图论与代数结构

平面图与对偶图

崔 勇

清华大学计算机系

网络技术研究所

第四章 平面图与图的着色

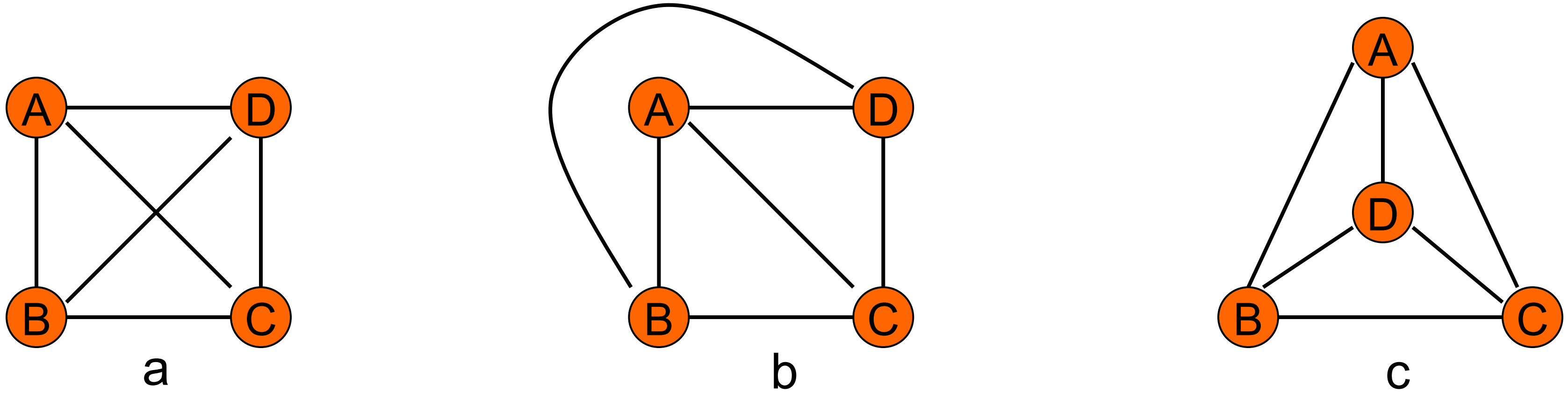
- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

重点：

1. 平面图的概念和性质
2. 欧拉公式及其变形和应用
3. 极大平面图与非平面图的性质和证明
4. 对偶图概念和特点
5. 五色定理和四色猜想

平面图

- 定义4.1.1
  - 若能把图G画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称G**可嵌入平面**，或称G是**可平面图**
  - 可平面图在平面上的一个嵌入，是**平面图**

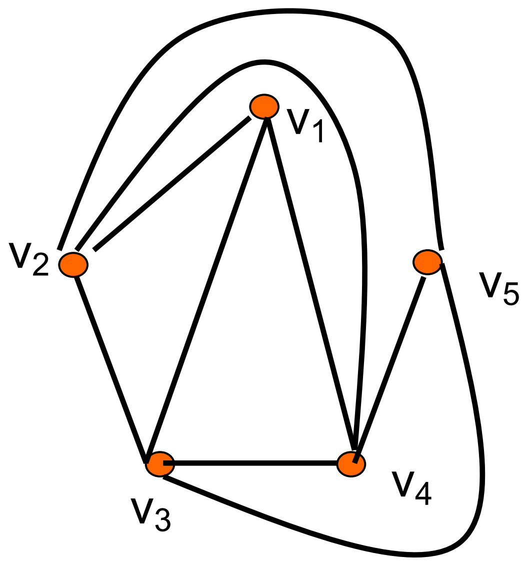


- 例：b和c都是a的一个平面嵌入，因此a是一个可平面图，b和c都是平面图

平面图

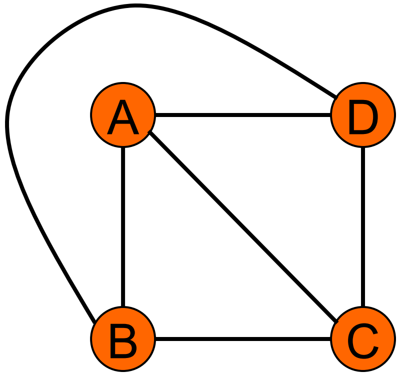
- 若G是可平面图，那么它导出子图是可平面图
  - 可平面图的任何导出子图也是可平面图。

点—》线—》？



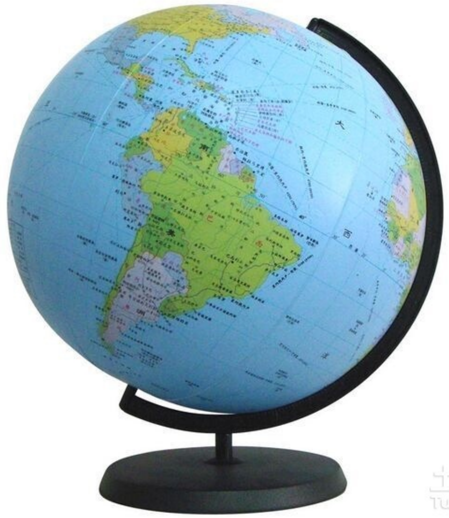
平面图

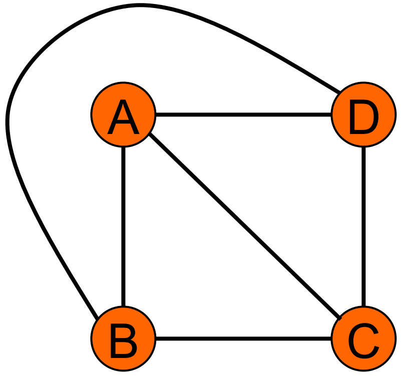
- 定义4.1.2
  - 设G是一个平面图，由它的若干边所构成的一个区域，若区域内不含任何结点及边，就称该区域为G的一个面或域
  - 包围这个域的诸边称为该域的边界
- 如果两个域有共同的边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的
- 将平面图G外边无限区域称为无限域，其他区域叫内部域
- 如果e不是割边，则它必为某两个域的公共边界



平面图

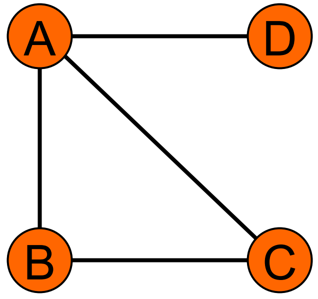
- 地球仪上的世界地图是可平面图吗？
- 测地变换
  - 设N是球面北极，平面P在球面下方，则平面任一点u与N的连线必过球面上的唯一点u'
  - 球面上的点和平面上的点一一对应
- 平面上的域对应球面上的域，平面无限域对应球面北极内部域
- 测地变换将平面图G的任何一个内部域可改换为无限域
- 一个图可平面等价于可球面

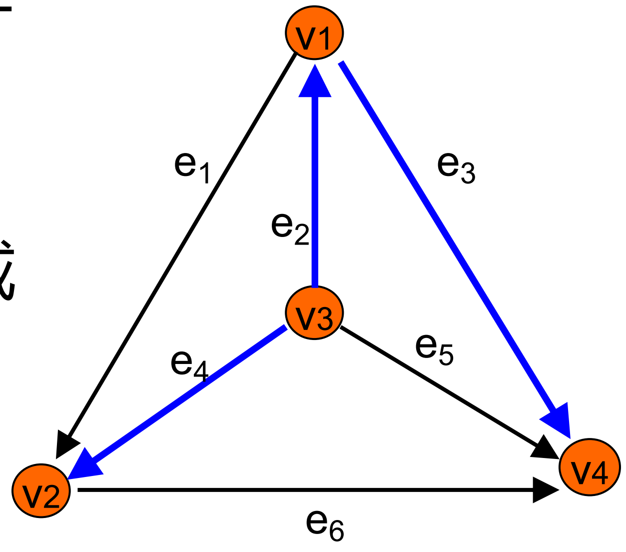




平面图

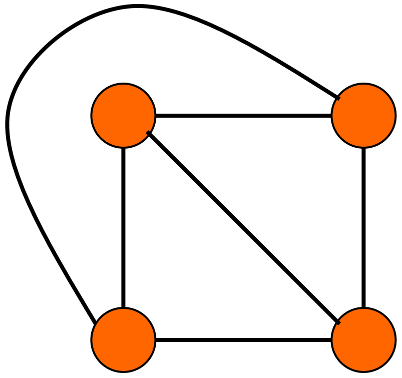
- 定理4.1.1(欧拉公式：域的数目d)
  - 设G是平面连通图，则G的域的数目是d=m-n+2，(即n-m+d=2)
  - 证明(构造法):
    - G是连通图，有支撑树T，它包含n-1条边，不产生回路，因此对T来说只有一个无限域
    - 由于G是平面图，可加入一条余树边，它一定不与其他边相交，即一定是跨在某个域的内部，把该域分成两部分
    - 共有m-n+1条余树边，构成m-n+2个域



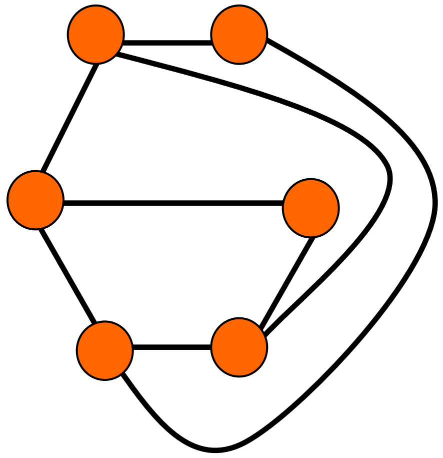


平面图

- 例
  - 考察下列平面图的域数量



d=m-n+2=6-4+2=4



d=m-n+2=8-6+2=4

平面图

- 欧拉公式：对平面连通图G有n-m+d=2
- 推论4.1.1
  - 若平面图有k个连通分支，则n-m+d=k+1
    - 考虑如何将k个连通分支连通
    - 设G'(m')为将k个连通支连通后的新图
    - m'=m+(k-1), n-m'+d=2
- 推论4.1.2
  - 对一般平面图G，恒有 n-m+d≥2

平面图

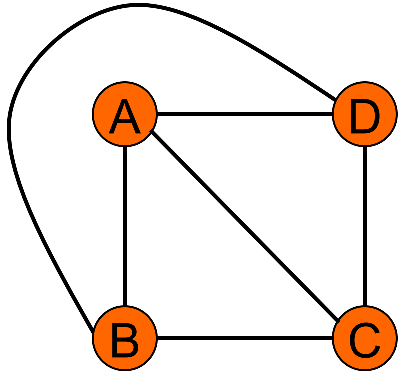
- 定理4.1.3
  - 设平面图没有割边，且每个域的边界数至少为t，则 $m \le t(n-2)/(t-2)$
  - 证明
    - 因为没有割边，所以每条边都与两个不同的域相邻
    - 将域边界数对域求和等于2m
    - 设G有d个域，每个域的边界数至少是t，有 $td \le 2m$
    - 代入欧拉公式

$$(2m/t) \ge d = m-n+2$$

- 亦即

$$2m \ge tm-t(n-2)$$

$$m \le t(n-2)/(t-2)$$



第四章 平面图与图的着色

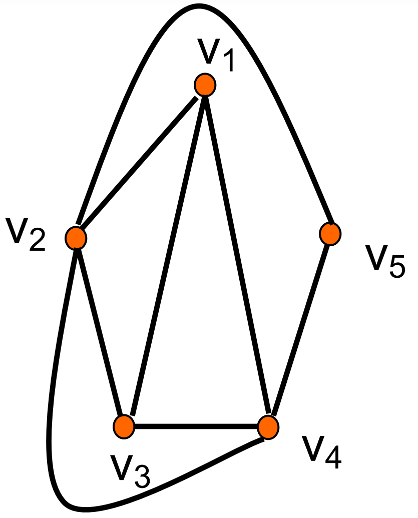
- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

极大平面图

- 本节只限于讨论简单平面图
- 定义4.2.1：极大平面图
  - 设G是$n \geq 3$的简单平面图
  - 若在任意两个不相邻的结点V_i, V_j之间加入边(V_i, V_j)，就会破坏图的平面性, 则称G是极大平面图

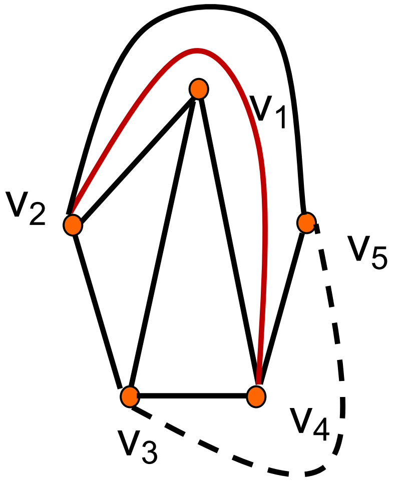
极大平面图

- 示例
  - 图中加入(v_3,v_5)是否一定与某些边相交?
  - 能否改画一下边(v_2,v_4)后，就可以加入(v_3,v_5)并不破坏其平面性？
  - 因此(a)不是极大平面图



(a)

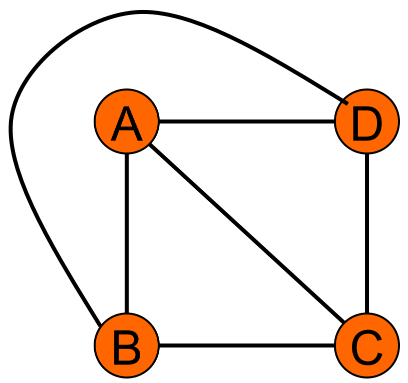
- 非极大平面图
  - 对画好的G，加入某边e总会与其他边相交，但换种画法G+e仍然是可平面的，则G并非是极大平面图



(b)

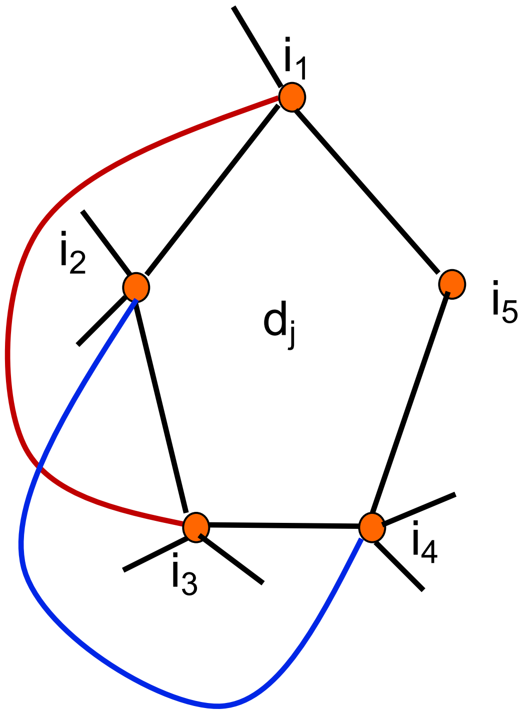
极大平面图

- 极大平面图G的性质：
  1. G是连通的
  2. G不存在割边
  3. G的每个域的边界数？ 都是3！
  4. 3d=2m



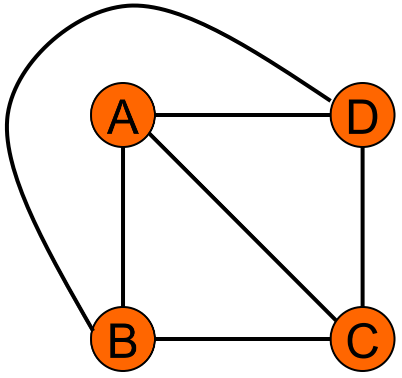
极大平面图

- 证明(极大平面图G的每个域的边界数都是3)
  - 因为G是简单图，没有自环和重边，因此不存在边界数为1和2的域
  - 假定G存在边界数大于3的域d_j，不妨设d_j是其内部域，如右图所示
  - 若结点i_1和i_3不相邻，则在域d_j内加入(i_1,i_3)仍然是平面图，与G是极大平面图矛盾，因此一定存在边$e(i_1,i_3)$且位于域d_j之外
  - 而此时，在d_j之外不可能存在边(i_2,i_4)
  - 亦即i_2和i_4不相邻，但在域d_j内加入(i_2,i_4)并不影响G的平面性。矛盾。证毕



极大平面图

- 定理4.2.1
  - 极大平面图G中，有m=3n-6，d=2n-4
  - 证明
    - 由极大平面图的性质4: 3d=2m
    - 代入欧拉公式: d=m-n+2
    - 整理后即得以上结论
  - 该定理可以用于极大平面图的判定
    - 前提是简单平面图



极大平面图

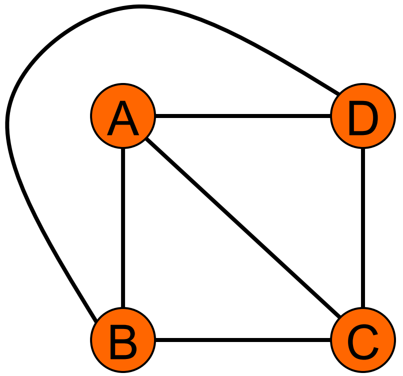
- 推论4.2.1
  - 简单平面图G满足$m \le 3n-6$, $d \le 2n-4$
  - 证明(考虑G是否含有割边)
    - 设G中没有割边
    - 因为G中没有自环和重边，所以每个域的边界数至少为3，故$3d \le 2m$
    - 代入欧拉公式：$d=m-n+2$
    - 如果G里有割边e，由于e并不能增加G的域数，也有$3d < 2m$
    - 代入欧拉公式即得以上结论

极大平面图

- 例4.2.1
  - 若简单平面图G有6个结点12条边，则每个域的边界数都是3
  - 证明
    - 由于n=6,m=12，满足定理4.2.1 (极大平面图G中有m=3n-6)
    - 因此G是极大平面图，每个域的边界数都是3

极大平面图

- 例4.2.2
  - 若简单图G不含K_3子图，则有 $m \le 2n-4$
  - 证明
    - 显见每个域的边界数至少为4，因此可得 $4d \le 2m$
    - 代入欧拉公式 $(m/2) \ge d = m-n+2$
      即 $m \le 2n-4$



极大平面图

- 定理4.2.2
  - 简单平面图G中存在度小于6的结点
  - 证明 (反证法：欧拉公式n-m+d≥2)
    - 设每个结点的度都不小于6
    - 由度数之和 $\sum d(v_i) = 2m$ ，得到6n≤2m
    - 因为G是简单平面图，又有3d ≤2m
    - 代入欧拉公式的一般形式n-m+d≥2
    - 有 $\frac{1}{3}m - m + \frac{2}{3}m \geq 2$
    - 矛盾

极大平面图

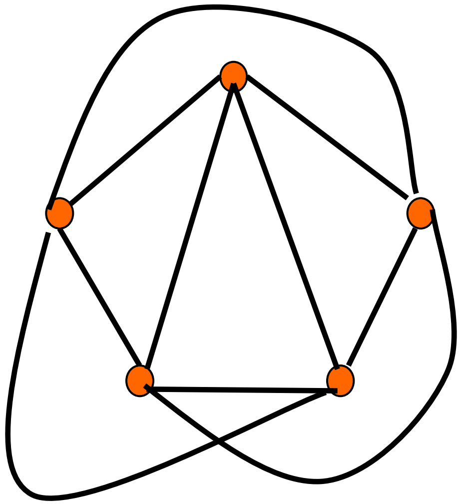
- 例4.2.4
  - K_7图不是平面图
  - 证明
    - 因为K_7图每个结点的度都为6
    - 由定理4.2.2 (简单平面图G中存在度小于6的结点)即得证

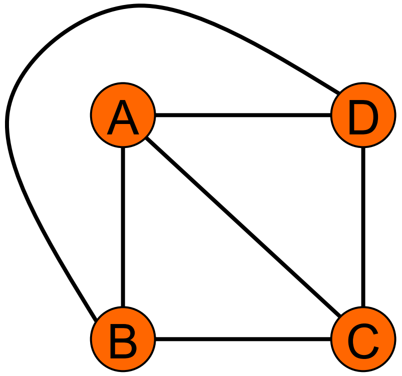
第四章 平面图与图的着色

- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

非平面图

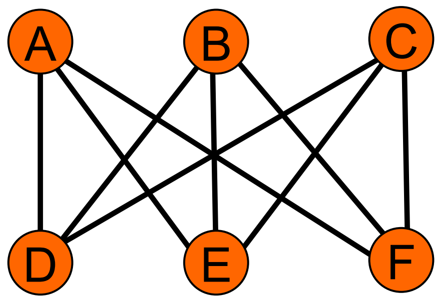
- 非平面图
  - 如果图G不能嵌入平面使得任意两边只能在结点处相交，那么G就称为非平面图
  - K_5是非平面图吗？
- 定理4.3.1：K_5是非平面图！
  - 证明 (反证法)
    - 在K_5中，n=5，m=10
      如果它是可平面图，应有m≤3n-6
    - 而此时3n-6=9，矛盾





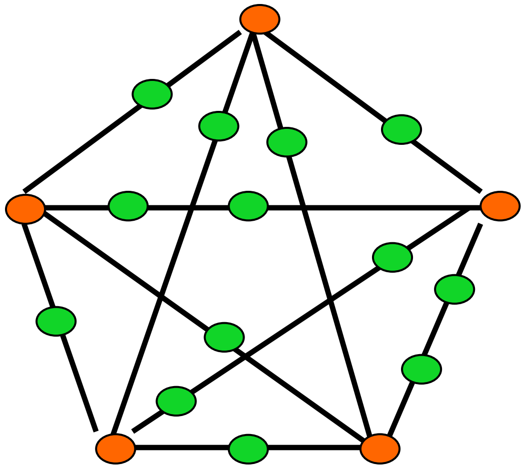
非平面图

- 定理4.3.2
  - $K_{3,3}$是非平面图
  - 证明 (反证法)
    - 假定$K_{3,3}$是可平面图
    - 由于n=6,m=9，考虑$m \le 3n-6$？
    - 由欧拉公式 d=m-n+2，得到d=5
    - G是二分图，即G中没有K_3子图
    - 因此$4d \le 2m$，亦即$20 \le 18$，矛盾。证毕。
- K_5和$K_{3,3}$分别记为$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图

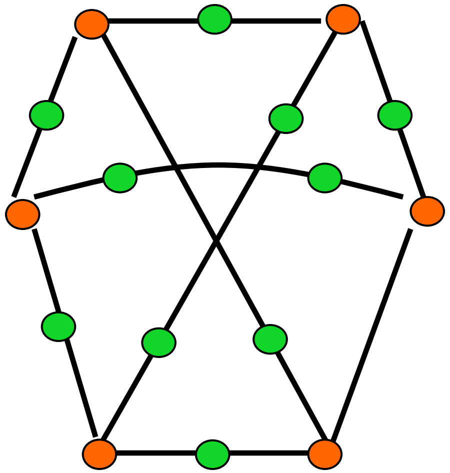


非平面图

- 定义4.3.1
  - 在$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图上任意增加一些度为2的结点(绿色)，得到的图称为$K^{(1)}$型图和$K^{(2)}$型图，统称为K型图



K (1) 型



K (2) 型

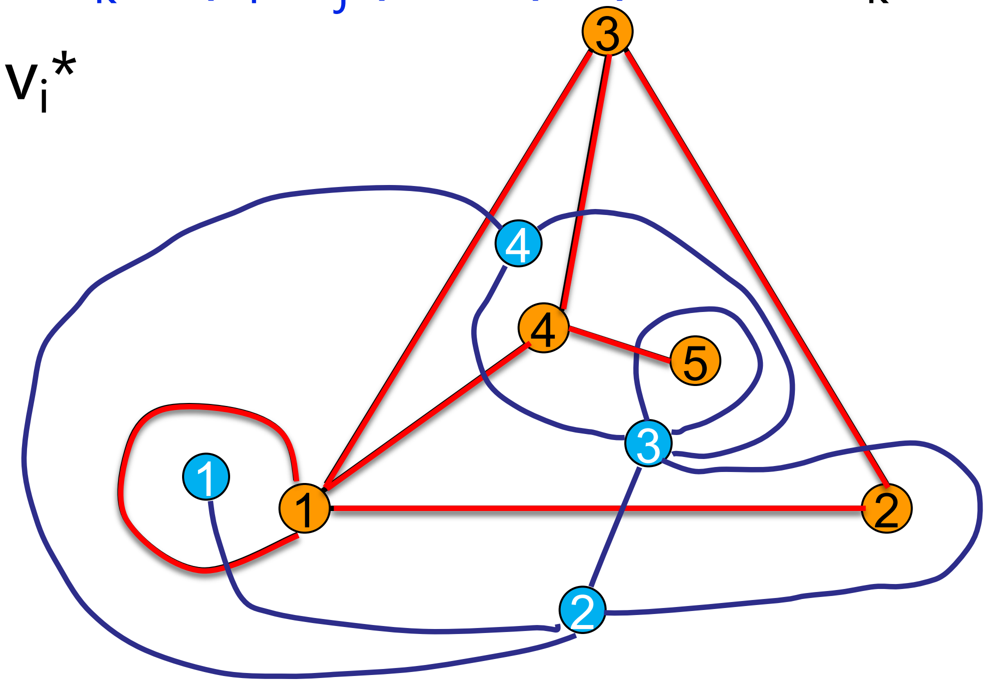
定理4.3.3(库拉图斯基Kuratowski) ：G是可平面图的充要条件是G不存在K型子图

第四章 平面图与图的着色

- 平面图
- 极大平面图
- 非平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

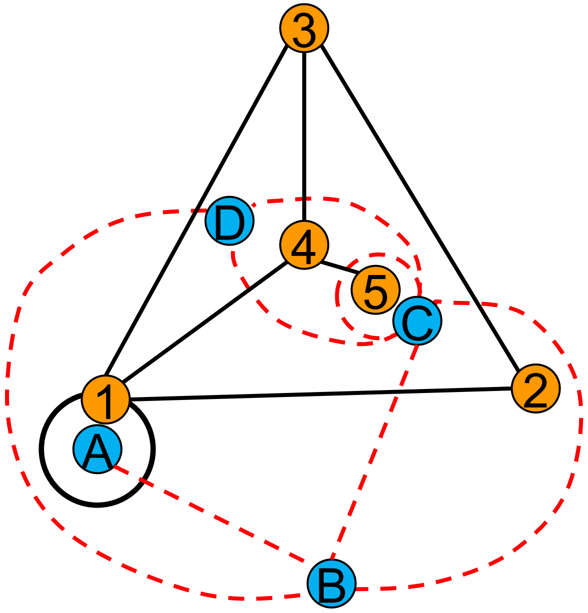
对偶图

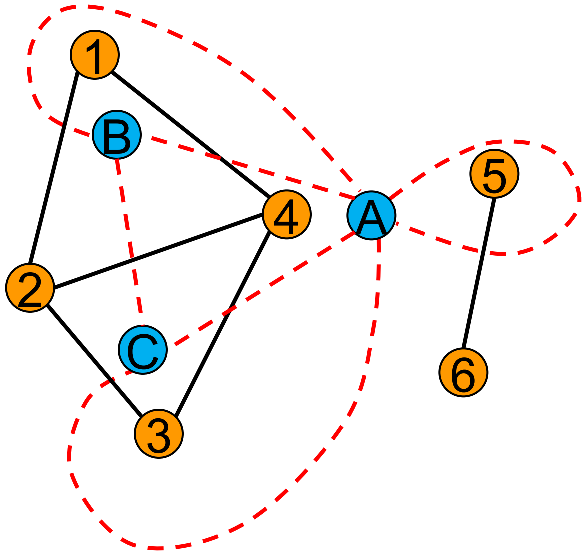
- 定义4.5.1：对偶图
  - 由原图G来构造对偶图G*的做图方法
    1. G中每个确定的域f_i内设置一个结点v_i*
    2. 对域f_i与f_j的共同边界e_k，有一条边e_k*=(v_i*,v_j*) ∈E(G*)，并与e_k相交一次
    3. 非共同边界：若e_k处于f_i之内，则v_i*有一个自环e_k*与e_k相交一次
- 对偶图作图过程
  - 给出了求对偶图G*的方法，也称为对偶图D (drawing)过程
  - G*是平面图，避免边交叉



对偶图

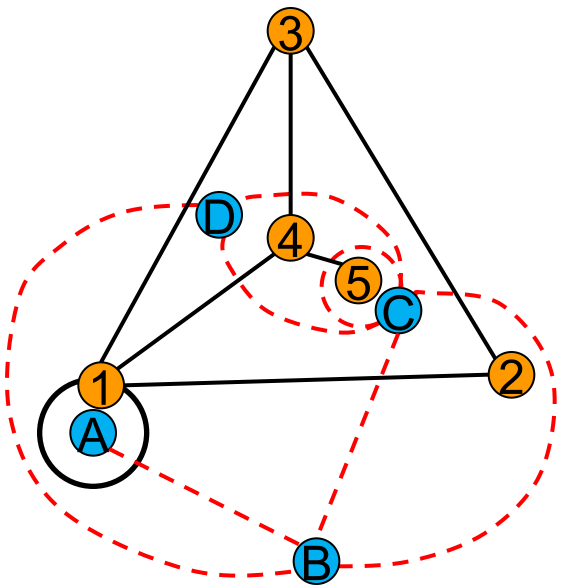
- 例4.5.1
  - 以下两个图的对偶图如虚线边所示





对偶图

- 性质4.5.1
  - 如果G是平面图，G一定有对偶图G*，而且G*是唯一的
    - 由D过程可确定点和边



- 回顾定义4.5.1：对偶图
  - 由原图G来构造对偶图G*的做图方法

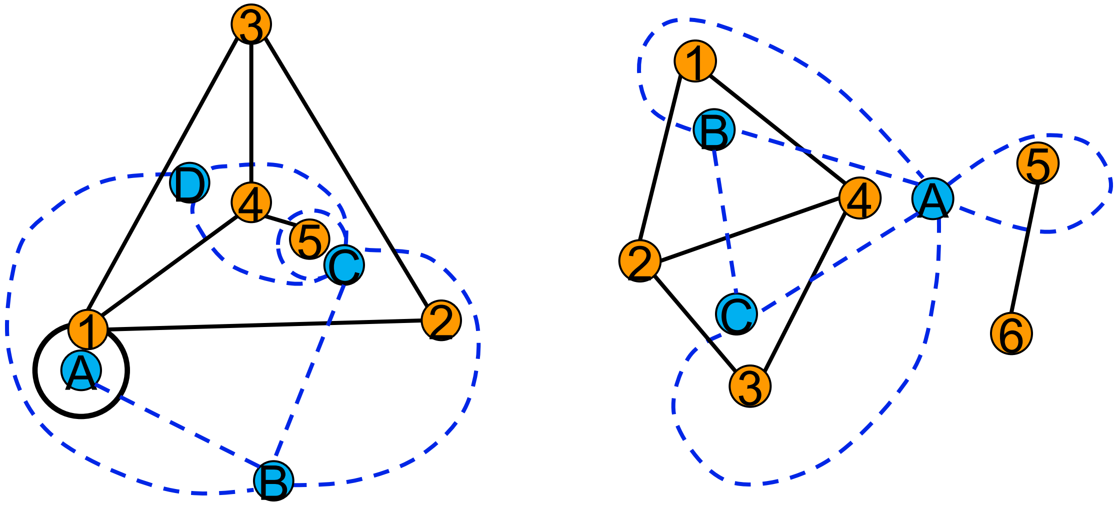
    1.G中每个确定的域f_i内设置一个结点v_i*

    2.对域f_i与f_j的共同边界e_k，有一条边e_k*=(v_i*,v_j*) ∈E(G*)，并与e_k相交一次

    3.非共同边界：若e_k处于f_i之内，则v_i*有一个自环e_k*与e_k相交一次

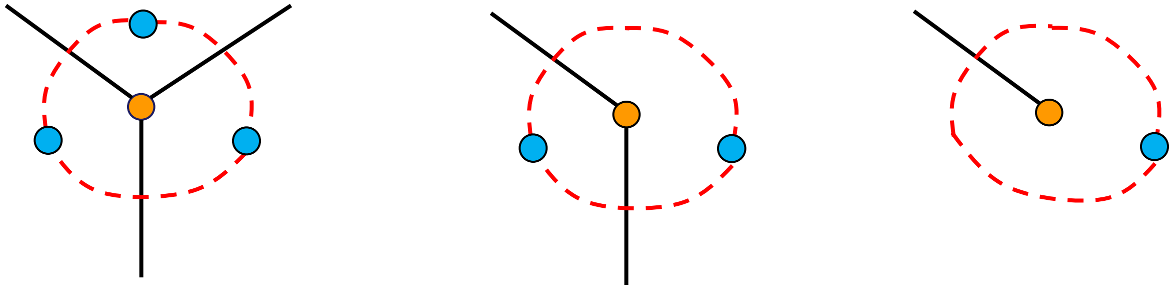
对偶图

- 性质4.5.1：对平面图G，对偶图G*存在且唯一
  - 思考(G*)*=G吗？
- 性质4.5.2
  - G*是连通图
  - 证明：
    - G*中的结点对应G中的域
    - 在平面图G里，每个域f都存在相邻的域
    - 对G的任何部分域来说，剩余的域中都存在与他们之中某个域相邻的域
    - 这样由对偶图的定义可知， G*连通



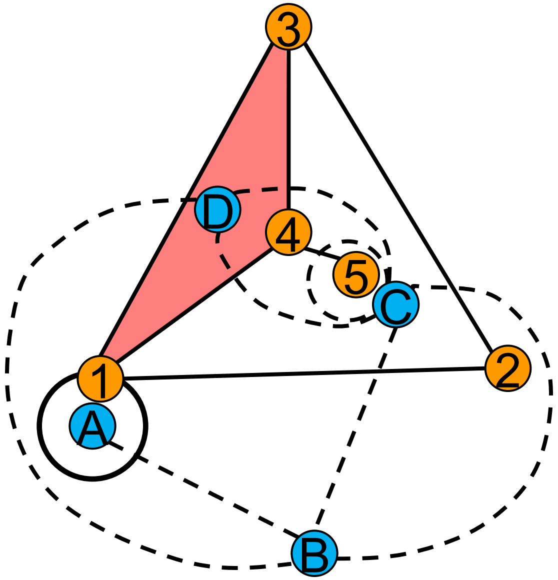
对偶图的性质

- 性质4.5.3
  - 若G是平面连通图，则(G*)*=G。
- 性质4.5.4：
  - 平面连通图G与其对偶图G*的结点n、边m、域d之间有对应关系:
    - m*=m，n*=d：由定义过程即可知
    - d*=n：考虑G中一个点的所有出边，对应的G*的边，围成了G*当中的一个域



对偶图

- 性质4.5.5
  - 设C是平面图G的一个初级回路，S*是G*中与C的各边e_i对应的e_i*的集合，则S*是G*的一个割集。
  - 证明
    - C把G的域分成了两部分，即把域所对应G*的节点集分成两部分
    - 因此E(G*)-S*把G*的结点分成不连通的两部分
    - 由性质4.5.2(即G*是连通图)，G*这两部分分别是连通的，因此S* 是G* 的一个割集

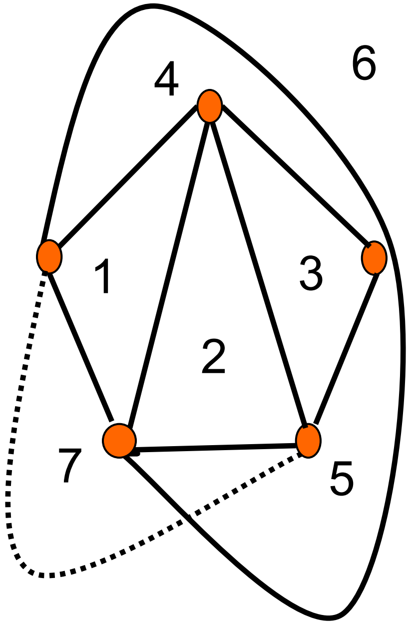


对偶图

- 定理4.5.1 G有对偶图的充要条件是G为平面图
  - 证明
  - 充分性由性质4.5.1(平面图G存在唯一G*)得证
  - 必要性(反证法)，即非平面图没有对偶图
    - 由库拉图斯基定理，非平面图一定含有$K^{(1)}$和$K^{(2)}$型子图
    - 而$K^{(1)}$、$K^{(2)}$型子图是$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图中增加了一些度为2的结点
      - 不影响对偶图的存在性，只增加重边而已
    - 因此如果$K^{(1)}$、$K^{(2)}$图没有对偶图，那么$K^{(1)}$、$K^{(2)}$型，进而非平面图也没有对偶图

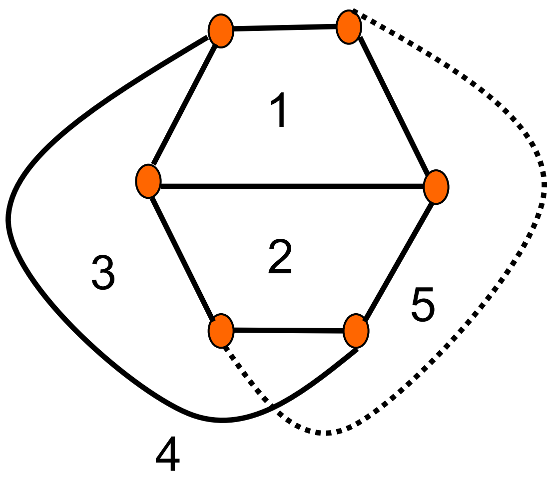
对偶图

- 证（续）
  - 对$K^{(1)}$图，$m=10, n=5, d=?$ $d\geq 7$
  - 假定$K^{(1)}$有对偶图，由性质4.5.4(边域点的对应关系)，$m^*=10, n^* \geq 7$
  - 由于$K^{(1)}$中没有自环和重边， 即$K^{(1)}$中每个域边界数≥3,即度数$d(v_i^*) \geq 3$，则 $\sum d(v_i^*) \geq 3\times 7 > 2m^*$
  - 因此$K^{(1)}$没有对偶图



对偶图

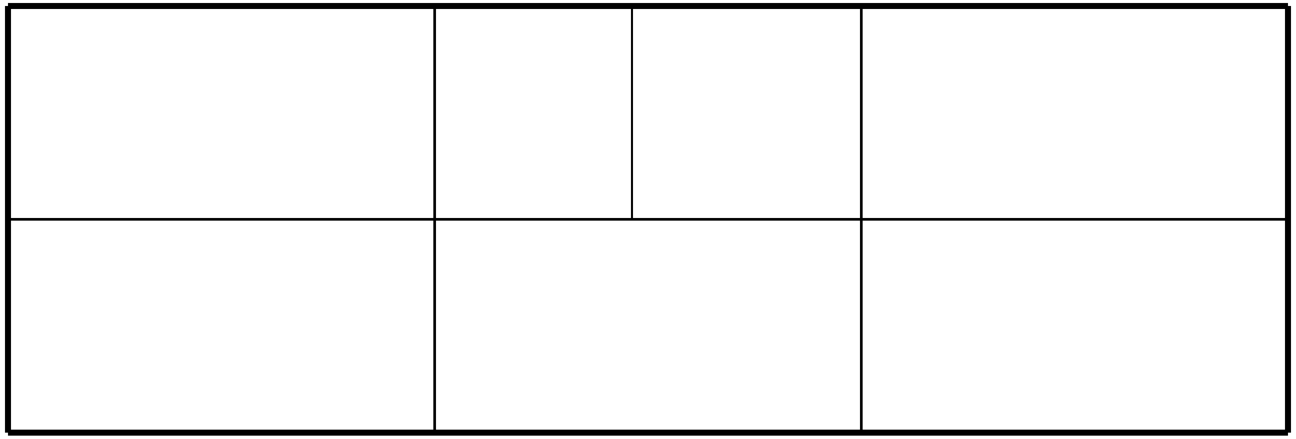
- 证（续）
  - 对$K^{(2)}$图，$m=9,n=6,d\geq 5$
  - 假定$K^{(2)}$有对偶图，由性质4.5.4，$m^*=9, n^*\geq 5$
  - 由于$K^{(2)}$中每个域的边界数至少为4，故度数$d(v_i^*)\geq 4$，则$\sum d(v_i^*)\geq 4\times 5>2m^*$
  - 因此$K^{(2)}$没有对偶图
  - $K^{(1)}$、$K^{(2)}$型无对偶图，即非平面图没有对偶图



- 综上，G有对偶图的充要条件是G为平面图

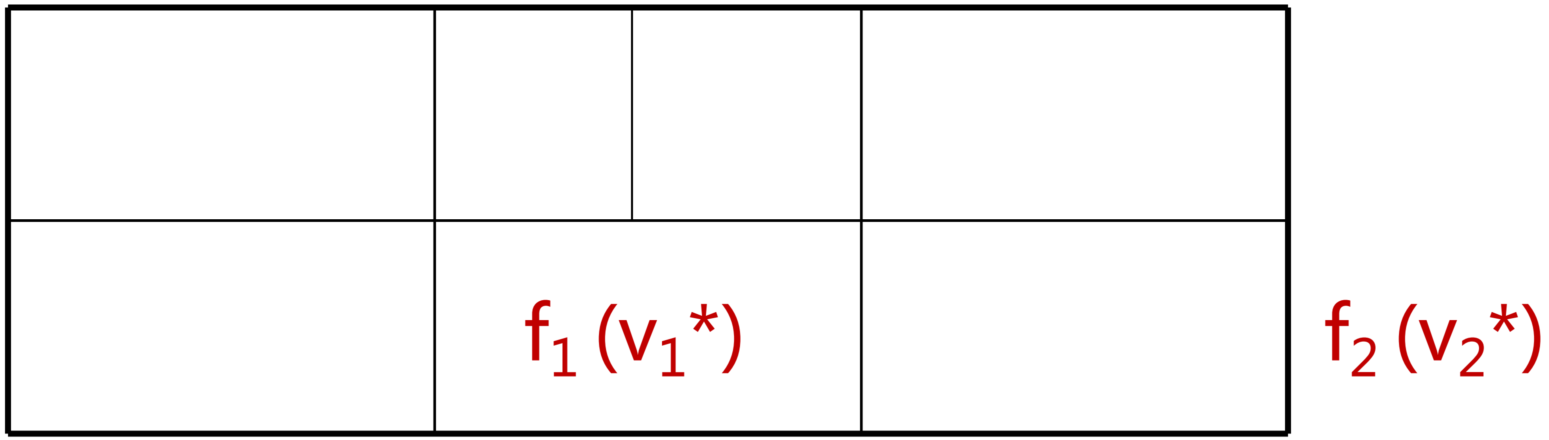
对偶图

- 例4.5.2
  - 图4.16是一所房子的俯视图，设每一面墙都有一个门
  - 问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回?
    - 考虑结点和边的位置？



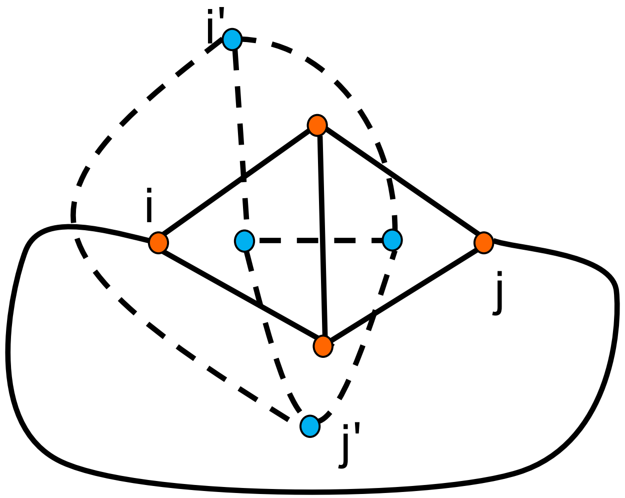
对偶图

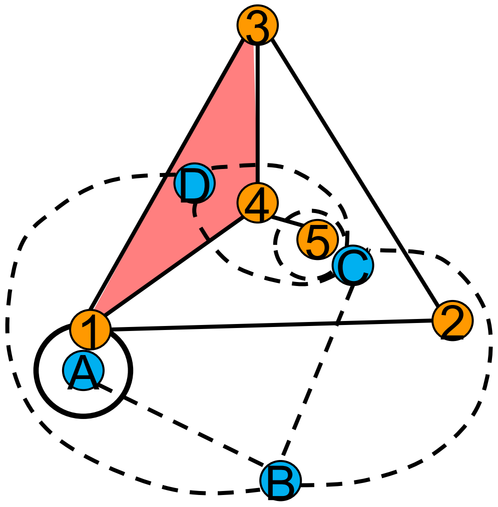
- 解：
  - 做G的对偶图G*，原问题得到转换
  - 原问题(过每扇门一次最后返回)就转化为G* 是否存在欧拉回路
  - 显见与G的域f_1和f_2所对应的G* 的结点v_1*和v_2*的度为奇，因此不存在欧拉回路



对偶图

- 例4.5.3
  - 设i, j是平面连通图无限域上的两个结点，求G中分离i,j的所有割集
  - 解：
    - 在无限域中填入边(i, j)，得到G_1
    - 做G_1的对偶G_1*
    - G_1*中除了(i', j')之外的从i' 到j' 的初级道路所对应的G的诸边都构成了G中分离i和j的割集



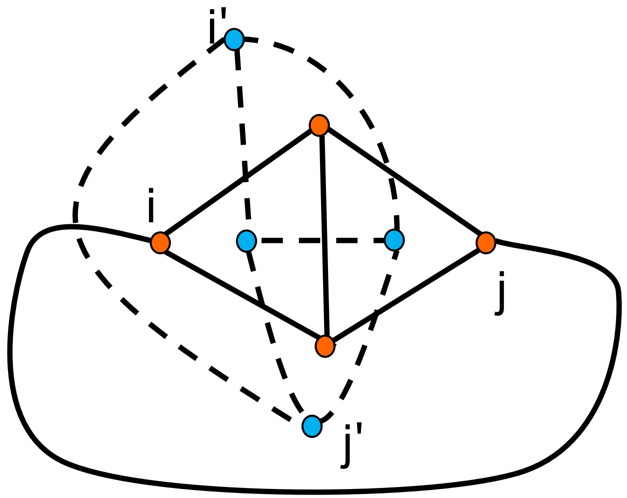


四色猜想

- 四色猜想
  - 1852年，Francis Guthrie猜测，对任何地图，只需用四种颜色对地图上的国家涂色，就能使任何两个相邻的国家涂有不同的颜色,这一猜测就是著名的“四色问题”
  - 1878～1880年两年间，著名的律师兼数学家肯普（Kempe）和泰勒（Tait）两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理
  - 1890年，数学家赫伍德（Heawood）以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，身为英国皇家学会院士的肯普向英国皇家学会正式报告了他的错误
  - 不久，泰勒的证明也被人们否定了
  - 到目前为止，关于四色问题的研究，最为著名的是W.Haken和K.Appel在1976年所给出的计算机证明：将地图上的无限种可能情况减少为1,936种状态（后减少为1,476种），这些状态由计算机一个挨一个的进行检查
  - 但是，四色问题的手写证明，即逻辑推理形式的证明，至今未果
  - 世界近代三大数学难题之一(另外两个是费马定理和哥德巴赫猜想)
  - 时代在等待名垂千古的英雄！

四色猜想

- 四色猜想
  - 对于任意一个平面图，只需4种不同的颜色就可以对它的域进行染色，满足相邻的域染以不同的颜色。
- 定理4.5.2
  - 任一平面图都是5 - 可着色的(域着色)
  - (重要)证明
    - 作G的对偶图G* ,命题转为：证G*的结点5-可着色
    - G*也是可平面的
    - 由于自环和重边不影响点染色，所以可以移去G* 中的自环、重边，得到简单图G_0
    - 命题又转化为任意简单平面图G_0可以结点5着色

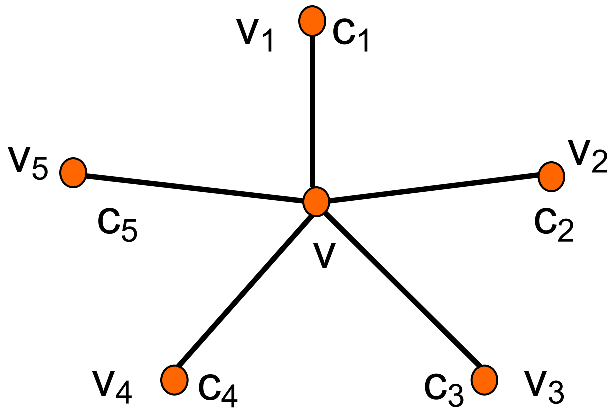


四色猜想

- 证（续）
  - 要证结点5着色，对简单平面图G_0进行归纳证明
  - 当结点数$n \le 5$时，结论显然成立
  - 假设n-1时成立
  - 要证结点数为n时成立，怎么办？
  - 由于G_0是结点数为n的简单平面图，由定理4.2.2(简单平面图G中存在度小于6的结点)，G_0中存在结点v, $d(v)<6$
  - 移去v以后得到G_0'，由假设条件，G_0'的结点5-可着色，着好色之后，再把v放回

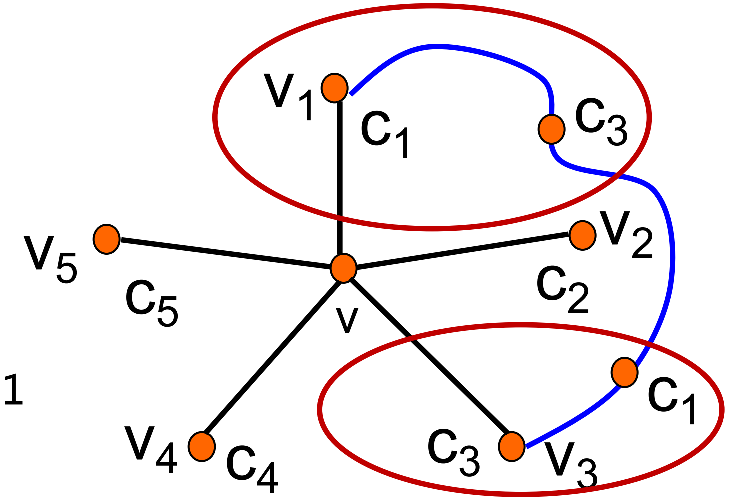
四色猜想

- 证（续）
  - 考虑将v放回G_0'的过程， 注: d(v)<6
  - 如果d(v) ≤4，或者d(v)=5且v 的邻接点没有用完5种颜色，则v可以着第5种颜色，即G_0 的点可以5着色
  - 如果v的邻接点恰好用了5种颜色，怎么办呢？
  - 如c_1 ~ c_5，其中设结点v_i用c_i着色



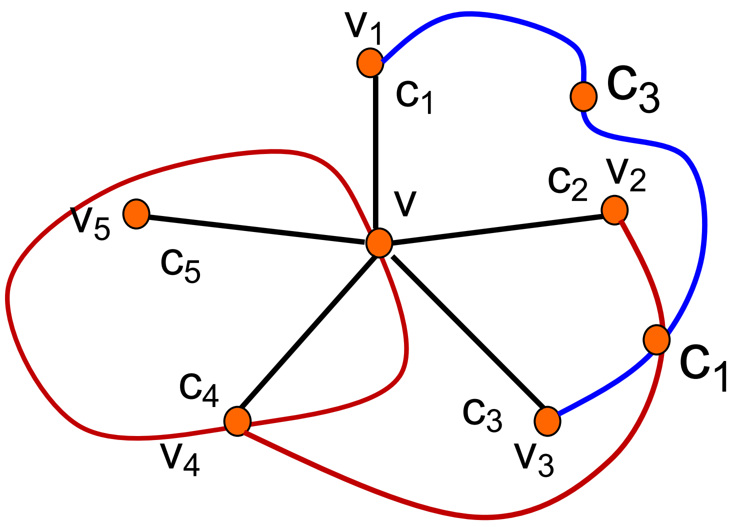
四色猜想

- 证（续）
  - 考虑能否将v_1结点换成c_3颜色？
  - 令G_{13}是$G_0' = G_0 - v$的一个子图，由c_1和c_3着色的结点导出
  - 若v_1和v_3分属G_{13} 的不同连通支
    - 将v_1所在连通支各结点的c_1、c_3颜色互换，v可以着c_1
    - 得到G_0 的一个5着色
  - 如果v_1和v_3属于G_{13}的同一个连通支
    - 则一定存在v_1到v_3的结点交替c_1和c_3颜色的道路P
    - 道路P加上边(v,v_1)和(v,v_3)构成一个封闭回路
    - 封闭回路把v_2与v_4、v_5分割在不同的区域
    - 道路P上任意节点颜色为c_1或c_3



四色猜想

- 证（续）
  - 考虑c_2和c_4对结点染色, 是否构成连接v_2和v_4的道路P'
    - 不会存在由c_2和c_4交替对结点染色的道路连接v_2和v_4
    - 否则与G_0是平面图矛盾
  - 在G_0-v的子图G_{24}中，v_2和v_4分属于不同的支
  - 将v_2所在连通支各结点的c_2、c_4颜色对换，此时v_2着以c_4，可令v着以c_2，则G_0可5着色
  - 证毕



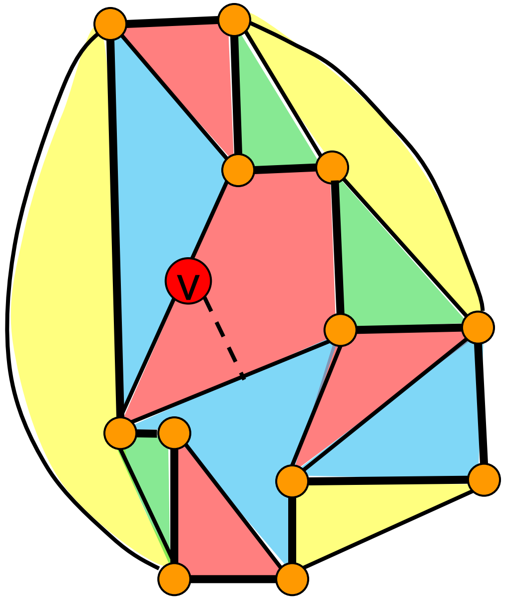
四色猜想

- 定理4.5.3
  - 如果平面图有Hamilton回路，则四色猜想成立
  - 证明
    - 此结论已在第二章中给出
    - 请回忆……

四色猜想

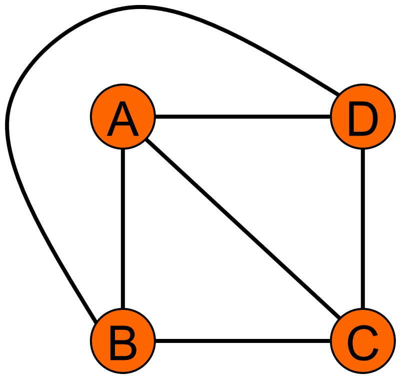
- 证明
  - 用一个示意图来加以直观的说明
  - 设粗线边是G中的一个哈密顿回路，则它将G的域划分成内外两部分
  - 每一部分的域用两种颜色可以染色，满足相邻域染不同颜色
  - 不然，一定存在三个以上的域互相连接的情形
  - 此时必出现v这样的结点。这与H是哈密顿回路相悖
  - 因此结论正确

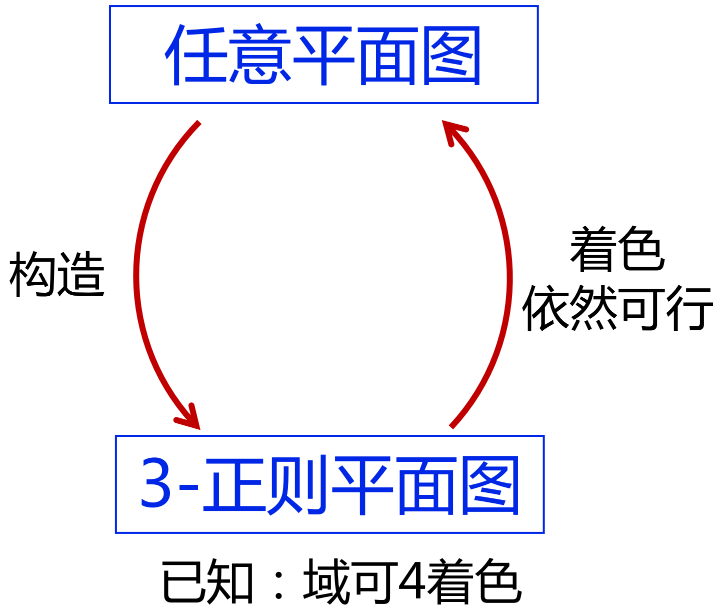
无限域染绿色



四色猜想

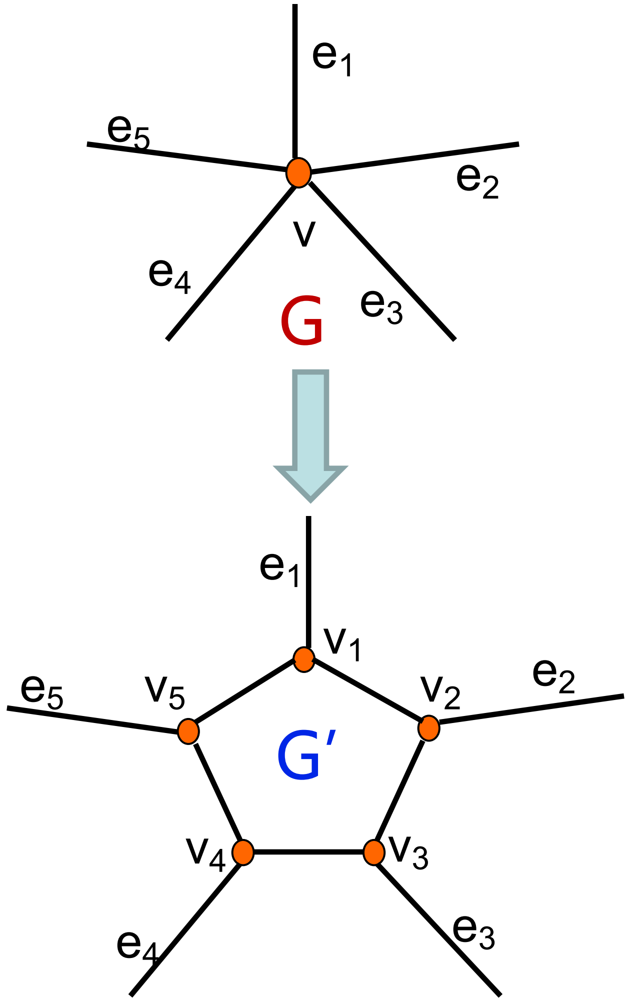
- 定理4.5.4
  - 3-正则平面图是指每个结点的度都是3的平面图
  - 若任何一个3-正则平面图的域可4着色，则任意平面图的域也可以4着色
- 证明（基本方法）
  - 任何一个平面图G，如果存在度为1的结点v，则它一定处于某个域的内部，移去v 并不影响这个域的染色
  - 如果存在度为2的结点v_i, 删去v_i及其关联的边(v_i,v_j),(v_i,v_k),同时增加一条边(v_j,v_k),也不会影响域的染色





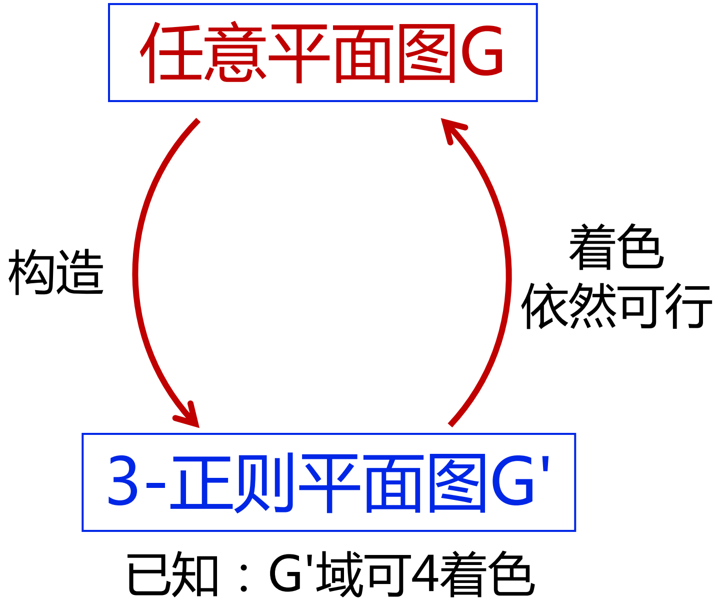
四色猜想

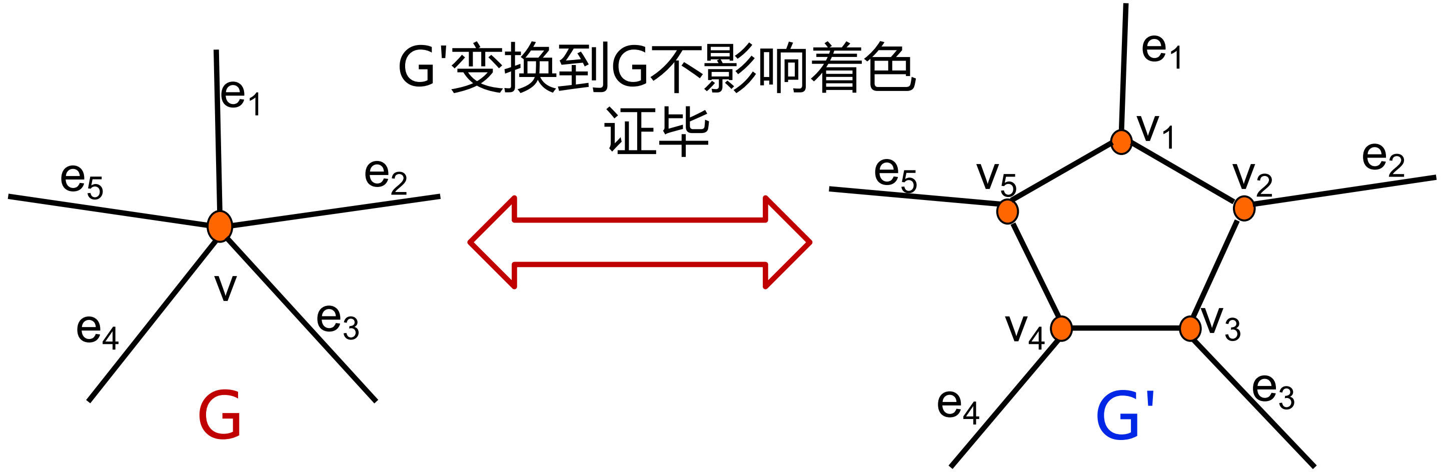
- 证（续）
  - 如果存在结点v，满足d(v) ≥4
  - 它关联于边$e_1,e_2,\ldots e_k$，设这些边依次环绕于v
  - 我们对应每一条e_i构造一个新结点v_i，然后移去v，并加入新的边$(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_k,v_1)$
  - 新加入的每一个结点的度为3
  - 即图G转化为3-正则平面图G′



四色猜想

- 证（续）
  - 已将原图G转化为：3-正则平面图G'
  - 原命题要证“若任何一个3-正则平面图（G'）的域可4着色，则任意平面图G的域也可以4着色”
  - 由已知条件G'的域可以四着色，再把由$v_1, v_2, \ldots, v_k$作为边界点的域收缩，最后还原成一个结点v，那么G'的域染色仍然是用于G





敢想敢干

Tait猜想(1878年)：任意3-正则平面图都存在H回路

总结

- 平面图
  - 平面图的概念和性质（测地变换）
  - 欧拉公式d=m-n+2及其变形和应用
  - 将域边界数对域求和等于2m
  - 特殊的平面图：极大平面图（3d=2m，m=3n-6）
- 非平面图
  - 特殊的非平面图及相关证明：最少点K_5、最少边$K_{3,3}$
- 图的平面性检测（不要求）
- 对偶图
  - 发明对偶方法：G**=G？点边域的对应关系
  - G存在对偶图的充要条件，回路v.s.割集
  - 五色定理和四色猜想

作业

- P103 习题四
  - 平面图：1，2，3，15, 20
  - 非平面图：22（选做：考虑第20题结论和例4.5.3）
  - 对偶图：23（选做）
- 20. 若无割边的平面图除了一个域外，其余各域的边界数都可以被整数d(>1)整除，则G的域不能2着色
- G的域可2着色 → G*的结点可2着色

两色的度数之和，相同吗？