考试科目名称 离散数学期中测验参考解答与评分标准

考试方式：闭 卷 考试日期 2022 年 5 月 4 日 教师________

系（专业） 计算机科学与技术系 年级_____ 班级________

一、（本题满分 12 分）

请运用谓词逻辑表示下列已知和结论的陈述，并证明结论.

已知：

(1) "疫情期间，所有要进校的人均需要满足居家隔离 14 天或者集中隔离 7 天的条件。"

(2) "所有居家隔离 14 天的人均需要有固定的住所。"

(3) "张三没有固定的住所，且张三要在疫情期间进校。"

结论："张三需要被集中隔离 7 天。"

参考答案:

对论域D（全体人的集合）设置谓词$A(x)$: x要在疫情期间进校, $B(x)$: x需要居家隔离 14 天, $C(x)$: x需要集中隔离 7 天, $D(x)$: x有固定住所. (2 分)

各前提表示如下: (1) $\forall x: A(x) \to B(x) \vee C(x)$; (2) $\forall x: B(x) \to D(x)$; (3) 令个体a表示张三, $\neg D(a) \wedge A(a)$. 结论表示为: $C(a)$. (4 分)

推理过程:

1. $A(a) \to B(a) \vee C(a)$ 全称例示(由前提 1)
2. $A(a)$ 化简(由前提 3)
3. $B(a) \vee C(a)$ 假言推理(由 1)
4. $B(a) \to D(a)$ 全称例示(由前提 2)
5. $\neg D(a)$ 化简(由前提 3)
6. $\neg B(a)$ 取拒式(由 4,5)

7. $C(a)$　　　　　析取三段论(由 3, 6) (6 分)

如未写理由，只要推理过程清晰可给全分，如推理过程不清楚且未写理由，酌情扣 2-4 分。

二、（本题满分 10 分）

证明：m是大于1的正整数，若$(m-1)!+1$可被m整除，则m为质数.

参考答案：

假设 m是合数，那么 m 必有大于 1 小于 m 的质因子 $p, p|m$. （4 分）

由于 $m \mid (m-1)!+1$，所以 $p \mid (m-1)!+1$. （3 分）

但 $p \mid (m-1)!$，得到 p 只能为 1 ,与假设矛盾. （3 分）

指出用反证法证明可得 2 分。

三、（本题满分 10 分）

今有方程 $X \times Y = (X \vee Y) \times (X \wedge Y)$，其中未知整数$X, Y \in [0, 31]$，$\times$是普通乘法运算，$X \vee Y$表示变量$X$和$Y$对应的二进制数的按位或运算，$X \wedge Y$表示变量$X$和$Y$对应的二进制数的按位与运算.

(1) 证明：当整数$X < Y$时，上述方程等价于方程 $X \wedge Y = X$（即方程具有相同的解集）；

(2) 求该方程有多少组不同的解.

参考答案：

(1)

当$X < Y$时，不难发现

$$X \vee Y = X + d, \qquad X \wedge Y = Y - d \ (*)$$

其中$d_i = 1$当且仅当$X_i = 0 \wedge Y_i = 1$(下标表示二进制数的第i位). (1 分)

如果$X \wedge Y = X$, 则 $d = Y - X$，从而有$X \vee Y = Y$. 此时原方程显然成立. 即方程 $X \wedge Y = X$的解也是原方程的解 (1 分)

由(*)，原方程化为$X \times Y = (X + d) \times (Y - d)$，进一步化简得到

$$d\big(d - (Y - X)\big) = 0$$

即$d=0$或$d=Y-X$. 如果$d=0$, 则表明在对于每一个二进制位i, 都有$X_i \geq Y_i$, 则$X \geq Y$与假设矛盾. 所以只有$d=Y-X$成立. 此时$X \wedge Y = X$. 所以原方程的解也是方程$X \wedge Y = X$的解. (2 分)

综上, 当$X < Y$时, 原方程与方程$X \wedge Y = X$等价.

(2)

当$X=Y$时, 显然所有的(X,Y)都是原方程的解, 共有 32 组. (1 分)

当$X<Y$时, 即求方程$X \wedge Y = X$的解的个数.

$X \wedge Y = X$表明: 对于X为1的二进制位, Y的相应位一定也为1; 对于X为0的二进制位, Y的相应位可以任意选取(但不能全部为0, 因为$X \neq Y$).

假设X有k个为1的二进制位, 符合要求的解的数量为

$$C(5,k) \times (2^{(5-k)}-1) \quad （2 分）$$

对于$X, Y \in [0,31]$, k可取$[0,5]$, 于是解的总数为

$$\sum_{k=0}^{5} C(5,k) \times \left(2^{(5-k)}-1\right) = 211$$

根据对称性, 当$X>Y$时解的数量也是211. (2 分)

于是方程所有整数解的总数为$211 \times 2 + 32 = 454$. (1 分)

思路正确但计算错误酌情扣 2—3 分。

四、（本题满分 12 分）

设R是非空有限集合A上的一个等价关系，A/R 是A关于R的商集，$|A|=n$, $|R|=r$, $|A/R|=t$.

(1) 设$A/R=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, 证明：$\bigcup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) = R$;

(2) 证明：$r \cdot t \geq n^2$.

参考答案:

(1) 证明:

$A/R=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$，设$|A_i|=n_i$，任取序偶$\langle x,y\rangle$，有：

$$\langle x,y\rangle\in\bigcup_{i=1}^{t}(A_i\times A_i)\Leftrightarrow\exists i(i\in\{1,2,\cdots t\}\wedge\langle x,y\rangle\in A_i\times A_i)$$

$$\Leftrightarrow\exists i(i\in\{1,2,\cdots t\}\wedge x\in A_i\wedge y\in A_i)\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R$$

(4 分)，语言叙述只要合理也可。

（2）证明：

根据商集的定义，商集中各等价类$A_1,A_2,\cdots,A_t$均两两不相交，

于是$\forall_{1\le i<j\le t}(A_i\times A_i)\cap(A_j\times A_j)=\emptyset$. (2 分)

结合(1)中结论，有$\sum_{i=1}^{t}n_i^2=r$. (2 分)

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有$(\sum_{i=1}^{t}n_i)^2\le t\cdot\sum_{i=1}^{t}n_i^2=r\cdot t$. (2 分)

又因$\sum_{i=1}^{t}n_i=n$,即得到：$r\cdot t\ge n^2$. (2 分)

五、（本题满分 12 分）

某左轮手枪的弹巢(即弹仓)最多可装六发子弹，现在将两发子弹随机放入弹巢，然后随机旋转转轮.（扣动扳机后，如果弹巢的当前位置有子弹则必被击发射出.同时，无论是否击发，转轮都会顺时针旋转到下一个相邻位置.）

(1) 扣动扳机，射出子弹的概率是多少？

(2) 在第一次没有射出子弹的情况下直接再扣动一次扳机，则第二次射出子弹的概率是多少？

(3) 如果已知两颗子弹被放入了弹巢的相邻位置， 上面两个问题的答案会如何变化？

参考答案：

(1) 六个弹仓中随机位置有两发子弹，随机选择一个初始位置，击发的概率为$P_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. (3 分)

(2) 第一次未击发，排除了一个空的弹仓，剩下两发子弹在五个弹仓中，那么第二次击发的概率为$P_2=\frac{2}{5}$. (3 分)

或者分类讨论：随机将两颗子弹放入两个弹仓，则这两颗子弹在

转轮中的位置关系有三种情况：相邻，相间，相对，相应的概率分别是$\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}$. 对于相邻的情况，第一次未击发，说明初始位置在四个空弹仓之一；在四个空弹仓中，只有一个空弹仓在顺时针方向与一发子弹相邻，如果初始位置在这个空弹仓，那么第二次将会击发. 因此第二次击发的概率为$\frac{1}{4}$. 类似地可以得到相间和相对的情况下，第二次击发的概率均为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，于是同样有

$$P_2=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}.$$

(3) 无论子弹在转轮中的位置如何，对于第一次击发的概率都没有影响，仍然为$P_1=\frac{1}{3}$. (3 分)

根据上面的分类讨论，如果子弹在两个相邻的弹仓，则在第一次未击发的情况下，第二次击发的概率变为$P_2'=\frac{1}{4}$. (3 分)

若思路合理但计算错误每步可酌情给 1—2 分。

六、（本题满分 12 分）

设A是有限集合，$|A|=n$，试求:

(1) A上有多少种自反的二元关系？

(2) A上有多少种既不是自反也不是反自反的二元关系？

(3) A上有多少种对称关系？

(4) A上有多少种反对称关系？

参考答案：

(1) $2^{n(n-1)}$ （3 分）

(2) $2^{n^2}-2^{n^2-n+1}$ （3 分）

(3) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ （3 分）

(4) $2^n 3^{n(n-1)/2}$ （3 分）

如有过程，计算错误每步酌情给 1-2 分，无过程答案错得 0 分。

七、（本题满分 12 分）

设长度为n（n是大于2的整数）的$0-1$串构成的集合为S，定义计算串中“1”的个数的函数为f，并定义关系R如下：两个长度为n的串a,b满足aRb，当且仅当$f(a) \le f(b)$ 且 $a \wedge b = a$，其中$\wedge$为按位与运算. 例如：$a = 001$, $b = 011$满足aRb，而$a = 100$, $b = 011$则不满足.

(1) 证明：R是S上的偏序关系；

(2) 画出$n = 4$时的哈斯图；

(3) 判断偏序集(S, R)是否构成格，并说明理由.

参考答案:

(1) 因为 $f(a) = f(a)$，且 $a \wedge a = a$，显然满足aRa，所以是自反的. （1 分）

假设字符串 a 和 b 满足 aRb 且 bRa，因此 $a = a \wedge b = b \wedge a = b$，所以是反对称的. （1 分）

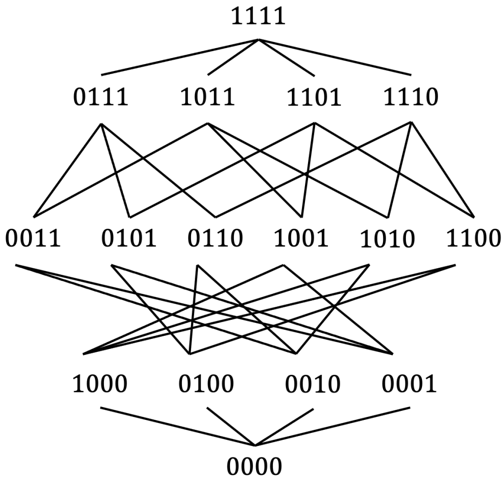
设存在字符串为c，满足 aRb 且 bRc. 此时 $f(a) \le f(b) \le f(c)$，且 $a \wedge b = a, b \wedge c = b$. 由于

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c,$$

$a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$，故$a \wedge c = a$. （1 分）

从而 aRc 也满足，所以是传递的. （1 分）

(2)



（4 分），画错酌情扣分

(3) 对于任意长度为n的两个串 a, b，由于存在$\mathbf{1} = 11\dots11$ (n个1)和 $\mathbf{0} = 00\dots00$(n个0)，有$f(\mathbf{0}) \le f(a) \le f(\mathbf{1}), f(\mathbf{0}) \le f(b) \le f(\mathbf{1})$ ，且 $b \wedge \mathbf{0} = a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \wedge \mathbf{1} = b \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}$，因此满足：$0Ra$，$0Rb$，$aR1$，$bR1$. 故 a, b 必存在最小上界和最大下界，且 $\mathbf{0}$为全下界，$\mathbf{1}$为全上界，所以偏序集(S, R)是格.（4 分），缺少全上界全下界扣 2 分。

八、（本题满分 10 分）

设R是非空集合A上的二元关系，且R是自反和传递的.

证明：$R^n = R$，其中n为大于 1 的整数.

参考答案：

根据 R^n定义可知，对于 $\forall(a,b) \in R^n$，存在$t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in A$，满足 $(a, t_1), (a, t_2), \dots, (a, t_{n-1}), (t_{n-1}, b) \in R$，由$R$的传递性可知，$(a,b) \in R$，故$R^n \subseteq R$.（5 分）

对于$\forall(a,b) \in R$，取 $(b,b) \in R$，则 $(a,b), (b,b), \dots, (b,b) \in R$（共 n-1 个 (b,b))，从而有$(a,b) \in R^n$，故$R \subseteq R^n$.（5 分）

综上，$R = R^n$

九、（本题满分 10 分）

给定函数$f:A\to B$，$g:C\to D$. 已知$f\subseteq g$（提示：函数也是关系，亦是集合），并且$\operatorname{ran} g\subseteq \operatorname{ran} f$（ran 表示函数的值域）. 证明：如果$g$是单射，则$A=C$.

参考答案：

因为 $f\subseteq g$，则 $A\subseteq C$. （2 分）

当 g 是单射时，若 $A\neq C$，则存在 $x\in C$, $x\notin A$，使得 $g(x)\in \operatorname{ran} g$ 存在. （2 分）

又 $\operatorname{ran} g\subseteq \operatorname{ran} f$，故 $g(x)$ 也在 $\operatorname{ran} f$ 中. 则存在 $z\in A$, $f(z)=g(x)$. （2 分）

由于 $A\subseteq C$，因此 $g(z)$ 也存在，且 $g(z)=g(x)$. （2 分）

又 g 为单射，故 $x=z\in A$. （2 分）

假设不成立， $A=C$.