离散期末复习　第八周前

Problem 1

试找出一个含命题变元 p、q 和 r 的复合命题，在 p、q 和 r 中恰有两个为真时该命题为真，否则为假。[提示：构造合取式的析取。将使命题为真的每一种真值组合构成一个合取式。每个合取式都应包含三个命题变元或它们的否定。]

答案： 易得命题 $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ 符合要求。

Problem 2

用谓词逻辑表述以下命题，并给出其逻辑推理过程。

(1) 硬的饼都不好吃，不硬的饼都是甜的，所以好吃的饼都是甜的。

(2) 上了艺术课的高中生都很酷，有的聪明的高中生并不酷，所以有的聪明的高中生并没上艺术课。

答案： (1) x 论域为所有饼，$A(x)$: 饼 x 是硬的，$B(x)$: 饼 x 好吃，$C(x)$: 饼 x 是甜的

硬的饼都不好吃 $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

不硬的饼都是甜的 $\forall x(\neg A(x) \rightarrow C(x))$

所有好吃的饼都是甜的 $\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$

推理过程：$\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$　前提引入

$A(c) \rightarrow \neg B(c)$, 任意 c　全称示例

$\forall x(\neg A(x) \rightarrow C(x))$　前提引入

$\neg A(c) \rightarrow C(c)$, 任意 c　全称示例

$\neg B(c) \vee C(c)$, 任意 c　化简

$\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$　全称生成

(2) x 论域为所有高中生，$A(x)$ 表示高中生 x 上了艺术课，$B(x)$ 表示高中生 x 很酷，$C(x)$ 表示 x 是聪明的

上了艺术课的高中生都很酷 $\forall x(A(x) \to B(x))$

有聪明的高中生并不酷 $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$

有的聪明的高中生并没有上艺术课 $\exists x(C(x) \land \neg A(x))$

推理过程:

$\exists x(C(x) \land \neg B(x))$ 前提引入

$C(c) \land \neg B(c)$ 存在示例

$\forall x(A(x) \to B(x))$ 前提引入

$A(c) \to B(c)$ 全称示例

$\neg A(c) \land C(c)$ 化简

$\exists x(C(x) \land \neg A(x))$ 存在生成

Problem 3

今于我班诸生之中，遴选俊彦若干（不少于二人），排成一列纵队. 试以我班学生全体之集合为个体域，仅通过以下 2 个谓词:

1. 相等谓词“$=$”: $x = y$ 表示 x 与 y 是同一个学生;
2. 谓词 $F(x, y)$: 表示 x, y 均在纵队中，且 x 排在 y 之前.

定义下列谓词（前面小题中已定义过的谓词在后面小题中可直接使用）:

1. 学生 x 在纵队中

   $Q(x) \triangleq \exists y F(x, y) \lor F(y, x)$

2. 学生 x 排在队中

   $H(x) \triangleq Q(x) \land \forall y(\neg F(y, x))$

   $\forall y(\neg(y = x) \land Q(y)) \to F(x, y)$

3. 在队列中学生 x 紧随着 y

   $L(x, y) \triangleq F(y, x) \land \neg \exists z(F(y, z) \land F(z, x))$

4. 学生 x 排在第二位. 可以使用 (2)(3) 两题谓词的复合得到，也可以自己再定义

   $S(x) \triangleq \exists y(H(y) \land L(x, y))$ 或 $\exists y(F(y, x) \land \forall z(F(z, x) \to y = z))$

Problem 4

用谓词逻辑演算描述出以下推理过程：
"没有一个女学生没有通过离散数学考试，每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试，学生小明很聪明，但是没有通过离散数学考试，所以小明一定不是女生且不够认真。"

答案： 令 $F(x)$ 代表学生 x 是女生，$P(x)$ 代表 x 通过了离散数学考试，$H(x)$ 代表学生 x 足够认真，$C(x)$ 代表学生 x 聪明，a 表示学生小明，则题中前提可表示为
前提 1：$\neg\exists x(F(x) \wedge \neg P(x))$
前提 2：$\forall x(H(x) \wedge C(x) \rightarrow P(x))$
前提 3：$C(a), \neg P(a)$
结论可表示为：$\neg F(a) \wedge \neg H(a)$
推理过程如下：

1. $\forall x(\neg F(x) \vee P(x))$ 前提 1 的逻辑等价
2. $\neg F(a) \vee P(a)$ (1) 的全称例示
3. $H(a) \wedge C(a) \rightarrow P(a)$ 前提 2 的全称例示
4. $\neg P(a)$ 前提 3
5. $\neg(H(a) \wedge C(a))$ (3)(4) 拒取式
6. $\neg H(a) \vee \neg C(a)$ (5) 的逻辑等价
7. $C(a)$ 前提 3
8. $\neg H(a)$ (6)(7) 消解
9. $\neg F(a)$ (2)(4) 的消解
10. $\neg F(a) \wedge \neg H(a)$ (8)(9) 的合取引入

Problem 5

试符号化以下各命题，并根据前提推证结论是否有效。前提：

1. "有的病人喜欢所有的医生。"
2. "没有一个病人喜欢庸医。"

结论："没有医生是庸医。"

答案： 定义 $P(x)$ 表示 x 是病人，$D(x)$ 表示 x 是医生，$Q(x)$ 表示 x 是庸医，$L(x,y)$ 表示 x 喜欢 y。前提：

1. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)))$

2. $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(x,y)))$

结论：$\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$

(a) $P(c) \wedge \forall y(D(y) \to L(c,y))$　（1）的存在例示

(b) $P(c) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(c,y))$　（2）的全称例示

(c) $P(c), \forall y(D(y) \to L(c,y))$　（a）化简

(d) $D(y) \to L(c,y)$　（c）全称例示

(e) $\forall y(Q(y) \to \neg L(c,y))$　（b）（c）假言推理

(f) $Q(y) \to \neg L(c,y)$　（e）的全称例示

(g) $L(c,y) \to \neg Q(y)$　（f）的等价命题

(h) $D(y) \to \neg Q(y)$　（d）（g）假言三段论

(i) $\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$　（h）的全称生成

Problem 6

请运用命题逻辑进行表示，并证明下列推理。

1. “今天海面不平稳并且紫外线不强”

2. “若今天海面不平稳或紫外线很强，则探险队不出海”

3. “若探险队不出海，则探险队将修理船只”

4. “若探险队修理船只，则探险队在晚上发布行程记录”

证明结论“探险队在晚上发布行程记录”。

答案： p：今天海面平稳，q：今天紫外线不强，r：探险队出海，s：探险队修理船只，t：探险队在晚上发布行程记录

表示：$\neg p \wedge q$ ，$\neg p \vee \neg q \to \neg r$ ，$\neg r \to s$ ，$s \to t$ ，证明 t

1. $\neg p \wedge q$　(前提 1)

2. $\neg p$　(1) 化简

3. $\neg p \vee \neg q$　(2) 析取引入

4. $\neg r$　(前提 2: $\neg p \vee \neg q \to \neg r$, 由 (3) 和假言推理)

5. s (前提 3: $\neg r \to s$, 由 (4) 和假言推理)

6. t (前提 4: $s \to t$, 由 (5) 和假言推理)

Problem 7

递归定义双斐波那契数列 $D_0, D_1, D_2, \ldots$ 如下:
$D_0 = 1$
$D_1 = 1$
$D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}\ n \geq 2$
试证明:

1. 所有双斐波那契数均为奇数;

2. 任何两个相邻的双斐波那契数均互质.

答案: 1. **归纳基础**: $D_0 = 1, D_1 = 1$.
归纳步骤: 假设 D_k 为奇数（k 为整数且 $k \geq 1$）, 则 D_{k+1} 也为奇数。
证明: 已知 $D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1}$, 由假设得 $2D_k$ 为偶数, D_{k-1} 为奇数, 则 D_{k+1} 为奇数。综上, 命题得证。

2. **方法一: 数学归纳法 (直接证明)**
归纳基础: D_0 与 D_1 互质, $\gcd(D_1, D_0) = 1$
归纳步骤: 假设 $\gcd(D_k, D_{k-1}) = 1$（k 为整数且 $k \geq 1$）, 则 $\gcd(D_{k+1}, D_k) = 1$. 由最大公约数的辗转相除法得: $\gcd(D_{k+1}, D_k) = \gcd(2D_k + D_{k-1}, D_k) = \gcd(D_k, D_{k-1}) = 1$. 综上, 命题得证。

方法二: 数学归纳法 (反证)
归纳基础: D_0 与 D_1 互质
归纳步骤: 假设 D_{k-1} 与 D_k 互质 (k 为整数且 $k \geq 1$), 则 D_k 与 D_{k+1} 也互质。假设 D_k 与 D_{k+1} 不互质, 则 D_{k-1} 与 D_k 也不互质。D_k 与 D_{k+1} 不互质, 则两者的最大公约数为 p (p 为整数且 $p > 1$), 那么存在正整数 a, b 使得 $D_k = a \times p, D_{k+1} = b \times p$. 已知 $D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1}$, 则 $D_{k-1} = (b - 2a) \times p > 0$, 可得 D_{k-1} 与 D_k 存在大于 1 的公因素 p, 则两者不互质。综上, 命题得证。

Problem 8

证明或反驳: 对于集合 A, B, C, 如果 $\forall x, x \in A \to (x \in B \to x \in C)$ 永真, 则有 $A \cap B \subseteq C$.

答案: $x \in A \to (x \in B \to x \in C)$ 等价于 $(x \notin A) \vee (x \notin B) \vee (x \in C)$, 又等价于 $\neg(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C)$ 又等价于 $x \in A \wedge x \in B \to (x \in C)$
对于任意的 $x \in A \cap B$, 由上式永真知 $x \in C$ 为真。因此 $A \cap B \subseteq C$.

Problem 9

对于任意一个十进制数，其各位数字之和与其本身模 9 同余。例如：$763 \equiv 7+6+3 \pmod 9$

但对于十六进制表示则不然，例如：$763_{16} \equiv 7 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16 + 3 \equiv 1 \neq 7+6+3 \pmod 9$

a). 十六进制下，对于哪些大于 1 的正整数 k ，满足任意数各位相加之和与该数模 k 同余?

b). 将你的结论推广到任意 b 进制数，并给出证明.

答案： a). 若 $16 \equiv 1 \pmod k$，则 $16^n \equiv 1 \pmod k$

从而 $a_n 16^n \equiv a_n \pmod k$

因此，于 $k = 3, 5, 15$ 满足要求。

b). 对于 $b-1$ 的不等于 1 的正因子 k，b 进制数的各位相加之和与该数模 k 同余。证明要点如下：

$b \equiv 1 \pmod k$

$a_n b^n \equiv a_n \pmod k$

Problem 10

试证明：正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同.

答案：

方法一：费马小定理

5 是质数，根据费马小定理，$n^5 \equiv n \pmod 5$

又易见 $n^5 \equiv n \pmod 2$

于是 2 和 5 的最小公倍数 10 整除 $n^5 - n$, 即正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同。

方法二：罗列 n 的个位

- 若 n 的个位为 0，假设 $n = 10k (k \in \mathbb{N}^*)$ ，又 $0^5 = 0$ ，则 n^5 的个位一定为 0
- 若 n 的个位为 1，假设 $n = 10k + 1 (k \in \mathbb{N})$ ，又 $1^5 = 1$ ，则 n^5 的个位一定为 1
- 若 n 的个位为 2，假设 $n = 10k + 2 (k \in \mathbb{N})$ ，又 $2^5 = 32$ ，则 n^5 的个位一定为 2
- 若 n 的个位为 3，假设 $n = 10k + 3 (k \in \mathbb{N})$ ，又 $3^5 = 243$ ，则 n^5 的个位一定为 3
- 若 n 的个位为 4，假设 $n = 10k + 4 (k \in \mathbb{N})$ ，又 $4^5 = 1024$ ，则 n^5 的个位一定为 4
- 若 n 的个位为 5，假设 $n = 10k + 5 (k \in \mathbb{N})$ ，又 $5^5 = 3125$ ，则 n^5 的个位一定为 5

- 若 n 的个位为 6，假设 $n=10k+6(k\in\mathbb{N})$ ，又 $6^5=7776$ ，则 n^5 的个位一定为 6
- 若 n 的个位为 7，假设 $n=10k+7(k\in\mathbb{N})$ ，又 $7^5=16807$ 则 n^5 的个位一定为 7
- 若 n 的个位为 8，假设 $n=10k+8(k\in\mathbb{N})$ ，又 $8^5=32768$ 则 n^5 的个位一定为 8
- 若 n 的个位为 9，假设 $n=10k+9(k\in\mathbb{N})$ ，又 $9^5=59049$ 则 n^5 的个位一定为 9

综上，正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同。

方法三：数学归纳法

基础步骤：当 $n=1$ 时，命题显然成立

归纳步骤：假设当 $n=k(k\in\mathbb{N}^*)$ 时，命题成立，即 k 和 k^5 的个位相同。则当 $n=k+1$ 时，$n^5=(k+1)^5=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$, 其中 $10k^3+10k^2$ 与个位无关，即只需考察 k^5+5k^4+5k+1 其中 $5k^4+5k=5k(k^3+1)$ ，若 k 为奇数，(k^3+1) 为偶数，显然 $5k^4+5k$ 可被 10 整除，若 k 为偶数，则 $5k^4+5k$ 也可被 10 整除，即 $5k^4+5k$ 不影响 $(k+1)^5$ 的个位，所以 $(k+1)^5$ 的个位和 k^5+1 的个位相同。又由假设 k 和 k^5 的个位相同, 则 $(k+1)^5$ 的个位和 $k+1$ 相同，即 $n=k+1$ 时命题也成立。根据数学归纳法，正整数 n 和 n^5 的最后一位必相同

Problem 11

Fermat 素数为 $F_n=2^{2^n}+1,\ n\geq 0.$

1. 试用数学归纳法证明: $\prod_{r=0}^{n-1}F_r=F_n-2\ (n>0).$
2. 试基于上述结论证明: 对于任意两个不同的自然数 $m<n$, 总有 $\gcd(F_m,F_n)=1.$

答案： 1) 基础步骤： $\prod_{r=0}^{0}F_r=2^{2^0}+1=3=2^{2^1}+1-2=F_1-2$;
归纳步骤：假设该式对于 $n=k$ 成立，现证明其对于 $n=k+1$ 成立。$\prod_{r=0}^{n}F_r=(\prod_{r=0}^{n-1}F_r)\cdot F_n=(F_n-2)F_n=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1=(2^{2^{n+1}}+1)-2=F_{n+1}-2$ 证毕。
2) 由于 $m<n$ ，有 $F_m|\prod_{r=0}^{n-1}F_r$ ；又根据结论 a)，有 $F_n=\prod_{r=0}^{n-1}F_r+2$ ，于是 F_m 除 F_n 余 2；根据 Euclid 辗转相除法，有 $\gcd(F_m,F_n)=\gcd(2,F_m)=\gcd(2,2^{2^m}+1)=1$ 证毕。

Problem 12

若已知 $p=2^{24036583}-1$ 是梅森素数，试证明：$9^{2^{24036582}}-9^{2^{24036583-1}}$ 是整数。

答案：不妨定义 $x=24036583$ ，则 $p=2^x-1$. 问题变成了证明 $p|9^{2^{x-1}}-9$. 做变形 $9^{2^{x-1}}=3^{2\cdot 2^{x-1}}=3^{2^x}=3^{p+1}=3\cdot 3^p$. 由费马小定理 $3^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ （对于素数 p 不整除 3 的情况），于是有 $3^p\equiv 3 \pmod p$. 所以 $9^{2^{x-1}}=3^{p+1}=3^p\cdot 3\equiv 3\cdot 3\equiv 9 \pmod p$. 因此 $p|9^{2^{x-1}}-9$.

Problem 13

设方程 $X \times Y = (X \vee Y) \times (X \wedge Y)$，其中未知整数 $X, Y \in [0, 31]$，$\times$ 表示普通乘法运算，$X \vee Y$ 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位或运算，$X \wedge Y$ 表示变量 X 和 Y 对应二进制数的按位与运算. 试求此方程所有整数解的组数.

答案:

1. 证明结论: 若满足此方程式, 当且仅当 $(X \vee Y)$ 等于 X 和 Y 中的较大值, 且 $(X \wedge Y)$ 等于 X 和 Y 中的较小值。假设 $X \leq Y$, 则 $(X \wedge Y) \leq X$, $(X \vee Y) \geq Y$, 且设 $X \vee Y = Y + a$ (a 为整数), 则 $(X \wedge Y) = X - a$ $(X \vee Y) \times (X \wedge Y) = (X - a) \times (Y + a) = X \times Y - a \times (Y - X) - a^2 \leq X \times Y$ ，且当且仅当 $a = 0$ 时等号成立。所以当 $X \leq Y$，等式成立时当且仅当 $(X \vee Y) = Y$ 且 $(X \wedge Y) = X$。所以由对称性，若满足此方程式，当且仅当 $(X \vee Y)$ 等于 X 和 Y 中的较大值，且 $(X \wedge Y)$ 等于 X 和 Y 中的较小值。

2. 根据以上定理，枚举 1 的个数，整数解个数为 $2 \cdot (C(5,0) \cdot 2^0 + C(5,1) \cdot 2^1 + C(5,2) \cdot 2^2 + C(5,3) \cdot 2^3 + C(5,4) \cdot 2^4 + C(5,5) \cdot 2^5) - 2^5 = 454$

Problem 14

所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数? 请证明你的结论.

答案: 所有整系数一元二次方程的根的集合是可数的。这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 a、b、c 均是整数。这样，对应到 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 中的元素 (a, b, c)。这个对应是单射。由于 $\mathbb{Z}$ 是可数的，不难证明 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 是可数的。因此，整系数一元二次方程最多有可数个。

Problem 15

假设集合 A 非空，集合 B 至少有两个元素. 令 $B^A = \{f | f : A \to B\}$ ，即所有从 A 到 B 的函数组成的集合. 试证明：不存在从 A 到 B^A 的满射.

答案: 因为 $|B| \geq 2$ ，所以 $|B^A| \geq |2^A|$

因为 $|A| < |2^A|$ ，所以 $|A| < |B^A|$

所以不存在从 A 到 B^A 的满射.

Problem 16

令 $\{0, 1\}^*$ 为有限长的 0-1 串的集合, $\{0, 1\}^\omega$ 为无限长的 0-1 串的集合, 我们知道前者可数而后者不可数. 试问:

1. $\{0, 1\}^\omega$ 中仅含有限个字符 “1” 的串的集合是否可数? 为什么?

2. $\{0,1\}^\omega$ 中包含无限个字符 "1" 的串的集合是否可数？为什么？

答案：

1. 可数。记 $\{0,1\}^\omega$ 中仅含有限个字符 "1" 的串的集合为 F ，可构造一个从 F 到 $\{0,1\}^*$ 之间的映射：对于每一个含有限个字符 "1" 的串，忽略掉其最后一个 "1" 后的无限多的 "0"。易见此映射为单射；而 $\{0,1\}^*$ 可数，于是 F 可数。

2. 不可数。记 $\{0,1\}^\omega$ 中包含无限个字符 "1" 的串的集为 I , 若可数，则 $I \cup F = \{0,1\}^\omega$ 可数，而 $\{0,1\}^\omega$ 不可数，矛盾。故 I 不可数。

Problem 17

所谓命题逻辑公式中的一个"**文字**"（literal）是指一个命题变元或者其否定. 一个"**k-子句**"（k-clause）是 k 个文字的析取，其中每个变元都不重复出现。例如：$P \vee \bar{Q} \vee \bar{R} \vee V$ 是一个 4-子句，而 $\bar{Q} \vee \bar{R} \vee V \vee Q$ 则不是子句（因为 Q 重复出现了）. 令 S 为 n 个 k-子句组成的集合，这些子句中的变元取自 v 个变元的集合，满足 $k \leq v \leq nk$. 注意不同子句涉及的变元可以相同也可以不同. 先对这 v 个变元各自独立地、随机等可能地赋值以真或假. 现在我们逐一考察 S 中子句的真值.

1. 最后一个 k-子句取值为真的概率是多少?

2. S 中取值为真的子句的个数的期望值是多少?

3. 用上一步的结论证明：若 $n < 2^k$ 则 S 是 **可满足**的（即：存在某种变元赋值方案，使得 S 中所有子句取值都为真）.

答案： 1). 这里每个 k-子句取值为真的概率是一样的。对于 S 中任一个 k-子句中的每个文字，不论是肯定或否定，其为假的概率是 $\frac{1}{2}$ ，且由于每个变元都不重复出现，它们相互独立；整个子句为假的概率就是每个文字均为假的概率，即 $\frac{1}{2^k}$ ，于是该子句为真的概率是 $1 - \frac{1}{2^k}$.

2). 令随机变量 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{若第 i 个子句取值为假} \\ 1, & \text{若第 i 个子句取值为真} \end{cases}, i = 1 \ldots n$ ，则 $E[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2^k} + 1 \cdot (1 - \frac{1}{2^k}) = 1 - \frac{1}{2^k}$. 令 t 为 S 中取值为真的子句的个数，则 $t = \sum_{i=1}^n X_i$. $E[t] = E[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = n(1 - \frac{1}{2^k})$. 注意这里各个 X_i 无需相互独立。

3). 证明：若 $n < 2^k$ 则 S 中取值为真的子句的个数的期望值 $E[t] = n(1 - \frac{1}{2^k}) = n - \frac{n}{2^k} > n - 1$. 而我们知道 S 中子句的个数只有 n 个，若 S 不是可满足的，则其中取值为真的子句最多为 $n-1$ 个，根据期望值的定义 $E[t] \leq n - 1$ ，矛盾。故 S 是可满足的。证毕.

Problem 18

今有赌局如下：你独立地掷 3 次骰子（这里骰子是公平的），看你能掷出几个六点.

- 若没有一次是六点，你输一块钱；
- 若仅有一次六点，你赢一块钱；
- 若恰有两次六点，你赢两块钱；
- 若三次全是六点，你赢 K 块钱.

试问：K 是多少的情况下，这个赌局是公平的？

要点：记事件 E 为“没有一次是六点”，F 为“仅有一次是六点”，G 为“恰有两次是六点”，H 为“三次全是六点”。设随机变量 M ，$M(\omega)=\begin{cases}-1 & \omega\in E\\ 1 & \omega\in F\\ 2 & \omega\in G\\ K & \omega\in H\end{cases}$ 而各事件发生概率为

$\Pr(E)=C_3^0(\frac{5}{6})^3=\frac{125}{216}$

$\Pr(F)=C_3^1\cdot\frac{1}{6}\cdot(\frac{5}{6})^2=\frac{75}{216}$

$\Pr(G)=C_3^2\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$

$\Pr(H)=C_3^3\cdot(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$ 所谓赌局公平, 即 $E[M]=0=M(E)\Pr(E)+M(F)\Pr(F)+M(G)\Pr(G)+M(H)\Pr(H)$ $=-1\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+2\cdot\frac{15}{216}+K\cdot\frac{1}{216}$ 即 $K=20$.

Problem 19

某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分。问：

1. 游戏结束时得分为 0 的概率是多少？
2. 游戏第一轮得分的期望值是多少？
3. 游戏结束时得分的期望值是多少？

答案:

1. 得分为 0 意味着第一轮就掷出点数之乘积大于 20 的情况。所有 36 种结构中出现 (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), 和 (6,6) 这 6 种结果才会积大于 20；其概率为 $6/36=1/6$.
2. 首先计算第一轮的得分期望值 $\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}ij\cdot[ij\le 20]$ ，其中 $[ij\le 20]=\begin{cases}1, & ij\le 20\\ 0, & ij>20\end{cases}$ 计算该值为 $1\cdot(1+2+3+4+5+6)+2\cdot(1+2+3+4+5+6)+3\cdot(1+2+3+4+5+6)+4\cdot(1+2+3+4+5)+5\cdot(1+2+3+4)+6\cdot(1+2+3)=272$ ；于是第一轮的得分期望为 $272/36=68/9$；
3. 令所求之游戏结束时得分的期望值为 S ；注意到每一轮之后，若游戏未结束，以后得分的期望值也为 S ，于是有 $S=\frac{68}{9}+\frac{5}{6}S$ 可解得 $S=\frac{136}{3}$.

Problem 20

一辆出租车在夜晚肇事之后逃逸，一位目击证人辨认出肇事车辆是蓝色的。已知这座城市 85% 的出租车是绿色的，15% 是蓝色的。警察经过测试，认为目击者在当时可以正确辨认出这两种颜色的概率是 80%, 辨别错误的概率是 20%. 请问，肇事出租车是蓝色的概率是多少?

答案: 事件 A：目击证人辨认车是蓝色的，B：肇事车是蓝色的，则 $P(B) = 0.15$ ，根据全概率公式，$P(A) = 0.85 \cdot (1-0.8) + 0.15 \cdot 0.8 = 0.29$ 根据贝叶斯公式 $P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)/P(A) = 0.15 \cdot 0.8/0.29 \approx 0.41$ 肇事出租车是蓝色的概率是 41%。

Problem 21

有甲、乙、丙、丁 4 个人，从甲开始相互传球 6 次（自己不能传球给自己），要求球最终回到甲的手中（例如甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 甲或者甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 丙 $\rightarrow$ 丁 $\rightarrow$ 丙 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 甲都是允许的传球方式）.

1. 建立上述问题的数学模型.
2. 求解这样的传球方式共有多少种?

答案:

1. 每一步球都有 3 种传法，传球 x 次总方法数为 3^x 若第 x 次传球后球在甲手中，则第 $x-1$ 次时，球一定不在甲手中。令 $a(x)$：从甲开始传球 x 次，球回到甲的手里的方法数。则 $a(1) = 0$ 则可得到递推式 $a(x+1) = 3^x - a(x)$
2. 解此递推式，得 $a(x+1) - (1/4) \cdot 3^{x+1} = -a(x) + (1/4) \cdot 3^x$ 令 $b(x) = a(x) - (1/4) \cdot 3^x$，则 $b(x+1) = -b(x)$ $b(x) = (-1)^{x+1} \cdot b(1) = (-1)^{x+1} \cdot (a(1) - (1/4) \cdot 3)$ $a(x)$ 通项公式为：$a(x) = \frac{3}{4} \cdot (-1)^x + \frac{1}{4} \cdot 3^x$ 根据 $a(x)$，得 $a(6) = 183$.

Problem 22

考虑等价关系，

1. 试求集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上共有多少个等价关系?
2. 试给出 n 元集合（$n > 0$）上等价关系数 F_n 的递推关系式.

要点：考虑有多少个不同的划分即可。

答案:

1. 共 15 个. 考虑等价类数为 k 时有多少个关系
   1 个等价类的方案数是 1 ；2 个等价类方案数是 $C_4^3 + \frac{C_4^2}{2} = 4 + 3 = 7$ ；3 个等价类方案数是 $C_4^2 = 6$ ；4 个等价类方案数是 1 ；合计 $1 + 7 + 6 + 1 = 15$ 。

2. $F_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}F_k$
   F_n 是含有 n 个元素集合的划分的个数，考虑元素 b_n. 若 b_n 被单独划分到一类，那么还剩下 $n-1$ 个元素，这种情况下划分个数为 $C_{n-1}^{n-1}F_{n-1}$ ；若 b_n 与某一个元素划分到一类，那么还剩下 $n-2$ 个元素，这种情况下划分个数为 $C_{n-1}^{n-2}F_{n-2}$ ；依次类推，
   可得 $F_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}F_k$ 。

Problem 23

令 R 为 A 上的一个关系。试证明：R 是一个等价关系当且仅当存在一个集合 B 及一个函数 $f:A\to B$ 使得 $xRy \iff f(x)=f(y)$.

答案： 必要性： 若 R 是一个等价关系，可令 $B=A/R$ ，定义 f 为 $f(x)=[x]_R$ ，于是有 $xRy \iff [x]_R=[y]_R$ ，即 $xRy \iff f(x)=f(y)$.

充分性： 若存在一个集合 B 及一个函数 $f:A\to B$ 使得 $xRy \iff f(x)=f(y)$ ，现证明 R 是自反的、对称的、传递的：

- **自反性：** 对于任意的 $x\in A$ ，因为 $f(x)=f(x)$ ，所以 xRx ；
- **对称性：** 对于任意的 $x,y\in A$ ，若 xRy，则 $f(x)=f(y)$ ，于是 $f(y)=f(x)$ 所以 yRx ；
- **传递性：** 对于任意的 $x,y,z\in A$ ，若 xRy 且 yRz，则 $f(x)=f(y)$ 且 $f(y)=f(z)$ ，于是 $f(x)=f(z)$ ，所以 xRz ；

Problem 24

定义集合 $S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{N}\}$ 上的关系 R：若 $(x,y,z)R(a,b,c)$，当且仅当存在非负实数 k，使得 $(x,y,z)=k(a,b,c)$，

1. 证明 R 为等价关系；
2. 请至少写出三个元素分别与 $(1,2,3)$ 和 $(2,2,2)$ 属于同一等价类；
3. 除等价类 $\{(0,0,0)\}$ 外，请分析其他等价类属于有限集合、属于可数无穷集、属于不可列集合的情况。

答案：

(1) 分别证明自反性、对称性、传递性
   自反性： 对任意 $(x,y,z)\in S$，存在非负实数 $k=1$，使得 $(x,y,z)=1(x,y,z)$ 由关系 R 的定义，有 $(x,y,z)R(x,y,z)$，即对任意 (x,y,z) 有 $(x,y,z)R(x,y,z)$，关系 R 满足自反性.
   对称性易见。
   传递性：
   对任意 R 中的两个元素满足 $(x_1,y_1,z_1)R(x_2,y_2,z_2)$，$(x_2,y_2,z_2)R(x_3,y_3,z_3)$ 存在非负实数 k_1,k_2 使得

$(x_1, y_1, z_1) = k_1(x_2, y_2, z_2)$, $(x_2, y_2, z_2) = k_2(x_3, y_3, z_3)$ 令 $K = k_1 \cdot k_2$, 则有 $(x_1, y_1, z_1) = k_1k_2(x_3, y_3, z_3) = K(x_3, y_3, z_3)$，$K$ 是非负实数。根据 R 的定义，有 $(x_1, y_1, z_1)R(x_3, y_3, z_3)$，关系 R 满足传递性.

(2) 与 $(1, 2, 3)$ 属于同一等价类的元素有：$(2, 4, 6)$，$(4, 8, 12)$，$(8, 16, 24)$ 等。与 $(2, 2, 2)$ 属于同一等价类的元素有：$(1, 1, 1)$，$(4, 4, 4)$，$(8, 8, 8)$ 等。

(3) 因为 k 是非负实数，所以 $\{(0, 0, 0)\}$ 以外的所有等价类都是可数无穷集。

Problem 25

给定一个非空集合 A 及定义在 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ ，试证明：存在某个集合 B 的某些子集 S (i.e. $S \subseteq P(B)$)，使得偏序集 $(A, \preccurlyeq)$ 同构于 $(S, \subseteq)$.

答案： 设 $(A, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集. 对 $x \in A$ ，$f(x) = \{y \in A \mid y \preccurlyeq x\}$ 是 A 的一个子集. 以下证明 $x_1 \preccurlyeq x_2$ iff $f(x_1) \subseteq f(x_2)$ 不难证明必要性和充分性

Problem 26

给定一个偏序格 $(X, \preccurlyeq)$ 和元素 $x_0 \in X$ ，令 $X' = \{x \in X \mid x_0 \preccurlyeq x\}$ ，试证明：$(X', \preccurlyeq)$ 也是格.

答案： 首先说明 $\preccurlyeq$ （限定在 X' 上）也是 X' 上的一个偏序；其次说明偏序格 $(X, \preccurlyeq)$ 上的最大下界和最小上界运算 $\wedge, \vee$ 在 X' 封闭，且就是 $(X', \preccurlyeq)$ 上的最大下界和最小上界运算。

证明偏序集

可分别证明自反，反对称，传递；或直接指出偏序的子集是偏序。$(X, \preccurlyeq)$ 的下确界和上确界运算在 $(X', \preccurlyeq)$ 上同样适用且封闭

Problem 27

令 $S_{n,k}$ 为不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$ 的所有非负整数解的集合，即：$S_{n,k} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n\}$

1. 试给出 $S_{n,k}$ 与包含 n 个 0 和 k 个 1 的 0-1 串的集合之间的双射；

2. 令 $L_{n,k}$ 为长度为 k 的弱递增的、最大不超过 n 的非负整数序列，即 $L_{n,k} = \{(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^k \mid y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_k \leq n\}$, 试给出 $L_{n,k}$ 与 $S_{n,k}$ 之间的双射；

3. 试求 $|L_{n,k}|$.

答案：

1. 不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$ 的解一一对应于如下等式方程的解 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n \quad x_{k+1} \in \mathbb{N}$ 而此等式方程的每一个解唯一对应于一个包含 n 个 0 和 k 个 1 的 0-1 串：k 个 1 将 n 个 0 切成 $k+1$ 段，第 i 段包含 x_i 个 0 $(i = 1, \ldots, k+1)$。说明上述映射是双射：对任意两组不同的非负整数解 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

，假设他们 x_i 的值不同，则对应串中第 i 个 1 和第 $i+1$ 个 1 之间 0 的数量不同，故为单射。又考虑任意一个 n 个 0 和 k 个 1 的 0-1 串，均可以找到这样一组 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 与之对应，故为满射。

2. 令 $y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ $(k = 1, \ldots, n)$ ，该映射为单射且为满射。

3. 因为存在 $L_{n,k}$ 与 $S_{n,k}$ 之间的双射，且存在 $S_{n,k}$ 与包含 n 个 0 和 k 个 1 的 0-1 串的集合之间的双射，所以 $|L_{n,k}| = |S_{n,k}| = C(n+k, k)$ 使用其他方法直接求 $|L_{n,k}|$ 。

Problem 28

证明或证伪：

1. 若集合 S 关于偏序关系 $\preccurlyeq$ 构成格，则如果 x 是 S 的极小元，则 x 一定是 S 的最小元。

2. 若偏序集 $(S, \preccurlyeq)$ 中集合 S 的任意子集均有最小元，则 S 是全序。

答案：

1. 根据极小元定义有，对于任意的 $y \in S$，$y \preccurlyeq x$ 都有 $y = x$. 现考虑任意元素 $z \in S$，有 $x \wedge z \preccurlyeq x$，则 $x \wedge z = x$ (因为 x 是极小元)。而 $x = x \wedge z \preccurlyeq z$。故 x 是最小元。(亦可用反证法证明。反设有元素 y 使得 $x \preccurlyeq y$ 不成立。考察 $z = x \wedge y$，有 $z \preccurlyeq x$ 且 z 不等于 x，与 x 是极小元矛盾。)

2. 即证 S 中任意两个元素可比。若 S 为空集显然成立。否则，任取元素 x 和 $y \in S$，$\{x, y\}$ 是 S 子集且有最小元。于是 x 和 y 可比。