$$(\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$$

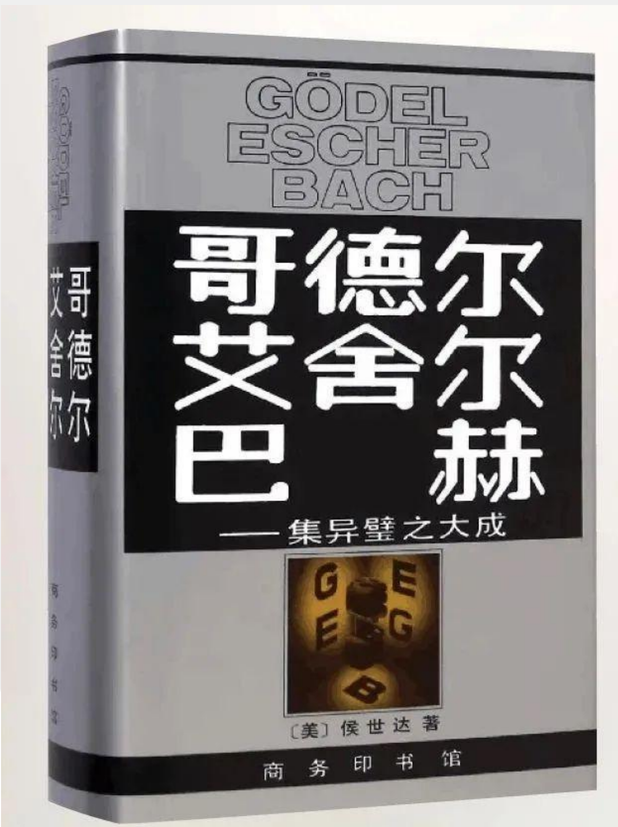
| | | |
|---|---|---|
| ① | $(\exists x)P(x)$ | 前提 |
| ② | $P(c)$ | ①存在量词消去 |
| ③ | $(\forall x)P(x)$ | ②全称量词引入 |



老师我在附件中的推理过程似乎每一步都是没有问题的，但为什么结论错得离谱呢

# 谓词逻辑推理规则

| Rule of Inference | Name |
|---|---|
| $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$ | UI / 全称举例 |
| $P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow (\forall x)P(x)$ | UG / 全称推广 |
| $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$ | EI / 存在举例 |
| $P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow (\exists x)P(x)$ | EG / 存在推广 |




**《哥德尔、艾舍尔、巴赫：集异璧之大成》(特精版)**

**附赠藏书票和集异璧拼图**

**一本空前的奇书**

**一本完全关于未来的书**

**开启整整一代年轻人对人工智能的探索**

**《哥德尔、艾舍尔、巴赫》是本1979年在美国出版的“神书”，这是一本空前的奇书，一本杰出的科学普及名著，曾获普利策文学奖获奖作品（非小说类）。**这本科普作品通过对数学家哥德尔的数理逻辑、版画家艾舍尔的版画、音乐家巴赫的音乐三者的综合阐述，引人入胜地介绍了数理逻辑、人工智能、语言学、遗传学、音乐、绘画等理论。

人们称它为“人工智能的《圣经》”，作者侯世达虽然不认同这个评价，但他对“我们大脑中的秘密软件结构”的描绘，**开启了整整一代年轻人对人工智能的探索。**

# 第九章　集 合

马显春
清华大学计算机系
myc@mail.tsinghua.edu.cn

# 离散 语义

# 概 论

## 数理逻辑的研究内容

- **简单概括：两个演算加四论**

命题演算与谓词演算 1-3, 4-5（章）

集合论（集合、关系、函数、基数）9-12

模型论（形式语言语法与语义间的关系）7

递归论（可计算性与可判定性）6

证明论（数学本身的无矛盾性）8

# 命题

陈述句

语

# 谓词逻辑

语文

命题 谓词逻辑

？对象

世间万物？

# 集合论

新闻 网页 贴吧 知道 音乐 图片 视频 地图 百科 文库

Bai du 百科

集合论 进入词条 搜索词条 帮助

首页 分类 特色百科 用户 权威合作 手机百科

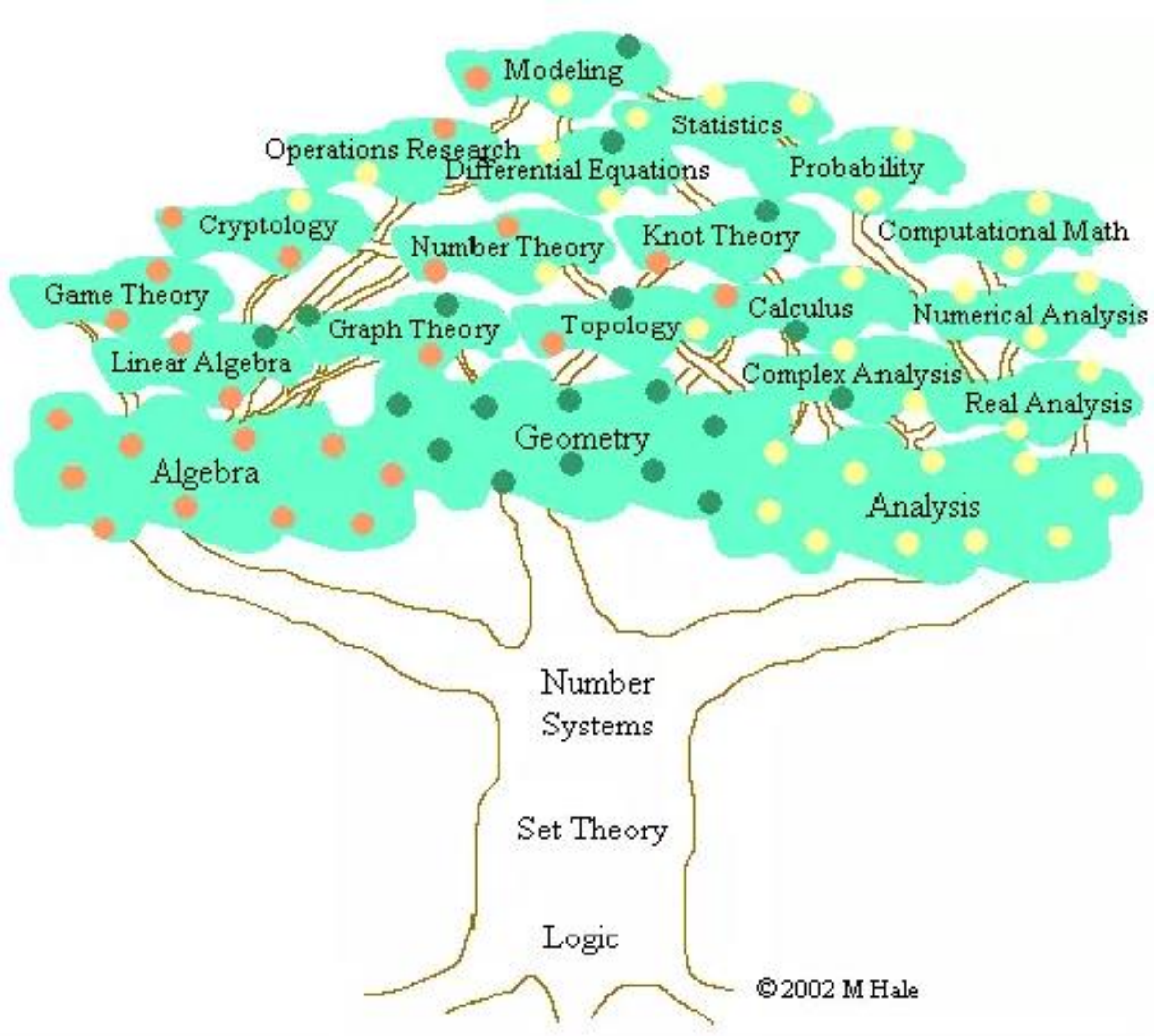
收藏 661 12

## 集合论

编辑

数学的一个基本的分支学科，研究对象是一般集合。集合论在数学中占有一个独特的地位，它的基本概念已渗透到数学的所有领域。[1] 集合论或集论是研究集合（由一堆抽象物件构成的整体）的数学理论，包含了集合、元素和成员关系等最基本的数学概念。在大多数现代数学的公式化中，集合论提供了要如何描述数学物件的语言。集合论和逻辑与一阶逻辑共同构成了数学的公理化基础，以未定义的"集合"与"集合成员"等术语来形式化地建构数学物件。

# 集合论



Modeling
Statistics
Operations Research
Differential Equations
Probability
Cryptology
Number Theory
Knot Theory
Computational Math
Game Theory
Calculus
Numerical Analysis
Graph Theory
Topology
Linear Algebra
Complex Analysis
Real Analysis
Geometry
Algebra
Analysis
Number Systems
Set Theory
Logic
©2002 M Hale

# 为什么学集合论？

果壳问答　问答首页　发现问答　等待回答　最新问题　标签广场

集合论被应用在计算机学科的各个方面，比如说集合论在数据结构、数据库、人工智能领域及程序设计语言等都有重要的应用，那到底是集合论的哪些方面被应用到了?搞不懂....

标签：集合论　离散数学　修改

0 Zeration 2015-02-17 10:27

定义出了集合 才能定义出函数，有了函数才能有可计算方程，再有计算模型，最后在物理上做出电子计算机这一实

0

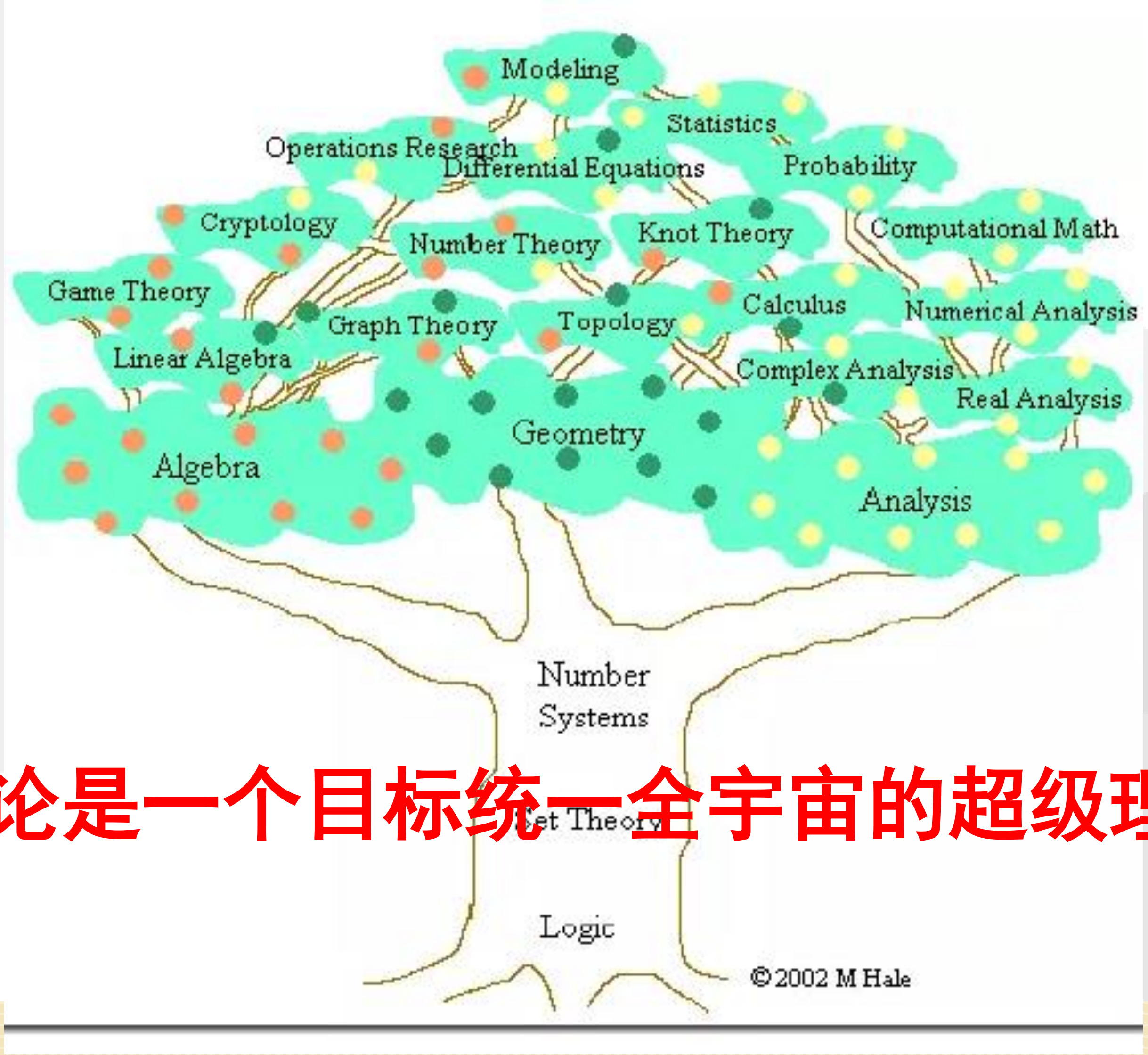
0 Tetsuya 半吊子程序媛 2014-12-23 15:44

数据结构全程依靠集合论好么！！！！！！！！！！！！！C语言离开集合论就是个渣好么！！！！！！！！！！！！！

1

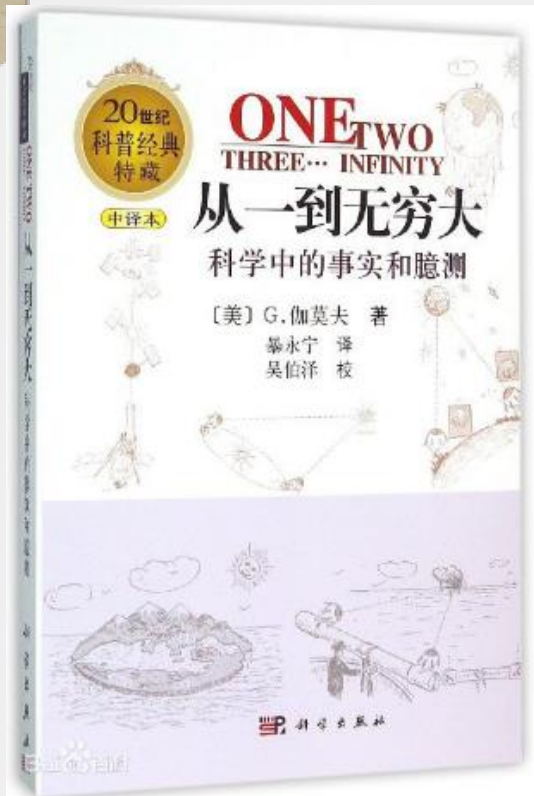
添加讨论

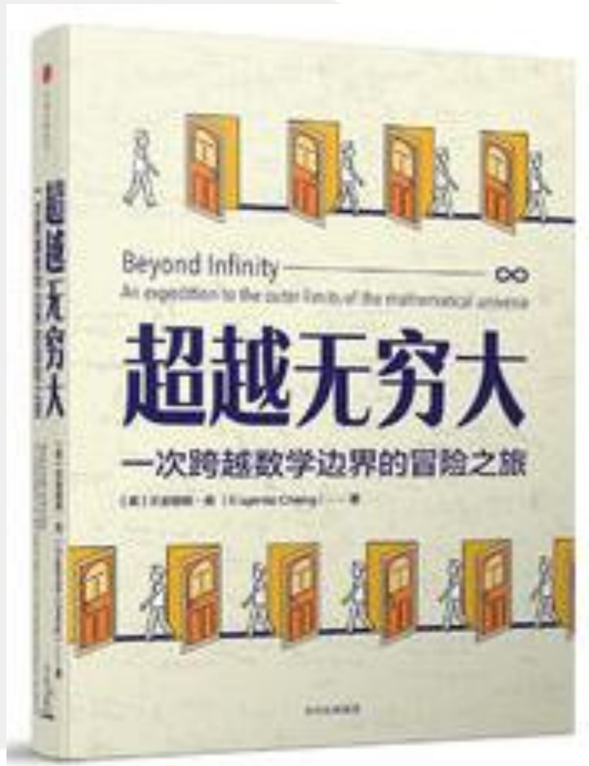
# 集合论

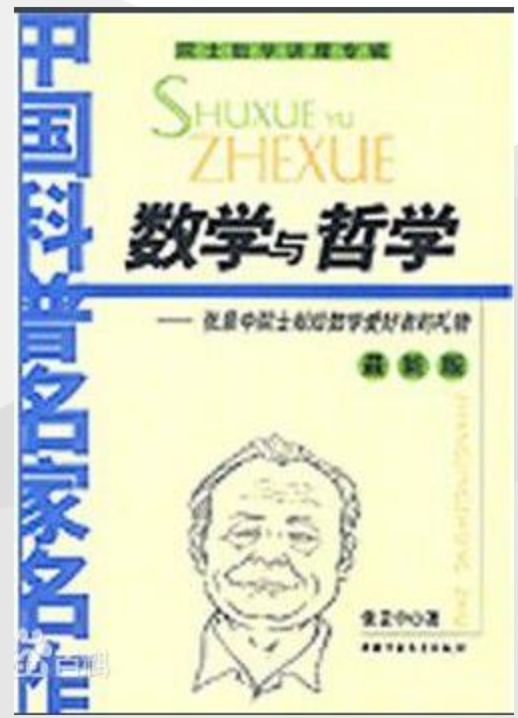



- 集合论是一个目标统一全宇宙的超级理论。

# 离散故事会


20世纪
科普经典
特藏
中译本
ONE TWO
THREE… INFINITY
从一到无穷大
科学中的事实和臆测
〔美〕G.伽莫夫 著
暴永宁 译
吴伯泽 校
科学出版社

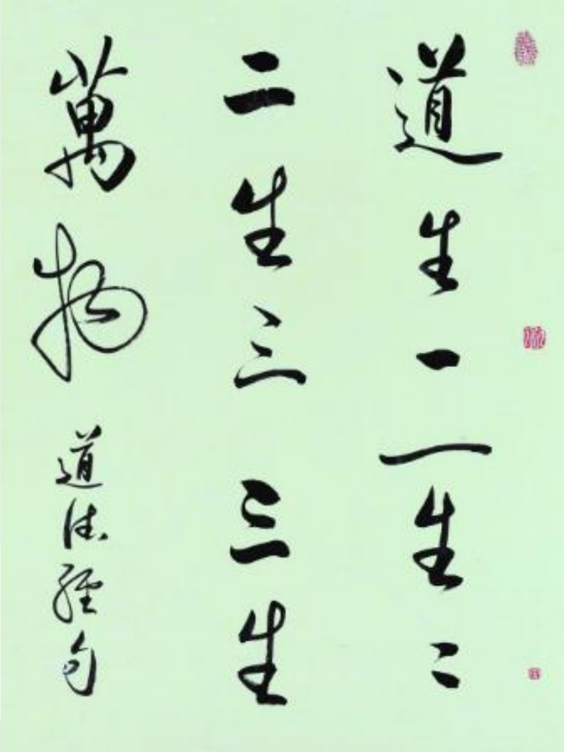

Beyond Infinity
超越无穷大
一次跨越数学边界的冒险之旅


中国科普名家名作
SHUXUE YU
ZHEXUE
数学与哲学

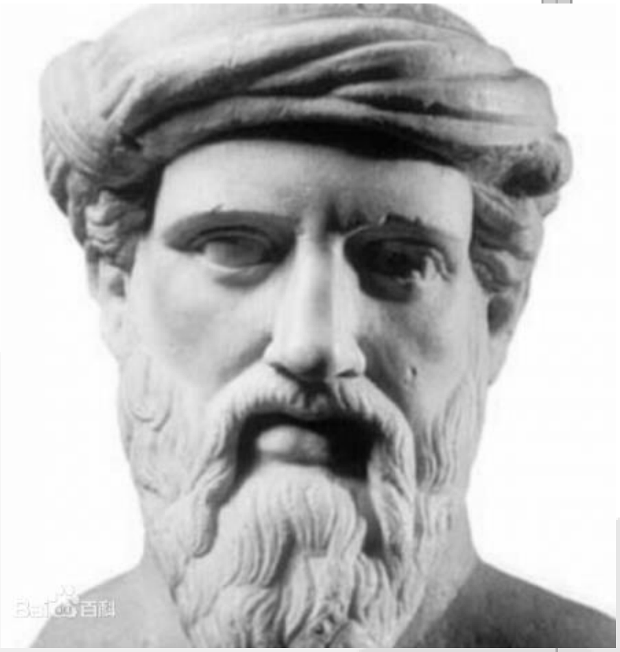
# “万物皆数”

# 万物皆数

- 一生二，二生三，三生万物。



# 万物皆数




- 毕达哥拉斯
  - 公元前580年--~公元前500年
  - 数学之父
  - 第一个注重“数”的人
  - 他们相信依靠数学可使灵魂升华，与上帝融为一体，万物都包含数，甚至万物都是数，上帝通过数来统治宇宙。

# 第一次数学危机

- 希伯斯（Hippasu，公元前5世纪）发现了一个腰为1的等腰直角三角形的斜边（即根号2）永远无法用最简整数比（不可公度比）来表示，从而发现了第一个无理数，推翻了毕达哥拉斯的著名理论。
  - 相传当时毕达哥拉斯派的人正在海上，但就因为这一发现而把希伯斯抛入大海。

# 第二次数学危机

- 起因：十七世纪末，牛顿和莱布尼兹创立的微积分理论在实践中取得了成功的应用。但是，当时的微积分理论主要是建立在无穷小分析之上的，而无穷小分析后来证明是包含逻辑矛盾的。
- 经过： 1734年，英国大主教贝克莱发表文章，对当时的微积分学说进行了猛烈的抨击。**他说牛顿先认为无穷小量不是零，然后又让它等于零**，这违背了背反律（数学要按照形式逻辑的不矛盾律来思维）
- 贝克莱悖论产生的原因在于无穷小量的辨证性与数学方法的形式特性的矛盾。

- 这是他著名的名言"存在就是被感知"的基本原理。。
- 一回，贝克莱突发奇想，想知道上吊是什么感觉，然后他就上吊了，幸好有朋友及时赶到，救了他一命。
- 贝克莱悖论：无穷小量到底是不是零？

贝克莱 （Berkeley，1685年—1753年），爱尔兰哲学家、基督教主教，开创了主观唯心主义。

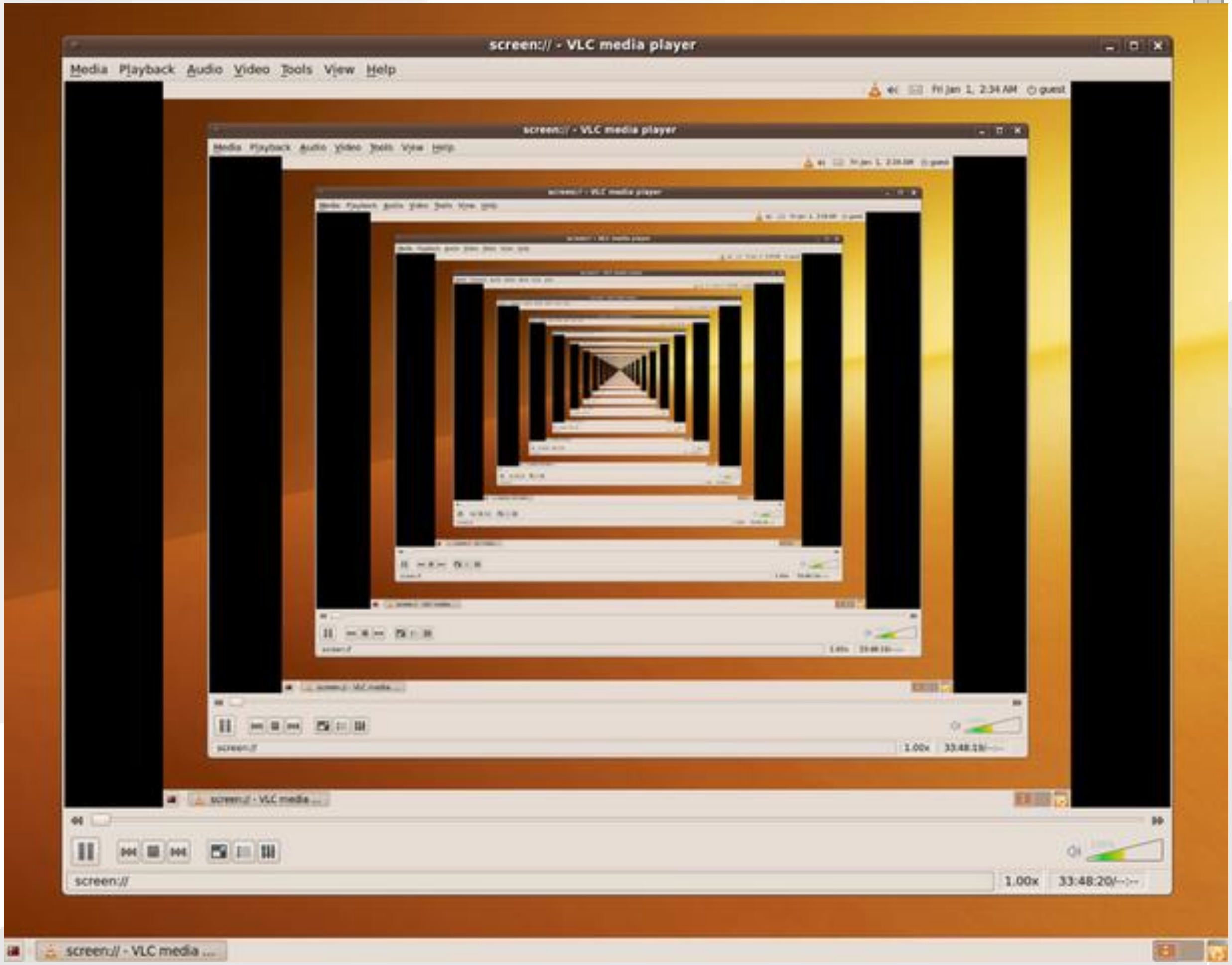
影响：第二次数学危机的产物——分析基础理论的严密化与集合论的创立。

# 欢迎来到康托乐园！

任何人都不能把我们
从康托创造的乐园里赶出去！
——希尔伯特

# 无穷

- Infinity (∞)


screen:// - VLC media player
Media Playback Audio Video Tools View Help
Fri Jan 1, 2:34 AM guest
screen:// - VLC media ...
screen://
1.00x
33:48:20/--:--

那是我在剑桥大学的第一年。
因此，如果认为c无穷小……
……我们可以使用代数方法……
这是为了实现我成为数学家的梦想所迈出的第一步。

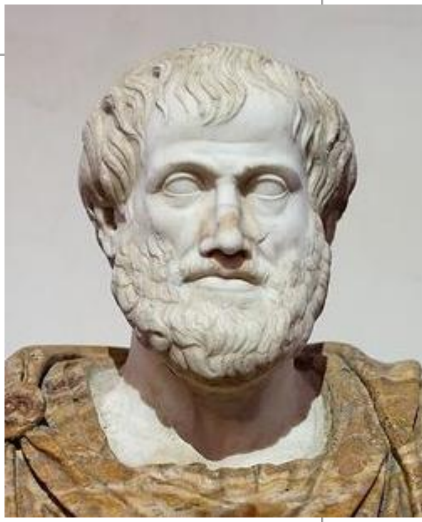

稍等，教授！
我想请教您如何来定义“无穷小”？
为什么这么问？这很显然，就是“无穷地小的东西”！
但是，在大学里与“科学女王”的初次接触却让我失望透顶。
但这是一个循环！
你不能在一个词的定义中用到它自身！
哦？你是在反对牛顿发明的微积分吗？
不！是牛顿在反对欧几里得发明的“严谨”！
数学是理性最后的依靠！我们不能用草率毁了它！
我们当然不会为了适应一位自以为是的年轻人去改变它！

# 无穷

- 无穷大，无穷小.......

**无穷可以比多少吗？**

# 拒绝无穷的数学家们



- 两千年前古希腊人已经认识到无穷。
- 潜无穷
  - 把无限看作永远在延伸着的,一种变化着成长着被不断产生出来的东西来解释.它永远处在构造中,永远完成不了,是潜在的,而**不是实在的。把无限看作为永远在延伸着的**（即不断在创造着的永远完成不了的）过程。 --------亚里士多德

- 潜无穷
  – 不是实在.把无限看作为永远在延伸着的

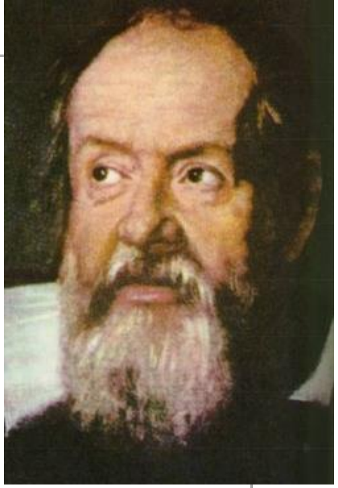
无穷可以比多少吗?

全体自然数存在吗?

# 亚里士多德(公元前384～前322)

- 至于“无穷”虽然**潜能**上由此存在，然而这类潜能的命义**并不指望其实现**，这只在意识上有此潜在而已。潜在的无穷是有的。但这无限不得实现为独立的存在。
- 自然数是数不完的，这表明自然数的产生是个无穷无尽的过程。只有这个过程结束了，才得到自然数的全体。但这个过程永不结束，因而无法得到自然数的全体。但是，自然数可以越来越多，多得超过任何具体的数目，因而是无穷的。这**无穷表现为变化发展的过程**，因而叫做“**潜无穷**”。

# 伽利略(1564-1642)



- 《两种新科学》
  - 是自然数多呢?还是完全平方数多呢?
  - 直观上看，自然数多。
  - 但从另一个角度看，有一个自然数，便有一个完全平方数：
- 最后伽利略据此得出结论说：
  - 比较无穷量是不可能的
  - 所有无穷量都一样!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | … | $n$ | … |
| 1 | 4 | 9 | 16 | … | $n^2$ | … |

一一对应

# 拒绝无穷的数学家们

- 莱布尼茨(1646—1716)
  - “所有整数的个数”这一提法自相矛盾，应该抛弃。
- 高斯(1777—1855)
  - 我反对使用无穷量……这在数学中是绝对不允许的。
  - 我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷个只不过是在实际谈论极限时的一个说法。

# 绕不过去的坎

$\sqrt{2}$

- 无理数
  - 无理数不能用有穷个有理数来表示。
  - 无理数存在
  - 柯西提出极限的概念，

$\sqrt{2}$可以看作有理数序列：1.4，1.41，1.414……的极限

- 逻辑上的循环，需要先知道$\sqrt{2}$，才能确定这个有理序列是否收敛于$\sqrt{2}$；但是在定义无理数之前，我们并不知道$\sqrt{2}$是什么？

# 数学史上的悲哀

- 数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至19世纪后叶才建立起来。在那之前，即使正负有理数与无理数的最简单的性质也没有逻辑地建立，连这些数的定义也没有。------Morris Kline

# 绕不过去的坎

- Karl Weierstrass （1815—1897）
  - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
  - $\sqrt{2}$即{1.4，1.41，1.414…….}为“完成了的整体”
  - 序列1.4，1.41，1.414…….的极限看作集合。
  - $\sqrt{2}$即{1.4，1.41，1.414…….}
- **实无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位,是已经构造完成了的东西,换言之,即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.**

# 潜无穷和实无穷

- 希尔伯特认为："在分析中，我们只是把无限大和无限小当作极限概念，当作某种正在到来、正在发生的东西来研究，即我们研究的是**潜无限**……或者当我们把一个区间的点看作同时存在的许多事物的总体时，这种无限性称为**实无限**性。"
- 美国数学家丹奇克指出："无穷的概念既不是实验的天然物，也不是逻辑的必然物；而是数学的必然物。我们对头脑的这种肯定也许是一种纯粹的幻想，然而它却是一种**必要的幻想**了。"

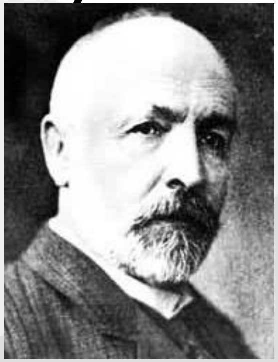
# 潜无穷和实无穷

- 潜无穷是把无限数量放入**无限时间**中：
  - 一尺之捶，日截其半，万世不竭。
- 实无穷是把无限数量放入**有限时间**中，实无穷可以被数尽。如同有一个点在数轴上从0点向1点移动，这个点一定会在有限时间内经过0与1之间所有的点，数完0与1之间的无穷多的点：
  - 一尺之捶，时进其距，穷其无穷。


但“集合”究竟是什么？这种新的潮流，康托尔方式的……
……的数学是什么样子？
古希腊时期，数学家们关注的是个体对象，比如……
……一个形状。
39
……一个数。
$f(x)$
……一个函数。
但到了19世纪中叶，一位捷克数学家开始关注一组对象，这些对象通过相同的性质聚集在一起。例如……
……“所有比7大的数”“所有直角三角形”“所有三角函数”。
从这些简单的日常概念出发……
……格奥尔格·康托尔构建出了壮丽又奇妙的集合论大厦！
那位捷克的集合论先驱叫伯纳德·波尔查诺[17]。
那些在这一事件中发现意义的人可能会感到好笑：因为这位种下数学亵渎神灵的巨大事件的种子的人……
……还是位罗马天主教的神父。
而且，毫无疑问的是，这枚种子的果实带来了纷争！
138

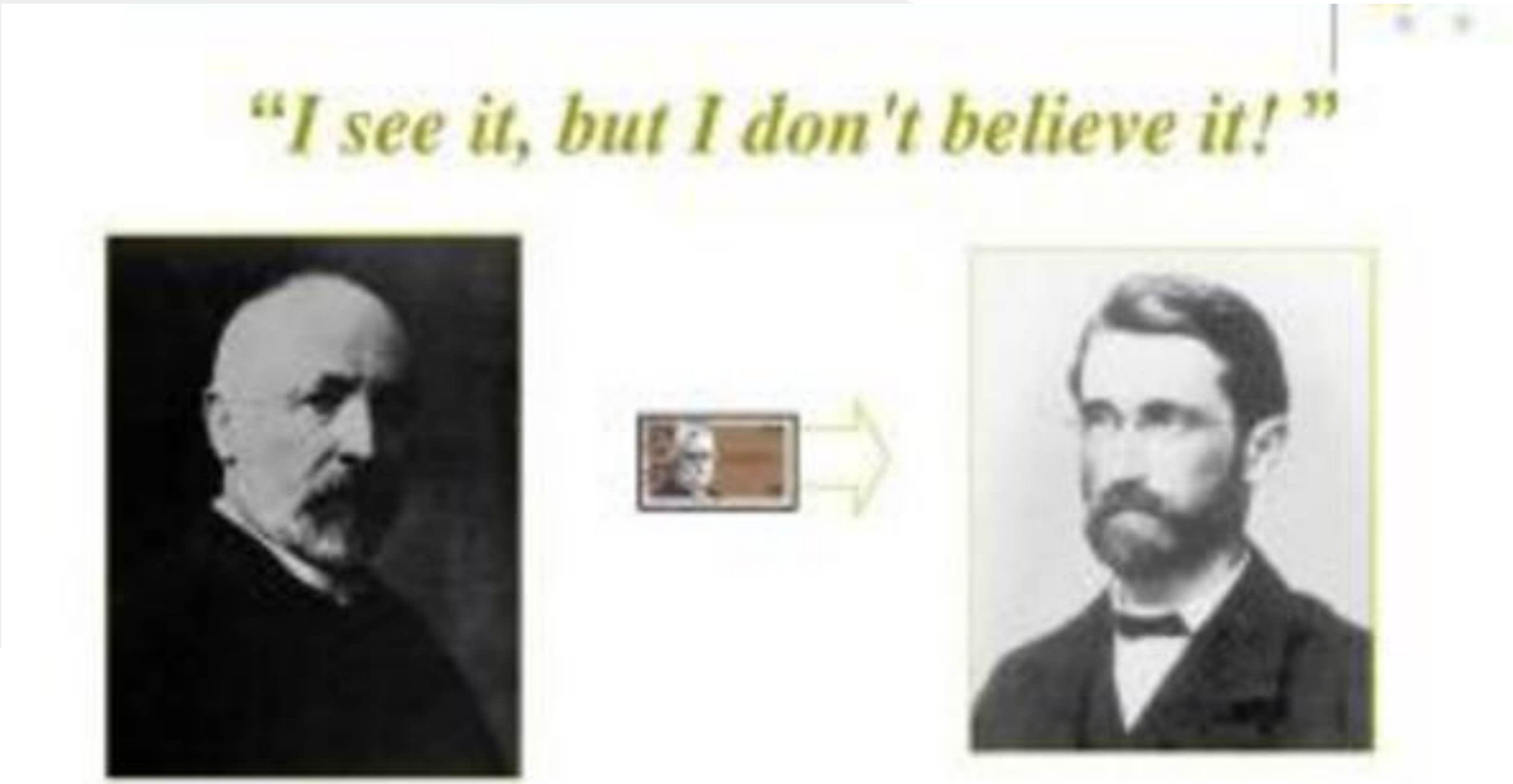
# 康托对无穷的探索

- 最早认识到无穷集合的是捷克数学家，哲学家波尔查诺Bolzano(1781-1848)
  - 集合论的先驱
  - 萌发了集合论的思想：一一对应
- 康托创立了朴素集合论
  - 格奥尔格·康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）
  - 德国数学家，集合论的创始人。



# 康托对无穷的探索

- 哈雷大学任教（1869-1913）
- 受到其数学老师Karl Weierstrass的影响，开始研究“当函数*f*(*x*)具有无穷多个间断点时，其三角级数展开是否唯一？”
  - 认识到无穷集合的重要性
- 1873年11月29日，康托在给德国数学家Dedekind的一封信中
  - **正整数集**与**实数集**之间能否建立一一对应呢？
- **1873年12月7日**再次致信给Dedekind
  - “已经证明了正整数集和实数集之间不能建立一一对应”
  - 集合论生日


"I see it, but I don't believe it!"

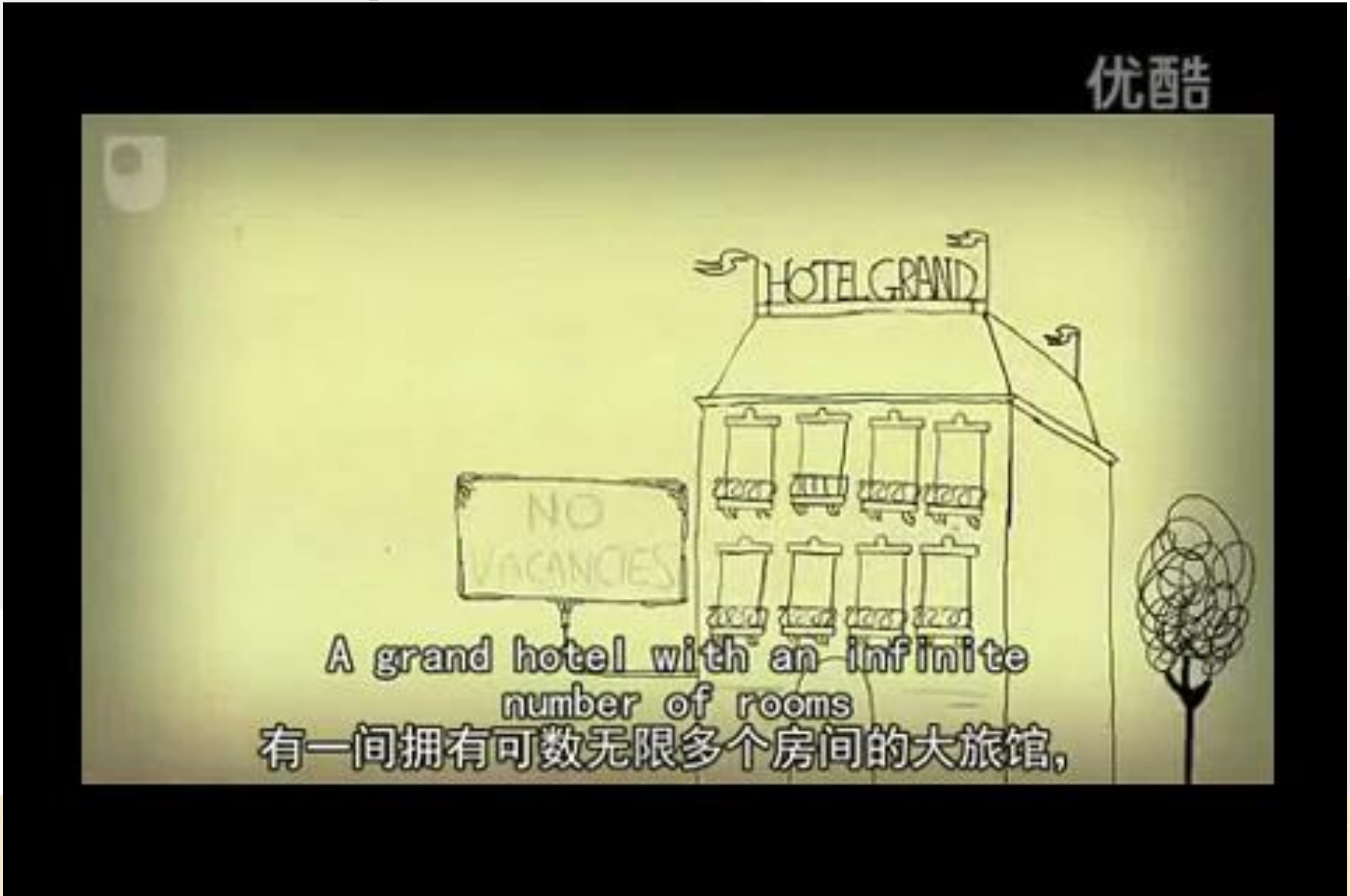
# 一个帝国

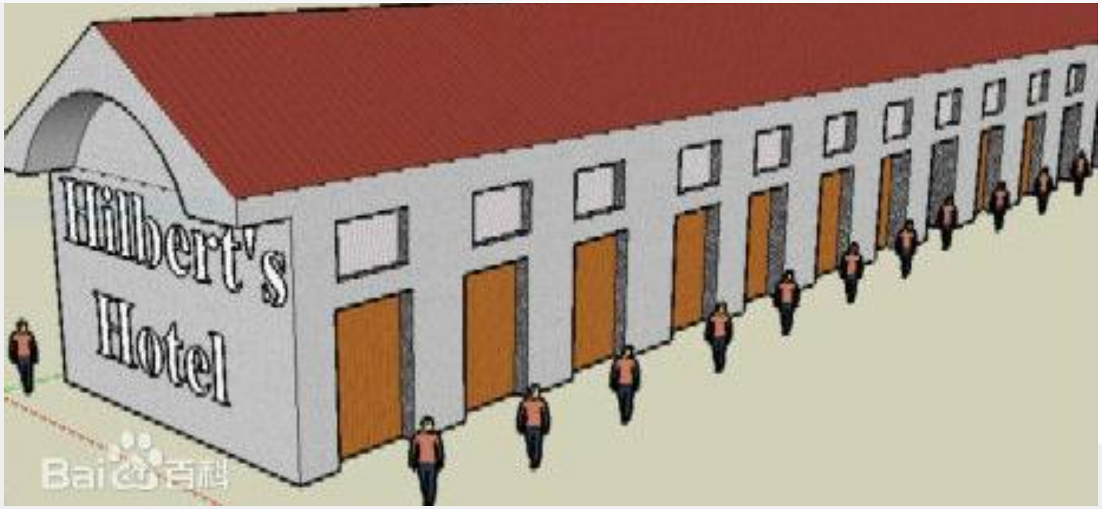
正整数集与实数集之间能否建立一一对应呢?

- 12月7日
- 致信给Dedekind说“他已经证明了正整数集和实数集之间不能建立一一对应”。
- 1874年，他提出可数集的概念。
  - On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers
- 1877年，证明了平面与直线之间的点可以建立一一对应
  - 集合拓扑研究的开端

# 无穷集合比大小

- **Hilbert's paradox of Grand Hotel**






又来了无穷多个旅行团，

每个旅行团有无穷多个旅客？

Hilbert该怎么办呢？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

# 实数集合不可数

- 同样是无穷集合，如果集合里的元素能够与全体正整数构成一一对应的关系，我们就说它是可数的，否则就说它是不可数的。
- 1874 年， Cantor 发表了一篇重要的论文，论文中证明了全体有理数甚至是全体代数数都是可数的，但全体实数却是不可数的。换句话说，同样是无穷多，实数的数量比有理数、代数数的数量都高出了一个级别。

# 康托的乐园

- 1879年-1884年
- 线性连续统
  - 《关于无穷的线性点集》
  - 《一般集合论基础》
  - 《对超穷集合论基础的贡献》
    - 以集合作为基础，符号化
    - 基数
    - 运算

# 连续统假设

- 1874，可数集基数和实数基数之间没有别的基数。
- Hilbert二十三个数学问题之首。
- 1938年哥德尔证明了连续统假设和世界公认的ZFC公理系统不矛盾。
- 1963年美国数学家科亨证明连续假设和ZFC公理系统是彼此独立的。
  - 连续统假设不能在ZFC公理系统内证明其正确性与否。

# 磨难

- 反对，粗暴攻击
  - 由于学术观点上受到的沉重打击，使康托尔曾一度患精神分裂症，虽在1887年恢复了健康，继续工作，但晚年一直病魔缠身。1918年1月6日在德国哈雷（Halle）–维滕贝格大学附属精神病院去世。
  - 柏林学派的代表人物之一、构造主义者克罗内克。克罗内克认为，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象，他反对无理数和连续函数的理论，同样严厉批评和恶毒攻击康托尔的无穷集合和超限数理论不是数学而是**神秘主义**。

# 磨难

- 病态，不认可
  - 法国数学家庞加莱（Poincare, Jules Henri, 1854.4.29—1912.7.17）
  - “我个人，而且还不只我一人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西”。他把集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈，并且预测说：“后一代将把（Cantor）集合论当作一种疾病，而人们已经从中恢复过来了”。

# 磨难

- 病态
  - 德国数学家外尔（Weyl，Claude Hugo Hermann,1885.11.9—1955.12.8）认为，康托尔关于基数的等级观点是“**雾上之雾**”。
  - 数学家H. A. 施瓦兹原来是康托尔的好友，但他由于反对集合论而同康托尔断交。
  - 集合论的悖论出现之后，他们开始认为集合论根本是一种病态，他们以不同的方式发展为经验主义、半经验主义、直觉主义、构造主义等学派，在基础大战中，构成反康托尔的阵营。

# 病痛，磨难

- 1884年，连续统假设长期得不到证明，再加上与克罗内克的尖锐对立，精神上屡遭打击……
- 5月底，他支持不住了，第一次精神崩溃。他的精神沮丧，不能很好地集中研究集合论，从此深深地卷入神学、哲学及文学的争论而不能自拔。
- 不过每当他恢复常态时，他的思想总变得超乎寻常的清晰，继续他的集合论的工作

# 拨开云雾见月明

- 1897年瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会。
- 苏黎世理工大学教授胡尔维茨（Hurwitz，Adolf，1859—1919）在他的综合报告中，明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用。
  - 这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学，而是真正对数学发展起作用的理论工具。
  - 康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞。


那是1900年。一个充满变革的时代，一个新的开始。当然没有什么能够比我们的下一个目的地更让人乐观了……
……那就是世界博览会的所在地！
……巴黎！
这里汇集了新的、充满希望的人类社会发展前景。
快来参观电影机！
哦，我想去那儿看看！
抽象简约的埃菲尔铁塔是所有这一切的极佳代表。
Frères Lumière
科学和技术是实现古老梦想的新工具……
……完全战胜自然的古老梦想。


不过，我的兴趣只集中在一个方向上……
……可以给数学带来坚固基础的新逻辑语言。
微分几何，3层，1室；
椭圆几何，底层，13室；
双曲几何，一层，5c室；
投影几何，一层，3室。
很明确的是，集合论将在其中担任核心角色。
实报
国际数学家大会
……关于其价值，大会的两位伟大的明星分歧巨大！
康托尔事件
强烈谴责康托尔先生！集合论是种病毒，远离它数学才能康复！
没人能把我们从康托尔先生建造的天堂中驱逐！
庞加莱
希尔伯特
亨利·庞加莱[15]，伟大的法国天才，人类的直觉的坚定信徒。
大卫·希尔伯特[16]，同样的伟大，严格精确的逻辑证明的德国拥趸。

# 高度赞誉

- 希尔伯特(Hilbert David, 1862.1.23-1943.2.14)高度赞誉康托尔的集合论
  - “是数学天才最优秀的作品”
  - “是人类纯粹智力活动的最高成就之一”
  - “是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。
  - 在1900年第二届国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托尔工作的重要性，并把康托尔的连续统假设列入20世纪初有待解决的23个重要数学问题之首。


但是，现在我要来说说我们在 1900 年所处的新的智识氛围中的一个思想……
我在黑板上画一个点“A”，再画一条不通过此点的直线……
A.
……比如，这一条。
现在，我来问一个问题……
……这位先生！
通过点“A”能画出几条平行于这条线的直线？
一条，显然啊！
确实如此！
欧几里得应该使用了完全一样的词，正如两千多年以来所有的数学家一样！
A.
但是现在，突然，这个词——“显然”——变得非常可疑！


新的、非欧几何的出现，推翻了公理就是“显然真理”的概念。事实上，“显然”这个概念被取代了！
谁不想揭开面纱来看看将要显露出新的事实和方法的未来呢？
备受期待的希尔伯特的演讲“数学问题”充分表达了这一精神。
他演讲的目的是通过 23 个主要的待解决问题给出未来的俯瞰图。
直觉在我们的证明中将不再有落脚之地！
新数学将不再承认任何“直觉上显然”的东西！真理都必须通过严格证明的考验！
然而，他的演讲却更像是对新思想的一种辩护，它取消了现存成见的统治地位。
至于一个理论的公理……
……它们是逻辑进程的起点。但我们必须摒弃任何……
……关于“自然”真的意义的探寻。关于公理，我们能问的只是它们是否逻辑自洽！

# 现代数学的基石

- 人类认识史上第一次给无穷建立起抽象的形式符号系统和确定的运算，它从本质上揭示了无穷的特性，使无穷的概念发生了一次革命性的变化。
- 从根本上改造了数学的结构，促进了数学的其他许多新的分支的建立和发展，成为实变函数论、代数拓扑、群论和泛函分析等理论的基础，还给逻辑和哲学带来了深远的影响。

[shù xué]

数学（学科） 编辑

数学（mathematics或maths），是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种。

借用《数学简史》的话，数学就是研究集合上各种结构（关系）的科学，可见，数学是一门抽象的学科，而严谨的过程是数学抽象的关键。

# 集合论的主要内容

- 在朴素集合论中，集合被当做一堆物件构成的整体之类的自证概念
- 在公理化集合论中，集合和集合成员并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理。
- 由集合构造出的离散结构包括
  - 组合：无序对象汇集，广泛用于计数
  - 关系：序偶的集合用于表示对象之间的关系
  - 图：节点和连接节点的边的集合
  - 有限状态机：为计算机机器建模

# 集合论的应用

- 构造性数学的重要基础
  - 数理逻辑，抽象代数、图论等
- 计算的数学理论的重要基础
  - 计算理论、模型论、形式语言与自动机理论、形式语义学
- 软件理论与技术的重要基础
  - 数据结构、编译原理和数据库原理中得到了重要的应用

# 第九章 集合


- 9.1 集合的概念与表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 9.4 集合的图形表示法
- 9.5 集合运算的性质和证明
- 9.6 有限集合的基数
- 9.7 集合论公理系统


**欢迎来到康托乐园！**

# 9.1 集合的概念与表示方法

# 集合论

点、线、面

- 原始概念
  - 不加严格定义而直接使用
  - **集合，元素**
  - **属于，不属于**
  - 康托的说法
    - 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个集合(set)，组成集合的事物成为集合的元素(element)，若某一事物是一个集合的元素，则称这个事物属于这个集合，否则就称这个事物不属于这个集合。

# 9-1-1 集合(Set)的概念

- **集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体。组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素。**

——— 教材 P129

- 吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

——— **肖文灿**《集合论初步》(1939年)

**在中国出版的第一本集合论书籍**

# 集合的表示法

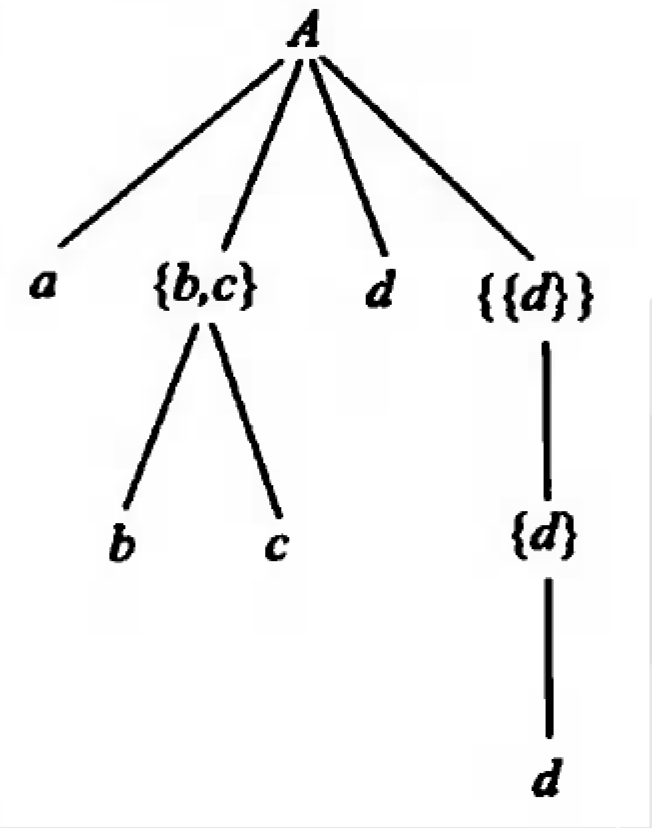
- 集合的元素可以是任何事物
- 各个元素可以区分，**不重复(互异性)**
- 各个元素之间**无次序(无序性)**
- 任何事物是否属于一个集合，结论是确定的。

B={9,8,8,7}　　B={9,8,7}　　B={7,8,9}

B={7,{8,{9}}}

# 集合举例

- A = {a,{b,c},d, {{d}} }



- N:全体自然数集合
  - 0是不是自然数?
- $N^+$:除0以外的其他自然数的全体构成的集合
- Z:全体整数集合
- $Z^+$:全体正整数集合
- Q:全体有理数集合
- R:全体实数集合
- 若元素a属于集合A，记为$a \in A$, 否则记为$a \notin A$

- 集合的描述性定义是康托根据概括原则(Principle of Comprehension)而定义的。
- 发现不加限制使用概括原则会导致悖论。
  - 所有的集合可以构成一个集合M的话，
  - 所有M的子集构成的集合，哪个大？
  - 1899年康托悖论
  - 规定：一个集合自身不能作为它的元素。
  - 对任何集合$A$都有$A \notin A$

# 9-1-3 集合的表示法

- 外延表示法
  - 穷举法(Method of Enumeration)或列举法
- 内涵表示法
  - 描述法，概括法，谓词表示法，即用谓词来概括集合中元素的性质。一般而言，如果$P(x)$表示一个谓词，则可以用$\{ x \mid P(x)\}$或$\{x : P(x)\}$表示一个集合。
  - $\{ x \mid P(x)\}$ 是使得$P(x)$为真的所有元素 $x$ 组成的集合。即，若$P(a)$为真，则$a$属于该集合。
  - 归纳定义法(Inductive Definition)
    - $G=\{x|x=1 \vee (\exists y)(y \in G \wedge x = \{y\})\}$

# 内涵表示法中谓词描述的准确性

- 例（Berry悖论，1906）
- The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables"is itself a name consisting of eighteen syllables; hence the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables can be named in eighteen syllables, which is a contradiction.
- $N'$={ $x$ |能用少于二十四个汉字表示的自然数}
- 设 $n_0$ 是

  "用少于二十四个汉字不能表示的自然数中最小的一个" (23个字)

从形式上看，$n_0$ 仅用23个汉字即可表示，可见 $n_0$ 符合 $N'$ 的条件；

但在语义上，$n_0$ 又不符合 $N'$ 的条件；

- 结论

  用自然语言表达的条件其明确性

  需加以特别注意

- 有些貌似明确的条件其实并不明确。

# 悖论

- 悖论(paradox)来自希腊语“para+dokein”，意思是“多想一想”。
- 这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。

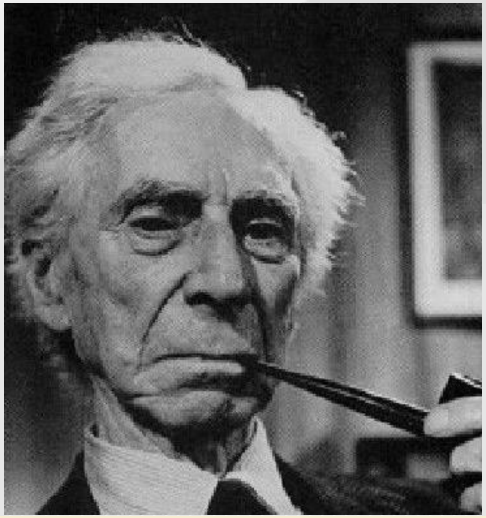

- 《唐·吉诃德》(17世纪)
- 唐·吉诃德的仆人桑乔·潘萨跑到一个小岛上，成了这个岛的国王。
  - 每一个到达这个岛的人都必须回答一个问题：“你到这里来做什么？”如果回答对了，就允许他在岛上游玩，而如果答错了，就要把他绞死。
  - 一天，有一个胆大包天的人来了，这个人的回答是：“我到这里来是要被绞死的。”

# 科学大厦

- 20世纪之初，数学界甚至整个科学界笼罩在一片喜悦祥和的气氛之中，数学基础理论的无矛盾性，归结为集合论的无矛盾性，集合论已成为整个现代数学的逻辑基础。
- “一切数学成果可建立在集合论基础上”这一发现使数学家们为之陶醉。

# 但是。。

- 事隔不到两年，英国著名数理逻辑学家和哲学家罗素（1872—1970）即宣布了一条惊人的消息：集合论是自相矛盾的，并不存在什么绝对的严密性！史称“罗素悖论”。
- 第三次数学危机……



# 理发师悖论

- “本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”
- 可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？

# $x$ 是一个集合 $\wedge$ $x \notin x$


$$H = \{\, x \mid x\ \text{是一个集合} \wedge x \notin x \,\}$$

# Russell 悖论（1903） 教材P131 例5

- 分析如下集合：
  $H = \{ x \mid x$ 是一个集合 $\wedge\ x \notin x \}$
- 任一集合 $x$, 若 $x \notin x$，则这个 $x$ 就是集合H的元素。
  $\because x$ 是集合，任一事物都可明确是否属于它，于是 $x \notin x$ 是有意义的。
- 问题：H是集合吗？

这一悖论的发表让我在一夜之间成了国际数学界的明星。
事实上，也不是虚空的：而是它产出了矛盾！
一些人开心地表示欢迎……
哈哈！这个罗素一石二鸟，逻辑和集合论都被摧毁了！
原则
……像庞加莱，他在这个悖论中看到了对建立数学的纯粹的逻辑学基础的尝试的强有力的反驳。
他为自己反复强调的信条——逻辑是虚空的——找到了完美的辩护……
令人非常惊讶的是，康托尔的反应居然也相当地正面。
“……因此，如果我们接受性质‘s属于s’”，并把它的否定定义称不包含……
“……的集合的集合……”
原则
愿荣耀归于上帝！


但是“支持集合”的阵营中则充满困惑和惊恐。逻辑学家们震惊了。
不可能！
不可能！
都灵的朱塞佩·皮亚诺……
?
不可能！
哥廷根的大卫·希尔伯特……
一定能找到什么办法，教授先生……
原则
对，对，一定会！
可恶，狂妄的英国小子！
当然还有……

# 结论与证明

- H = { $x$ | $P(x)$= $x$ 是一个集合 ∧ $x \notin x$ }

H属于H是否成立？

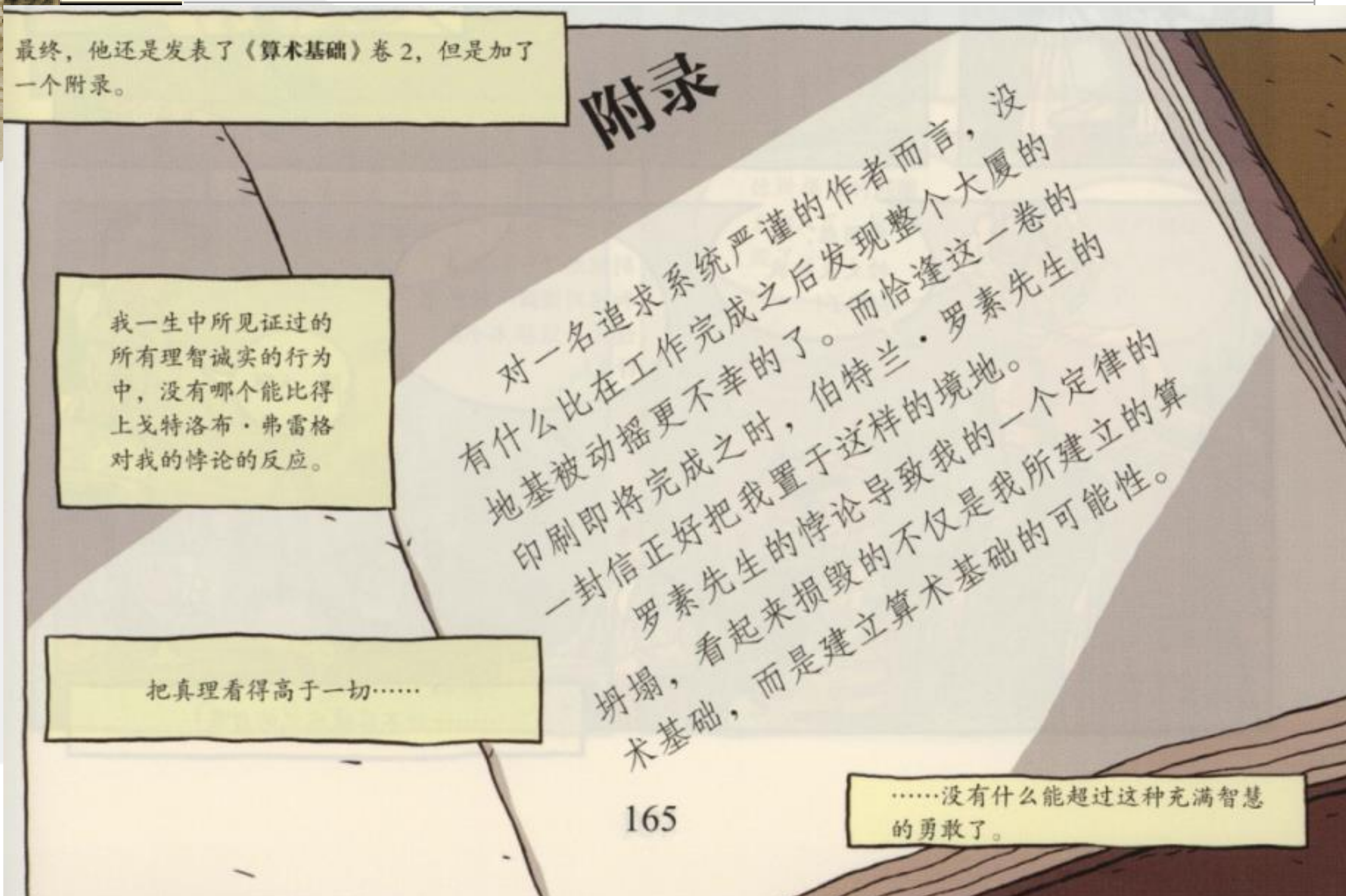
首先，若H属于H，则H是H的元素，那么H具有集合性质P，由性质P知H不属于H；

其次，若H不属于 H，也就是说H具有性质P，而H是由所有具有性质P的类组成的，所以H属于H。

矛盾


……耶拿的戈特洛布・弗雷格。
他在一个特殊的日子看到了我的悖论，这一天他的《算数基础》卷2……
……已经准备印刷出版。
他瞬间就意识到了我的发现的重要性。
弗雷格也是以波尔查诺关于集合的朴素思想为基础构建起整个大厦的。
而现在，他发现这地基是腐烂的——大厦轰然倒塌了。
把集合引入逻辑，意味着给身体注射了一剂引起腐烂的致命毒药。因此，“算术的基础”……并没有建立起来。
晚饭前回来，戈特洛布！


什……什么……销毁印版？
立刻！
你不明白吗？它错了！
这是个耻辱！是个荒唐的骗局！
阿尔特施塔特印刷厂
教授先生，我们为这本书一直辛苦忙碌了这么多年！即使你不怜惜自己的工作，也请至少为我们考虑考虑！
阿尔特施塔特印刷厂
先生，我恳求你，不能这样做！


最终，他还是发表了《算术基础》卷 2，但是加了一个附录。
附录
对一名追求系统严谨的作者而言，没有什么比在工作完成之后发现整个大厦的地基被动摇更不幸的了。而恰逢这一卷的印刷即将完成之时，伯特兰·罗素先生的一封信正好把我置于这样的境地。罗素先生的悖论导致我的一个定律的坍塌，看起来损毁的不仅是我所建立的算术基础，而是建立算术基础的可能性。
165
我一生中所见证过的所有理智诚实的行为中，没有哪个能比得上戈特洛布·弗雷格对我的悖论的反应。
把真理看得高于一切……
……没有什么能超过这种充满智慧的勇敢了。

# 危机？

- 当康托尔的朴素集合论出现一系列悖论时，克罗内克的后继者布劳威尔（1881.2.27－1966.12.2）等人借此大做文章，希尔伯特用坚定的语言向他的同代人宣布：

**谁都不能把我们从康托为我们创造的乐园中赶出去!**

## 问题在于：

**错误地假设H是集合，**

**实际上H不是集合。**

**重要结论：**

**集合论不能研究**

**“由所有集合组成的集合”。**

# 罗素悖论的解决

- 既然$\{\, x \mid x$ 是一个集合 $\wedge\, x \notin x \,\}$不是集合，那么其它的 $\{\, x \mid P(x) \,\}$ 都是集合吗？
- 集合论的公理系统回答了上述问题。
- 包括一些基本集合的存在性，以及如何由已知集合构造新的集合。将在9.7节集合论公理系统中介绍。

# 9.2 集合间的关系和特殊集合

类比：数字

=, <, ≤, >, ≥

把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个**集合(set)**，组成集合的事物成为集合的**元素(element)**，若某一事物是一个集合的元素，则称这个事物**属于**这个集合，否则就称这个事物**不属于**这个集合。

# 定义9. 2. 1　集合的相等

- 两个集合$A, B$相等，当且仅当它们**具有相同**的元素。则记作 $A = B$；否则记作 $A \neq B$。
- 该定义的符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

# 定义9.2.2　子集(subset)

- 设 $A, B$为集合，若$A$中的每个元素都是$B$的元素，则称 $A$为$B$的子集合，简称子集。
- 这时称 $B$包含$A$，记作$A\subseteq B$。该定义的符号化表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

**空子集?**

# 定义9.2.5 空集（empty set）

- 不含任何元素的集合称为**空集**，记作Ø。
- 念oe，为拉丁字母
- 区别于希腊字母Φ(念fi))或者{ }表示
- 空集可符号化为 $\varnothing = \quad x \mid x \neq x$

$$(\forall x)(x \notin \varnothing)$$

- 为何要引入？表述问题方便、准确

# 定理9.2.3 空集是一切集合的子集

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- **空集是一切集合的子集。**
- 即，对任意的集合$A$， $\varnothing \subseteq A$。
- 证明：反证法，假设存在集合$A$，使 $\varnothing \not\subseteq A$，则存在 $x$，使 $x \in \varnothing$ ，且 $x \notin A$。

这与空集∅的定义矛盾，所以定理得证。

$(\forall x)(x \notin \varnothing)$ 为永真式，恒成立。

# 定理9.2.1

- **两个集合相等的充要条件是它们互为子集。**
- 符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

# 定理9.2.2

- 对任意的集合$A, B$ 和$C$，包含关系 $\subseteq$ 分别具有下列性质：

(1) $A \subseteq A$ （自反性）

(2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ （反对称性）

(3) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ （传递性）

- 思考：将上面的‘$\subseteq$’换为属于‘$\in$’是否仍满足传递性

# 练习题

**设A={a,{a},{a,b},{{a,b},c}}判断下面命题的真值。**

(1) $\{a\}\in A$

(2) $\neg(\{a\}\subseteq A)$

(3) $c\in A$

(4) $\{a\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\}\subseteq A$

(6) $\{a,b\}\in\{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$

(8) $\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(10) $(\{c\}\subseteq A)\rightarrow(a\in\varnothing)$

# 定义9. 2. 3 真子集(proper subset)

- 对任意两个集合$A$和$B$，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称$A$是$B$的真子集，或称$B$真包含$A$。记作$A\subset B$。该定义的符号化表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

# 定义9.2.4　两集合不相交

- 若两个集合$A$和$B$没有公共元素，就称$A$和$B$是不相交的。该定义也可写成

$$A\text{和}B\text{不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

# 定义9. 2. 6　全集(universal set)

- 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记作$E$。该定义亦可叙述为，在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集。全集的定义可符号化表示为

$$E = \quad x \mid x = x$$

- 全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集。即使同一个问题也可以取不同的全集。

# 9.3 集合的运算

# 定义9.3.1 （五种基本运算）

- 集合的基本运算包括并，交，差（相对补），余集和对称差。分别定义如下:
- 对集合$A$和$B$

(1) 并集(**union**) $A\cup B$定义为

$$A\cup B= \quad x \mid x\in A\vee x\in B$$

(2) 交集(**intersection**) $A\cap B$定义为

$$A\cap B= \quad x \mid x\in A\wedge x\in B$$

# 定义9.3.1 （五种基本运算）

- (3) **差集 (difference) $A-B$ 定义为**

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

又称$B$对$A$的相对补集。

- **差运算与并运算之间不是逆运算。**

一般而言，（$A-B$）$\cup B\neq A$

（$A\cup B$）$-B\neq A$

# 定义9.3.1 （五种基本运算）

- (4) **$A$的余集(complement) $-A$** 定义为

$$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$$

其中$E$为全集。$A$的余集又称$A$的绝对补集，也是$A$对$E$的相对补集

- (5) **对称差(symmetric difference)** $A \oplus B$定义为 *

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$ 只在A或B出现的元素

# 定义9.3.2 广义并和广义交

- 设$A$为集合，$A$的元素也都是集合，则将$A$的所有元素的元素组成的集合称为$A$的广义并，记作$\cup A$；符号化表示为

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z\ )$$

$$\bigcup A = \quad x \mid x \in 某个z \in A$$ （简化写法）

- 此外，对空集∅可以进行广义并，$\cup\varnothing = \varnothing$。
- 并集的推广，去掉内层括号，重复元仅计一次

# 定义9.3.2 广义并和广义交

- 设$A$为非空集合，$A$的元素也都是集合，将$A$的所有**元素的公共元素**组成的集合称为$A$的广义交，记作$\cap A$。符号化表示为

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$$\bigcap A = \{x \mid x \in 每个z \in A\}$$ （简化写法）

- $\cap \varnothing$不是集合，没有意义。空集 $\varnothing$不含任何元素，$\cap \varnothing$无意义，否则将导致逻辑上的矛盾。

# 广义并和广义交举例

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z\ )$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$$A = \{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$$

$$\bigcup A = \{a,b,c,d\}$$

$$\bigcap A = \{\,b\,\}$$

# 定义9.3.3 幂集(power set)

- 设$A$为集合，由$A$的所有子集组成的集合称为$A$的幂集，记作$P(A)$。符号化表示为

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

对任意的集合$A$，有$\varnothing \subseteq A$和$A \subseteq A$，因此有 $\varnothing \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$ 。

$$\boldsymbol{x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A}$$

- $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$
- $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $P(\{a,b\})= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

# A的幂集有多少个元素？

- $A = \{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$

$\cup A = \{a,b,c,d\}$

P $(\{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\})$ = { $\emptyset$,
$\{\{a,b,c\}\},\{\{a,b,d\}\},\{\{b,c,d\}\}$, $\{\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$,
$\{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\},\{\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$,
$\{\{a,b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$ }

# 子集的个数

- 定理：设A为一个有限集，且|A|=n，则A的子集个数为$2^n$
  - 证明：集合A的子集最多有n个元素，最少有0个元素。

  0个元素的子集共有C(n,0)个；

  1个元素的子集共有C(n,1)个；

  ……

  n个元素的子集共有C(n,n)个.

  因此，集合A共有子集C(n,0)+ C(n,1)+… C(n,n)= $2^n$个。

# 9-3-4 有序对

- 由两个元素$x$和$y$（允许$x$=$y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中

  $x$ 是它的第一元素，$y$ 是它的第二元素。
- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

  1. 当$x \neq y$ 时，$<x, y> \neq <y, x>$。

  2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是

     $x = u$ 且 $y = v$。

# 定义9.3.4

- 用集合的形式，有序对<*x*, *y*>定义为

$$\langle x, y \rangle = \quad x \quad , \quad x, y$$

# 定义9.3.5 n元组

- 若$n \in N$且$n > 1$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是$n$个元素，则$n$元组$<x_1, x_2, \ldots, x_n>$定义为

  当$n = 2$时，二元组是有序对$<x_1, x_2>$。
  当$n \neq 2$时，

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = <<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

# 定义9.3.6　集合$A$和$B$的笛卡儿积（Descartes product）

- 设$A$, $B$为集合，用$A$中元素为第一元素，$B$中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为$A$和$B$的笛卡儿积，记作$A\times B$。

  $A$和$B$的笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B = \langle x,\ y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B$$

# 9-3-7　n阶笛卡儿积

- 若 $n \in N$ 且 $n>1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是$n$个集合，它们的$n$阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

$$= \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n$$

# 9-3-7　n阶笛卡儿积

- $A=\{a,b\}$ $B=\{0,1,2\}$
- $A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$
- $B\times A=\{<0,a>,<1,a>,<2,a>,<0,b>,<1,b>,<2,b>\}$
- $A\times A=A^2=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$

# 9-3-8 集合运算的优先顺序

- 称广义并，广义交，幂集，绝对补运算 $(\cup A, \cap A, P(A), -A)$为一元运算；
- 并，交，对称差，笛卡儿积，相对补运算 $(\cup, \cap, \oplus, \times, -)$为二元运算。

# 9-3-8 集合运算的优先顺序(续)

- 一元运算优先于二元运算；
- 二元运算优先于集合关系运算(=, $\subseteq$, $\subset$, $\in$)；
- 集合运算优先于逻辑运算($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$)。
- 括号内优先于括号外的；同一层括号内，相同优先级的，按从左到右的顺序进行。

# 9.4 集合的图形表示法

# 9-4-1 文氏图(Venn Diagram)

- 英国逻辑学家J.Venn(1834-1923)于1881年在《符号逻辑》一书中，首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。
- 后来人们以他的名字来命名这种用图形来表示集合间的关系和集合的基本运算的方法。简称文氏图。

# 9-4-1 文氏图(Venn Diagram)

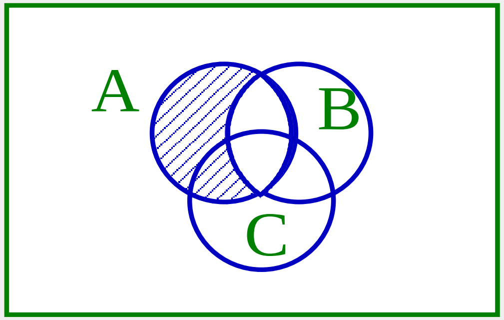
- 其构造如下：用一个大的矩形表示全集的所有元素（有时为简单起见，可将全集省略）。

  在矩形内画一些圆（或任何其它形状的闭曲线），用圆的内部的点表示相应集合的元素。不同的圆代表不同的集合。用阴影或斜线的区域表示新组成的集合。

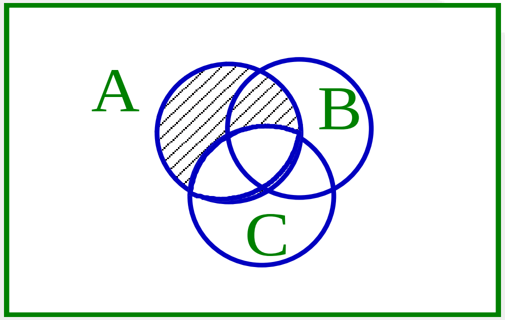
  文氏图的优点是形象直观，易于理解。

  缺点是理论基础不够严谨。因此只能用于说明，不能用于证明。

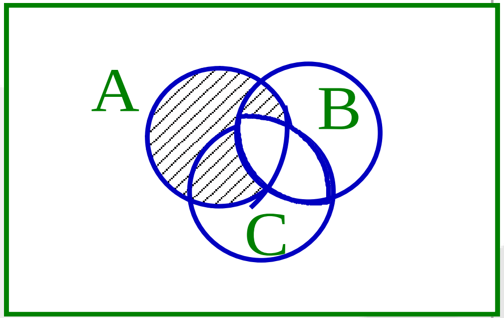
# 举例：$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$



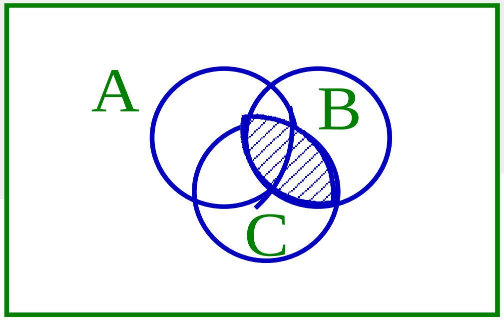

A - B

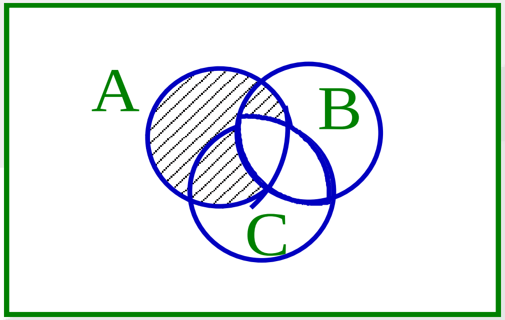



A - C




(A - B)∪ (A - C)




A - ( B∩ C)

# 思考题

- **仅用空集∅构造：**
- 1. 一个相异集合的无穷序列，序列中每个集合至多仅包含一个元素；
- 2. 一个相异集合的无穷序列，序列中第$i$个集合恰包含$i$个元素（$i = 0,1,\ldots$）。

# 解答

- Ø, {Ø}, {{Ø}}, {{ {Ø} }},...

- {Ø}, {Ø, {Ø} }, {Ø, {Ø} {Ø, {Ø} } },
  {Ø, {Ø} , {Ø, {Ø} } , { Ø, {Ø} , {Ø, {Ø} } } }

# 谢谢

myc@mail.tsinghua.edu.cn