2025 离散数学复习

Problem 1

$S=\{a, b, c\}$，$*$ 是 S 上的二元运算，且 $\forall x, y\in S$，$x*y=x$。

(1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群。

(2) 试通过增加最少的元素使得 S 扩张成一个独异点（幺半群）。

答案：（1）运算显然是封闭的。因为 $\forall x,y,z\in S$，$(x*y)*z=x*y=x$ 且 $x*(y*z)=x*y=x$。所以结合律成立。综上，S 关于 $*$ 运算构成半群。
（2）任取 $e\notin S$，定义 $T=S\cup\{e\}$。$\forall x\in S, x*e=e*x=x, e*e=e$。那么 $<T,*>$ 构成独异点。

Problem 2

证明偶数阶群必含 2 阶元。
注：关于元素的阶及 k 阶元的定义详见：[屈婉玲] 10.1 节。

答案： 证明：由 $x^2=e$ 得 $|x|=1$ 或 2。对于 G 中元素 x，如果 $|x|>2$，必有 $x^{-1}\neq x$。则大于 2 阶元的元素必成对出现，共偶数个。那么去掉所有大于 2 阶元的元素，剩下的元素必为 1 阶元或者 2 阶元。因为 1 阶元仅有一个，那么 2 阶元必存在一个。

Problem 3

设 G 为非 $Abel$ 群，证明 G 中存在非单元 a 和 b，$a\neq b$，且 $ab=ba$。

答案： 证明：假设 G 中只有 1 阶元和 2 阶元，那么 $\forall x\in G$，有 $x^2=e$，那么必有
$\forall x\in G$，则 $x^{-1}=x$，则 $\forall x,y\in G$，$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$，
则 G 为 $Abel$ 群，与题设相矛盾。
因此 G 中比有大于 2 阶元，那么存在 x，x^{-1} 且 $x\neq x^{-1}$，那么 $a=x$，$b=x^{-1}$，得 $ab=e=ba$。命题得证。

Problem 4

设 $i=\sqrt{-1}$，证明 $S=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ 是复数上的乘法群。

答案： 证明：$V=<S,*>$ 是代数系统，$*$ 是二元乘法运算。
任意复数 $a,b,c\in S$，有 $(a*b)*c=a*(b*c)$，则 V 为半群。
任意复数 $a\in S$，有 $1*a=a*1=a$，则 $1\in S$ 是关于 $*$ 运算的单位元。$\forall a\in S$，有 $aa^{-1}=e=1$，则 $a^{-1}\in S$.
综上，$S=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ 是复数上的乘法群。

Problem 5

设 G 是一个群, 证明:

$$\forall a,b\in G,(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}.$$

答案： 证明：对于任意的 $a,b\in G$, 我们有

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=aea^{-1}=aa^{-1}=e,$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}(a^{-1}a)b=b^{-1}eb=b^{-1}b=e.$$

所以

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1},\forall a,b\in G.$$

Problem 6

设 $\langle S,\cdot\rangle$ 是一个半群，$e\in S$ 称为 S 的一个左 (右) 单位元, 如果对于任意的 $a\in S$ 都有 $e\cdot a=a(a\cdot e=a)$. 对于 $a\in S$, 如果存在 $b\in S$ 使 $b\cdot a=e(a\cdot b=e)$, 则称左 (右) 可逆的, b 是 a 的一个左 (右) 逆元. 假设 S 有左 (右) 单位元 e, 且 S 中每个元素都有关于 e 的左 (右) 逆元. 证明: $\langle S,\cdot\rangle$ 是一个群.

答案： 证明：设 a 是 S 中任意一个元素. 任取 $b\in S$, 使得 $a\cdot b=e$. 再任取 $c\in S$, 使得 $b\cdot c=e$. 于是, 我们有

$$a=a\cdot e=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=e\cdot c,$$

并且有

$$b\cdot a=b\cdot(e\cdot c)=(b\cdot e)\cdot c=b\cdot c=e.$$

因此

$$a\cdot b=e=b\cdot a.$$

综上，我们有

$$e\cdot a=(a\cdot b)\cdot a=a\cdot(b\cdot a)=a\cdot e.$$

由以上两式可知, e 是单位元, S 中每个元素 a 都有逆元 b. 所以 $(S,\cdot)$ 是一个群。

Problem 7

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

a) K_5

b) C_3

c) W_4

d) $K_{2,3}$

e) Q_3

答案：

a) K_5 度序列为：4，4，4，4，4。

b) C_3 度序列为：2，2，2。

c) W_4 度序列为：4，3，3，3，3。

d) $K_{2,3}$ 度序列为：3，3，2，2，2。

e) Q_3 度序列为：3，3，3，3，3，3，3，3。

Problem 8

判断下列度序列是否有对应的简单图。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 5,4,3,2,1,0

b) 2,2,2,2,2

c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,3,3,3,3,3

答案：

a) 没有。度数和为奇数。

b) 有，C_5。（有多种答案）

c) 没有。前两个顶点度数和为 9，去掉这两个顶点之间的一条边，剩余度为 7；而后四个顶点度数和为 5，因此不能构成简单图。

d) 有，W_5。

Problem 9

设无向图 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的点的度，证明 $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$。（其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**）

答案： $\forall v \in V.\delta(G) \le deg(v) \le \Delta(G)$，对所有的点求和可得 $\mathcal{V} \cdot \delta(G) \le 2\mathcal{E} \le \mathcal{V} \cdot \Delta(G)$，各项均除以 $\mathcal{V}$ 即可得证。

Problem 10

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无环边的无向图。

a) 证明：G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $deg(x) \le \frac{a}{2}$；

b) 证明或反驳：如果 $a > 0$，那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

答案： 记图 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边。

a) 记删点 x 得到的新图 $G' = (V', E')$，由题意有 $|V'| = \mathcal{V} - 1, |E'| = \mathcal{E} - deg(x)$。
解

$$\frac{2|E'|}{|V'|} = \frac{2\left(\mathcal{E} - \deg(x)\right)}{\mathcal{V} - 1} \ge a$$

得 $deg(x) \le \mathcal{E} - \frac{a}{2}(\mathcal{V} - 1)$，将 $a = \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 代入得 $deg(x) \le \mathcal{E}(1 - \frac{\mathcal{V}-1}{\mathcal{V}}) = \frac{a}{2}$

b) 显然 $\mathcal{V} > 1$(否则 $a = 0$)，对 $\mathcal{V}$ 做归纳

Basis. $\mathcal{V} = 2$ 时，只有 K_2 能使 $a = 1 > 0$，取 K_2 本身即可；

I.H. $\mathcal{V} = n$ 时题设成立；

I.S. $\mathcal{V} = n + 1$ 时

Case 1. 若 $\delta(G) \le \frac{a}{2}$，考虑 G 删去一个最小度点得到的子图 G'，则由 a) 知 G' 的顶点平均度至少为 a，由归纳假设知存在一个 G' 的子图 G'' 最小度大于 $\frac{a}{2}$，G'' 即为所求；

Case 2. 否则 $\delta(G) > \frac{a}{2}$，G 本身即为满足题设要求的子图。

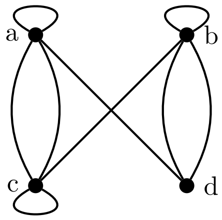
Problem 11

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

答案： 设 u, v 是 G 中相邻顶点，$N(u)$ 和 $N(v)$ 分别代表 u 和 v 的邻居构成的集合，则 $N(u)$ 和 $N(v)$ 不相交，否则 G 的围长为 3，产生矛盾。因此，G 至少有 $2(k-1)+2$ 个顶点。将 $N(u) \setminus \{v\}$ 和 $N(v) \setminus \{u\}$ 连为完全偶图，得到 $2k$ 个顶点的围长为 4 的图。不难证明，这样的图（在同构意义下）只有一个。

Problem 12

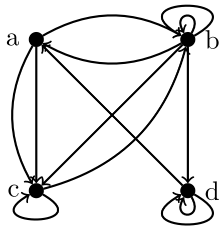
用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

答案：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Problem 13

具有 4 个顶点的非同构简单图中，有多少个

1) 包含 C_3?

2) 无孤立点?

3) 是二部图?

答案：

1) 4

2) 7

3) 7

Problem 14

对以下每组同构不变量的值找出一对不同构的图

1) 顶点数 =5，边数 =5，且子图中最大的完全图是 K_3

2) 度序列是 (2,2,2,2,2,2,2)

答案：

1) 

2) 

答案可能不唯一

Problem 15

所谓“子图同构”(Subgraph isomorphism) 问题是指：对于任意的图 $G = (V, E)$ 和图 $H = (V', E')$, 判定是否存在 G 的一个子图 $G_0 = (V_0, E_0)$： $V_0 \subseteq V$, $E_0 \subseteq (E \cap (V_0 \times V_0))$ 使得 G_0 与 H 同构（记作 $G_0 \cong H$）. 试说明，“判断一个图是否是哈密尔顿图”这一问题可以作为上述子图同构问题的一个特例。

答案： 要证 G 与 H 子图同构（G_0 为 G 的子图）
即证 $\exists$ 双射函数 $f : V_0 \to V'$, 使得 $\forall V_i, V_j \in V_0. \langle V_i, V_j \rangle \in E_0$ 当且仅当 $\langle f(V_i), f(V_j) \rangle \in E'$,
要证 G 是哈密尔顿图
即证 G 中存在哈密尔顿回路
设 G 的顶点数为 n。
G 中存在哈密尔顿回路当且仅当 G 中存在一个与 C_n 同构的子图。
因此，判断一个图是否是哈密尔顿图，可以作为子图同构问题的一个特例

Problem 16

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的回路。

答案： 证明：
必要性：设 G 是偶图，设两个不相交的非空顶点集合为 A 和 B。若 G 存在回路 c，设 c 的起点属于 A，则从 A 出发时通路在奇数步后停在 B，在偶数步后停在 A。所以回路 c 的长度必为偶数。
充分性：若所有的回路长度都为偶数，要证图 G 是偶图。假设 G 是连通图，若不连通，则每次仅考虑一个连通分支。设 v 是图的一个顶点，设 A 是有从 v 出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设 B 是有从 v 出发偶数长度通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于 A 或 B。没有顶点同时属于 A 和 B，若假设存在一个顶点 v' 同时属于 A 和 B，则从 v 到 v' 的奇长度通路，加上 v' 到 v 的偶长度通路，就得到一个奇回路，与前提矛盾。因此，顶点集合划分成两个部分。要证每条边的端点都在不同的部分中，假设

(x, y) 是一条边，$x \in A$，则从 v 到 x 的奇长度通路加上 (x, y) 就产生从 v 到 y 的偶长度通路，所以 $y \in B$。同理可证 $x \in B$ 的情况。
综上所述可得 G 是二部图。

Problem 17

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。
（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

Problem 18

证明：若 G 是 k-边连通图，从 G 中任意删除 k 条边，最多得到 2 个连通分支。

答案： 证明：易知一条边最多连接两个连通分支，任意去掉一条边，只可能使连通分支数增加 0 个或者 1 个。以下用反证法来证明原命题：
假设在 $k-$ 边连通图中任意删除 k 条边后得到连通分支数 > 2 个，则在逐条删除这 k 条边的过程中，必然有第 i 条边，$i < k$，删除后使得连通分支数第一次增加 1（即使得连通分支总数为 2），则原图的边连通度 $\leq i < k$，与原图为 $k-$ 边连通图相矛盾，故若 G 是 $k-$ 边连通图，从 G 中任意删除 k 条边，最多得到 2 个连通分支。

Problem 19

设 n 阶图 G 的边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

答案： 证明：假设 G 不连通，有 2 个或以上连通分支。（2 分）
设其中一个连通分支中顶点数为 $n_1 \geq 1$，其余顶点数为 $n_2 \geq 1$，$n_1 + n_2 = n$，$m \leq C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2$ （4 分）
可以验证：$C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2 \leq C_{n-1}^2$，即 $n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1) \leq (n-1)(n-2)$ （4 分）
验证中用到关键等式：$0 \leq (n1 - 1)(n2 - 1)$
因此 $m \leq C_{n-1}^2$，矛盾。所以 G 为连通图。

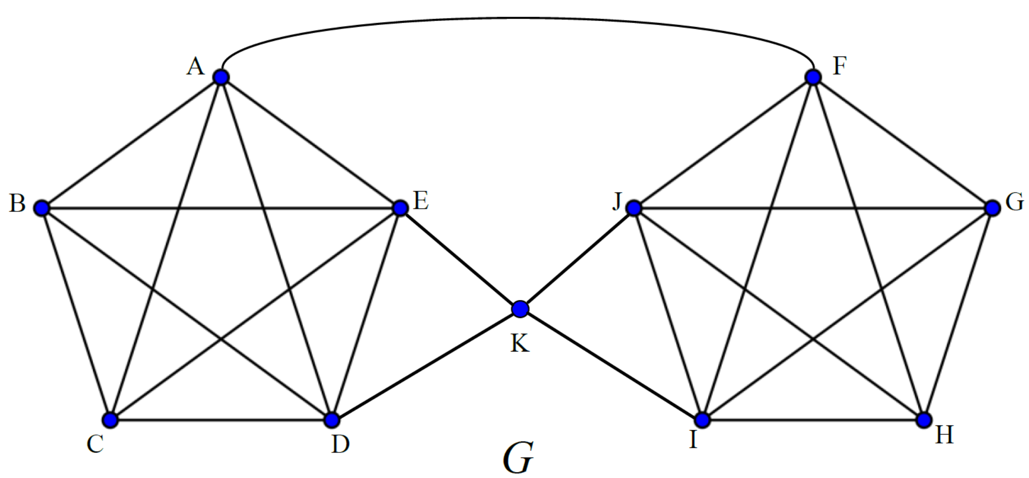
Problem 20

试求下图 G 的点连通度 $\kappa(G)$，边连通度 $\lambda(G)$ 和最小度 $\delta(G)$，并**简要说明理由**

答案：

$$\kappa(G) = 2 \qquad \lambda(G) = 3 \qquad \delta(G) = 4$$

证明略



Problem 21

给定一个顶点个数有限的简单图 G，假定我们只可以通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步可以删除度数小于 2 的顶点。

试证明：如果 G 中的所有顶点能被删除当且仅当 G 中没有回路。

答案:

必要性: 反设 G 中有回路，则显然 G 中此回路上的顶点不会被删除，得证。

充分性: G 中没有回路，则 G 是一棵树或是若干棵树构成的森林。对于 G 中的每一棵树，指定一个内点为 r，每次删除任一与 r 距离最远的树叶可以删除所有顶点。

Problem 22

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密顿回路?

答案: $m = n \geq 2$ (若额外回答出 $m = 0$ 且 $n = 1$、$m = 1$ 且 $n = 0$ 可算作正确)

Problem 23

证明：每当 n 是正整数时，就存在 n 阶格雷码，或者等价地证明：$n > 1$ 的 n 维立方体 (n-cube)Q，总是具有哈密顿回路。[提示：用数学归纳法，证明如何从 $n-1$ 阶格雷码产生 n 阶格雷码。]

答案: 使用数学归纳法进行证明：

基础步骤：$n = 3$，存在 3 阶格雷码。

归纳步骤：假设存在 $n-1$ 阶格雷码，现证明存在 n 阶格雷码。

$n-1$ 阶格雷码对圆周等分 2^{n-1} 段弧，每段弧对应的长度为 $n-1$ 的位串分别记为 $a_1, a_2, ..., a_{2^{n-1}}$，为了得到 n 阶格雷码，可将 2^{n-1} 段弧的每一段进行二等分，每段弧对应的长度为 n 的位串分别记为 $b_1, b_2, ..., b_{i*2-1}, b_{i*2}, ..., b_{2^n} (1 \leq i \leq 2^{n-1})$，并且当 i 为奇数时 $b_{2*i-1} = 0a_i, b_{2*i} = 1a_i$；当 i 为偶数时

$b_{2*i-1} = 1a_i, b_{2*i} = 0a_i$。易证 $b_1, b_2, ..., b_{i*2-1}$,
$b_{i*2}, ..., b_{2^n}$ 是 n 阶格雷码。

Problem 24

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳:

a) G 一定存在哈密顿回路。

b) G 一定存在哈密顿通路。

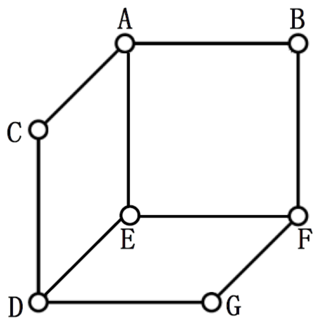
答案:

a) 反驳，考虑两个通过割点相连的 K_3。

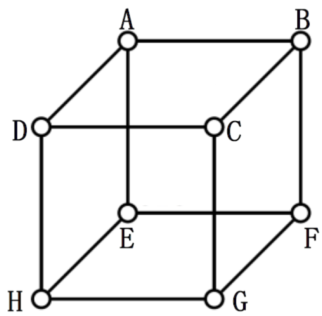
b) 证明，根据 Ore 定理的推论，对 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$，因此 G 一定存在哈密顿通路。

Problem 25

以下两图是否为哈密尔顿图？若是，请给出哈密尔顿回路；若不是，请说明理由。



(图 1)



(图 2)

答案: 图 1 不是哈密尔顿图，因为删除 A, D, F 三个顶点，形成 4 个连通分支。(3+2 分)
图 2 是哈密尔顿图，一条哈密尔顿回路：A, B, C, G, F, E, H, D, A。(3+2 分)

Problem 26

简单图 G 满足 $|G| > 2$，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的点数。试证明：如果 $m > C_{(}n-1)^2 + 1$，则 G 一定存在汉密尔顿回路。(提示：可使用数学归纳法证明)

答案:

Basis $n=3$ 时，结论显然成立。

I.H. 假设 $n<k$ 时 G 存在汉密尔顿回路。

I.S. 当 $n=k$ 时，G 的补图 $\bar{G}$ 的边数 $|E(\bar{G})|<C_n^2-C_{n-1}^2-1=n-2$, 这就意味着 $\bar{G}$ 至少有一个节点的度数为 0 或 1。不妨设这个节点为 v。

A 度数为 1 的情况：$d(v)=n-2$，在 G 中删除 v 后得到 G'，此时 G' 的边数满足归纳条件足 $|E(G')|>C_{n-2}^2+1$，存在汉密尔顿回路 C。由于 v 跟 G' 中 $n-2$ 个顶点相连，总可以取其中的在 C 中相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的汉密尔顿回路。

B 度数为 0 的情况：$d(v)=n-1$。在图 G 中删除 v 得到 G'，下面对 G' 分情况讨论 (注意 G' 有 $n-1$ 个顶点)：

(1) 如果 G' 是完全图，G' 一定存在汉密尔顿回路。由于 v 与 G' 中的点均相连，不妨取其中的相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的汉密尔顿回路。

(2) 如果 G' 不是完全图，我们向其中加入一条边 e，对于 $G'+\{e\}$ 满足 $|E(G'+\{e\})|>C_{n-1}^2+1-(n-1)+1=C_{n-2}^2+1$，由归纳假设，$G'+\{e\}$ 中存在汉密尔顿回路。不妨设此回路为 C：

a) 如果 C 中不包含 e，则我们可以通过 (1) 的方式获得 G 的汉密尔顿回路；

b) 如果 C 中包含 e，将 e 从 C 中删除得到一条汉密尔顿通路，类似的，将 v 和 e 的两个端点相连便是一条汉密尔顿回路。

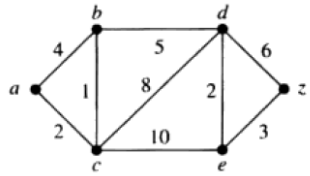
Problem 27

Algorithm 1 弗洛伊德算法

procedure FLOYD(G: 带权简单图)
$\{G$ 有顶点 $v_1, v_2, ..., v_n$ 和权 $w(v_i, v_j)$，其中若 (v_i, v_j) 不是边，则 $w(v_i, v_j)=\infty\}$
  for $i:=1$ **to** n **do**
    for $j:=1$ **to** n **do**
      $d(v_i, v_j):=w(v_i, v_j)$
  for $i:=1$ **to** n **do**
    for $j:=1$ **to** n **do**
      for $k:=1$ **to** n **do**
        if $d(v_j, v_i)+d(v_i, v_k)<d(v_j, v_k)$ **then**
          $d(v_j, v_k):=d(v_j, v_i)+d(v_i, v_k)$
$\{d(v_i, v_j)$ 是在 v_i 与 v_j 之间的最短通路的长度$\}$

a) 用弗洛伊德算法求右图中带权图里所有顶点对之间的距离。

b) 证明：当 $Floyd$ 最外层的循环执行完 $i = p$ 时，$d(v_j, v_k)$ 表示从 v_j 到 v_k 且路径上中间顶点都在集合 $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ 中的路径的最短距离。



答案:

a) $ab:3, ac:2, ad:8, ae:10, az:13, bc:1, bd:5, be:7, bz:10, cd:6ce:8, cz:11, de:2, dz:5, ez:3$

b) 证明：用数学归纳法证明 $Floyd$ 最外层的循环求解的是连接 v_j, v_k 的中间点属于集合 $\{v_1, v_2, ..., v_i\}$ 的路径的最短距离。

基本步骤 $i = 1$ 时，显然。

归纳步骤：假设 $i = t$ 时满足，那么需要证明 $i = t + 1$ 也满足。当 $i = t + 1$ 时，$d(v_j, v_k) = min\{d(v_j, v_k), d(v_j, v_{t+1}) + d(v_{t+1}, v_k)\}$。$d(v_j, v_{t+1}), d(v_{t+1}, v_k)$ 分别表示连接 v_j, v_{t+1} 和 v_{t+1}, v_k 的中间点属于集合 $\{v_1, v_2, ..., v_t\}$ 的路径的最短距离，则 $d(v_j, v_{t+1}) + d(v_{t+1}, v_k)$ 表示连接 v_j, v_k 的经过 v_{t+1} 且中间点属于集合 $\{v_1, v_2, ..., v_t\}$ 的路径的最短距离。所以 $min\{d(v_j, v_k), d(v_j, v_{t+1}) + d(v_{t+1}, v_k)\}$ 表示连接 v_j, v_k 的中间点属于集合 $\{v_1, v_2, ..., v_{t+1}\}$ 的路径的最短距离。得证。

Problem 28

下面是 $Dijkstra$ 算法的一个实现，它求出了从 a 出发到 z 所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下列问题：

Algorithm 2 Dijkstra 算法

procedure DIJKSTRA(G: 所有权都为正数的带权连通简单图)
  $\{G$ 有顶点 $a = v_1, v_2, ..., z = v_n$ 和权 $w(v_i, v_j)$，其中若 (v_i, v_j) 不是 G 的边，则 $w(v_i, v_j) = \infty\}$
    for do $i := 1$ **to** n
        $L(v_i) := \infty$
    $L(a) := 0$
    $S := \emptyset$
    while do $z \notin S$
        $u :=$ 不属于 S 的 $L(u)$ 最小的一个顶点
        $S := S \cup \{u\}$
        for 所有不属于 S 的顶点 v **do**
            $L(v) := \min\{L(v), L(u) + w(u, v)\}$
    {向 S 中添加带最小标记的顶点，并且更新不在 S 中的顶点的标记}
return $L(z)$ $\{L(z) =$ 从 a 到 z 的最短通路的长度$\}$

a) 对于任意边权大于 1 的图 G，对于给出的点 a, z，试求 a 到 z 的通路上所有边的权值乘积最小可以是多少；（无需证明，下同）

b) 对于任意边权非负的图 G，对于给出的点 a, z，试求 a 到 z 的任意通路上最短的边最长可以有多长。

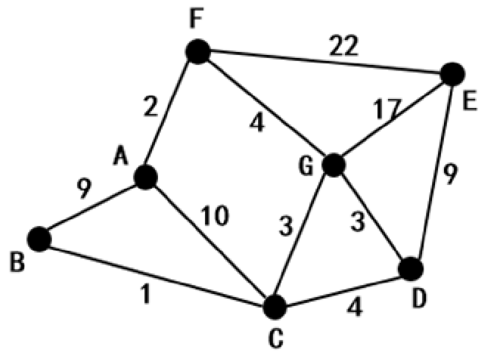
答案： 根据代数结构修改相应的操作即可：

a) 初始化 (line 3)：$L(a) := 1$
更新步骤 (line 9)：$L(v) := \min\{L(v), L(u)w(u,v)\}$

b) 初始化 (line 2)：$L(v_i) := -\infty$
初始化 (line 3)：$L(a) := \infty$
选择顶点 (line 6)：$u :=$ 不属于 S 的 $L(u)$ 最大的一个顶点
更新步骤 (line 9)：$L(v) = \max\{L(v), \min\{L(u), w(u,v)\}\}$

Problem 29

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。



答案：

$$dis(A,B) = dist(P(A \to B)) = 9$$
$$dis(A,C) = dist(P(A \to F \to G \to C)) = 9$$
$$dis(A,D) = dist(P(A \to F \to G \to D)) = 9$$
$$dis(A,E) = dist(P(A \to F \to G \to D \to E)) = 18$$
$$dis(A,F) = dist(P(A \to F)) = 2$$
$$dis(A,G) = dist(P(A \to F \to G)) = 6$$

Problem 30

往 $2n$ 个孤立的顶点间加入 n 条边，试求总共能得到多少种不同的包含这 $2n$ 个顶点的完美匹配？

答案： 将 $2n$ 个顶点随机排序，连接 $2k-1$ 和 $2k$ 的点（k 从 1 到 n）就是一个完美匹配。共有 $(2n)!$ 个排列。这些排列中存在重复的完美匹配：

1) 每条边的两个点交换顺序（例如 12 跟 21 是一种完美匹配，共 $2n$ 种可能）；

2) 边跟边交换顺序（例如，1234 和 3412 是一种完美匹配，共 $n!$ 种可能）

。所以，共有 (2n)!/(2n n!) 种不同的完美匹配。

Problem 31

今有二人，于一图 G 上玩下列游戏：二人交替选择该图的顶点，要求除了第一步选择，每一步选择的顶点都与对手刚刚选择的顶点相邻. 最后还能做出合法选择的玩家获胜. 试证明：当且仅当 G 中没有完美匹配时，先走的选手有必胜策略.

答案:

必要性： 反证法，假设 G 中存在完美匹配 M，无论先走选手采用什么策略，后走选手均可依据 M 应对而获胜：当先走选手选择顶点 v_{2i} 时，后走选手选择 v_{2i+1} 使得 M 中有一条边连接 v_{2i} 和 $v_{2i+1}, i \geq 0$ 。由于 M 是完美的，这样的 v_{2i+1} 总可以选到。于是先走选手无必胜策略。

充分性： 若 G 中没有完美匹配，令 M 为一最大匹配，先走选手首先选择一不被 M 饱和的点 v_0；由于不存在 M 的增广路径，而后他的总可以使得 G 中有边 $v_{2i}v_{2i+1}$ 但该边不在 M 中，且边 $v_{2i+1}v_{2i+2}$ 在 M 中。【注：由 M 的最大性，后走选手的第一步必选某个被 M 饱和的点。而后先走选手每次依据 M 选 v_{2i+2} 即可】

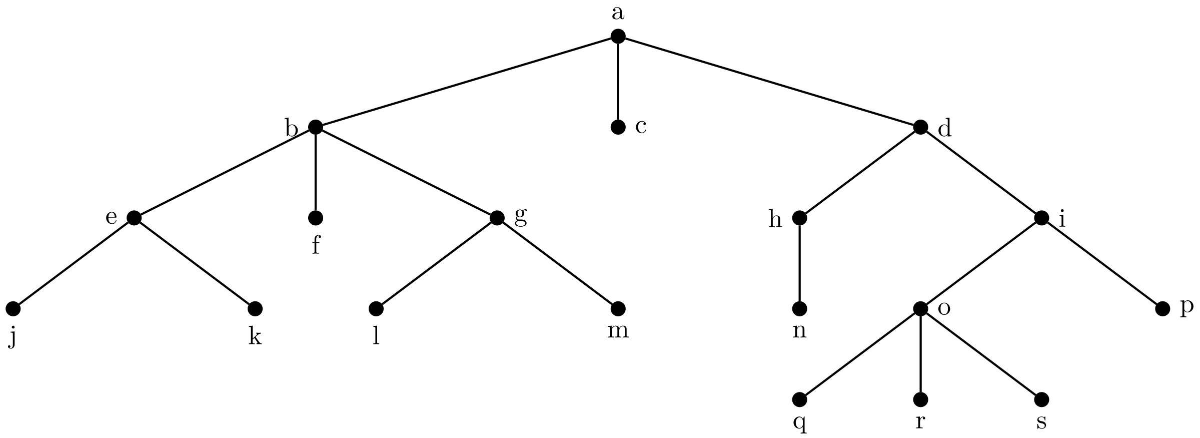
Problem 32

定义：集合族 $(A_1, A_2, , A_m)$ 的一个相异代表系（system of distinct representatives, SDR）是指集合 $(A_1, A_2, , A_m)$ 中包含的对每个正整数 $i (1 \leq i \leq m)$ 都满足 $x_i \in A_i$ （称元素 x_i 为集合 A_i 的代表元素）的互异的代表元素组 $(x_1, x_2, , x_m)$. 例如，对集合 $\{a, b, c, d\}$ 的一个子集族 $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$，其中 $A_1 = \{ \ , \ , \ \}, A_2 = \{ \ , \ \}, A_3 = \{ \ , \ , \ \}, A_4 = \{ \ , \ \}$，可见 $\mathcal{A}$ 存在一个 SDR：(c, b, a, d)，但 (a, b, b, d) 则不是 $\mathcal{A}$ 的 SDR，因其不满足代表元素的互异性。试证明：集合族 $(A_1, A_2, , A_n)$ 存在 SDR 当且仅当该集合族满足：对所有 $k \leq n$，集合族中任意 k 个集合 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 的并集中至少包含 k 个元素。注：集合族是指由集合构成的序列，序列中的元素（即集合）可以相同。

答案: 证明：取集合族中的各元素（集合）作为集合 V_1，取集合族中各元素（集合）的并集作为 V_2，取 V_2 中的元素 a 属于 V_1 中的某元素（集合）A 的二元关系作为边集 E；此模型可构成一个二部图 $G = (V_1, V_2, E)$。求集合族的 SDR 即为求 G 的完备匹配。易见待证问题即 Hall 条件，命题得证。

Problem 33

确定前序遍历、中序遍历和后续遍历下所给的有序根树的顶点的顺序。



答案： 前序：$a, b, e, j, k, f, g, l, m, c, d, h, n, i, o, q, r, s, p$；

中序：$j, e, k, h, f, l, g, m, a, c, n, h, d, q, o, r, s, i, p$；

后序：$j, k, e, f, l, m, g, b, c, n, h, q, r, s, o, p, i, d, a$。

Problem 34

证明：树只有一个中心或两个相邻的中心。

答案： 记点 u 在图 G 上的离心度为 $e_G(u)$。

引理：若 $V(T) > 2$，树中任意中心的度大于 1。

引理证明：若中心 c 的度为 1，因为 $V(T) > 2$，从 c 出发必然经过 c 唯一的邻居 u 再到达其余顶点，于是 $e_T(c) > 2$。再考虑 u，不难看出从 u 出发的极大路径要么是 $u- > c$，要么是从 c 出发的路径去掉第一条边 (c, u)，于是 $e_T(u) < max\{1, e_T(c) - 1\} \le e_T(c)$，与 c 是中心矛盾。

按树 T 的顶点数进行归纳：

基础条件 当 $|V(T)| \in \{1, 2\}$ 时显然原命题成立。

归纳假设 $|V(T)| \le i (i \ge 2)$ 时原命题总成立。

归纳步骤 当 $|V(T)| = i + 1$ 时，显然 T 中至少有一个度为 1 的点，删去所有这样的点可得到点数不超过 i 的树 T'，现只需证明 T 的中心必然是 T' 的中心即可得证。由以下两结论可证：

1. T 的中心一定在 T' 上，由引理可得；

2. $\forall u, v \in T$ 有 $((u, v \in T') \land (e_T(u) \le e_T(v))) \to e_{T'}(u) \le e_{T'}(v)$，若 u 在 T' 上，因为从 u 出发的每个 T 上的极大路径都将终止在一个度为 1 的点，在 T' 上极大路径恰好是那些路径删去最后一个点得到的。即 $e_{T'}(u) = e_T(u) - 1$。

Problem 35

令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$。

a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

c) 假设 D 满足上式。试证明：可将 D 中各整数划分为两个序列 S_1,S_2, 使得 S_1 中正整数之和与 S_2 中正整数之和相等。

答案：

a) 树 T 的边的数目为 $n-1$。由握手定理可知 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

b) 对 n 进行归纳。

基础步骤： 当 $n=2$ 时该命题显然成立。

递归步骤： 假设对于 $2\leq n=k-1$ 时该命题成立。现证明该命题对 $n=k$ 时也成立。D 中必存在 $d_i=1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$）；亦必有 $d_j>1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i < 2(n-1)$）。考虑 $D'=(D-\{d_i,d_j\})\ \{d_j-1\}$，易见 D' 满足归纳假设条件，即存在一颗树 T 的各个顶点的度数序列恰是 D'。今在 T 中添加一个节点，并将其连接到对应于 d_j-1 的节点上。易见 D 恰好是这个新的树的顶点的度数序列。

c) 根据 b)，存在一个树 T，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。该树可依据各顶点距离某一给定顶点的距离的奇偶性划分为二部图，于是其两部分中各顶点的度数序列即对应于所求的 S_1,S_2。

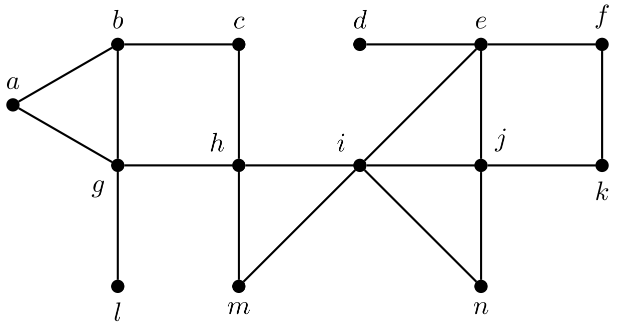
Problem 36

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明 P 的端点不是图 G 的割点。

答案： P 的端点 u 不能有边连接到不在 P 中的顶点 v，否则可将 P 这通过条边延长到 v，这与 P 是最长初级通路矛盾。考虑到 u 是 P 的端点，删除该端点不影响 P 中其余顶点间的连通性，而 u 又没有其它相邻节点，可知它不是割点。

Problem 37

用深度优先搜索和广度优先搜索来构造下图的生成树。选择 a 作为这个生成树的根，并假定顶点都以字母顺序来排序。



答案： DFS：$\to a, a \to b, b \to c, c \to h, h \to g, g \to l, h \to i, i \to e, e \to d, e \to f, f \to k, k \to j, j \to n, i \to m$

BFS：$\to a, a \to b, a \to g, b \to c, g \to h, g \to l, h \to m, h \to i, i \to e, i \to j, i \to n, e \to d, e \to f, j \to k$

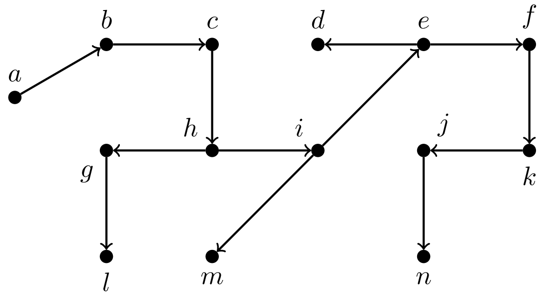


Figure 1: *

DFS

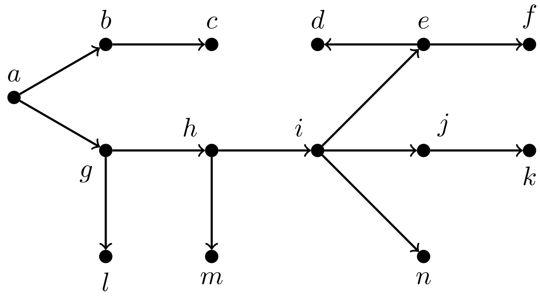


Figure 2: *

BFS

Problem 38

设 G 是连通图。证明：如果 T 是用深度优先搜索构造的 G 的生成树，则 G 的不在 T 中的边必定是背边，换句话说，这条边必定连接一个顶点到这个顶点在 T 中的祖先或后代。

答案： 反设 $G - T$ 中存在非背边 (u, v)，不妨设 DFS 先访问到 u，因为 (u, v) 不在 T 中，所以检查 (u, v) 时 v 已经被访问过，即 v 的访问时间在访问 u 到回溯离开 u 的时间段中，则 v 是 u 的后代，矛盾。

Problem 39

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

答案： 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\}\ \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。