



# 弹幕讨论

感觉蓝色荧光笔的写法是不太符合“异或”定义的。

“异或”应该用于语境上左右两项不能同时发生（圈1），但是这里写出来的形式已经控制了左右两项不能同时发生，所以完全没必要用它，反倒更容易对异或的定义产生疑问（圈2，推导出来就是必然成立的）

如果要用异或符号的话，我觉得应该按（圈3）的写法比较好理解

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

还可以形式化为： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

还可以形式化为： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

$$\textcircled{1} p \bar{v} q = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} & (\neg p \wedge Q \wedge \neg R) \bar{v} (p \wedge \neg Q \wedge R) \\ &= [\neg(\neg p \wedge Q \wedge \neg R) \wedge (p \wedge \neg Q \wedge R)] \vee [(\neg p \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(p \wedge \neg Q \wedge R)] \\ &= [(\neg p \vee \neg Q \vee R) \wedge (p \wedge \neg Q \wedge R)] \vee [(\neg p \wedge Q \wedge \neg R) \wedge (\neg p \vee Q \vee \neg R)] \\ &= (p \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg p \wedge Q \wedge \neg R) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (Q \bar{v} R) \wedge (\neg p \rightarrow Q) \wedge (p \rightarrow R)$$



Q from 雨课堂：置换规则和代入规则有什么区别

A: 这是个好问题，但是我觉得如果你再回头看看代入规则的内容就会发现两个一点也不一样。

我替你问了一下AI:

置换规则和代入规则在离散数学中都是用于推导逻辑公式的重要方法，但它们之间有一些关键的区别：

### 1. 置换规则：

- **定义：**置换规则允许我们用一个与原公式等价的公式替换原公式中的某个部分。
- **特点：**置换可以只针对公式中的一个特定部分进行，而不必对整个公式中所有相同的部分都进行替换。
- **应用：**置换通常用于保持公式等值的情况下简化或重新组织公式。

### 2. 代入规则：

- **定义：**代入规则涉及将一个公式中的某个命题变元（原子命题）替换为另一个公式。
- **特点：**代入要求对公式中所有出现的同一命题变元进行相同的替换。
- **应用：**代入通常用于证明过程中，尤其是在证明重言式时，保持证明的有效性。



## 代入规则

一个**重言式**，对其中所有相同的**命题变项**都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

## 置换规则

设 $X$ 为公式 $A$ 的子公式，**用与 $X$ 等值的公式 $Y$ 将 $A$ 中的 $X$ 施以代换**，称为**置换**，该规则称为置换规则。

置换后公式 $A$ 化为公式 $B$ ，置换规则的性质保证公式 $A$ 与公式 $B$ 等值，即 $A=B$ 。



➤ 判断  $(R \vee S) \vee \neg(R \vee S)$  为重言式。

• 由  $P \vee \neg P$  为重言式, 代入  $\frac{P}{(R \vee S)}$

• 便得  $(R \vee S) \vee \neg(R \vee S)$ , 该公式必是重言式。

➤ 判别  $\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$  公式类型.

解 原式

$$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \quad (\text{摩根律})$$

$$= F \wedge R \quad (\text{补余律, 零律})$$

$$= F \quad (\text{零律})$$



# Discrete Mathematics

## 离散数学(1)

### 第二章：命题逻辑的 等值和推理演算

马昱春



清华大学  
Tsinghua University



# 主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

补充：应用举例

讲快点



### Comment from 雨课堂:

后半节课讲解速度比较快，但是课后再吸收一下也都能明白～

不好意思老师但老师说话的速度好快😂，有时候还没来得及理解就突然换slide了。但没事，课后复习应该可以😁

A: 我尽量说话能慢一点，我理解估计主要不是语速问题，是思维要一直跟着转，尤其大家会觉得后半段快，其实也是逻辑难度上来了，大家脑子又缺氧了，所以会觉得快，但是往往有可能即便再慢再慢，再多讲几遍下来，可能也不一定能保证脑子在线。所以其实课前预习，课后复习都是很重要的。



# 主要内容回顾

- 等值定理
  - 若在任一解释下，公式 $A$ 和 $B$ 的真值都相同，则称 $A$ 和 $B$ 是等值的
- 等值公式
  - 置换规则
  - 基本的等值公式
  - 常用等值公式
  - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  - 从取T的行来写
  - 从取F的行来写





# 常用的等值公式

- 蕴涵等值式  $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式:  $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位:  $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式:  $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论:  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$



# 常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$  从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$  从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$  前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$  前提析取合并

证明其他等值式



# 主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式 \*

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

补充：应用举例



## 2.5 对偶式

### 对偶式

$$P \rightarrow Q$$

将给定的**仅包含 $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ 联结词的**命题公式  
 $A$ 命题公式  $A$ 中出现的 $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $T$ ,  $F$  分别以 $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $F$ ,  
 $T$  代换, 得到公式  $A^*$ , 则称  $A^*$ 是公式  $A$ 的对偶式,  
或说  $A$ 和  $A^*$ 互为对偶式。

在以下定理2.5.1~定理2.5.6中, 记

$$A = A(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$



给出合式公式  $A = P \vee (Q \wedge (R \vee S))$

请写出 $A^*$ 和 $A^-$ 。

$$A = A(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

将给定的**仅包含 $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ 联结词**的命题公式  
 $A$ 命题公式  $A$ 中出现的 $\vee, \wedge, T, F$ 分别以 $\wedge, \vee, F, T$ 代换, 得到公式  $A^*$ , 则称  $A^*$ 是公式  $A$ 的对偶式,



# 是否同真假？

给出合式公式  $A = P \vee (Q \wedge (R \vee S))$

请写出 $A^*$ 和 $A^-$ 。

$$A = A(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

将给定的**仅包含 $\wedge$ ， $\vee$ ， $\neg$ 联结词的**命题公式  
 $A$ 命题公式  $A$ 中出现的 $\vee$ ， $\wedge$ ， $T$ ， $F$  分别以 $\wedge$ ， $\vee$ ， $F$ ， $T$  代换，得到公式  $A^*$ ，则称  $A^*$ 是公式  $A$ 的对偶式，



# 有关对偶式的定理

$$A = P \vee (Q \wedge (R \vee S))$$

- 定理2.5.1

$$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

- 定理2.5.2

$$(A^*)^* = A, \quad (A^-)^- = A$$

- 定理2.5.3

$$\neg A = A^{*-}$$

请自学书上证明



## 2.5 对偶式(自学)

证明定理2.5.3:  $\neg A = A^{*-}$

用**数学归纳法**, 施归纳于A中出现的联结词个数n来证明。

**基始**: 设  $n = 0$ , A中无联结词, 便有

$$A = P, \text{ 从而 } \neg A = \neg P$$

$$\text{但 } A^{*-} = \neg P$$

$\therefore n = 0$ 时定理成立。

**归纳**: 设  $n \leq k$ 时定理成立,

证  $n = k+1$ 时定理也成立。

$\therefore n = k+1 \geq 1$ , A中至少有一个联结词, 可分为三种情形:

$$\underline{A = \neg A_1, \quad A = A_1 \wedge A_2, \quad A = A_1 \vee A_2}$$

其中  $A_1, A_2$  中联结词个数  $\leq k$ 。





## 2.5 对偶式(自学)

证明定理2.5.3:  $\neg A = A^{*-}$

接上页:

依归纳法假设,  $\neg A_1 = A_1^{*-}$ ,  $\neg A_2 = A_2^{*-}$

当  $A = \neg A_1$  时  $\neg A = \neg(\neg A_1)$

$$= \neg(A_1^{*-}) \quad \text{归纳法假设}$$

$$= \neg((A_1^*)^-)$$

$$= (\neg(A_1^*))^-$$

$$\text{由定理2.5.1 (2): } \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

$$= \neg(A_1^*)^-$$

$$\text{由定理2.5.1 (1) } \neg(A^*) = (\neg A)^*$$

$$= (\neg A_1)^* -$$

$$= A^{*-} \quad \text{由条件 } A = \neg A_1$$



## 2.5 对偶式(自学)

证明定理2.5.3:  $\neg A = A^{*-}$

接上页:

当  $A = A_1 \wedge A_2$  时

$$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2)$$

$$= \neg A_1 \vee \neg A_2$$

$$= A_1^{*-} \vee A_2^{*-}$$

$$= (A_1^* \vee A_2^*)^-$$

$$= (A_1 \wedge A_2)^{*-}$$

$$= A^{*-}$$

摩根律

归纳法假设

$A^-$ 定义

$A^*$ 定义

定理证毕

该定理实为摩根律的另一种形式。

它将 $\neg$ 、 $*$ 、 $-$ 有机地联系起来。



## 有关对偶式的定理(续)

- 定理2.5.4 (对偶原理)  
若 $A = B$ , 必有 $A^* = B^*$
- 定理2.5.5 (逆否命题)  
若 $A \rightarrow B$  永真, 必有 $B^* \rightarrow A^*$  永真
- 定理2.5.6  
 $A$ 与 $A^-$ 同永真, 同可满足;  
 $\neg A$ 与 $A^*$ 同永真, 同可满足。

好证

需先证

- 定理2.5.3  
 $\neg A = A^* -$



## 2.5 对偶式

定理 2.5.4 若  $A = B$  必有  $A^* = B^*$

证明: 因为  $A = B$  等价于  $A \leftrightarrow B$  永真, 表示  $A$  和  $B$  真值表相同, 所以非  $A$  和非  $B$  真值表也相同。

从而  $\neg A \leftrightarrow \neg B$  永真。

依定理 2.5.3,  $\neg A = A^{*-}$ ,  $\neg B = B^{*-}$

于是  $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$

必有  $A^* \leftrightarrow B^*$

故  $A^* = B^*$

永真  
永真

定理 2.5.6

$A$  与  $A^-$  同永真, 同可满足;

• 定理 2.5.3

$\neg A = A^{*-}$



## 2.5 对偶式

- 定理2.5.5 若 $A \rightarrow B$  永真，必有  $B^* \rightarrow A^*$  永真
- 证

$$A \rightarrow B$$

$\Rightarrow$

$$\neg B \rightarrow \neg A$$

$\Rightarrow$

$$B^* \rightarrow A^*$$

$\Rightarrow$

$$B^* \rightarrow A^*$$

逆否命题

- 定理2.5.3  
 $\neg A = A^*$

- 定理2.5.6  
 $A$ 与 $A^*$ 同永真，同可满足；

重言蕴含



# $A$ 为重言式 $\Rightarrow A^*$ 必为矛盾式

• 定理2.5.3  
 $\neg A = A^*$

• 定理2.5.6  
 $A$ 与 $A^*$ 同永真, 同可满足;

- 若 $A$ 为重言式, 则 $A^*$ 必为矛盾式.

如果 $A = T$ , 由对偶定义和对偶原理可知:

$$A^* = (T)^* = F$$

- 例如,

$$\text{设 } A = P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)),$$

$$\text{则 } A^* = P \wedge (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$$

$$A \Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee 0) \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow 1,$$

$$A^* \Leftrightarrow 0.$$

定理2.5.4

若 $A = B$ , 必有 $A^* = B^*$  (对偶原理)



# 做作业的感受

- 是否喜欢蕴含联结词?

仅包含  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  联结词的命题公式

例1: 从取1的行来列写

写出来的式子要干什么?

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F



Q from 雨课堂:

对于课程内容没有太大的疑问

关于作业和习题，想知道答案最终要化简到什么样的形式，如果不唯一怎么处理

A: 这是一个不容易的问题，最简形式不唯一而且很难判断是最简的，当然也不是没有办法，可以通过卡诺图或者其他算法工具可以做到，但对于我们课程来说就尽力而为，不要有一眼看出来的冗余式子就好。

如果感兴趣的话可以用“逻辑式的化简”作为关键词问AI。

课堂上我们还会进一步分析。|





## 2.6 范式

### 2.6.1 文字与互补对

命题变项及其否定式(如 $P$ 与 $\neg P$ ) 统称**文字**。

且 $P$ 与 $\neg P$  称为**互补对**。

### 2.6.2 合取式

由**文字**的合取所组成的公式称为**合取式**。由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

### 2.6.3 析取式

由**文字**的析取所组成的公式称为**析取式**。由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。



# 补充：析取式与合取式

## 定理

- (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \vee \neg P \vee Q$$

- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \wedge \neg P \wedge Q$$



## 2.6 范式

### 2.6.4 析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$$

的公式，其中 $A_i (i = 1, \dots, n)$ 为合取式。

### 2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

的公式，其中 $A_i (i = 1, \dots, n)$ 为析取式。



# 求范式举例

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

- 例1 求 $P \leftrightarrow Q$  的析取范式与合取范式：

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \text{----} \leftrightarrow \text{合取范式}$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \text{----} \leftrightarrow \text{析取范式}$$

范式不唯一，例如

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee Q \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$



## 例2 求 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 的析取范式与合取范式

(1) 先求合取范式

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \leftrightarrow R \quad (\rightarrow \text{等值式})$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow (\neg P \vee Q)) \quad (\rightarrow \text{等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (\neg P \vee Q)) \quad (\rightarrow \text{等值式})$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{摩根律否定符内移})$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{的分配律})$$

# $(a+b)^*c$ 例2: 求析取范式



$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ ----合取范式

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ ----析取范式

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{消去 } \leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R) \quad (\wedge \text{对 } \vee \text{的分配律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (\text{补余律和同一律})$$



## 2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。



# 求范式的具体步骤

- 利用等值公式中的等值式和蕴涵等值式将公式中的 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 用联结词 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 来取代;

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (\leftrightarrow \text{合取范式})$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \quad (\leftrightarrow \text{析取范式})$$

- 利用摩根律将否定号 $\neg$ 移到各个命题变元的前端;
- 利用结合律、分配律、吸收律、等幂律、交换律等将公式化成其等值的析取范式和合取范式。





由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究主范式。

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{消去 } \boxed{\leftrightarrow})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$$

$$(R \wedge \neg P) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R) \quad (\wedge \text{对 } \vee \text{的分配律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (\text{补余律和同一律})$$

缺点是什么？

命题变元出现次数无约束

命题变元顺序无约束



例1：从取1的行来列写

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

真值表里第*i*行？

例2：从取0的行来列写



$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$



# 主范式——极小项和极大项

## 2.6.7 极小项

$n$  个命题变项  $P_1, P_2, \dots, P_n$  组成的合取式：

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$$

其中  $Q_i = P_i$ ，或  $\neg P_i$ 。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式  $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$  为极小项，并以  $m_i$  表示。

$i$  是什么？

## 2.6.8 极大项

$n$  个命题变项  $P_1, P_2, \dots, P_n$  组成的析取式：

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$$

其中  $Q_i = P_i$ ，或  $\neg P_i$ 。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式  $Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$  为极大项，并以  $M_i$  表示。



例1：从取1的行来列写

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

真值表里第*i*行？

例2：从取0的行来列写



$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

# 主范式——极小项和极大项



例1：从取1的行来列写

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

## • 进一步说明

### – 2.6.7 极小项

$n$  个命题变项  $P_1, P_2, \dots, P_n$  组成的合取式：

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$$

其中  $Q_i = P_i$ ，或  $\neg P_i$ 。

- 每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次；
- 排列顺序与  $P_1, P_2, \dots, P_n$  一致；
- $n$ 个命题变项有 $2^n$ 个极小项，彼此不等价
- 任一极小项只有一种指派使其取值为真，**每种指派对应的一个 $n$ 位二进制数**，转化为十进制数为 $i$ ，极小项  $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$  以  $m_i$  表示。
- 极小项两两不等值，并且  $m_i \wedge m_j = F$  ( $i \neq j$ )。



# 主范式——极小项和极大项

- 进一步说明

- 2.6.8 极大项

$n$  个命题变项  $P_1, P_2, \dots, P_n$  组成的析取式:

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$$

其中  $Q_i = P_i$  , 或  $\neg P_i$ 。

- 每个命题变项与它的否定式不同时出现, 但二者之一必出现且仅出现一次;
    - 排列顺序与  $P_1, P_2, \dots, P_n$  一致;
    - $n$ 个命题变项有  $2^n$ 个极小项, 彼此不等价
    - 极大项  $Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$  以  $M_i$  表示。
    - 极大项两两不等值, 并且  $M_i \vee M_j = T$  ( $i \neq j$ )。

# 例1：从取1的行来列写

$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$m_0$                        $m_1$                        $m_3$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$



## 2.3 命题公式与真值表的关系

### 1. 从取1的行来列写

考查命题公式  $A$  的真值表中取1 的行，若取1 的行数共有  $m$  行，则命题公式  $A$  可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中  $Q_i = (R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n)$ ,

$$R_i = P_i \text{ 或 } \neg P_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

若该行的  $P_i = 1$ ，则  $R_i = P_i$ ；否则  $R_i = \neg P_i$





## 2.3 命题公式与真值表的关系

### 2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有 $k$ 行，则命题公式 $A$ 可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中  $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$  ,

$$R_i = P_i \text{ 或 } R_i = \neg P_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

若该行的  $P_i = 1$ ，则  $R_i = \neg P_i$

若该行的  $P_i = 0$ ，则  $R_i = P_i$ .

例2：从取0的行来列写

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$



$P$	$Q$	$A$	$B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

# 进一步理解

例2：从取0的行来列写

$$\neg A = P \wedge \neg Q \quad A = (\neg P \vee Q)$$

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

- 从取1的行来列写

$$A = ( \wedge )_1 \vee ( \wedge )_2 \vee \dots \vee ( \wedge )_m$$

- 故从取0的行来列写

$$\neg A = \neg(( \wedge )_1 \vee ( \wedge )_2 \vee \dots \vee ( \wedge )_l) \text{从而}$$

$$A = ( \vee )_1 \wedge ( \vee )_2 \wedge \dots \wedge ( \vee )_l$$

其中 $( \vee )_l$ 中每一项也相应取反，因此

若该行的  $P_i = 1$ ，则  $R_i = \neg P_i$

若该行的  $P_i = 0$ ，则  $R_i = P_i$ .



## 例2：从取0的行来列写

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$M_1$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$M_1$                        $M_0$

$P$	$Q$	$A$	$B$	
F	F	T	T	M3
F	T	T	T	
T	F	F	F	M0
T	T	T	F	



# 主范式——极小项的性质

- (1) 任一含有 $n$  个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是 $2^n$ 。
- (2) 每个极小项只有一个解释下为真。
- (3)  $m_i \wedge m_j = F \quad (i \neq j)$



# 主范式——极小项的性质 (续)

(4) 任一含有 $n$ 个命题变项的公式, 都可用 $k$ 个 ( $k \leq 2^n$ ) 极小项的析取来表示。

$A$ 是由 $k$ 个极小项的析取来表示, 剩余 $2^n - k$ 极小项的析取是 $\neg A$

(5) 恰由 $2^n$ 个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = T$$

$P$	$Q$	$A$	$B$	
F	F	T	T	$m_0$
F	T	T	T	$m_1$
T	F	F	F	$m_2$
T	T	T	F	$m_3$



# 主范式——极大项的性质

(1) 任一含有 $n$ 个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数与该公式的解释个数相同，都是 $2^n$ 。

(2) 每个极大项只在一个解释下为假。

(3) 极大项两两不等值，并且

$$M_i \vee M_j = T \quad (i \neq j)。$$



# 主范式——极大项的性质

(4) 任一含有 $n$ 个命题变项的公式，都可由 $k$ 个 ( $k \leq 2^n$ ) 极大项的合取来表示。

$A$ 是由 $k$ 个极大项的合取来表示，剩余 $2^n - k$ 极大项的合取是 $\neg A$

(5) 恰由 $2^n$ 个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。

即  $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = F$

$P$	$Q$	$A$	$B$	
F	F	T	T	M3
F	T	T	T	M2
T	F	F	F	M1
T	T	T	F	M0



# 主析取范式与主合取范式

## 主析取范式

设由 $n$ 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

## 主合取范式

设由 $n$ 个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。





# 主范式

## 2.6.9 主析取范式定理

任一含有 $n$ 个命题变项的公式，都存在**唯一**的与之等值的且恰仅含这 $n$ 个命题变项的主析取范式。

## 2.6.10 主合取范式定理

任一含有 $n$ 个命题变项的公式，都存在**唯一**的与之等值的且恰仅含这 $n$ 个命题变项的主合取范式。



# 主析取范式与主合取范式的求法

求主析取范式的方法

1. 先求析取范式
2. 再填满变项

$$\begin{aligned} \text{例: } P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ &= \overset{m_3}{m_0} \vee \overset{m_0}{m_3} = \bigvee_{0,3} \end{aligned}$$



# 主析取范式与主合取范式的求法

例  $P \rightarrow Q$  求主析取范式

填满命题变项

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$\begin{aligned} \because \neg P &= \neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because Q &= Q \wedge (P \vee \neg P) \\ &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

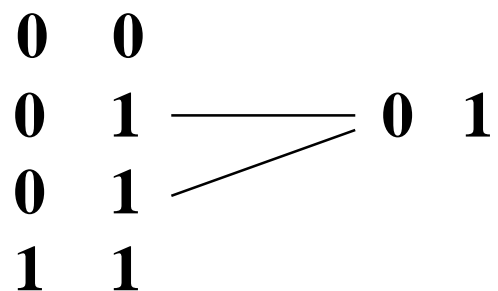
$$P \rightarrow Q = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\begin{aligned} &\quad m_1 \quad \quad m_0 \quad \quad m_3 \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_3 \\ &= \bigvee_{0,1,3} \end{aligned}$$



# 填满变项的简便方法

$$\begin{aligned} & \neg P \vee Q \\ = & m^{0x} \vee m^{x1} \\ = & m_0 \vee m_1 \vee m_3 \end{aligned}$$



# 极小项和极大项的关系



- $\neg m_i = M_{(2^n - 1 - i)} = M_{(i)\text{补}}$        $\neg M_i = m_{(2^n - 1 - i)} = m_{(i)\text{补}}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	$m_0$
$\neg P_1 \wedge P_2$	$m_1$
$P_1 \wedge \neg P_2$	$m_2$
$P_1 \wedge P_2$	$m_3$

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$M_0$
$\neg P_1 \vee P_2$	$M_1$
$P_1 \vee \neg P_2$	$M_2$
$P_1 \vee P_2$	$M_3$

$P_1$	$P_2$	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	$m_0$	$P_1 \vee P_2$	$M_3$
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	$m_1$	$P_1 \vee \neg P_2$	$M_2$
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	$m_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$M_1$
1	1	$P_1 \wedge P_2$	$m_3$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$M_0$



# 主析取范式与主合取范式转换

- 极小项和极大项的关系

$$\neg m_i = M_{(2^n - 1 - i)} = M_{(i)\text{补}} \quad \neg M_i = m_{(2^n - 1 - i)} = m_{(i)\text{补}}$$

- 主范式之间的转换

令  $A = \bigvee m_{il}$  则  $\neg A = \bigvee m_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})}$

$$A = \bigwedge M_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})\text{补}} = \bigwedge_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})\text{补}}$$

令  $A = \bigwedge M_{il}$  则  $\neg A = \bigwedge M_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})}$

$$A = \bigvee_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})\text{补}} = \bigvee_{(\{0,1,\dots,2^n-1\}-\{i_1,i_2,\dots,i_k\})\text{补}}$$

$P$	$Q$	$A$	
F	F	T	$m_0 M_3$
F	T	T	$m_1 M_2$
T	F	F	$M_1$
T	T	T	$m_3 M_0$



# 主范式的求法与举例

## 综合举例

$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$  求主析与主合取范式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \neg(P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \wedge (Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))) \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \\ &= m^{01X} \vee m^{010} \vee m^{10X} \vee m^{1X1}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{主析范式} = \bigvee_{2,3,4,5,7}$$



$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

## 列写真值表验算

$$\begin{aligned}\text{主合范式} &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\} - \{2,3,4,5,7\})^c} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\} - \{5,4,3,2,0\})} \\ &= \bigwedge_{1,6,7}\end{aligned}$$

$P$	$Q$	$R$	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式	补
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	$m_2$
0	1	1	0	0	0	1	$m_3$
1	0	0	1	0	1	1	$m_4$
1	0	1	1	0	1	1	$m_5$
1	1	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	1	1	$m_7$





# 主范式的求法与举例

$$\text{主析范式} = \bigvee_{2,3,4,5,7}$$

$$\begin{aligned}\text{主合范式} &= \bigwedge_{(\{0,1\dots 7\} - \{2,3,4,5,7\} \text{补})} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\} - \{5,4,3,2,0\})} \\ &= \bigwedge_{1,6,7}\end{aligned}$$



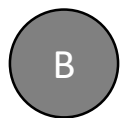
## 举例

$A = \bigvee_{0,1,4,5,7}$  求主合取范式



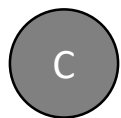
A

$$A = \bigwedge_{1,4,5}$$



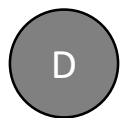
B

$$A = \bigwedge_{2,3,6}$$



C

$$A = \bigwedge_{4,5}$$



D

$$A = \bigwedge_{0,2,3}$$

提交



# 主析与主合之间的转换(简化方法)

## 举例

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \bigvee_{0,1,4,5,7} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\}-\{0, 1, 4, 5, 7\})^c} \\ &= \bigwedge_{(\{0,1,\dots,7\}-\{7, 6, 3, 2, 0\})} \\ &= \bigwedge_{1,4,5} \end{aligned}$$



# 主析与主合之间的转换(简化方法)

$$\begin{aligned}\text{已知 } A &= \bigwedge_{1,4,5} \\ &= \bigvee_{(\{0,1,\dots,7\}-\{1,4,5\})^c} \\ &= \bigvee_{(\{0,1,\dots,7\}-\{6,3,2\})} \\ &= \bigvee_{0,1,4,5,7}\end{aligned}$$



## 2.6 空公式（补充）

求 $P \vee \neg P$ 的主析取和主合取范式

主析取范式： $P \vee \neg P$

主合取范式：**空公式**

结论：永真式的主合取范式为空公式  
矛盾式的主析取范式为空公式



# 主(析取)范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值
- 判断公式的类型
- 判断两个命题公式是否等值
- 解决实际问题



# 求公式的成真(假)赋值

- 若公式A中含有 $n$ 个命题变项
  - 若A的主析取范式含 $s$ 个极小项, 则A有 $s$ 个成真赋值
  - 其余 $2^n-s$ 个赋值都是成假赋值

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

$P$	$Q$	$R$	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge \neg R$	$\neg P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	$M_7$
0	0	1	1	0	0	0	$M_6$
0	1	0	0	1	1	1	$m_2$
0	1	1	0	0	0	1	$m_3$
1	0	0	1	0	1	1	$m_4$
1	0	1	1	0	1	1	$m_5$
1	1	0	1	1	0	0	$M_1$
1	1	1	1	0	1	1	$m_7$



# 判断公式的类型

- $A$ 为重言式当且仅当 $A$ 的主析取范式含全部 $2^n$ 个极小项
- $A$ 为矛盾式当且仅当 $A$ 的主析取范式不含任何极小项
- $A$ 为可满足式当且仅当 $A$ 的主析取范式中至少含一个极小项





# 判断公式的类型-例1

$$\begin{aligned}& \neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \\&= \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q \\&= (P \wedge \neg Q) \wedge Q \\&= F\end{aligned}$$

矛盾式



## 判断公式的类型-例2

$$\begin{aligned} & P \rightarrow (P \vee Q) \\ &= \neg P \vee (P \vee Q) \\ &= (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge \\ &\quad (Q \wedge (\neg P \vee P)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \\ &\quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\ &= \vee_{0, 1, 2, 3} \end{aligned}$$

重言式



# 判断公式的类型-例3

$$\begin{aligned} & (P \vee Q) \rightarrow R \\ &= \neg (P \vee Q) \vee R \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \\ &= m^{00x} \vee m^{xy1} \\ &= \bigvee_{0, 1, 3, 5, 7} \end{aligned}$$

000
001
001
011
101
111

可满足



# 判断两个命题是否等值

- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$  与  $(P \wedge Q) \rightarrow R$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R = \bigvee_{1, 3, 4, 5, 7}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R = \bigvee_{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq (P \wedge Q) \rightarrow R$$



## 2.7 推理形式

主要内容：

- 介绍推理形式的结构以及重言蕴涵的概念；
- 给出基本推理公式以及证明推理公式的几种不同方法和途径；



## 2.7 推理形式

### 2.7.1 推理形式：

将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来得到推理形式，推理形式由**前提**和**结论**部分组成。

**前提真，结论必真的推理形式**为正确的推理形式。



## 2.7 推理形式

### 2.7.1 重言蕴含：

给定两个公式  $A$ ,  $B$ , 如果当  $A$  取值为真时,  $B$  就必取值为真, 便称  **$A$ 重言 (永真) 蕴涵 $B$** , 或称  $B$  是  $A$  的逻辑推论。并用符号  $A \Rightarrow B$  表示。



## 2.7 推理形式

### 2.7.1 重言蕴含：

需注意**重言蕴含** $\Rightarrow$ 与**普通蕴含** $\rightarrow$ 的区别

A重言蕴含B记作， $A \Rightarrow B$

注意：“ $\Rightarrow$ ”不是逻辑联接词

$A \Rightarrow B$  当然也不同于 $A \rightarrow B$  ！





# 重言蕴含举例

例1. 如果今天是周五, 那么我来上课。

今天是周五,  
所以我来上课。

设  $P$ : 今天是周五,  $Q$ : 今天我来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$$

前提真, 结论也为真, 是正确的推理。



# 重言蕴含举例

例2. 如果今天是周五，那么我来上课

今天不是周五

所以我不来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P \Rightarrow \neg Q$$

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！  
不是正确的推理！



## 2.7.3 重言蕴含几个结果

- (1) 如果 $A \Rightarrow B$ 成立, 若 $A$ 为重言式, 则 $B$ 也是重言式。
- (2) 若  $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 同时成立, 必有 $A=B$ ; 反之亦然。
- (3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ 同时成立, 则有 $A \Rightarrow C$
- (4) 若  $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 同时成立, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$
- (5) 若 $A \Rightarrow C$ 且 $B \Rightarrow C$ 同时成立, 则 $A \vee B \Rightarrow C$



# 重言蕴含的充要条件

## 定理2.8.1

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \rightarrow B$ 为重言式。

## 定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。



## 定理2.8.2

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。

证明:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg (A \wedge \neg B)$ , 因此,

“ $A \rightarrow B$ 是重言式”即等价于“ $A \wedge \neg B$ 是矛盾式”

爸爸努力学习, 我就努力学习!

爸爸在打游戏, 我干什么都是对的

注意:  $A \Rightarrow B$  中  $A$ 自身不能必假!

若 $A$ 永假, 则 $A \rightarrow B$ 肯定永真, 虽然 $A \Rightarrow B$ 也成立, 但已失去意义!



## 2.8 基本的推理公式

证明  $A \Rightarrow B$  的几种方法:

1. 证  $A \rightarrow B$  是重言式
2. 证  $A \wedge \neg B$  为矛盾式
3. 真值表法
4. 证  $\neg B \Rightarrow \neg A$  即反证法
5. 解释法
6. ....



# 基本推理公式

1.  $P \wedge Q \Rightarrow P$ ,      但  $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2.  $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$       1式的直接推论  $P \wedge \neg Q \Rightarrow P$
3.  $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$       1式的直接推论  $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4.  $P \Rightarrow P \vee Q$
5.  $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$       2式的逆否, 4式的推论。
6.  $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$       3式的逆否, 4式的推论。
7.  $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$       非 P, 而  $P \vee Q$  又成立, 只有 Q 成立
8.  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$       \*假言推理, 分离规则, 7式的变形
9.  $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$       7式的变形



# 基本推理公式

10. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	*三段论
11. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	类似10式
12. $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$	10式的推论
13. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$	10式的推论
14. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$	9式的推论
15. $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$	$P=F$ 时左=右, $P=T$ 时右=T
16. $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$	$P=T$ 时左=右, $P=F$ 时右=T





公式12：证明：

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$$

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$$

$$= ((P \vee Q) \rightarrow R) \wedge (P \vee Q)$$

$$= R$$

•  $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$  前提析取合并

$$1. P \wedge Q \Rightarrow P,$$

$$\text{但 } P \vee Q \not\Rightarrow P$$



## 公式13

证明:  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \\ &= (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg P \rightarrow R) \\ &\Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow S) \\ &= (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow S) \\ &\Rightarrow \neg Q \rightarrow S \\ &= Q \vee S \end{aligned}$$

10.  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

\*三段论



证明:  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \\ = & (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg Q) \\ \Rightarrow & (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \\ = & (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \\ \Rightarrow & R \rightarrow \neg P \\ = & \neg P \vee \neg R \end{aligned}$$



# 小结

- 推理形式

- 自然语句描述的推理关系 – 引入符号，抽象化并以条件式表示出来
- 重言蕴涵
- 重言蕴涵的5个结果

- 基本推理公式

- 16个?

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q \quad (\text{假言推理, 分离规则})$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R \quad (\text{三段论})$$



# 小结

- 基本推理公式

- 2个定理

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \rightarrow B$ 为重言式。

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。

## 推理的描述方法？



## 2.9-10 推理演算与归结推理

- 介绍基本的推理规则，给出推理演算的过程和方法，该部分内容是谓词逻辑推理演算的基础；
- 介绍用归结推理规则进行归结证明的过程与方法。



## 2.9 推理演算

- 出发点：  
直观地看出由前提 $A$ 到结论 $B$  的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。
  - 方法
    - (1) 引入几条推理规则
    - (2) 利用基本推理公式
- 从前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$  出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论 $B$ 。



## 2.9 推理演算

主要的推理规则：

- (1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提
- (2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提
- (3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项





## 2.9 推理演算

主要的推理规则：

- (1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提
- (2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提
- (3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项
- (4) 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换
- (5) 分离规则；由 $A$ 及 $A \rightarrow B$ 成立，可将 $B$ 分离出来
- (6) 条件证明规则。 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价（前提引入与附加前提引入）

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$$



例1 证明 $P \rightarrow R$ 是 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$ 的逻辑推论。

证明：

- |                      |                 |
|----------------------|-----------------|
| 1. $P \rightarrow Q$ | 前提引入            |
| 2. $P$               | 附加前提引入 (条件证明规则) |
| 3. $Q$               | 1、2分离           |
| 4. $Q \rightarrow R$ | 前提引入            |
| 5. $R$               | 3、4分离           |

主要的推理规则：

- 注：此题可直接使用推以简化证明步骤！
- (1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提
  - (2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提
  - (3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项
  - (4) 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换
  - (5) 分离规则；由 $A$ 及 $A \rightarrow B$ 成立，可将 $B$ 分离出来
  - (6) 条件证明规则。 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价 (前提引入与附加前提引入)



教材 例3: 证明  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

证明：

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $P \vee Q$             | 前提引入                      |
| 2. $\neg P \rightarrow Q$ | 1 置换 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换 |
| 3. $Q \rightarrow S$      | 前提引入                      |
| 4. $\neg P \rightarrow S$ | 2、3 三段论                   |
| 5. $\neg S \rightarrow P$ | 4 置换                      |
| 6. $P \rightarrow R$      | 前提引入                      |
| 7. $\neg S \rightarrow R$ | 5、6 三段论                   |
| 8. $S \vee R$             | 7 置换                      |

由该例可见，将  $P \vee Q$  置换成  $\neg P \rightarrow Q$  更便于推理



# 推理演算举例

教材 P34 例5: 证明

$$\begin{aligned} & (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)) \wedge ((Q \rightarrow P) \vee \neg R) \wedge R \\ & \Rightarrow (P \leftrightarrow Q) \end{aligned}$$



## 推理演算举例：

$$(\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)) \wedge ((Q \rightarrow P) \vee \neg R) \wedge R \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

1.  $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$

2.  $R \rightarrow (Q \rightarrow P)$

3.  $R$

4.  $Q \rightarrow P$

5.  $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$

6.  $(R \vee S) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

7.  $R \vee S$

8.  $P \rightarrow Q$

9.  $P \leftrightarrow Q$

前提引入

1 置换

前提引入

2、3 分离

前提引入

5 置换

3 + 基本公式

6、7 分离

4、8

$$4. P \Rightarrow P \vee Q$$

(注：教材中的证明用了15个步骤，  
这里用一种更为简洁的方法)

# 推理演算举例：条件证明规则



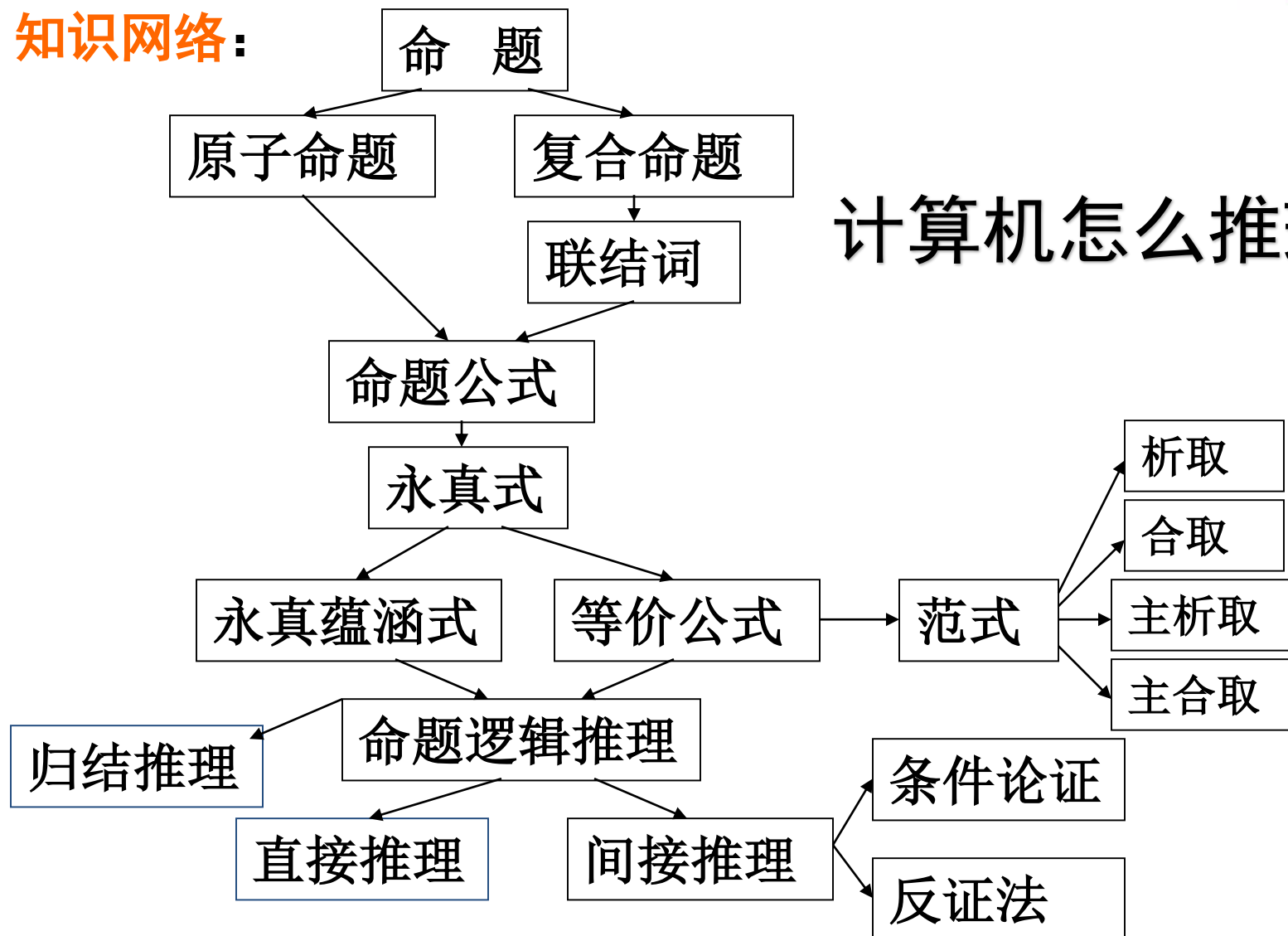
例题6:  $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明	(1) $R$	附加前提引入
	(2) $\neg R \vee P$	前提引入
	(3) $P$	(1)(2)分离规则
	(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提引入
	(5) $Q \rightarrow S$	(3)(4)分离规则
	(6) $Q$	前提引入
	(7) $S$	(5)(6)分离规则
	(8) $R \rightarrow S$	条件证明规则



# 第一章和第二章 小结

知识网络:



计算机怎么推理？