微积分 II (第一层次)期中试卷 (2022.5.8)

一、计算下列各题:(每题6分，共30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{e}^{-(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})}}{(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})^{xy}}$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

3. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz=1 \\ x+y+z=a\ (a\neq 0) \end{cases}$ 确定. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

5. 交换积分次序并计算积分 $I_1 = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{\arccos y} y^3\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{2\pi-\arccos y}^{2\pi} y^3\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题:(每题8分，共40分)

1. 计算二重积分 $I_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 计算三重积分 $I_3 = \iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\ \ (a,b,c>0)$.

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被两平面 $z=\pm y$ 所截下的有限部分的面积 S.

4. 计算曲线积分 $I_4 = \int_C y\,\mathrm{d}s$. 其中 C 是摆线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 在 $0\leq t\leq 2\pi$ 的一拱.

5. 计算曲线积分 $I_5 = \oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$. 其中 L 是以 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ 为顶点的正向三角形闭路 $ABCA$.

三、(12分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0, \\ y, & x=0. \end{cases}$ 讨论 f 的连续性, 可偏导性, 及可微性.

四、(10分) 求函数 $z=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$ 上的最大值与最小值.

五、(8分) 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}\ (a>0)$ 上连续可微, 在 D 的边界上取值为 0. 证明:

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(2) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \dfrac{\pi a^3}{3}\max\limits_{(x,y)\in D}\left((\dfrac{\partial f}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2023.4.22)

一、计算下列各题:（每题 6 分, 共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin^2(xy)}}{x^2+y^2}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x(y^2+z)+\mathrm{e}^z-1=0$ 确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)=(0,1)}$.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ 在点 $(0,-1,0)$ 处的切线与法平面.

4. 求函数 $u=xy+y^2z^3+z$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)$, 其中 $P_0\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\Big)$, $\boldsymbol{l}$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 P_0 处的外法向量.

5. 求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

二、计算下列各题:（每题8分, 共40分）

1. 计算 $I_1=\iint\limits_D f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $D=\{(x,y)\big||x|\le 4,|y|\le 4\}$.

2. 计算三重积分 $I_2=\iiint\limits_\Omega (x+2y+3z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega:\ x^2+y^2+z^2\le a^2\ (a>0)$.

3. 求曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 所围成的平面区域的面积.

4. 计算曲线积分 $I_3=\oint_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2$ 与直线 $y=x, y=0$ 所围的位于第一象限的区域的边界.

5. 计算 $I_4=\int_L (x\sin y+x)\mathrm{d}x+\Big(\dfrac{1}{2}x^2\cos y+xy\Big)\mathrm{d}y$, 其中 L 是极坐标表达式为 $\rho=1+\cos\theta$ 的心脏线从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

三、(10分) 记曲线 $\begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1, z=2$ 所围成立体区域为 Ω,

计算 $I_5=\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

四、(12 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数存在性, 方向导数的存在性, 可微性.

五、(8 分) 在第一象限内, 过曲线 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 上任意一点作其切线, 若切线与坐标轴所围成的三角形面积最小值为 $\dfrac{1}{4}$, 求 a 的值.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2024.4.27)

一、计算下列各题:（每题 6 分, 共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数 (F 二阶连续可微, 且在 $F=0$ 上处处满足 $F_1'\neq 0, F_2'\neq 0$), 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 求曲线 $C: x=t, y=t^2, z=t^3$ 在某点的切线，使得该切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4. 求函数 $u=x+2y+3z$ 沿椭球面 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+2z^2=1$ 上点 $(0,1,\dfrac{1}{2})$ 处的外法线方向的方向导数.

5. 求函数 $f(x,y)=xy(3a-x-y)$ $(a\neq 0)$ 的极值.

二、计算下列各题:（每题 8 分, 共 40 分）

1. 计算二重积分 $I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2-4y\leq 0$.

2. 计算三重积分 $I_2=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所围成的有界闭区域，$a>0$ 为常数.

3. 求平面区域 $D: (x^2+y^2)^2\geq 4(y^2-x^2),\ x^2+y^2\leq 4y$ 的面积.

4. 计算曲线积分 $I_3=\oint_\Gamma xy\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是抛物线 $y=x^2$, $x=y^2$ 所围区域的边界.

5. 计算曲线积分 $I_4=\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 C 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az,\\ x+z=a\end{cases}$ $(z\geq 0, a>0)$, 从 z 轴正向看去为逆时针方向.

三、(10 分) 设曲面 $2x^2+4y^2+4z^2-1=0$ 过点 $P(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$ 的切平面为Π, Π 与 xOy 坐标面的交线为 L, 求直线 L 与曲线 $C:\begin{cases}y=x^2\\ z=0\end{cases}$ 之间的最短距离.

四、(12 分) 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

讨论函数 f 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导数性、可微性以及连续可微性.

五、(8 分) 找一条正定向的简单闭曲线 C, 使得曲线积分

$$I_5=\int_C(x^2+2y-4x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-2x+y^2)\mathrm{d}y$$

取得最小值, 并求出其最小值.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2022.5.8)

一、 1. 0; 2. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'$.

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$. 4. $x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$. 5. $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\cos x}y^3\mathrm{d}y=-\dfrac{5}{16}\pi$.

二、 1. $\dfrac{9\pi}{16}$; 2. $\dfrac{\pi^2}{4}abc$; 3. 8; 4. $\dfrac{32}{3}$; 5. $-\dfrac{14}{3}$.

三、解: 显然 f 在 $x\neq 0$ 时是连续的、可偏导的以及可微的. 下面讨论 $x=0$ 的情形. $\forall y_0\in\mathbb{R}$,

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin xy}{x}=y_0=f(0,y_0)$, 所以 f 在 $x=0$ 时连续.

(2) $\displaystyle f_x'(0,y_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin xy_0}{x}-y_0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy_0-xy_0}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y_0\cos xy_0-y_0}{2x}=0$

$$f_y'(0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{y_0+\Delta y-y_0}{\Delta y}=1,$$

所以 f 在 $x=0$ 时可偏导.

(3) $\omega=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f_x'(0,y_0)\Delta x-f_y'(0,y_0)\Delta y=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y)$.

当 $\Delta x\neq 0$ 时, $\omega=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x}-(y_0+\Delta y)=\dfrac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{\Delta x}$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sin\Delta x(y_0+\Delta y)-\Delta x(y_0+\Delta y)}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

当 $\Delta x=0$ 时, $\omega=(y_0+\Delta y)-(y_0+\Delta y)=0$. 仍有 $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\omega}{\rho}=0$.

于是 f 在 $x=0$ 时可微. (注: 也可以证明 f 在 $x=0$ 时连续可微, 从而可微.)

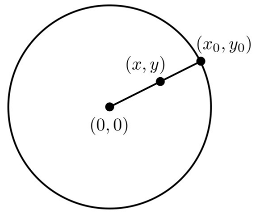
四、最大值为 $z(0,\pm 2)=8$, 最小值为 $z(0,0)=0$.

五、证明: 设 L 为 D 的边界. 由格林公式, 有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x=-\iint_D\left(f(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \oint_L xf(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而有
$$\begin{aligned}&\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ =&\left|\frac12\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac12\left|\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ \le&\frac12\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac12}=\frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$



第2问方法二:

$\forall(x,y)\in D$, 按如图方式取 (x_0,y_0), 则由中值定理

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)=f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)$$

$$|f(x,y)|=|f'_x(\xi,\eta)(x-x_0)+f'_y(\xi,\eta)(y-y_0)|\le\Big((f'_x(\xi,\eta))^2+(f'_y(\xi,\eta))^2\Big)^{\frac12}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,M=\max\limits_{(x,y)\in D}\left((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{\frac12}$ 则

$$|f(x,y)|\le M(a-\rho)$$

$$\Big|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big|\le\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint\limits_D M(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a-\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^3}{3}M.$$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2023.4.22)

一、 1. 0; 2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2+z}{x+e^z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{x+e^z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\left(2y+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+e^z)-(y^2+z)e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(x+e^z)^2}$.
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(0,1)}=-2.$ 3. 切线方程 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{2}$, 法平面方程 $-x+2z=0$.
4. $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}(P_0)=\dfrac{3}{\sqrt5}$. 5. $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac12}$ 是极大值, $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac12}$ 是极小值.

二、 1. 4; 2. $\dfrac{56\pi a^5}{15}$. 3. π; 4. $2+\dfrac{\pi}{2}$; 5. $\dfrac23$. 三、$\pi\ln\dfrac{27}{16}$.

四、 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho\cos^2\theta\sin\theta=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}0=0=f'_x(0,0)$, $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}0=0=f'_y(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) $\omega=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\omega}{\rho}=\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)\rho}\not\to0,(\rho\to0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

(4) 设 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\cos^2\alpha\cos\beta=\cos^2\alpha\cos\beta,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数存在.

五、解: 设切点 $P(x,y)$, 则 (x,y) 满足 $3x^2+2xy+3y^2=a$. 在方程 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 两边对 x 求导, 解得 $y'=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$, 故过点 P 的切线方程为 $Y-y=-\dfrac{3x+y}{x+3y}(X-x)$.

切线与两个坐标轴的截距分别为

$$x+\frac{x+3y}{3x+y}\cdot y=\frac{a}{3x+y},\quad y+\frac{3x+y}{x+3y}\cdot x=\frac{a}{x+3y},\ \left(\text{利用 } 3x^2+2xy+3y^2=a\right)$$

故三角形的面积为$S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{3x+y}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{x+3y}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{a+8xy}$. （再次利用 $3x^2+2xy+3y^2=a$）

已知 $a>0$, 只需求 xy 在条件 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 下的最大值.

令$L=xy+\lambda\left(3x^2+2xy+3y^2-a\right)$, 则 $\begin{cases} L'_x=y+6\lambda x+2\lambda y=0,\\ L'_y=x+2\lambda x+6\lambda y=0,\\ L'_\lambda=3x^2+2xy+3y^2-a=0,\end{cases}$

解得 $x=y=\dfrac{\sqrt{2a}}{4}$, 故 $S_{\min}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{a+8\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2a}}{4}}=\dfrac{1}{4}$, 从而 $a=1$.

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2024.4.27)

一、 1. 1; 2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-F''_{11}(F'_2)^2-F''_{22}(F'_1)^2+2F''_{12}F'_1F'_2}{(F'_2)^3}$.

3. 切线方程为 $l_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$, $l_2:\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{z+\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$.

4. $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$. 5. 当 $a>0$ 时, $f(a,a)=a^3$ 是极大值; 当 $a<0$ 时, $f(a,a)=a^3$ 是极小值.

二、 1. $\dfrac{256}{9}$; 2. $\dfrac{16\pi a^5}{15}$; 3. $4\pi-2$; 4. $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}+\dfrac{1}{60}$; 5. $-\sqrt{2}\pi a^2$. 三、$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

四、函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 可偏导, 可微, 不连续可微.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{2\cos^2\theta\sin\theta}{\rho}\cos\dfrac{1}{\rho^2}$ 不存在,

所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在$(0,0)$ 处不连续, 即函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续可微.

五、解：令 C 为任意一条正定向的简单闭曲线，记其所围平面闭区域为 D. 令 $P(x,y)=x^2+2y-4x^2y$, $Q(x,y)=xy^2-2x+y^2$. 根据格林公式有

$$I_5=\iint_D(4x^2+y^2-4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到被积函数 $z=4x^2+y^2-4$ 在椭圆形开区域 $4x^2+y^2-4<0$ 上取值为负. 故该二重积分刚好在当 D 的边界为椭圆 $4x^2+y^2-4=0$ 时取最小值. 取广义极坐标变换$x=\rho\cos\theta$, $y=2\rho\sin\theta$. I_5的最小值为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4\rho^2-4)\,2\rho\mathrm{d}\rho=-4\pi.$$