线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________ 专业__________ 考试时间__2017.4.22

一. **解答下列各题**(8分×5=40分)

1. 设 A 为3阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵. 已知 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解：$|(3A)^{-1}-2A^*|=|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A|^{-1}=-16/27.$

2. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2=-A$. 证明：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

解：由 $A^2=-A$ 得 $A^2+A=A(A+E)=A(E+A)=O$，故 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)\leq n$.
又有 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=\mathrm{r}(-A)+\mathrm{r}(E+A)\geq \mathrm{r}(-A+(E+A))=\mathrm{r}(E)=n$.
故有 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

3. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶的可逆方阵，C 是 $m\times n$ 的矩阵，O 是零矩阵. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

证：设 $D=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 满足 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$，

得 $\begin{cases} XC+YB &= E, \\ XA &= O, \\ ZC+WB &= O, \\ ZA &= E. \end{cases}$，利用 A、B 可逆解得 $\begin{cases} X=O, \\ Y=B^{-1}, \\ Z=A^{-1}, \\ W=-A^{-1}CB^{-1}. \end{cases}$，

故 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆，且逆矩阵为 $D=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ，$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3}-A$.

解：易知 $P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
因为 $P^{-1}(A^{-3}-A)P=(P^{-1}AP)^{-3}-P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=O$，故 $A^{-3}-A=O$.

5. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $r<n$，证明存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B 使得 $AB=O$，这里 O 表示零矩阵.

证：因为 A 的秩为 $r<n$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含 $n-r$ 个列向量，且线性无关，设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$.
令 $B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_1,\cdots,\eta_r)$，其中 $\eta_1=\cdots=\eta_r=\theta$，则 $\mathrm{r}(B)=n-r$，且 $AB=O$.

二.(12分) 若方阵 X 满足 $X^2=X$，则称 X 是幂等的. 设 A 和 B 是同阶的幂等方阵，证明 $(A+B)$ 是幂等的当且仅当 $AB=BA=O$，这里 O 表示零矩阵.

证：因为 $A^2=A,B^2=B$，所以有
$(A+B)^2=A+B\Leftrightarrow A+AB+BA+B=A+B\Leftrightarrow AB+BA=O.$
分别对 $AB+BA=O$ 左乘 A 和右乘 A 得到 $AB+ABA=O,ABA+BA=O$.
从而得 $AB=BA$，又由 $AB+BA=O$ 得 $AB=BA=O$.
易知 $AB=BA=O$ 可得 $AB+BA=O$，故 $(A+B)^2=A+B$ 当且仅当 $AB=BA=O$.

三. (12分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = a_1 \\ x_2 - x_3 & = a_2 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ x_{n-1} - x_n & = a_{n-1} \\ x_n - x_1 & = a_n \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 在有解的情况下，求方程组的解集.

证："$\Rightarrow$" 设有解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足方程组，将方程组的所有方程相加得 $0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
"$\Leftarrow$" 将方程组写成矩阵形式：$Ax = b$，

其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 增广矩阵 $B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ -1 & & & & 1 & a_n \end{array}\right)$.

将 B 的所有行加到最后一行，利用 $a_1 + \cdots + a_n = 0$ 得 $B \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B'$.

显然 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = n - 1$，方程组有解.

易知 $B' \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ & 1 & \cdots & 0 & -1 & a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，故方程组的一个特解为：$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$，

对应齐次方程组的基础解系为： $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$，从而方程组的解集为：$\gamma + k\alpha, k \in R$.

四.(12分) 解带参数方程组 $\begin{cases} x_1 + (\lambda^2 + 1)x_2 + 2x_3 & = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 1)x_3 & = 0, \\ x_1 + (2\lambda + 1)x_2 + 2x_3 & = 2. \end{cases}$

解：对方程组的增广矩阵作变换

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda^2 + 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda + 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda + 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right)$.

若 $\lambda \neq 0, \lambda \neq 2$，则 $B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$，故方程组有唯一解：$\begin{pmatrix} -1/\lambda \\ 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

若 $\lambda = 2$，则 $B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 21/8 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，故方程组有无穷多解，通解为：$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

若 $\lambda = 0$，则 $B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$，因为 $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(B)$，故方程组无解.

五.(12分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}$.

解：将行列式的第 n 列两两交换到第1列，然后将新的行列式的第 n 列两两交换到2列，一直交换下去，直到将行列式的第 n 列交换到第 $n-1$ 列.

共交换了：$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$，得到

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n(n-1)/2}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a-b & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

六.(12**分**) 设 A 和 X 为 n 阶方阵，且满足 $AX=A+2X$.

1. 证明：$AX=XA$;
2. 若 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$X$ 是三阶未知方阵，求解矩阵方程 $AX=A+2X$.

1. 证：$AX=A+2X \Rightarrow AX-2X-A=O \Rightarrow \dfrac{1}{2}(A-2E)(X-E)=E$.

   故 $\dfrac{1}{2}(A-2E)=(X-E)^{-1}$，从而 $(X-E)\dfrac{1}{2}(A-2E)=\dfrac{1}{2}(XA-2X-A+2E)=E$，

   即 $XA-2X-A=O=AX-2X-A$，于是 $AX=XA$.

2. 解：移项得 $(A-2E)X=A$，于是

$$\begin{aligned} (A-2E,A) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right). \end{aligned}$$

   故 $X=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.