微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2023.6.14)

一、1. $\mathrm{d}u\Big|_{(1,-1,1)} = (\mathrm{e}+1)\mathrm{d}x + (-2\mathrm{e}+1)\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$;　　2. $2a^2(\pi-2)$;　　3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n} = 1$.

二、1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\Big)x^n,\ x\in(-1,1)$.　2. $y^4(C\mathrm{e}^{-4x}-x+\dfrac{1}{4}) = 1$.　3. $y = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^{4x}+\dfrac{x^3\mathrm{e}^{4x}}{6}$.

三、$x-y+2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.　　四、$\dfrac{32\pi}{5}$.

五、$p>1$ 时绝对收敛；$\dfrac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛；$0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时发散.

六、$f(x) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1]$;　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2} = \dfrac{f(1)-1}{2} = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$.

七、1. $f(x) = \dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$;　　2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$;　　3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

八、$y = C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\ln(1+\mathrm{e}^x)-\dfrac{1}{2}\cos x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2024.6.17)

一、1. 收敛半径 $R=\dfrac{1}{3}$. 收敛区域 $[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$.　　2. $-\dfrac{5}{26}$.　　3. $\dfrac{4}{15}\pi$.

二、1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \pi$.

2. $y = C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\ln|x|$.　　3. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}} = C$.

三、1. $\dfrac{1}{4}\pi R^4$.　　2. 2π.　　3. $\dfrac{46}{15}$.

四、收敛域为 $[-1,1]$.　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \arctan x, (-1\le x\le 1)$.　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

五、$p>1, s>0$ 或 $p=1, s>1$ 时, 绝对收敛; $p=1, 0<s\le 1$ 或 $p<1, s>0$ 时, 条件收敛.

六、$f(u) = C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}-2u$.

七、(1) $f(x) = \dfrac{2}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}\cos nx, (-\pi\le x\le\pi)$.　　(2) $\dfrac{\pi^2}{12}$.　　(3) $\dfrac{\pi^2}{8}$.

八、(1) 不一定收敛，例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散.

(2) $\{a_n\}$ 单调减少并且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, 故 $a>0$.

则 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时 $a_n>\dfrac{a}{2}$, 从而 $0<\dfrac{1}{1+a_n}<\dfrac{1}{1+\frac{a}{2}}$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{1+\frac{a}{2}}\Big)^n$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1}{a_n+1}\Big)^n$ 收敛.