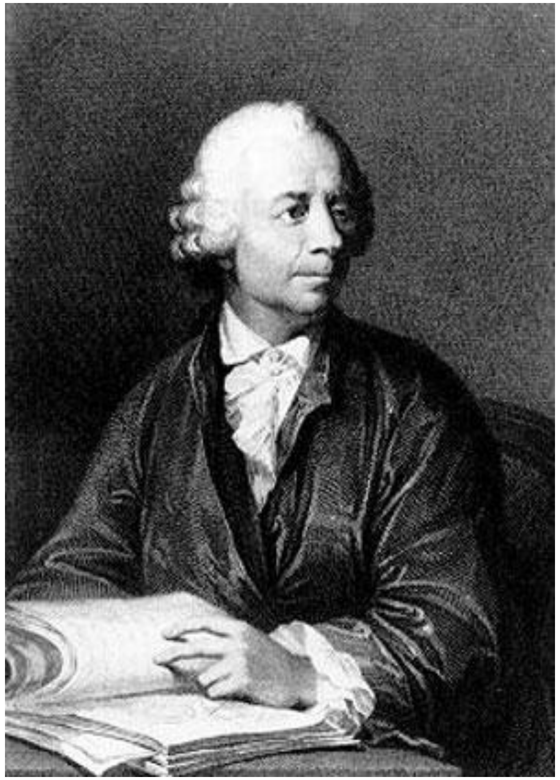
主要内容

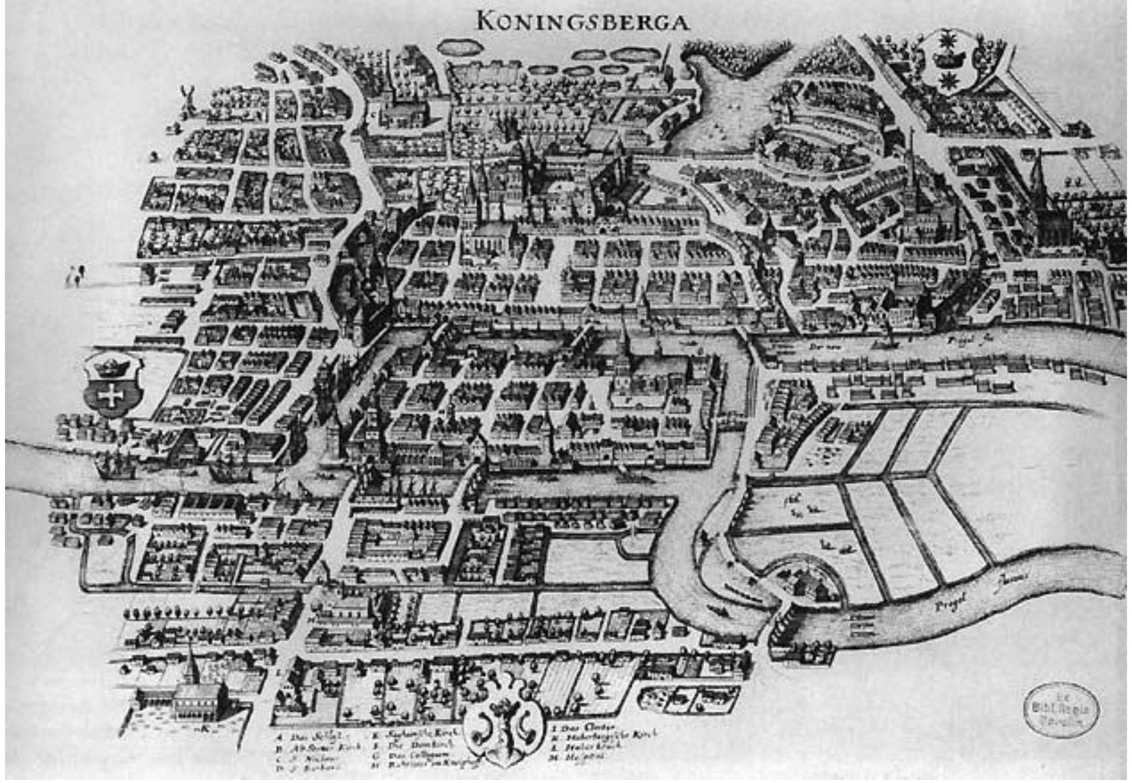
- 课程介绍
- 初识图论与往届成果
- 图的基本概念和定义

- 什么是图?
  - 一笔画图
  - 地图
  - 交通流
  - 计算机网络
  - 集成电路设计
  - 电厂仓库选址
  - 河流物流系统
  - ……
- 什么是图论问题?
  - 七桥问题
  - 最短路径
  - 最大流
  - 最大匹配
  - 四色猜想
  - ……

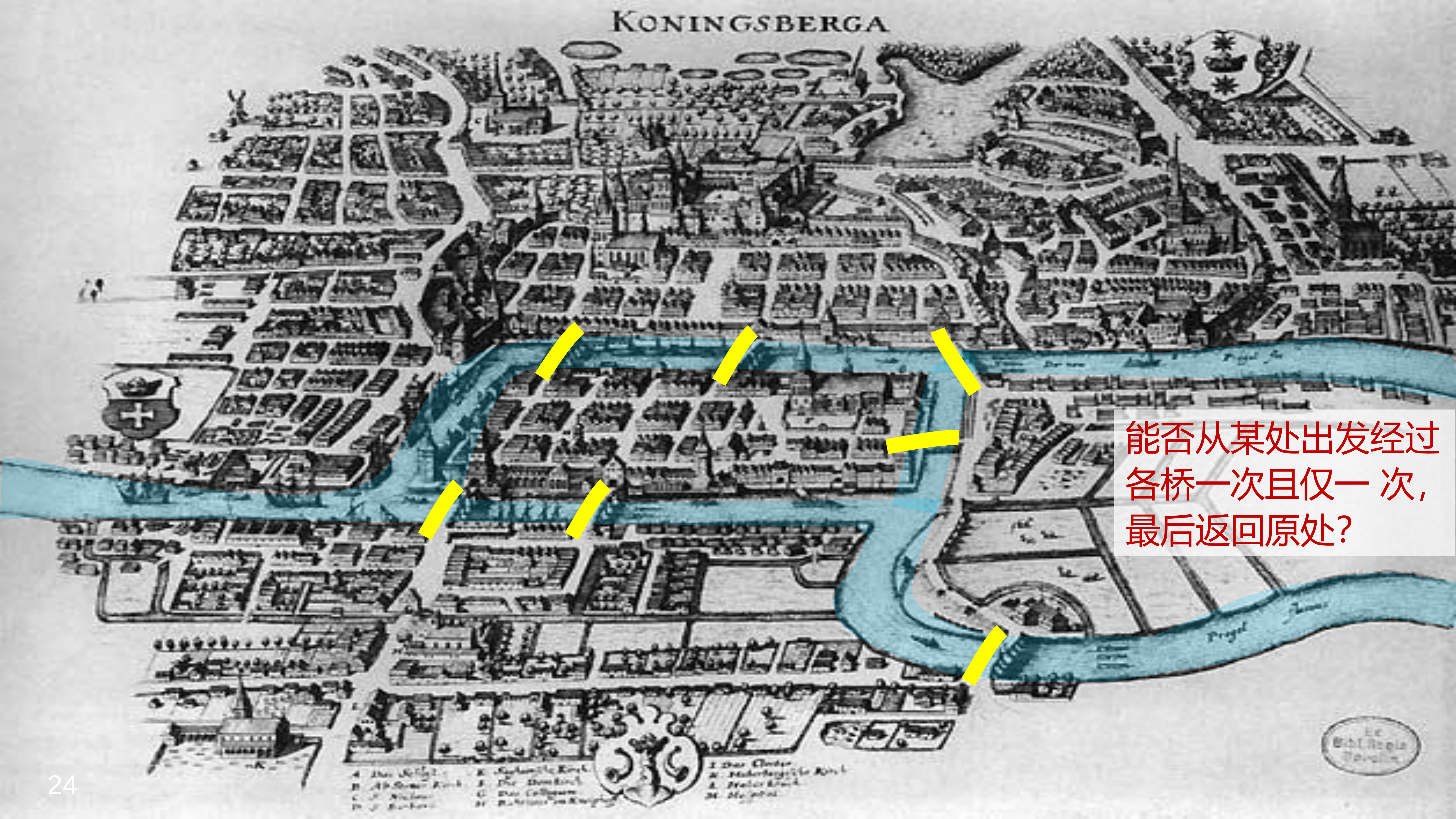
图论的起源

- 欧拉与哥尼斯堡城七桥问题（1736年）





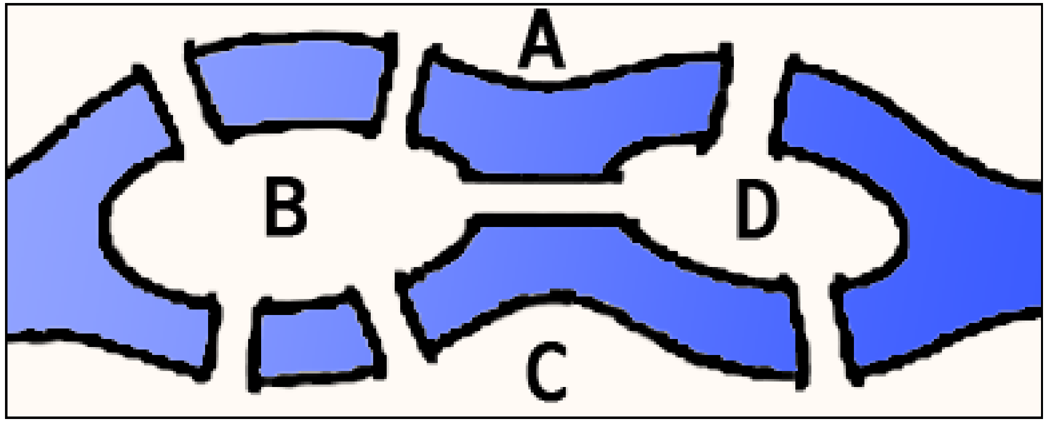
注：哥尼斯堡城是今日的俄罗斯加里宁格勒



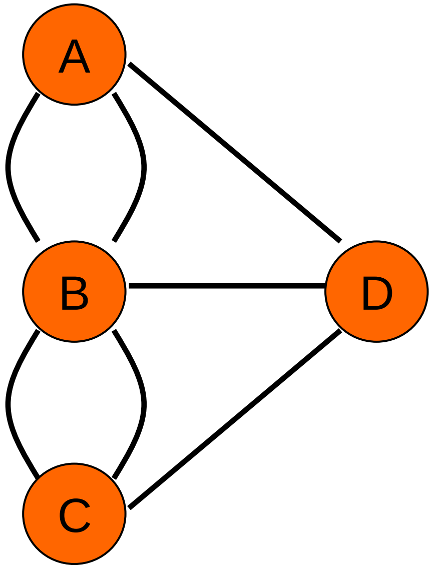
能否从某处出发经过各桥一次且仅一 次，最后返回原处?

图论的起源

- 著名的哥尼斯堡7桥问题
  - Pregel河流经哥尼斯堡，将该市分为两部分，河中还有两个小岛。18世纪初，该市有7座桥将它们相连，如左图所示。当时人们问：能否从某处出发，经过各桥一次且仅一次，最后返回原处?



图论建模



在生活中发现问题……

图论的历史与发展

- 欧拉与哥尼斯堡七桥问题
  - 人们常称1736年是图论历史元年，因为在这一年伟大数学家欧拉（Euler）发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》——欧拉是图论的创始人
- 1936年《有限图与无限图理论》
  - 匈牙利数学家寇尼格（Konig）出版图论的第一部专著
  - 图论发展史上的重要里程碑，标志着图论进入突飞猛进发展阶段
- 近几十年来，图论发展异军突起，活跃非凡
  - 计算机科学的发展为图论的发展提供了计算工具
  - 现代科学技术的发展需要借助图论来描述和解决课题中的各种关系

图论的重要性

- 图论在许多领域的应用广泛
  - 描述事务之间关系的手段或称工具
  - 广泛应用于电信网络、电力网络、运输能力、开关理论、编码理论、控制论、反馈理论、随机过程、可靠性理论、化学化合物的辨认、计算机的程序设计、故障诊断、印制电路板的设计、图案识辩、地图着色、情报学
  - 应用于诸如语言学、社会结构、经济学、运筹学、兵站学、遗传学等等方面。
- 图论是计算机学科的重要基础课
  - 培养计算机科学的离散思维能力
  - 最短路径、树、染色、匹配、最大流……
  - 《程序设计》、《数据结构》、《计算机网络原理》……

社交网络
神经网络
图神经网络GNN

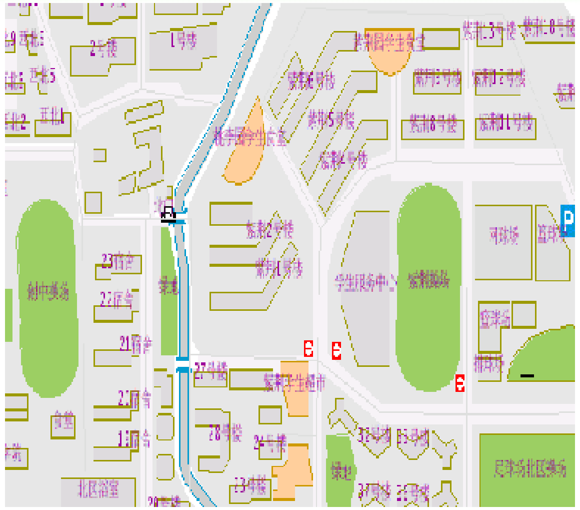
往年课程学习成果展示

- 实际应用问题
  - 公交网络搭建，送餐路线制订
  - 清华交通网络优化
- 专业课题
  - 河流水利设施规划，DNA判定
  - 智能組句拼音輸入法，互联网组播传输模型
- 你的最爱☹
  - 连连看，五子棋，数独，游园路线，各类游戏

仅用于
开阔思路

送餐路线制订

- 问题描述：等待时间最短？
  - 有k个送餐员，n个订单
  - 最小化总路径长度
  - 分配订单并为每个送餐员制定送餐路线
- 问题求解
  - 寻找不同订单位置之间的路径
    - 两点间的最短路径
  - 将n个订单分成k组
    - 最小生成树
  - 为每组订单求制订路线
    - 旅行商问题



清华大学紫荆公寓地图

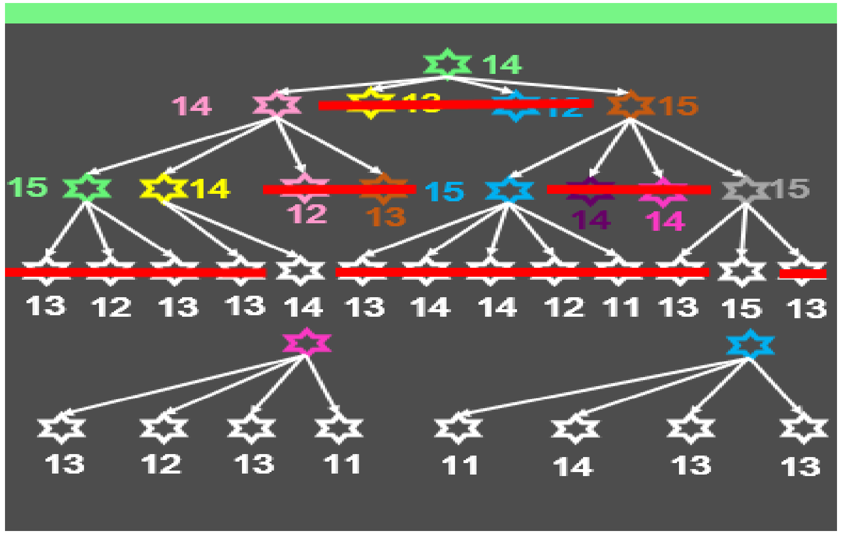
- 无限遐想
  - 半小时内必达
  - 离线问题还是在线问题？
  - 最少多少个送餐员？
  - 最多能接多少订单？
  - ……

连连看

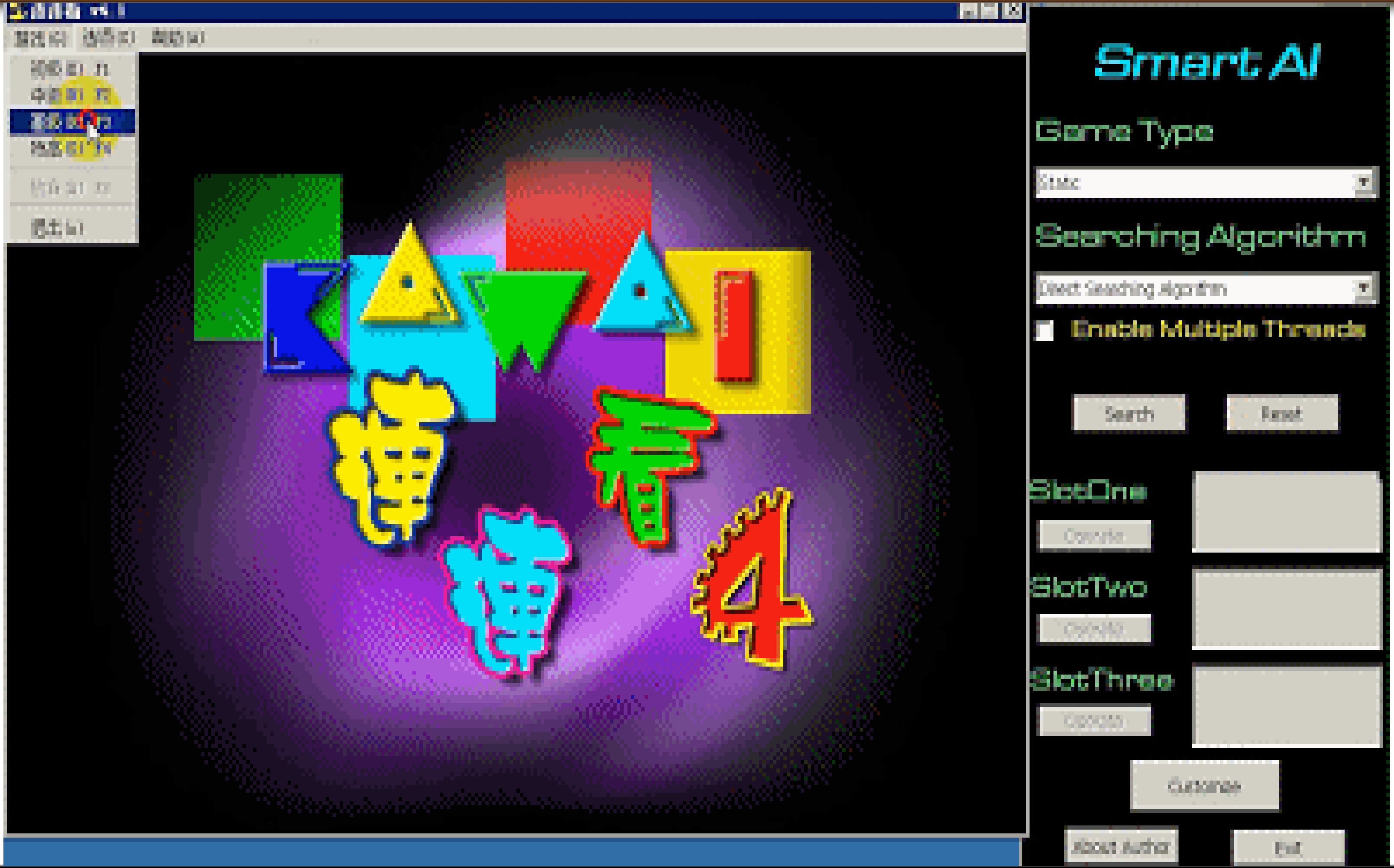
- 连连看游戏AI
  - 获取当前状态
    - 截图
    - 图像识别
  - 计算可消去的方块
    - 寻找相同方块
    - 搜索消去道路
  - 执行消去操作
    - 模拟鼠标事件

连连看游戏智能AI

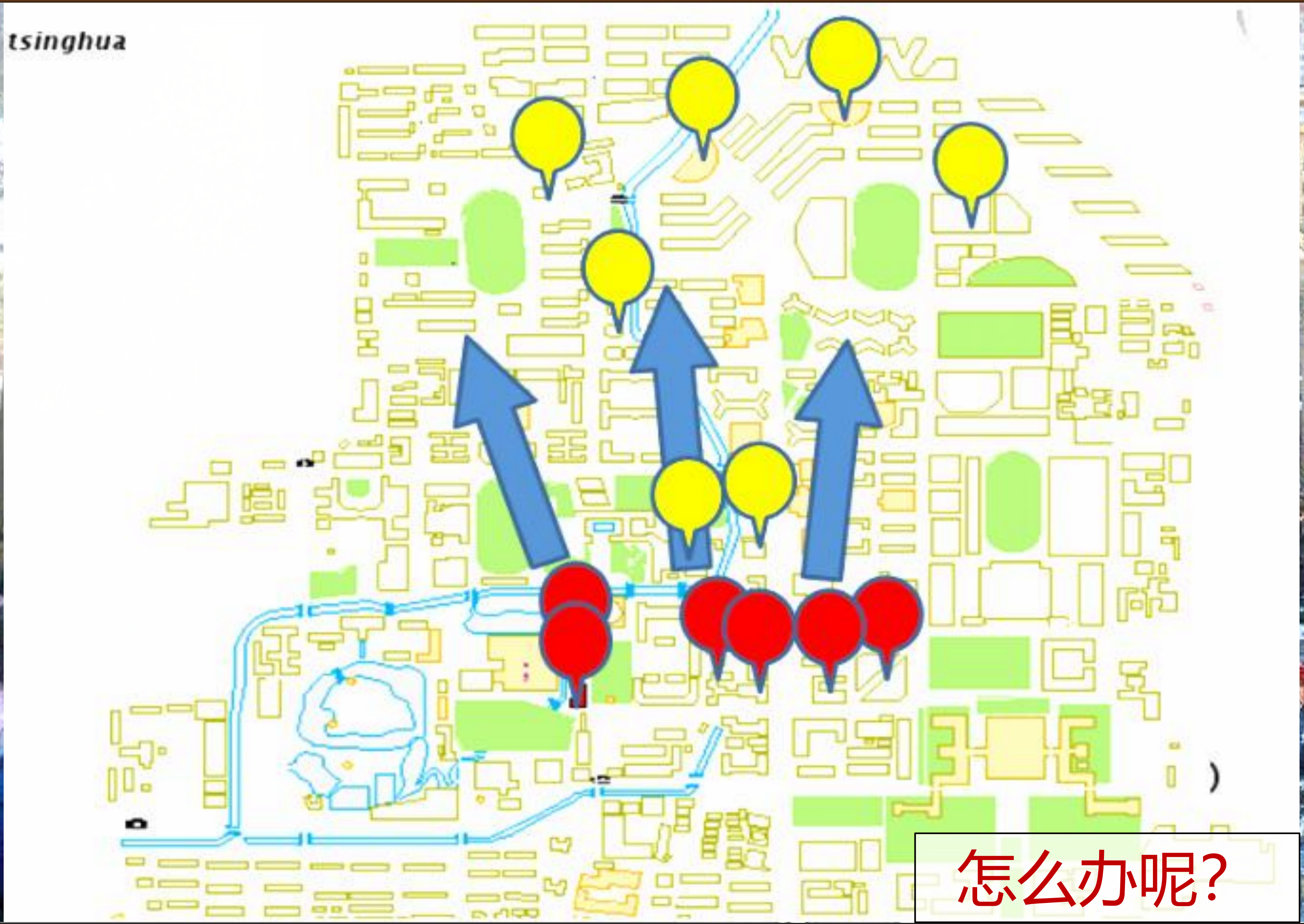
- 发现问题
  - 无脑消除可能误入歧途（浪费洗牌次数）
  - 精明决策是AI价值所在
- 图论建模
  - 求一棵决策树最大深度
  - 抽象为树T=(V,E) 边为决策
  - 权重为剩余可消除图案对数



连连看游戏智能AI

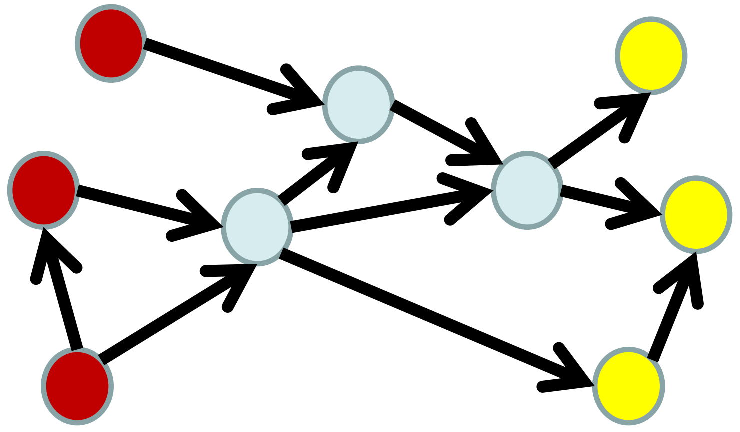

Smart AI
Game Type
Searching Algorithm
Enable Multiple Threads
Search
Reset
SlotOne
SlotTwo
SlotThree

交通网络优化



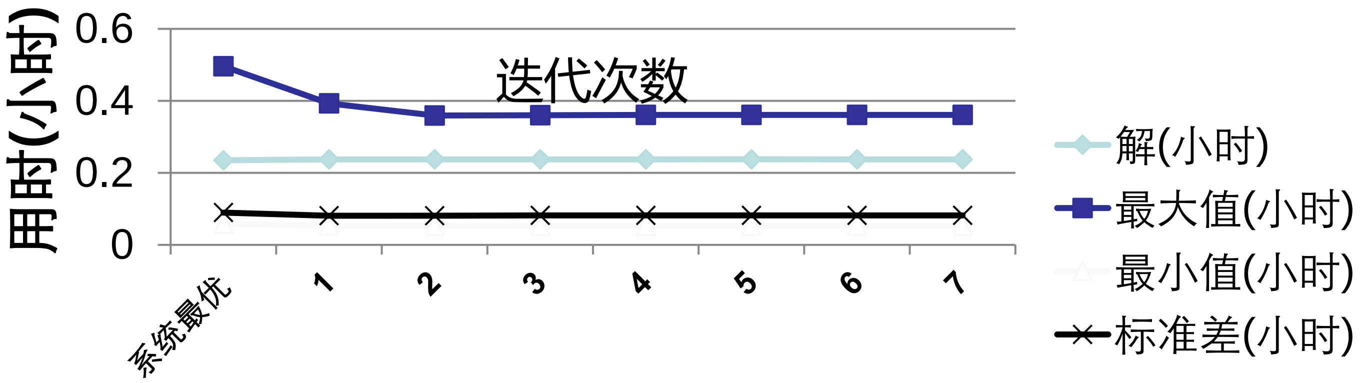
交通网络优化

- 问题建模
  - 将所有教室、食堂、十字路口看做结点
  - 将连接两地的道路看做两点间的边
  - 同学从一些结点出发---源
  - 到达一些结点---汇
  - 目标：
    - 使人们以最短的时间到达目的地
    - 最大限度地利用道路容量
  - (通过一条道路所需的时间与这条路上的人数有关)



转化网络流图问题

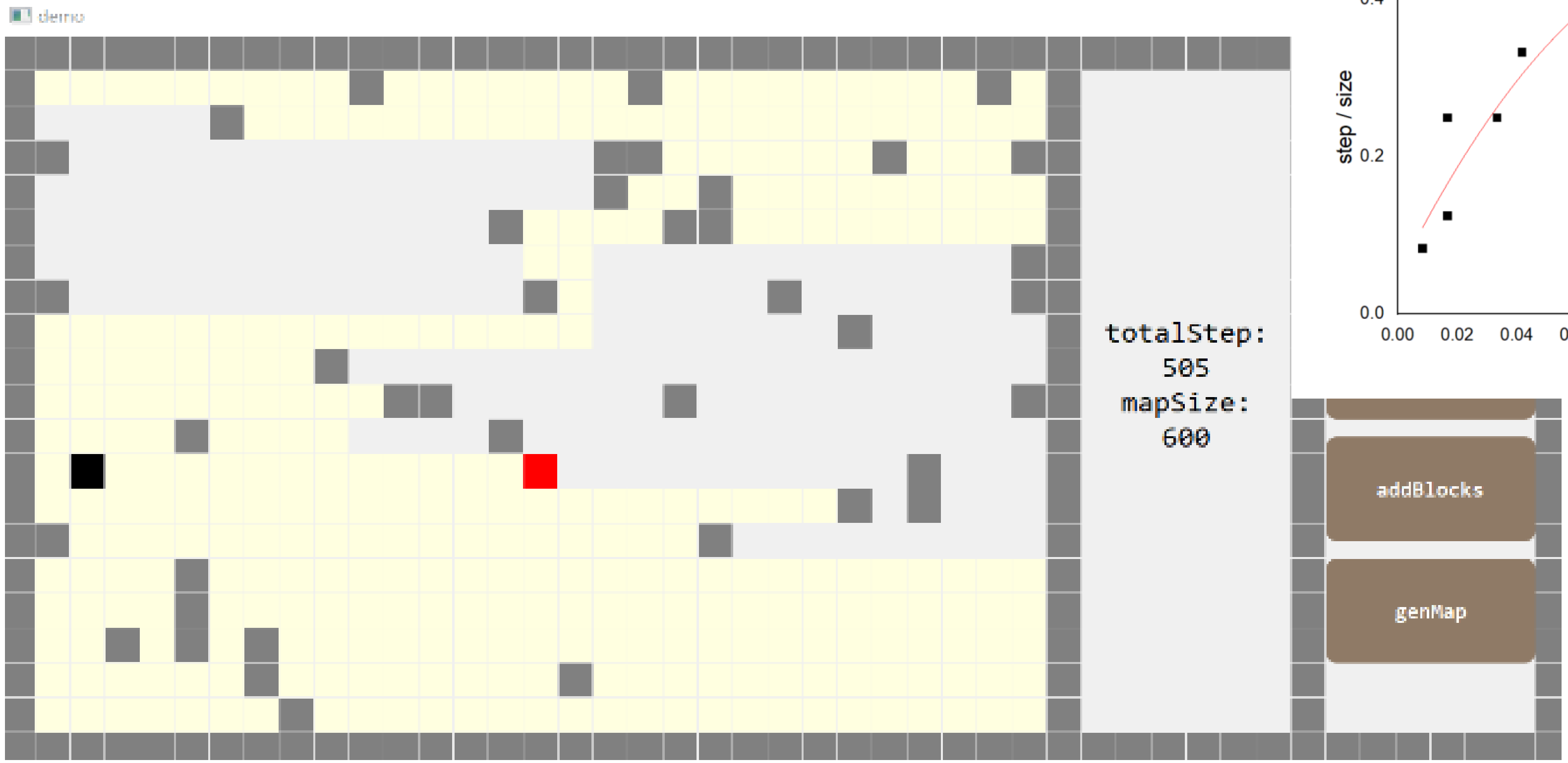
系统实现与用户界面

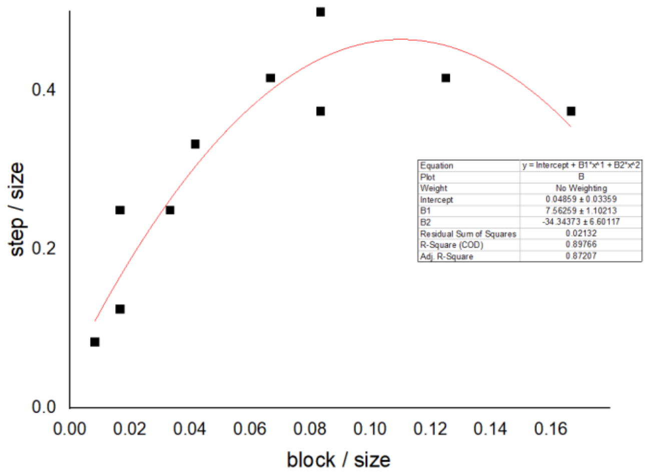


非常重要

扫地机器人的全覆盖路径规划

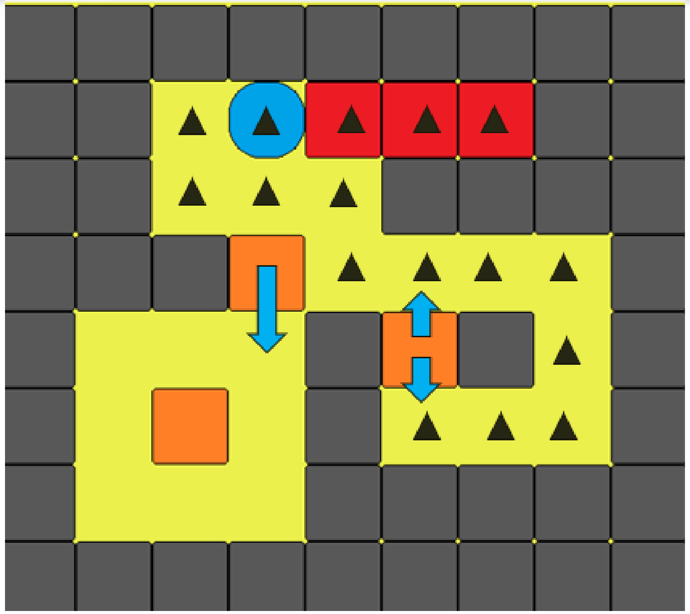
- 针对整体不变，局部有扰动的半在线算法
- 图论建模：旅行商问题+贪心

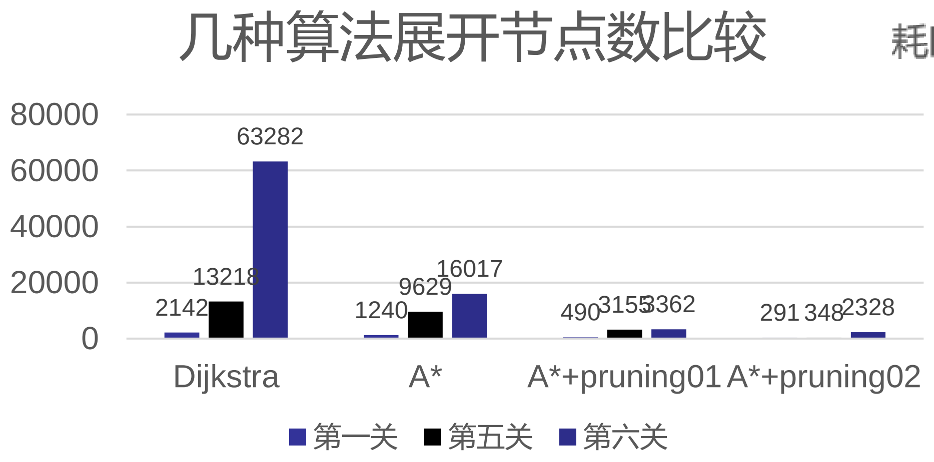


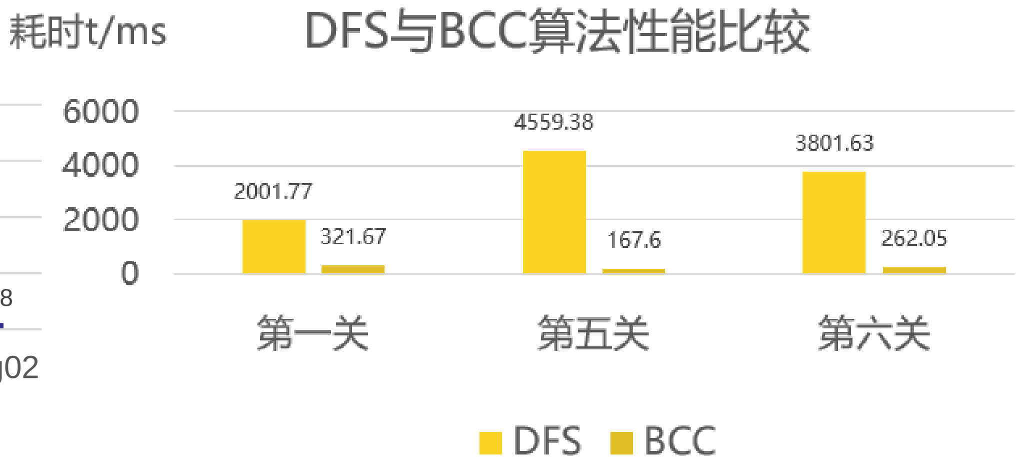


自动推箱子求解器

- 基于状态节点的图搜索
- DFS、BFS、Dijkstra、A*、剪枝
- 双连通分量(BCC)优化算法







智能拼音输入法

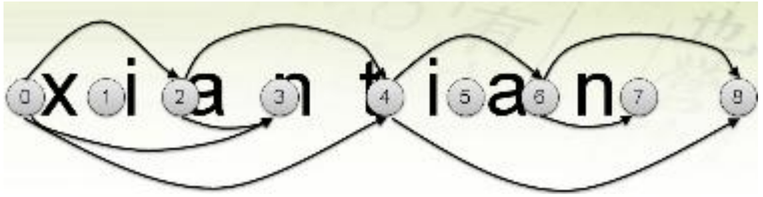
- 问题提出
  - 智能拼音输入应对拼音输入法重码过多
    - 音节解析问题
      - fangan---“反感”？ “方案”？
      - fanan ---“发难”？ “翻案”？
    - 出现的概率
      - 统计语言模型： 哪个词出现概率大？连接其他词呢?
      - 设计fangan?

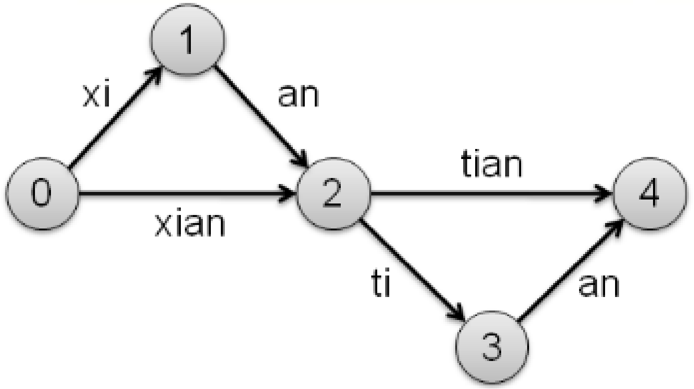
与图有什么关系?

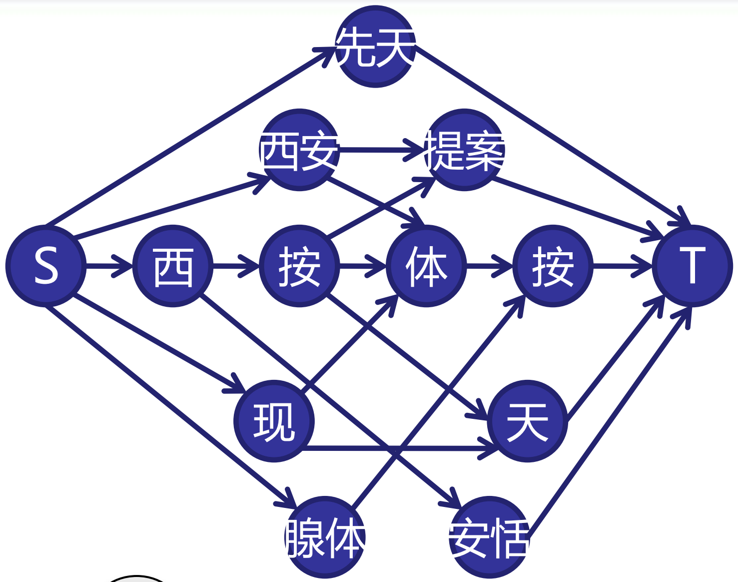
智能拼音输入法

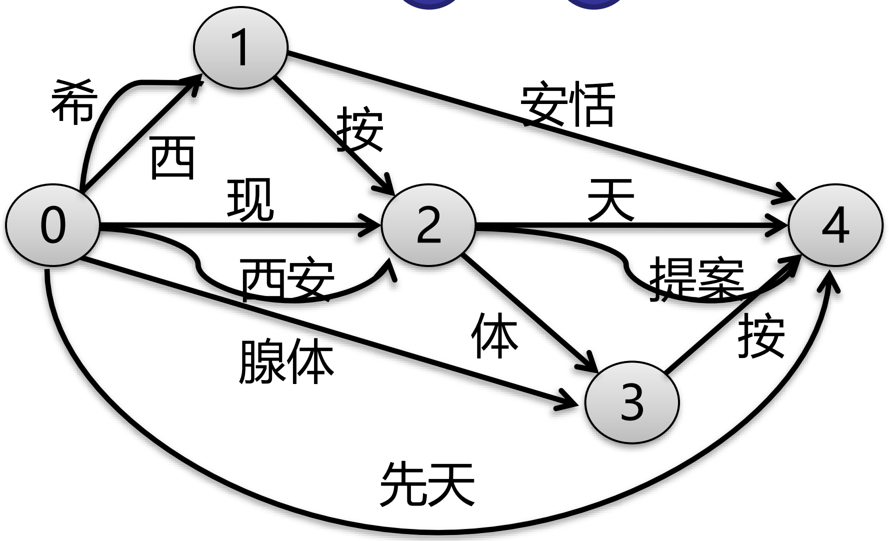
- 建立音节图
  - 将可能的字符连起来
  - 转化成图论模型

为什么？ xiantian xiantianqi









程序实现

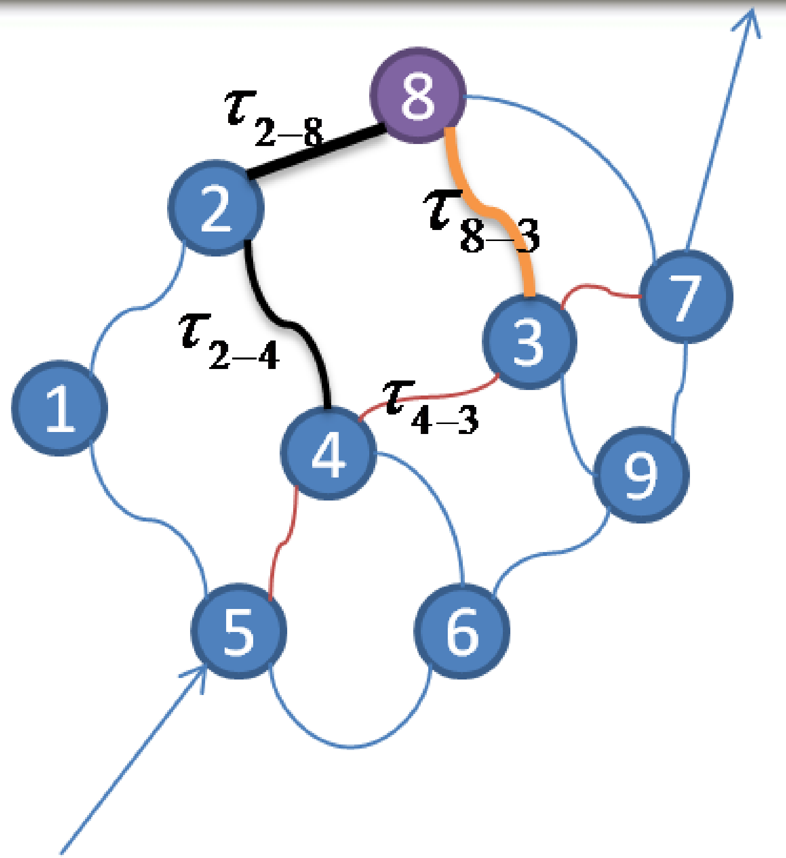
- 使用C#语言，在Mono Develop环境下编码，可用VS编译，生成的代码跨平台。
- 支持Windows, Linux, Mac。
- 使用多线程技术，加速求解。
- 源码以Apache License 2.0发布。

游园路线规划

- 从实际生活中找问题
  - 游乐园（Disneyland）游玩，如何选合适路径及游玩方案，使得游玩方案相对更优？
- 抽取关键因素
  - 游玩地点及路径
  - 时间分配
  - 满足游客需求（想不想去）
  - ……

游园路线规划建模

- 将游乐设施等作结点，道路为边
- 给每个结点一个权值，对应“重要程度”，此外结点还对应有花费的时间，相当于长度
- 每条边有一个时间值
- 最终目的是给出一条从入口到出口的道路及道路上要去玩的若干结点



最终目标：在总耗费时间不超过给定时间的情况下，使得总权值最大。

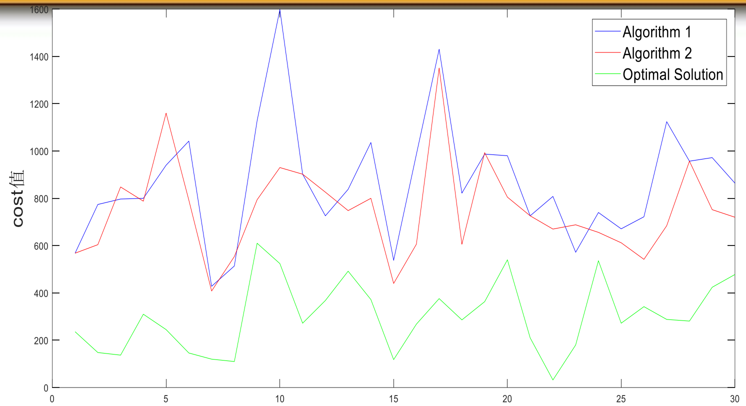
程序实现


FindRouteDXUT
True
700
ChangeTime
[1] 5
[2] 4
[3] 3
[4] 4
[5] -1
[6] 5
[7] 2
[8] 3
[9] -1
[10] -1
[11] 3
[12] 4
[13] 5
[14] 9
[15] 2
[16] 4
[17] -1
[18] 2
[19] 4
[20] 0
[21] 5
[22] 2
[23] 2
[24] 4
[25] 0
[26] 5
[27] 9
[28] 2
OptSet1
OptSet2

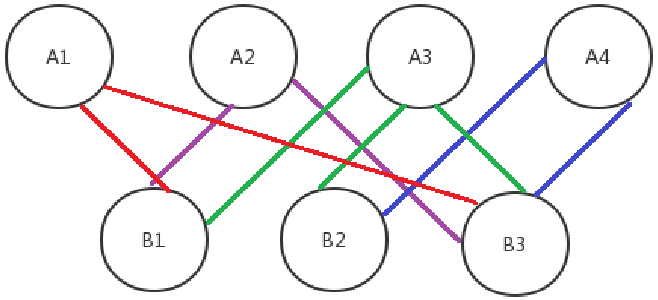
教学楼集中化排课系统

- 集中排课⇒减少通勤 ⇒学堂路治堵
- 已知选课情况，设计排课方案，最小化两节课间的总通勤成本
- $\arg\min\limits_{T} G(T) = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{e_i} w_{ij} \times C_{T_i,T_j}$
- $subject\ to\ \forall k \in \{1,2,\dots,b\}, \forall l \in \{1,2,\dots,r\},$

$$\sum_{i=0}^{n} sgn\left(T_{i_{R_l}} = k\right) \le Capa(B_{k_{R_l}})$$



可行算法、近似优化算法与最优算法的比较



选课二分图建模

结点：课程，边权：公共选课人数

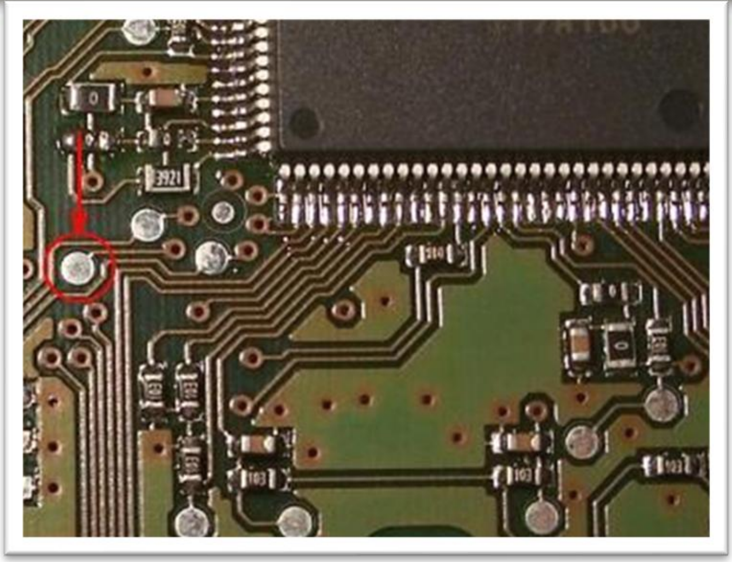
颜色：课程所在教学楼

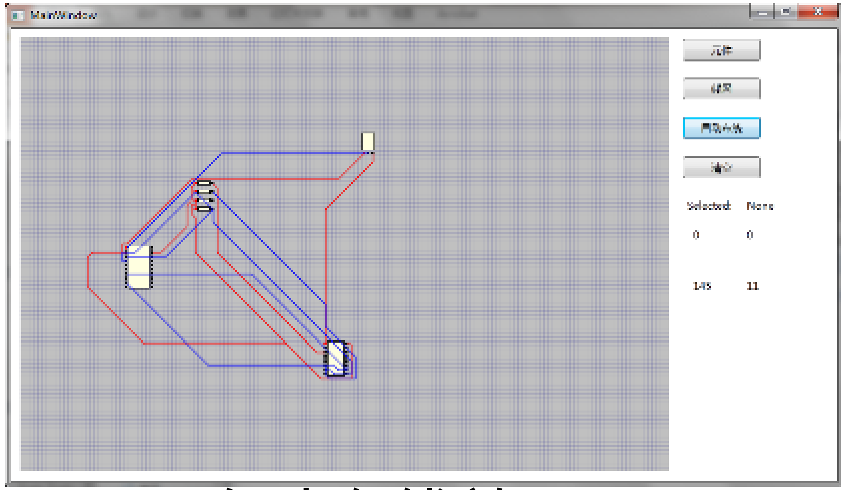
排课结果展示

课程名	教学楼	教室号
微积分A(2)	六 教	6C300
模拟电子技术基础	六 教	6C101
概率论与数理统计	六 教	6C102
概率论与数理统计	六 教	6C201
微积分A(2)	六 教	6C202
概率论与随机过程（1）	六 教	6A017
概率论与随机过程（1）	六 教	6A016
分子生物学(英)	六 教	6A018
数字逻辑电路	三 教	3200
微积分B(2)	三 教	3300
微积分B(2)	三 教	2101
微积分B(2)	三 教	2102
高等微积分(2)	三 教	2301
建筑数学	三 教	2302
建筑设计原理	新 水	407
计算机程序设计基础	六 教	6A117
中国文明	六 教	6A215
债法	六 教	6A116
传统民居与乡土建筑	六 教	6A118
微积分A(2)	六 教	6A214
微积分B(2)	六 教	6A216
离散数学方法	六 教	6A314
微积分B(2)	六 教	6A316
大学物理A(1)	六 教	6A414
有机化学B	六 教	6A416
计量经济学（1）	六 教	6A315
计算机仿真	六 教	6A415
微积分B(2)	四 教	4201
概率论(1)	四 教	4202
概率论(1)	四 教	4203
大学物理B(1)	四 教	4204
大学物理B(1)	四 教	4205
大学物理B(1)	四 教	4206
大学物理A(1)	四 教	4101
大学物理A(1)	四 教	4102

PCB自动布线程序

- 通过点击、拖拽设置元件，直观的操作体验
- 数据库存储、检索数据
- Kruscal算法实现线路生成
- A*算法探路
- 精02 匡冶 兰天



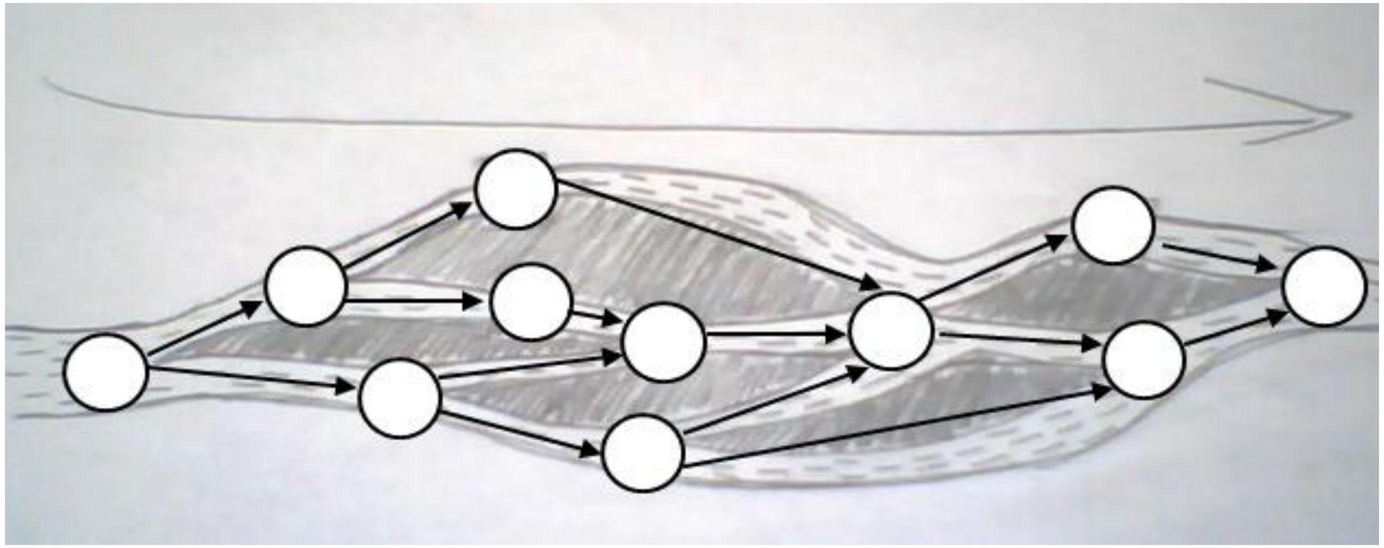


自动布线效果图

元件管理界面

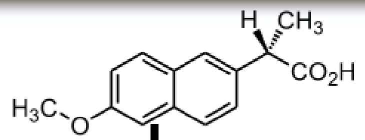
河流水利设施规划

- 问题描述
  - 在河道沿岸选取合适的位置建设水利设施进行扩容
  - 保证河道能够承受流量
  - 尽量减少建设开销
- 问题求解
  - 河道流量分析
    - 最大流
  - 选取河道进行扩容
    - 图的割切

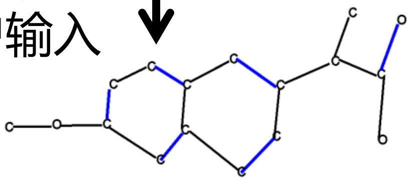


潜在药物筛选

待测目标
化学结构



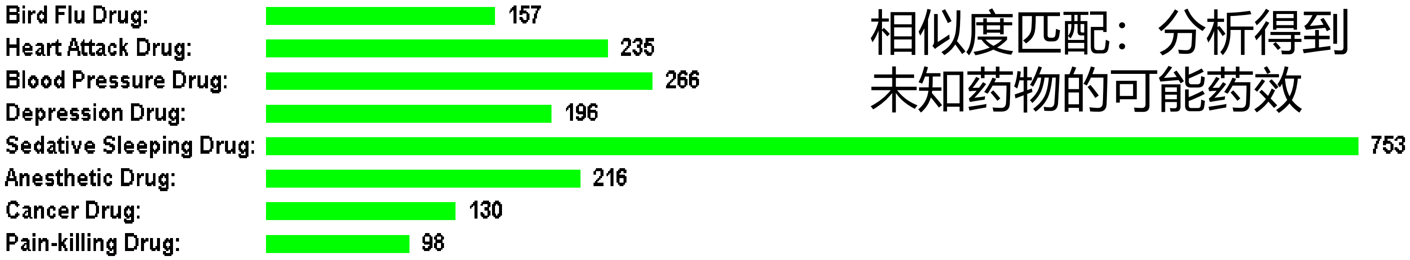
界面：简易方
便的用户输入



权矩阵转化
(图论建模)

matrix
17
0 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4 3
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

深度优先
(递归算法)



相似度匹配：分析得到
未知药物的可能药效

This molecule is a potential: Sedative Sleeping Drug

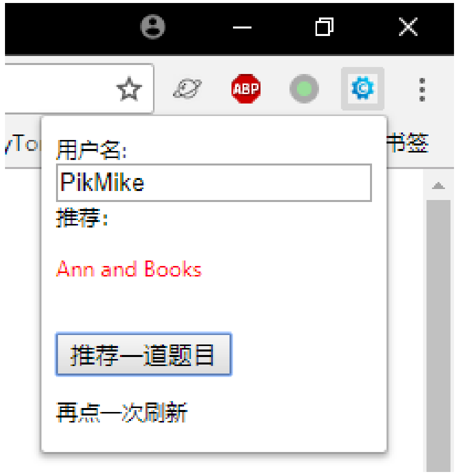
与标准库比较

CodeForces做题推荐系统

- 如何在CodeForces的题海中找到适合自己的题目?

遇到的问题	解决方案
如何量化题目难度?	通过选手提交记录推测用时 使用时间的对数为题目难度
选手水平持续变化怎么办?	主要保留近期数据，丢弃老数据
数据噪音很大怎么办?	去除一定量可疑选手

- 主要方法：基于协同过滤算法预测出每个题目对于每位选手需要做多少时间，以此进行合适难度的题目推荐。
- 最终效果：与做题时间估测平均误差为13.3分钟
- 源码和插件下载→ 实际应用截图→



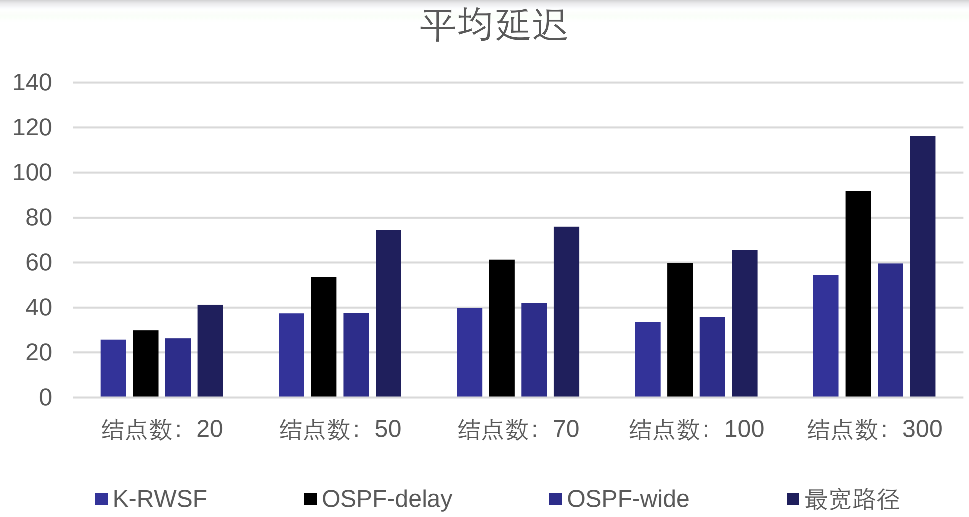
网络传输的多目标优化

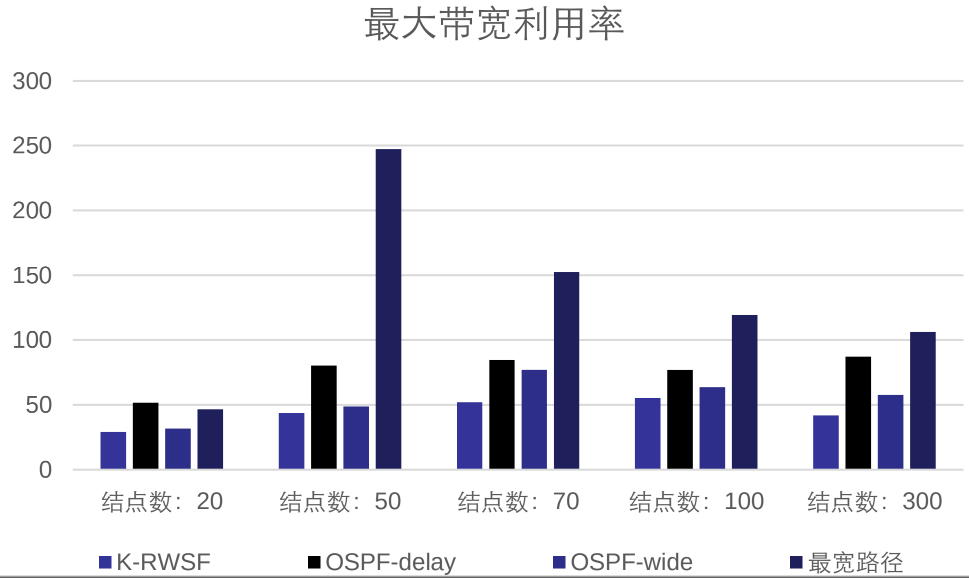
- 延迟约束&负载均衡
- 应用背景：流媒体、视频会议
- 优化目标：

$$\min\left\{\max_{i,j=1\sim n}\left\{V_{i,j}\right\}\right\}$$

$$\min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} t_{i,j}}{n}\right\}$$

- 剩余K-最短路
  - 减少重边
  - K=1，动态最宽路
  - K→ ∞，动态延迟最短路
- 导出子图最宽路





图论应用小结

- 利用图论解决问题的一般过程
  - 分析问题
    - 确定输入信息、输出目标和约束条件等
  - 使用图论进行建模
    - 用图描述题设条件
    - 将求解目标映射到图论体系中
  - 使用现有的图论方法/设计新的算法进行求解
    - 组合使用多种现有的图论方法
    - 启发式算法
    - 搜索，剪枝优化
- 期待更多的经典成果——将来自你们！

核心参数选取
与
约束条件简化

主要内容

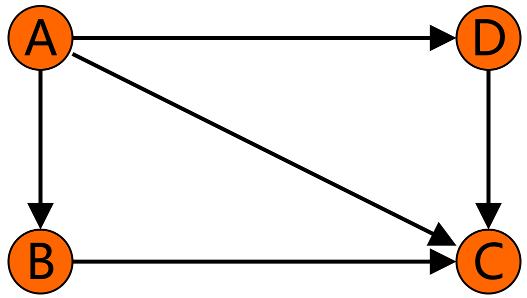
- 课程介绍
- 初识图论与往届成果
- 图的基本概念和定义

图的基本概念

- 实践的需求
  - 世界上各事物之间，自然界内诸现象之间经常存在着某些必然的联系，需要人们通过研究分析，去揭示这些关系
- 图论中所讨论的图
  - 人们常把事物、现象用顶点（或结点）表示，用有向的或无向的边来表示它们之间的联系

图的基本概念

- 例1
  - A、B、C、D四个队进行比赛，请用图论建模
  - 可用点代表队
  - 有向边代表输赢关系



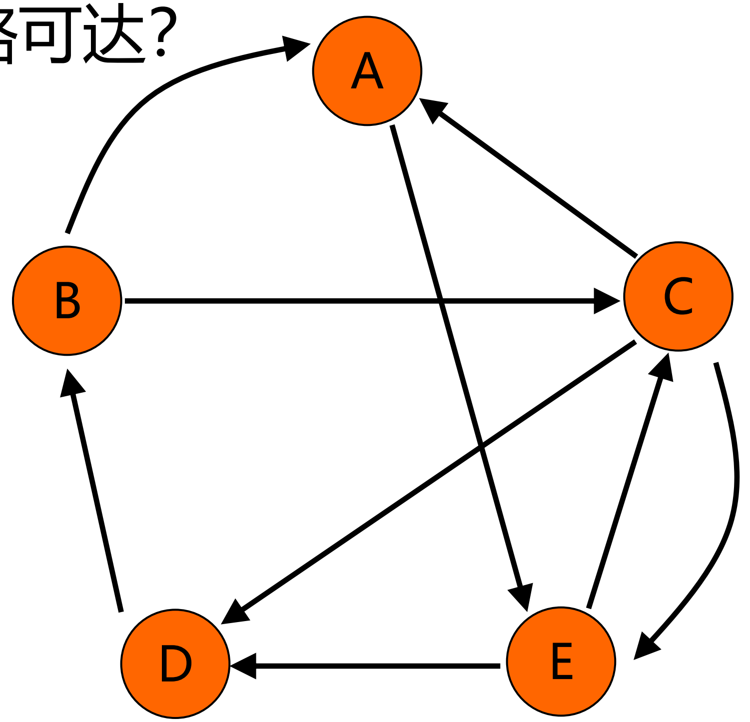
表示A胜B、C、D，B胜C，D胜C，B和D还未比赛

图的基本概念

- 例2
  - 有5个仓库A-E，其中A可以到E；B可以到A，C；C可以到A、D、E；D可以到B；E可以到C，D。问:
  - 1）E能否到B?
  - 2）任意两个仓库之间是否都有道路可达?

如何判断任意两个仓库之间是否都有道路可达?

AECDBA



单选题 1分

设置

- 例3 （缅怀金庸）
  - 未婚的段誉总是痴痴地看着王语嫣，王语嫣却眼不离慕容复，可惜慕容复已经结婚了。
  - 是否有个未婚者在看已婚者?

A 是

B 否

C 不能确定

提交

图的基本概念

- 例3 （缅怀金庸）
  - 未婚的段誉总是痴痴地看着王语嫣，王语嫣却眼不离慕容复，可惜慕容复已经结婚了。
  - 是否有个未婚者在看已婚者?

段誉 → 王 → 慕

点着色：未婚着红色；已婚着蓝色

段誉 → 王 → 慕

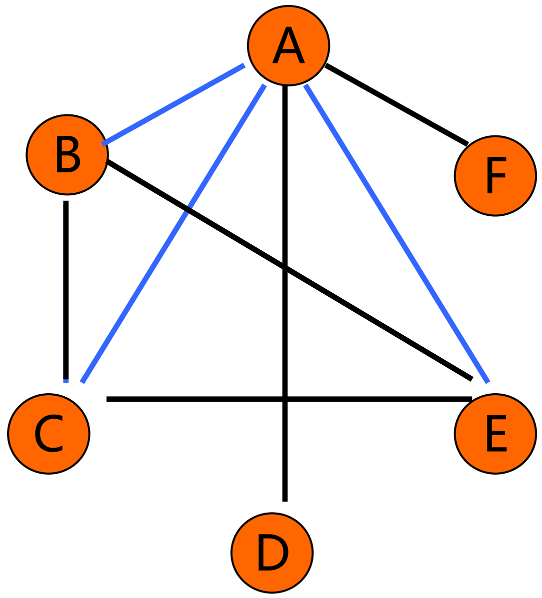
未婚　如何着色?　已婚

题目转换为：是否存在红到蓝的边?

图的基本概念

- 例4
  - 试证明：6个人中如果没有3个人互相认识，则至少有3个人相互不认识。

图论建模?



若两个人认识，用蓝色边连接，否则用黑色边连接

问题转化为证明图中存在黑色或蓝色三角形

不失一般性，假设与A连接的五条边有三条蓝色边

若B、C、E三点间的三条边中有一条蓝色边，便与A构成了蓝色三角形，问题证毕

否则B、C、E之间构成黑色三角形，问题证毕

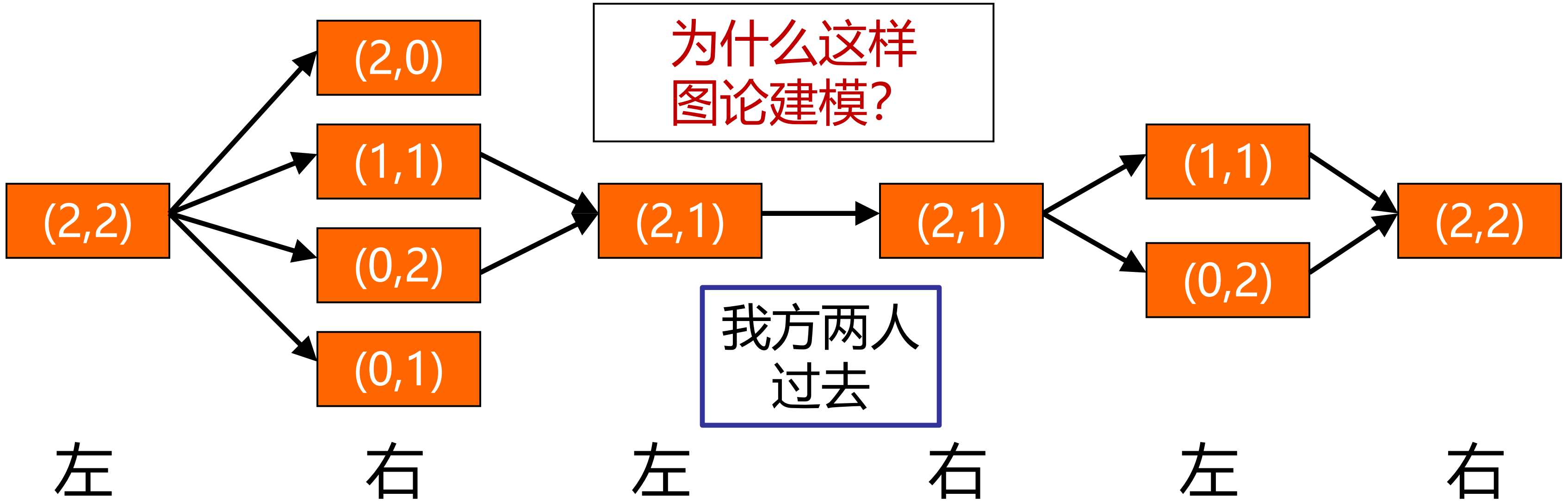
如果与A连接的5条边有三条黑色边，则类似可证

图的基本概念

- 例5
  - 敌我双方各2人组成一个小组到前方视察，途经一条河，河上只有一条小船，该船每次最多只能载2人。试问，在保证两岸我方人员不少于敌方人员的前提下，能否过河？如果可以，最少的渡河次数是多少？

图论建模?

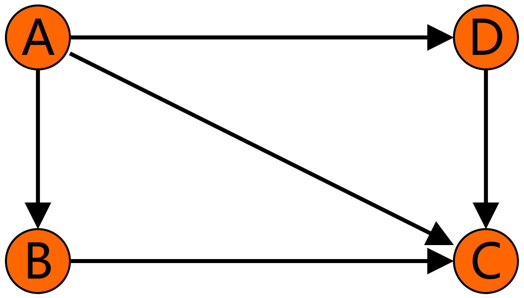
假定是从左岸到右岸。将敌我双方在岸上的人数作为顶点，表示为：（我方人员数a, 敌方人员数b）。通过摆渡1人或2人将两岸间的某二个点加以联系，构成边。根据约束条件逐步从左至右构成下图：



图的定义

为解决问题和设计好算法，该怎么办?
形式化描述!

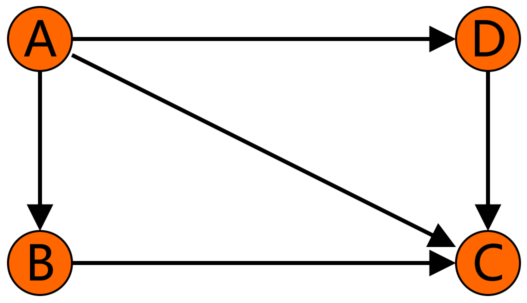
- 图：二元组 (V(G),E(G))称为图。其中V(G)是非空集，称为结点集，E(G)称为边集，E(G)为V(G)×V(G)的子集。以后简记G=(V,E)
  - 例



  - V={A,B,C,D}, E={(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (D,C)}

图的定义

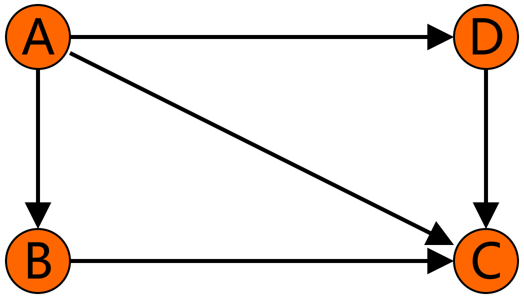
- 图分为有限图和无限图
  - 仅讨论有限图（V和E均有限）
- 图的阶
  - $V=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$
  - $E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$
  - $|V|=n$ ——图的阶
  - $|E|=m$
  - 空图：若 $|E|=0$



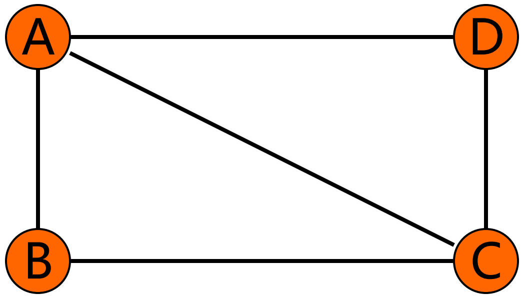
$G=(V,E)$

图的定义

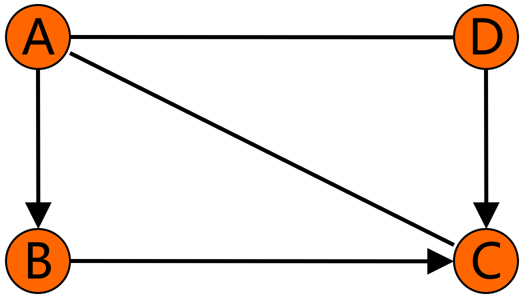
- 有向图与无向图
  - 若图中的边都为有向的，则称为有向图
  - 若图中的边都为无向的，则称为无向图
  - 若图中既有有向边，又有无向边，则称为混合图



有向图



无向图

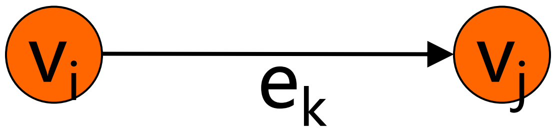


混合图

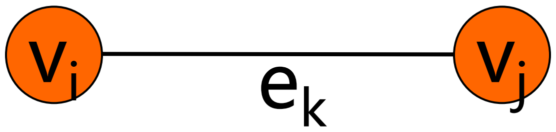
请举个实际生活的例子？

图的定义

- 图的边可用$e_k=(v_i, v_j)$表示。
  - 称v_i, v_j 为相邻结点， e_k分别与v_i, v_j相关联
  - 若e_k是有向边
    - 称v_i是e_k的始点， v_j是e_k的终点
    - v_i是v_j的直接前驱， v_j是v_i的直接后继

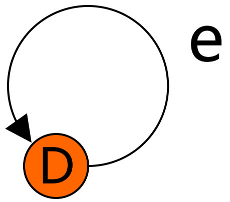


  - 若e_k是无向边，称v_i, v_j是e_k的两个端点

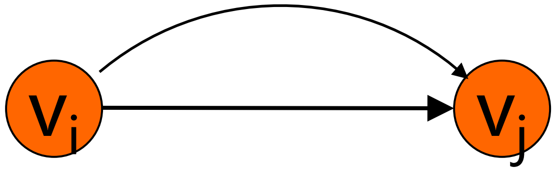


图的定义

- 自环
  - 只与一个结点关联的边称为自环

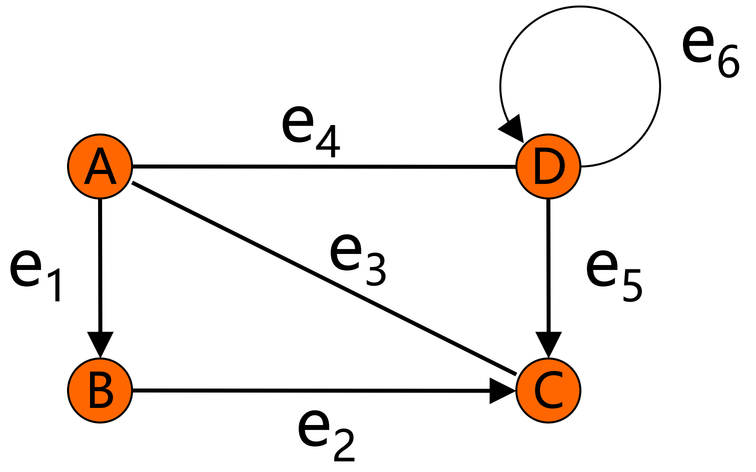


- 重边
  - 若一对结点之间有多条边，则称为重边
- 多重图
  - 含有重边的图称为多重图



- 孤立点
  - 若v没有关联的边，则称v为孤立点

图的定义



- A是B的直接前驱，C是B的直接后继
- A，C是相邻结点，是无向边e_3的端点
- e_6是自环

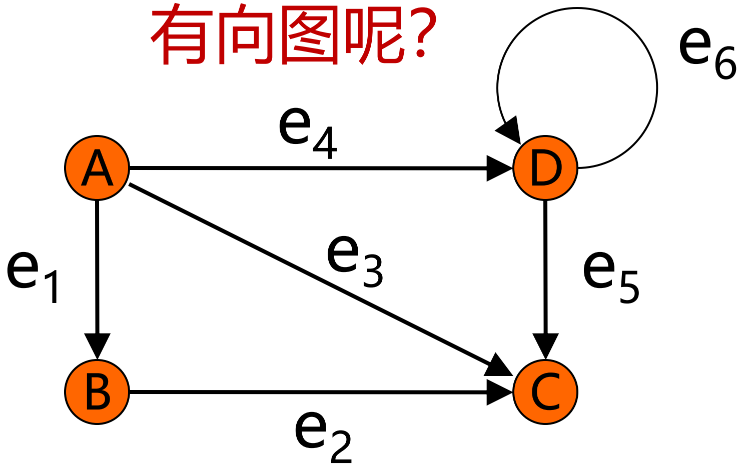
1点1边?　1点2边?　2点2边?

图的定义

- 结点的度
  - 无向图：与结点v关联的边数称为结点v的度d(v)
  - 有向图：正度$d^+(v)$与负度$d^-(v)$
    - 正度$d^+(v)$(v为始点的边的数目，出度)
    - 负度$d^-(v)$ (v为终点的边的数目，入度)
    - 小统一：$d^+(v) + d^-(v) = d(v)$

发明定义时：无向图与有向图的统一

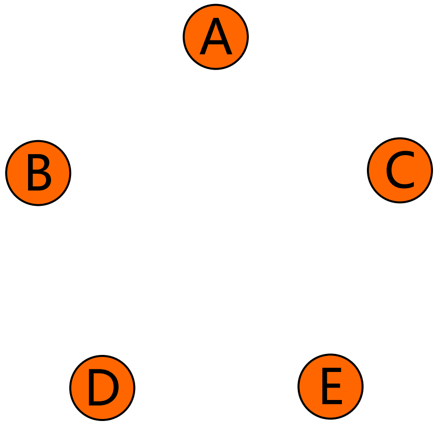
有向图呢?



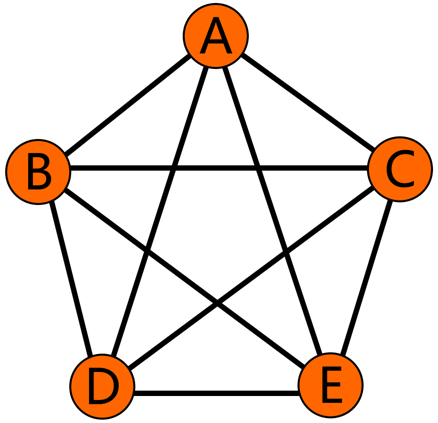
	d^+	d^-	d
A	3	0	3
B	1	1	2
C	0	3	3
D	2	2	4

图的定义

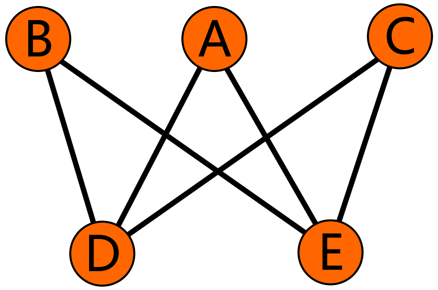
- 简单图
  - 无重边、无自环的无向图称为**简单图**



N_5



K_5



$K_{3,2}$

  - 空图N_n，完全图K_n，二分图，完全二分图$K_{m,n}$

图的定义

- 图的性质
  - 1. 设图G有n个结点，m条边，则下式成立：

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

  - 证明:
    - 对每条边e=（i，j），都分别在d(i)，d(j)中各计1次，其对度的贡献为2。
    - 因为共有m条边，所以总度数为2m。
  - 适用范围
    - 有向图&无向图（“度”定义的重要性！）

图的定义

- 图的性质
  - 2. G中度为奇数的点的个数为偶数个。
    - 证明：
    - G中任意一个结点的度或为奇数，或为偶数；
    - 设V_e是度为偶的结点集，V_o是度为奇的结点集。
    - 因此有

$$\underbrace{\sum_{v\in V_e} d(v)}^{\text{偶度结点}}+\underbrace{\sum_{v\in V_o} d(v)}^{\text{奇度结点}}=2m$$

    - 所以度为奇的结点度之和为偶数，因此V_o中含有偶数个结点。

图的定义

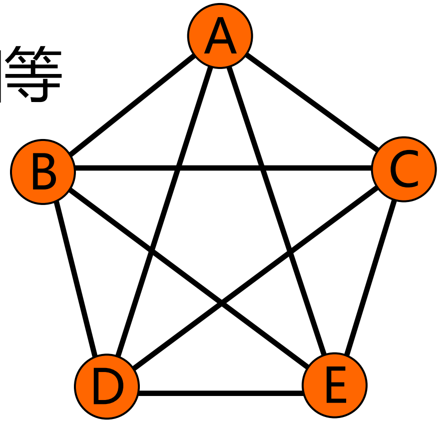
- 例
  - 在9个工厂之间
    - 不可能每个工厂都只与其它3个工厂有业务联系。
    - 不可能只有4个工厂与偶数个工厂有业务联系。
  - 证：
    - 图论建模
      - 用结点表示工厂，用边表示工厂之间的业务联系
    - 若每个工厂都只与其它3个工厂有业务联系，即每个结点的度为3，共有9个结点，与性质2矛盾；
    - 同理，若只有4个工厂与偶数个工厂有业务联系，则有5个结点的度为奇数，也得出矛盾。

图的定义

- 韩大嘴解说德甲
  - "我统计了一下前八轮的进球和失球总数，惊奇的发现一个巧合，那就是它们刚好一样多。"
- 图的性质
  - 3. 有向图中结点的正度之和等于负度之和。
    - 证：每条边对正、负度的贡献为1，因此正负度之和相等
  - 4. K_n的边数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$
    - 证：因为完全图中每点的度都是n-1。

$$\because \sum d(v) = n(n-1) = 2m \ .$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}n(n-1)$$



K_5的边数?

图的定义

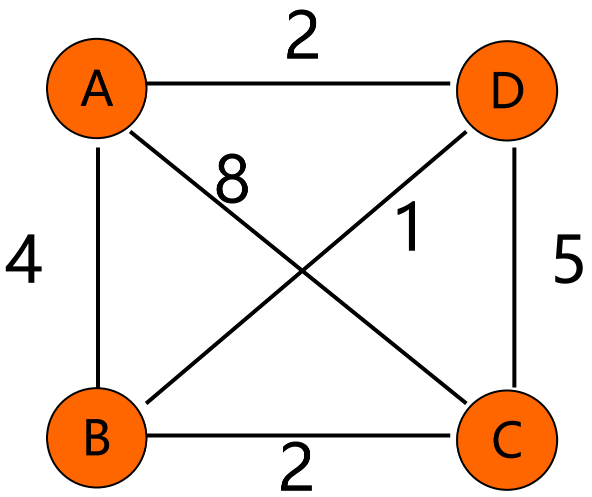
- 图的性质
  - 5.非空简单图中一定存在度相同的结点。
    - 提示：鸽笼原理?
    - 证：假设图中没有孤立点，那么n个结点的度取值范围为1~(n-1)，根据鸽笼原理，至少有两个结点的度相同。

      若有孤立点，则任意结点的度数最大为(n-2)，类似可证。

非空无向图中一定存在度相同的结点?

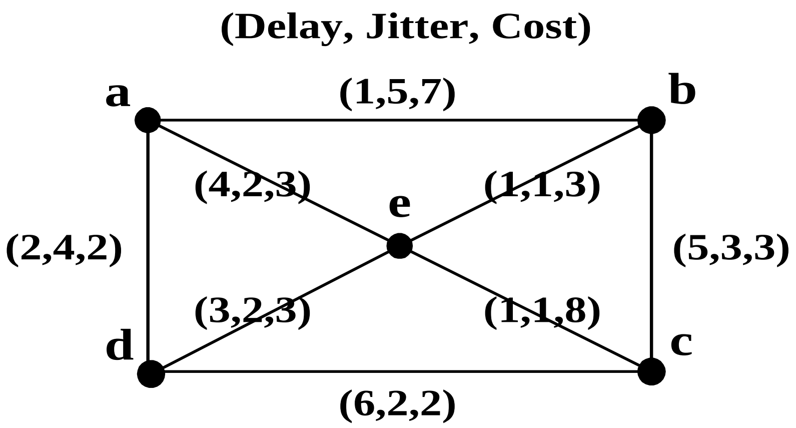
图的定义

- 赋权图
  - 图中每一边e_k都赋予一个实数w_k作为该边的权
  - 正权图：每边的权均为正数



A->C的最优路径?

互联网服务质量路由



寻找路径(a⇒c)满足约束c=(7,8,9)?

即w(a⇒c)≤ (7,8,9)

权的可加性?

主要内容总结

- 课程介绍（退不退？）
- 初识图论与往届成果
  - 图论大有用处兮，吾将认真求索呼？
  - 用图论解决实际问题的基本思路
- 图的基本概念
  - 点、边、度及其之间的关系
  - 图论建模是核心：
    不同建模方法（如点边权色/状态...）
- 图的定义
  - 点集V(G)、边集E(G)
  - 有向图、无向图
  - 前驱、后继、自环、重边、度（入度/出度）、边权

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m$$

  - 子图与图的运算：
    并、交、对称差、同构

第一周作业题

- 复习教材第一章对应部分，教材P13：4, 8, 9, 10
- 1. 能否让马跳动几次（不考虑别马腿），将左图阵势变为右图所示的阵势?

白马		白马
黑马		黑马

白马		黑马
黑马		白马

- 2. 有n名选手A1，A2，…，An参加数学竞赛，其中有些选手是互相认识的，而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人，若已知选手A1与A2互相认识，但他俩没有共同的熟人，证明他俩的熟人一样多。