

## **Лабораторная работа №1**

# **Математические модели искусственных нейронных сетей**

---

### **1. Цели и задачи лабораторной работы**

В этой лабораторной работе студент познакомится с особенностями работы технического нейрона, архитектурой искусственной нейронной сети и проблемой ее обучения.

Целью работы является изучение математической модели нейронной сети, наиболее часто используемой в технических приложениях. Для первого ознакомления с нейронными сетями предлагается практическая задача отнесения объекта к одному из заданных классов - задача распознавания образов. Исследуются особенности функционирования нейронных сетей двух разных типов - рекуррентной и прямого распространения - для решения поставленной задачи.

Лабораторная работа выполняется на эмуляторах нейронных сетей, реализованных в среде MATLAB [16,17].

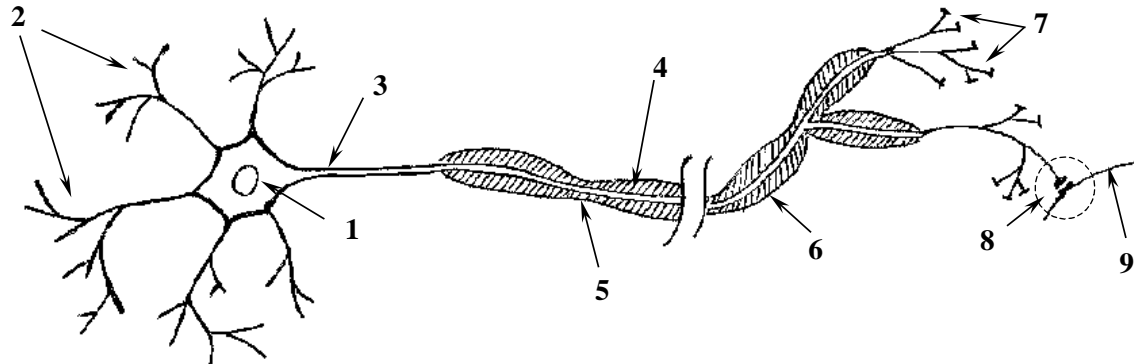
### **2. Общие сведения о структуре биологического нейрона**

Человеческий мозг содержит от  $10^{10}$  до  $10^{12}$  нейронов, каждый из которых связан с  $10^3 \div 10^5$  других нейронов. Эта сеть нейронов обеспечивает все процессы жизнедеятельности - от мышления, эмоционального состояния до различного рода сенсомоторных функций. Изучение структуры нейрона стало возможным только в конце XIX века после открытия в 1880 г. миланским анатомом Камилло Гольджи (Camillo Golgi) красителя на основе солей серебра для изучения структуры клеток в срезах тканей живых организмов. Это дало возможность четко выделить отдельные клетки и наблюдать их внутреннюю структуру. Испанский нейроанатом Рамон-и-Каджал (Ramon y Cajal) с помощью окраски

ткани по методу Гольджи обнаружил, что нервная сеть не является непрерывной системой нервных волокон, а состоит из отдельных клеточных образований, названных *нейронами* (1880 г.). Нейроны, как показал Рамон-и-Каджал, разделены друг от друга узкими щелями, через которые происходит передача сигналов возбуждения и торможения. Оба ученых - Камилло Гольджи и Рамон-и-Каджал - в начале XX века стали лауреатами Нобелевской премии.

На рис.1 представлена типовая структура нейрона. У большинства позвоночных линейный размер нейронов лежит в пределах 10 - 80 микронов. В то же время у моллюсков (кальмары, осьминоги, апплизии) тело клетки нейрона достигает размера 1 мм, что сделало их чрезвычайно удобным биологическим материалом для проведения исследований. Подобные исследования наиболее активно проводились в 40-е годы XX века с использованием электронного микроскопа и различных биохимических методов. С историей открытия и изучения нейронов можно ознакомиться в популярной книге [1, глава 7].

Дендриты образуют ветвящуюся систему, воспринимающую сигналы (возбуждающие и тормозные), которые суммируются в триггерной области (аксоновый холмик) мембраны нервной клетки. В нормальном (неактивном) состоянии нейрон имеет отрицательный заряд. Разность потенциалов с окружающей нейрон средой составляет  $-70\text{mV}$  и поддерживается клеточной мембраной, обеспечивающей пониженное содержание в клетке положительных ионов натрия и повышенное содержание отрицательных ионов калия. Если в течение короткого интервала времени суммарный сигнал в триггерной области превышает  $-50\text{mV}$ , то в нейроне развивается лавинообразный процесс, при котором за счет изменения интенсивностей потоков ионов натрия и калия между телом нейрона и окружающей средой потенциал клетки достигает  $+50\text{mV}$ . Возникает импульс ("*спайк*"), который по единственному аксону передается на другие нейроны. У позвоночных диаметр аксона составляет нескольких мк, а длина может достигать 1м и более. У моллюсков диаметр аксона на два порядка больше и приближается к 0.1 мм.



- 1 – тело клетки (сoma)
- 2 – дендриты
- 3 – аксоновый холмик (триггерная область)
- 4 – аксон
- 5 – перехват Ранвье
- 6 – миелиновая оболочка
- 7 – эффекторные нервные окончания
- 8 – синапс
- 9 – дендрит постсинаптического нейрона

Рис. 1. Схема нейрона.

Для передачи импульса по аксону служит миелиновая оболочка, которая примерно через каждый миллиметр прерывается узлами, называемыми *перехватами Ранвье*. Импульсы передаются толчками от узла к узлу, что обеспечивает, кроме минимизации энергетических затрат, значительную скорость передачи сигнала, которая может достигать 100 м/с.

Следует отметить, что нейрон не является бинарным элементом, который либо пассивен, либо возбужден. Уровень активности нейрона кодируется частотой последовательности импульсов (частотно-импульсная модуляция), которая может меняться в пределах от 1 до 100 гц.

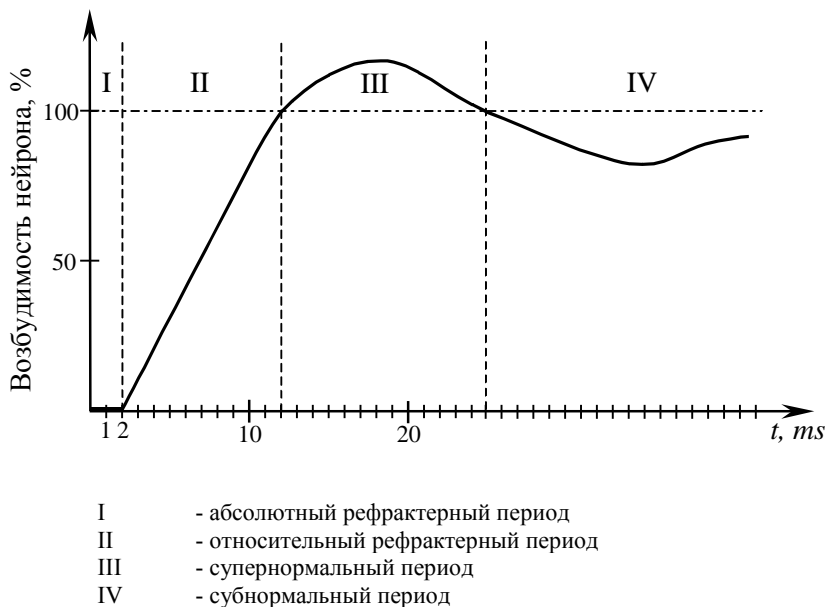


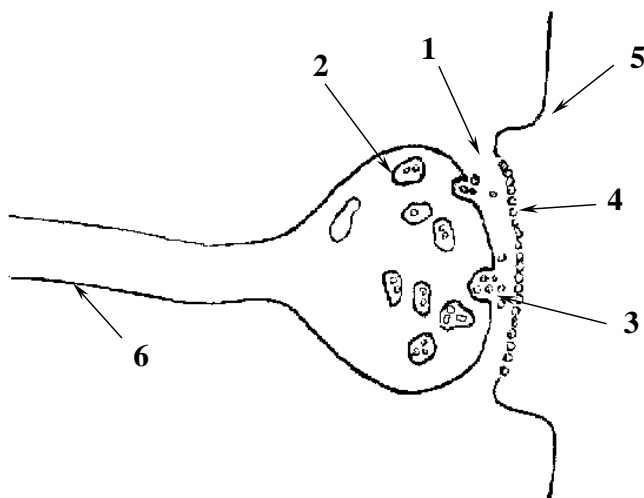
Рис. 2. График изменения возбудимости нейрона после возникновения импульса возбуждения

После генерации спайка наступает период, называемый *рефрактерным*, в течение которого клетка восстанавливает свой

начальный потенциал. Этот период длится до нескольких мс. Во время рефрактерного периода нейрон не способен к возбуждению. Эта особенность функционирования нейрона отражена на рис.2. По вертикали отмечается уровень возбудимости нейрона в процентах по отношению к нормальной возбудимости неактивного нейрона, по горизонтали время в мс отсчитывается от момента возникновения импульса возбуждения. Во время фазы I реакция нейрона на входные сигналы отсутствует, во время фазы II эта реакция ослаблена. Фаза III характеризуется повышенной возбудимостью нейрона, а фаза IV - пониженной возбудимостью.

Аксон на конце имеет множество ветвей, каждая из которых завершается *синапсом* (рис. 3). Синаптическое окончание пресинаптического аксона отделяется от постсинаптического дендрита узкой синаптической щелью, впервые обнаруженной Рамон-и-Каджалом и доказавшей существование нервных клеток. Передача сигнала в синапсе происходит химическим путем. Синапсы содержат большое количество пузырьков специального химического вещества, которые под воздействием пришедшего сигнала лопаются и наполняют своим содержимым синаптическую щель. Попавшие в синаптическую щель вещество играет роль транмиссера, передающего возбуждение с аксона пресинаптического нейрона на дендрит постсинаптического нейрона. Таким способом постсинаптический нейрон получает сигналы по разветвленной системе своих дендритов и при достаточной совокупной мощности этих сигналов реагирует возбуждением и передачей сигнала на другие нейроны. Сила синаптической связи не является постоянной. В процессе жизнедеятельности синаптическая связь может усиливаться или ослабевать, что отражает процессы обучения и адаптации.

В зависимости от роли, которую играют нейроны в нейронной сети, различают эффекторные нейроны, передающие сигнал непосредственно исполнительным органам (например, мышцам), интернейроны (или вставочные нейроны), которые служат промежуточными звеньями по пути передачи сигнала, и рецепторные нейроны, воспринимающие сигналы от органов чувств.



- 1 – синапс
- 2 – синаптический пузырек
- 3 – выброс медиатора
- 4 – рецепторы для медиатора
- 5 – дендрит постсинаптического нейрона
- 6 – аксон пресинаптического нейрона

Рис. 3. Структура синаптической связи нейронов.

В заключение приведенного описания работы нейрона отметим несколько принципиальных особенностей, которые будут приняты во внимание при построении математической модели технического нейрона:

- нейрон аккумулирует сигналы, переданные ему через разветвленную систему дендритов,
- активность нейрона не может поддерживаться длительно во времени, а сигналы возбуждения могут вырабатываться нейроном не чаще, чем это позволяет интервал рефрактерности,
- нейрон является нелинейным преобразователем поступающих на него сигналов,

- сила синаптической связи нейронов настраивается в соответствии с реальными условиями жизнедеятельности.

### 3. Математическая модель искусственного нейрона

В 1943 г. У. Мак Каллок и У. Питтс (Warren McCulloch, Walter Pitts) опубликовали статью [2], в которой предложили общую теорию обработки данных, основанную на использовании бинарных переключающих элементов, названных ими *нейронами*. Такие нейроны имеют состояния 0 (невозбужденное) и 1 (активное).

Авторы предложили схему функционирования технического нейрона в дискретном времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Если принять во внимание рефрактерный интервал, которым характеризуется работа биологического нейрона, то можно сказать, что выбор дискретного времени соответствует особенностям работы живой нервной клетки.

На нейрон поступают сигналы как из внешней среды, так и от других нейронов. В математической модели эти сигналы образуют вектор-строку  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t))$ . Каждый из сигналов  $y_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , воздействует на нейрон с усилением или ослаблением, определяемым постоянными коэффициентами  $w_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , которые имитирует передачу сигнала через синапс и потому называются *синаптическими коэффициентами*. Под воздействием сигнала  $y(t)$  на нейроне устанавливается потенциал  $h(t)$  в соответствии с формулой:

$$h(t) = \sum_{j=1}^M w_j y_j(t) - b, \quad (3.1)$$

где  $b$  - начальное смещение потенциала невозбужденного нейрона. Если ввести вектор синаптических коэффициентов  $w = (w_1, w_2, \dots, w_M)$ , то выражение (3.1) может быть записано в следующей краткой форме:

$$h(t) = y(t) w^T - b, \quad (3.2)$$

где  $^T$  - знак транспонирования вектора или матрицы.

Выходной сигнал нейрона  $n(t+1)$  на следующем такте дискретного времени рассматривается как результат нелинейного преобразования потенциала  $h(t)$ :

$$n(t+1) = \theta[h(t)], \quad (3.3)$$

В работе [2] в качестве нелинейного преобразователя используется пороговая единичная функция:

$$\theta[h] = \begin{cases} 0, & h \leq 0, \\ 1, & h > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Математическая модель нейрона (3.1) – (3.4) иллюстрируется схемой, представленной на рис. 4.

Функция  $\theta[h]$  называется *активационной характеристикой*, или передаточной функцией нейрона. Кроме рассмотренной выше пороговой функции, в нейронной сети могут быть использованы другие типы активационных характеристик. Обычно используются нелинейные функции, называемые *сигмоидальными*. Они обладают следующими свойствами:

- бесконечная числовая ось отображается сигмоидальной функцией на конечный интервал,
- сигмоидальная функция непрерывна и монотонно возрастает.

Обычно к указанным требованиям добавляются условия

$$\theta[-\infty]=0, \theta[\infty]=1. \quad (3.5)$$

Если условия (3.5) не выполнены, то с помощью простейших линейных преобразований потенциала  $h$  они могут быть удовлетворены. На рис.5 представлен типовой пример сигмоидальной функции активации нейрона.

В практических приложениях можно встретить различные нелинейные характеристики  $\theta[h]$ :



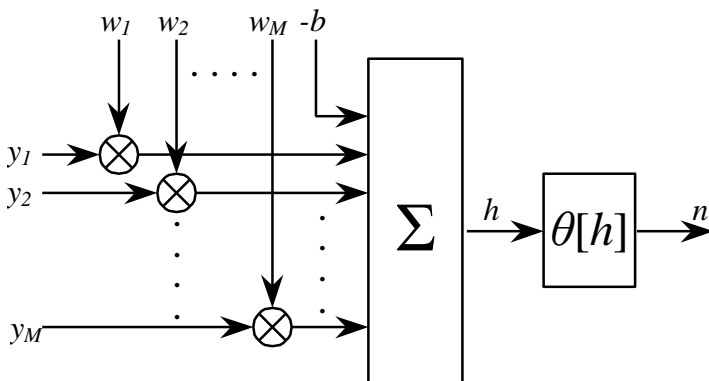


Рис. 4. Математическая модель технического нейрона

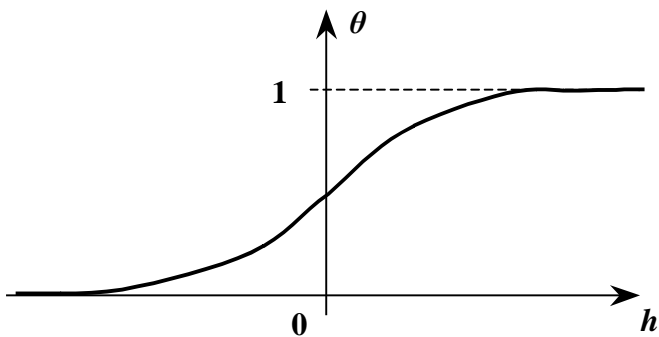


Рис. 5. Сигмоидальная активационная характеристика

$$\theta[h] = \frac{h}{\alpha + |h|}, \quad \alpha > 0 \quad (3.6)$$

$$\theta[h] = \text{th}(\alpha h), \quad \alpha > 0 \quad (3.7)$$

$$\theta[h] = \frac{1}{1 + e^{-\alpha h}}, \quad \alpha > 0 \quad (3.8)$$

$$\theta[h] = \begin{cases} 0, h < 0, \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \alpha h\right), 0 \leq h \leq \frac{1}{\alpha}, \quad a > 0, \\ 1, h > \frac{1}{\alpha}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Активационная характеристика (3.8) носит название *логистической*.

Функция активации нейрона может быть невозрастающей в отличие от предыдущих примеров. В частности, может быть применена гауссова функция

$$\theta[h] = \chi \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.10)$$

где  $\chi$  и  $\sigma$  - параметры активационной характеристики (рис.6).

Как следует из математической модели (3.2) – (3.4) технического нейрона, она содержит ряд параметров. К числу этих параметров относятся синаптические коэффициенты  $w = (w_1, w_2, \dots, w_M)$  и смещение нейрона  $(-b)$ . Выбор значений параметров  $w$  и  $(-b)$  зависит от конкретных условий решаемой практической задачи. Их настройка проводится в специальном режиме функционирования нейронной сети – режиме обучения. Это дало основание называть нейрокомпьютеры машинами, которые обучаются.

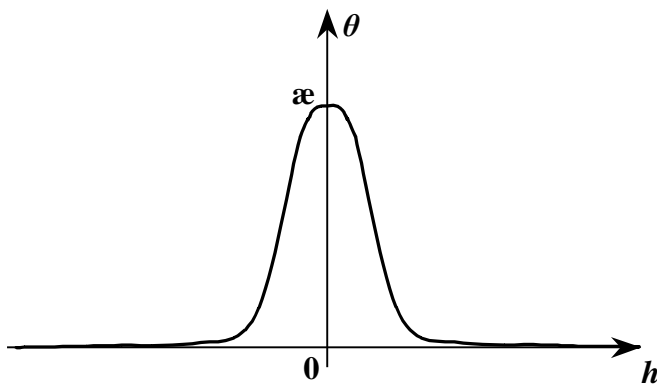
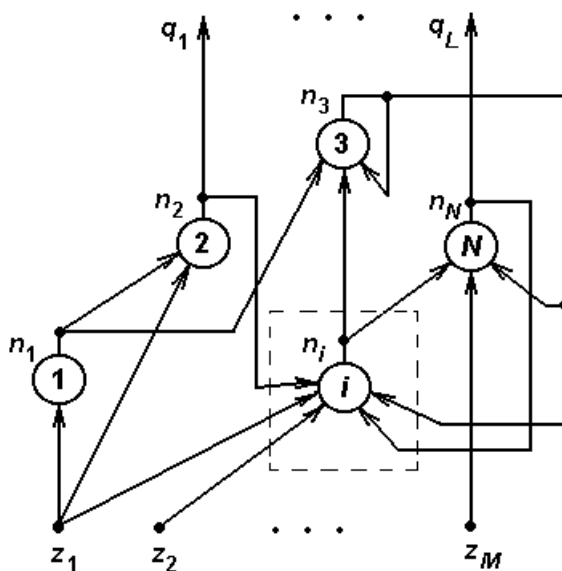


Рис. 6. Гауссова активационная характеристика нейрона

Рис. 7. Схема нейронной сети, содержащей  $N$  нейронов и имеющей  $M$  входов и  $L$  выходов

#### 4. Математическое описание нейронной сети.

Рассмотрим совокупность  $N$  взаимосвязанных нейронов (рис.7). Выход  $i$ -го нейрона обозначим  $n_i(t)$ , потенциал –  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Введем векторы-строки  $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$ ,  $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t))$ . Нейронная сеть, состоящая из  $N$  указанных нейронов, подвергается воздействию внешних сигналов. Это воздействие представлено вектором-строкой  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_M(t))$  размерности  $M$ . Кроме внешнего воздействия  $z(t)$ ,  $i$ -й нейрон может получать возбуждение со стороны других нейронов. Допускается обратная связь с собственным выходом, так что совокупность всех возможных входов  $i$ -го нейрона образует вектор  $y(t) = (z(t), n(t))$  размерности  $M + N = Q$ . По аналогии с выражением (3.1) потенциал  $h_i$   $i$ -го нейрона может быть представлен в форме:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij} n_j(t) + \sum_{j=1}^M v_{ij} z_j(t) - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

где  $w_{ij}$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ , и  $v_{ij}$ ,  $j=1, 2, \dots, M$ , синаптические коэффициенты передачи соответствующих сигналов на  $i$ -ый нейрон,  $(-b_i)$  – смещение  $i$ -го нейрона. Введение матриц  $W = \{w_{ij}, i, j=1, 2, \dots, N\}$ ,  $V = \{v_{ij}, i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M\}$  и вектора  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  позволяет записать выражение (4.1) в краткой векторно-матричной форме:

$$h(t) = n(t)W^T + z(t)V^T - b. \quad (4.2)$$

Введем векторную активационную характеристику нейронов:

$$\theta[h] = (\theta_1[h_1], \theta_2[h_2], \dots, \theta_N[h_N]). \quad (4.3)$$

Нижний индекс в обозначении активационной характеристики  $\theta[h_i]$   $i$ -го нейрона введен в связи с тем, что нейроны могут иметь разные активационные характеристики. Обозначение (4.3) позволяет записать совокупность скалярных преобразований

$$n_i(t+1) = \theta_i[h_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

в векторной форме

$$n(t+1) = \theta[h(t)]. \quad (4.5)$$

На рис.8 представлена схема преобразования данных  $i$ -м нейроном в соответствии с описанной выше математической моделью.

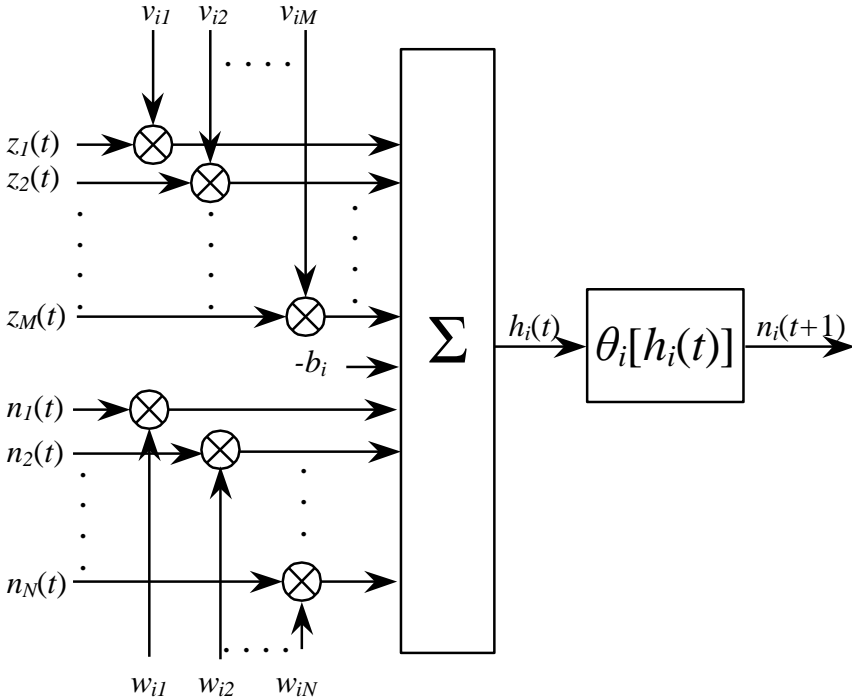


Рис. 8. Схема преобразования данных  $i$ -м нейроном в нейронной сети.

Если активационные характеристики всех нейронов сети одинаковы, нейронная сеть называется однородной.

Выходы нейронной сети  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_L(t)$  образуют вектор-строку  $q(t)$  размерности  $L$  и представляет собой некоторое подмножество выходов нейронов  $n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)$ . Математически это представляется формулой:

$$q(t) = n(t)R, \quad (4.6)$$

где  $R$  – матрица размерности  $N \times L$ . В качестве примера можно рассмотреть следующее матричное преобразование:

$$(q_1, q_2, q_3) = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которое реализует формирование выходов  $q_1 = n_2$ ,  $q_2 = n_4$ ,  $q_3 = n_5$  в нейронной сети, содержащей 5 нейронов.

Совокупность выражений (4.2), (4.5) и (4.6) представляет собой математическую модель нейронной сети, которая эволюционирует во времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ , отталкиваясь от начального состояния

$$n(0) = n_0, \quad (4.7)$$

где  $n_0$  – вектор-строка размерности  $N$ .

Конфигурация связей в нейронной сети (ненулевые значения матриц  $W$  и  $V$ ) определяет ее архитектуру. В общем случае полный набор значений  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ , ...  $n_N(t)$  необходим для формирования состояния сети  $n_1(t+1)$ ,  $n_2(t+1)$ , ...  $n_N(t+1)$  в следующий такт дискретного времени. Такая сеть содержит внутренние обратные связи и называется *рекуррентной*. Она может эволюционировать бесконечно долго. В связи с описанными в п.3 особенностями активационных характеристик нейронов их выходы ограничены, и нейронная сеть является устойчивой (дает на произвольное входное воздействие ограниченную реакцию в любой момент времени  $t$ ).

Частным случаем архитектуры нейронной сети является «сеть прямого распространения». В подобной сети сигнал на каждом такте дискретного времени продвигается от места приложения входного сигнала к выходу. Если воздействие на нейронную сеть является импульсным, т.е. присутствует на входе только на одном

временном такте, то динамические процессы в сети развиваются в течение конечного интервала времени, пока входной сигнал не достигнет выходных нейронов. Наиболее часто используется частный вариант сети прямого распространения сигнала, который носит специальное название *многослойной*, или *слоистой*, нейронной сети. Пример многослойной нейронной сети приведен на рис.9. Эта сеть имеет  $M=3$  входов,  $N=9$  нейронов и  $L=1$  выход. Связь между нейронами, принадлежащими одному слою, отсутствует. Также отсутствуют связи, «перепрыгивающие» один или несколько слоев. Многослойная нейронная сеть характеризуется матрицами  $W$  и  $V$  блочной структуры. В приведенном на рис.9 примере матрицы  $W$  и  $V$  в формуле (4.1) имеют следующую структуру:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{61} & w_{62} & w_{63} & w_{64} & w_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{71} & w_{72} & w_{73} & w_{74} & w_{75} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{81} & w_{82} & w_{83} & w_{84} & w_{85} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{96} & w_{97} & w_{98} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что  $w_{ij}$  является коэффициентом передачи сигнала с  $j$ -го нейрона к  $i$ -му, а  $v_{ij}$  — коэффициент передачи сигнала с  $j$ -го входа к  $i$ -му нейрону.

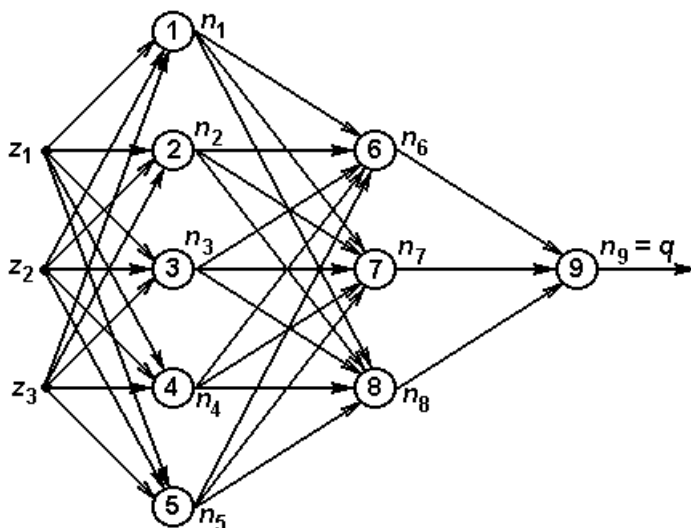


Рис. 9. Пример многослойной нейронной сети.



Смещения нейронов в сети, представленной на рис. 9, полагаются равными нулю:  $b = 0$ .

Матрица  $Q$  в формуле (4.6) для рассматриваемого примера имеет размерность  $9 \times 1$  ( $N=9, L=1$ ) и вырождается в вектор:

$$Q^* = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Сеть, представленная на рис.9, имеет 3 слоя. За три такта дискретного времени приложенный ко входу сети сигнал достигает выхода.

## 5. Стохастический нейрон

В математической модели нейрона, описанной в п.3, его выход  $n(t+1)$  однозначно определяется значением потенциала  $h(t)$  в соответствии с формулой (3.3). Можно построить иную модель нейрона, у которой выходной сигнал  $n(t+1)$  является случайным. Далее предлагается одна из возможных моделей стохастического нейрона.

Рассмотрим нейрон с двумя возможными состояниями  $+1$  и  $-1$ . Если потенциал нейрона в момент времени  $t$  равен  $h(t)$ , то на следующем такте дискретного времени вероятность события  $[n(t+1)=1]$  равна  $p_+(h)$ , а события  $[n(t+1)=-1]$  –  $p_-(h)$ . Согласно формуле полной вероятности

$$p_+(h) + p_-(h) = 1. \quad (5.1)$$

Существенно, что значения вероятностей  $p_+(h)$  и  $p_-(h)$  зависят от потенциала нейрона. Рассмотрим в качестве функции  $p_+(h)$  логистическую функцию:

$$p_+(h) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha h}}, \quad \alpha > 0. \quad (5.2)$$

Тогда на основании формулы (5.1) вычисляется выражение для  $p_-(h)$ :

$$p_-(h) = \frac{1}{1 + e^{\alpha h}}. \quad (5.3)$$

На рис.10 дана графическая иллюстрация к формулам (5.2), (5.3). Если потенциал нейрона  $h(t) = 0$ , то с равными вероятностями реализуются значения  $[n(t+1) = 1]$  и  $[n(t+1) = -1]$ . Смещение потенциала нейрона в область положительных значений приводит к увеличению вероятности принять положительное значение  $[n(t+1) = 1]$ . Отрицательный потенциал нейрона ведет к увеличению вероятности  $[n(t+1) = -1]$ . На рис.10 в качестве примера рассмотрено положительное значение потенциала  $h(t) = h^+$ .

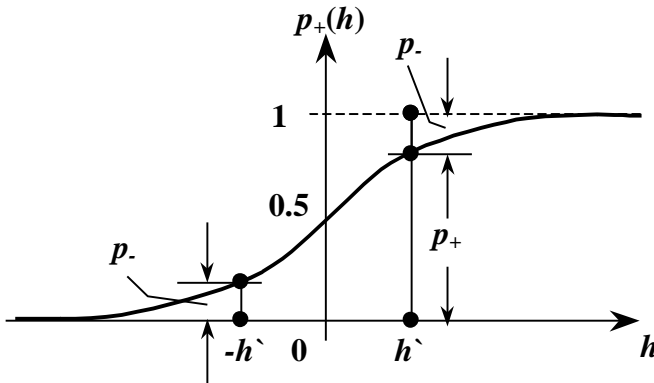


Рис. 10. Зависимость вероятности значения  $n(t + 1) = 1$  от потенциала  $h(t)$

Рассчитаем математическое ожидание случайного значения выхода  $n(t + 1)$  нейрона, если его потенциал равен  $h(t)$  (далее в расчетной формуле временной аргумент опускается для краткости записи):

$$\begin{aligned}
 M[n] &= (+1)P[n = +1] + (-1)P[n = -1] = p_+(h) - p_-(h) \\
 &= \frac{1}{1 + e^{-ah}} - \frac{1}{1 + e^{ah}} = \frac{1 - e^{-ah}}{1 + e^{-ah}}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Элементарное преобразование выражения (5.4) приводит к следующей формуле:

$$M[n] = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}h} - e^{-\frac{\alpha}{2}h}}{e^{\frac{\alpha}{2}h} + e^{-\frac{\alpha}{2}h}} = \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{2}h\right). \quad (5.5)$$

Функция гиперболического тангенса  $\operatorname{th}(x)$  является сигмоидальной, ее возможные значения лежат в диапазоне  $(-1, +1)$ . Построим детерминированный нейрон, у которого потенциал совпадает с потенциалом стохастического нейрона, а активационная характеристика определяется формулой:

$$\theta[h] = \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{2}h\right). \quad (5.6)$$

Обозначим выход детерминированного нейрона  $\bar{n}$ :

$$\bar{n} = \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{2}h\right). \quad (5.7)$$

Сравнение формул (5.5) и (5.7) показывает, что выход детерминированного нейрона отслеживает среднее значение случайного выхода биполярного стохастического нейрона с состояниями  $+1$  и  $-1$ . Здесь имеется в виду осреднение по множеству возможных реализаций биполярных последовательностей на выходе стохастического нейрона.

Если анализируется работа нейронной сети, построенной на стохастических нейронах, то соответствующая сеть, имеющая в своем составе детерминированные нейроны с активационными характеристиками – функциями гиперболического тангенса, отражает динамику работы стохастической нейронной сети в среднем по совокупности реализаций. Следует отметить, что сформулированное выше утверждение является приближенным, так как выражение (5.5) для математического ожидания выхода нейрона вычислялось при условии известного значения

потенциала, в то время как в стохастической нейронной сети потенциалы нейронов также являются случайными. Фактически вычислялось значение  $M[n(t+1) \mid h(t)=h]$ , а анализ замкнутой сети предполагает вычисление безусловного математического ожидания  $M[n(t+1)]$ . Несовпадение указанных характеристик связано с нелинейностью преобразования сигнала нейроном.

## **6. Сравнение характеристик машины фон Неймана и нейронной сети**

Машина фон Неймана основана на принципе последовательных вычислений и эффективно решает задачи числовой и символьной обработки данных. Однако такие задачи, как распознавание изображений, полученных в разных масштабах и ракурсах, ассоциативный поиск информации по “обрывочным” или искаженным данным, принятие интеллектуальных решений в сложных ситуациях, решаются на последовательных машинах неэффективно. В то же время мозг человека, включающий в себя низкопроизводительные с технической точки зрения вычислительные элементы - нейроны с частотой срабатывания не более нескольких сотен герц, с легкостью справляется с подобными задачами. Например, задача распознавания лица человека решается за доли секунды. Такой результат достигается за счет принципиально иной организации вычислений, основанной на параллельной обработке информации. В табл. 1 приведены сравнительные характеристики машины фон Неймана и биологической нейронной сети [3]. Искусственные нейронные сети в некоторой степени повторяют особенности функционирования биологических нейронных сетей. К их числу следует отнести параллелизм вычислений, поиск информации по содержанию (ассоциации), а не по месту хранения, адаптация к внешним условиям или самообучение, устойчивость работы при возможных отказах отдельных вычислительных элементов или нарушении связей между ними.

**Таблица 1.**  
**Сравнение машины фон Неймана**  
**с биологической нейронной системой**

	<b>Машина фон Неймана</b>	<b>Биологическая нейронная система</b>
<b>Процессор</b>	Сложный Высокоскоростной Один или несколько	Простой Низкоскоростной Большое количество
<b>Память</b>	Отделена от процессора Локализована Адресация не по содержанию	Интегрирована в процессор Распределенная Адресация по содержанию
<b>Вычисления</b>	Централизованные Последовательные Хранимые программы	Распределенные Параллельные Самообучение
<b>Надежность</b>	Высокая уязвимость	Робастность
<b>Специализация</b>	Численные и символьные операции	Проблемы восприятия
<b>Среда функционирования</b>	Строго определенная Строго ограниченная	Плохо определенная Без ограничений

Сравнение времени принятия решения человеком в сложной обстановке (около 1с) с тактом срабатывания нейрона (в среднем около 10мс) дает основание сделать вывод, что мозг “запускает” параллельные программы, содержащие около 100 шагов вычислений. Каждый нейрон срабатывает всего несколько раз и не несет основной информационной нагрузки. Эта нагрузка возложена на связи между нейронами, которые играют роль “памяти” вычислителя, настраивающейся в процессе обучения и функционирования в изменяющейся внешней среде. Именно эта ведущая роль связей между нейронами послужила основанием для введения термина коннекционистская модель применительно к искусственным нейронным сетям.

## **7.Общее описание задачи лабораторной работы**

В практических приложениях часто встречаются задачи обработки данных, которые относятся к классу задач распознавания образов. К подобным задачам относятся:

- распознавание рукописных букв независимо от их масштаба, угла поворота и особенностей почерка,
- диагностика заболевания пациента по данным медицинских анализов,
- определение типа сопровождаемой цели по известным характеристикам отраженного от цели радиолокационного сигнала,
- оценка уровня экологического загрязнения водоема по характеристикам отраженного лазерного луча.

Во всех перечисленных примерах исследуемый объект характеризуется совокупностью признаков, образующих вектор  $x=(x_1, x_2, \dots, x_M)$ . Объект может принадлежать одному из  $K$  известных классов. Так, при распознавании русских рукописных букв заданы 32 класса. На рис.11 представлена иллюстрация к задаче распознавания образов, в которой объект характеризуется двумерным вектором признаков  $x=(x_1, x_2)$ , заданным в прямоугольнике допустимых значений  $x_1 \in [x_1^{\text{л}}, x_1^{\text{п}}]$ ,  $x_2 \in [x_2^{\text{л}}, x_2^{\text{п}}]$ . Пространство признаков разделено на три непересекающиеся

области, каждая из которых объединяет объекты, принадлежащие одному классу. Эти области обозначены на рисунке  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ . Сложность решения задачи распознавания образов в практических приложениях связана с тем, что границы между классами неизвестны, их уравнения не заданы и простая логическая проверка принадлежности текущего объекта  $x$  к одной из областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  невозможна.

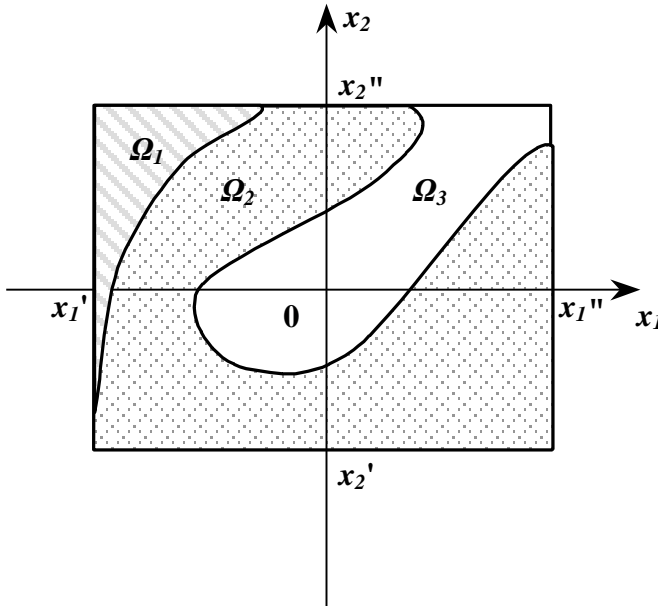


Рис. 11. Иллюстрация к задаче распознавания образов.

Разные математические постановки задачи распознавания образов связаны, как правило, с разным объемом и качеством располагаемой информации о решаемой задаче. В классической постановке задачи распознавания образов используются статистические данные относительно векторов признаков объектов в разных классах и вводится статистический критерий, позволяющий с определенной надежностью отнести объект к одному из классов. Такой подход требует предварительной

статистической обработки располагаемых данных и опирается на некоторые допущения о типах распределений вероятностей, которые могут быть неточными.

В последние годы широко распространился нейросетевой подход к решению задачи распознавания образов, который опирается исключительно на экспериментальные примеры, образующие обучающую выборку. С помощью обучающей выборки осуществляется такая настройка параметров нейронной сети (синаптических коэффициентов и смещений нейронов), чтобы при предъявлении сети вектора признаков объекта  $x$  она в качестве реакции формировала указание на класс принадлежности объекта. Например, можно потребовать при настройке параметров сети, чтобы при наличии  $K$  классов она возбуждала тот из  $K$  выходных нейронов, номер которого совпадает с номером класса принадлежности объекта.

Задача распознавания образов может решаться на нейронных сетях разной архитектуры. В настоящей лабораторной работе используется простейшая модель нейронной сети, в которой каждый из нейронов выполняет четко определенную функциональную задачу и потому легко контролируется при проведении исследований.

Целью работы является изучение математической модели технического нейрона и нейронной сети, ознакомление с особенностями функционирования нейронных сетей прямого распространения и рекуррентных нейронных сетей, исследование работоспособности нейронной сети при изменении ее внутренних характеристик.

## **8. Математическая постановка задачи**

Для начального изучения модели технического нейрона и структуры нейронной сети рассматривается сеть Хемминга (Hamming). Эта сеть предназначена для распознавания класса принадлежности объекта, заданного вектором  $x$  биполярных признаков (возможные значения признаков  $+1$  и  $-1$ ) размерности  $M$ . Если представить  $M = n_1 * n_2$ , то строка биполярных признаков



может быть преобразована к прямоугольной матрице с  $n_1$  строками и  $n_2$  столбцами. Тогда возможна графическая интерпретация объекта (рис. 12), в которой клетки матрицы, соответствующие признакам со значением +1, представлены черным цветом, а -1 - белым цветом. Предполагается, что имеются  $K$  классов, каждый из которых характеризуется своим эталонным представителем - объектом  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Сеть Хемминга принимает на  $M$  входов биполярные признаки объекта и после выполненной обработки данных активизирует один из  $K$  выходов, который указывает на класс принадлежности предъявленного на входе объекта.

Критерием отнесения объекта  $x$  к классу является квадрат расстояния между векторами  $x$  и  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ :

$$R(x, x^{(k)}) = \sum_{j=1}^M (x_j - x_j^{(k)})^2, \quad (8.1)$$

где  $x_j$  –  $j$ -й биполярный признак,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

Сеть относит объект  $x$  к классу  $k^*$ , если

$$\min_{k=K} R(x, x^{(k)}) = R(x, x^{(k^*)}). \quad (8.2)$$

Раскроем выражение (8.1) для  $R(x, x^{(k)})$ , учитывая, что признаки являются биполярными:

$$\begin{aligned} R(x, x^{(k)}) &= \sum_{j=1}^M (x_j^2 + (x_j^{(k)})^2 - 2x_j x_j^{(k)}) = \\ &= 2 \sum_{j=1}^M (1 - x_j x_j^{(k)}) = 2(M - \sum_{j=1}^M x_j x_j^{(k)}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Перейдем от критерия минимизации  $R(x, x^{(k)})$  к критерию максимизации выражения  $I_k = -\frac{1}{2} R(x, x^{(k)}) + 2M$ , для которого достигается максимум при  $k = k^*$ :

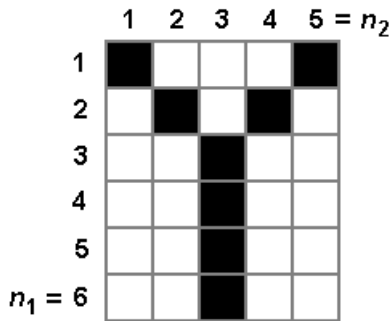


Рис. 12. Графическая интерпретация вектора признаков объекта

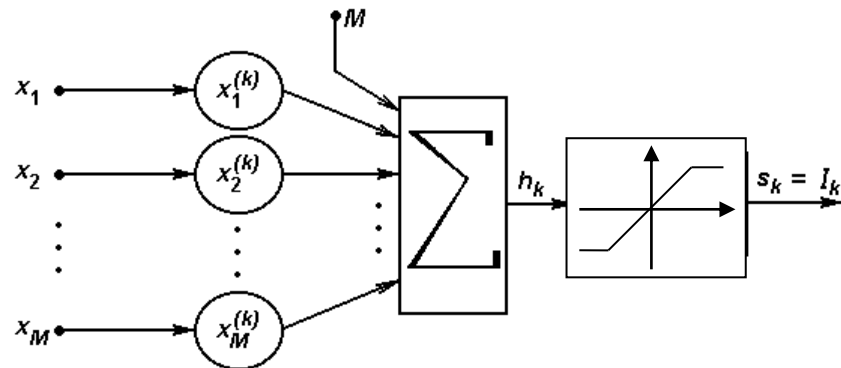


Рис. 13. Схема  $k$ -го нейрона в рабочем слое Хемминга,  $k = 1, 2, \dots, K$

$$\arg \max_{k=1, \overline{K}} I_k = \arg \max_{k=1, \overline{K}} \left( \sum_{j=1}^M x_j x_j^{(k)} + M \right) = k^* . \quad (8.4)$$

Элементарный анализ показывает, что значение  $R \in [0, 4M]$ , поэтому  $I_k \in [0, 2M]$ .

Для вычисления значений  $I_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , применяется рабочий слой, состоящий из  $K$  нейронов со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} w_{kj} &= x_j^{(k)}, & k &= \overline{1, K} . \\ b_k &= -M, \end{aligned} \quad (8.5)$$

Потенциал  $h_k$   $k$ -го нейрона определяется с учетом (8.5) выражением:

$$h_k = \sum_{j=1}^M w_{kj} x_j - b_k = \sum_{j=1}^M x_j x_j^{(k)} + M = I_k . \quad (8.6)$$

Передаточная функция (активационная характеристика) нейронов полагается линейной с ограничениями, связанными с областью практических возможных значений потенциала  $h_k = I_k$  (рис. 13).

Для вычисления аргумента  $k = k^*$ , для которого достигается  $\max_k I_k$ , рабочий слой нейронов сети Хемминга дополняется группой нейронов, решающих задачу максимизации. Эта группа нейронов образует нейронную сеть, которая далее называется MAXNET. На рис.14 показана структура сети Хемминга.

В лабораторной работе рассматривается два варианта построения сети MAXNET:

- сеть MAXNET прямого распространения (feed-forward MAXNET),
- рекуррентная сеть MAXNET (recurrent MAXNET).

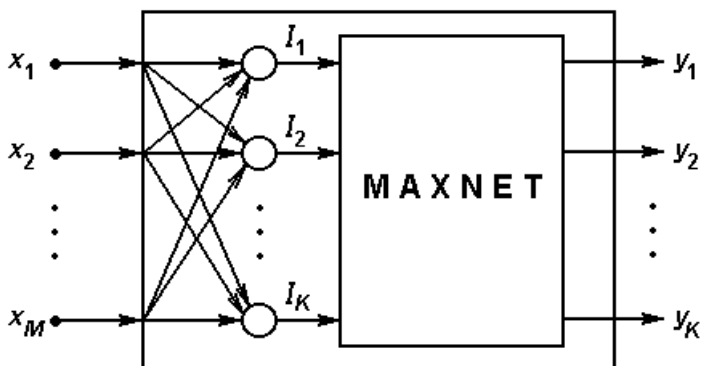


Рис. 14. Структурная схема сети Хемминга

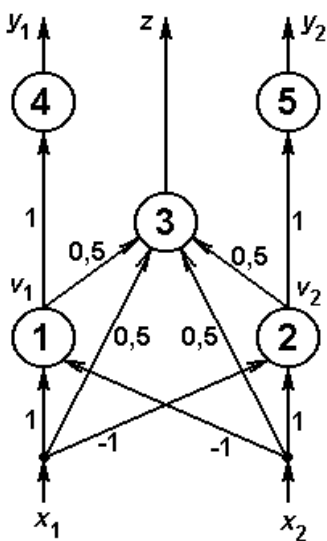


Рис. 15. Схема нейросетевого компаратора на 2 входа

## 9. Математическая модель сети feed-forward MAXNET

В основе сети MAXNET прямого распространения лежит нейросетевой компаратор на два входа (см. рис. 15). Нейроны 1, 2 и 3 имеют нулевое смещение и линейную активационную характеристику с ограничениями (рис. 16). Значение параметра  $c$  (уровня ограничения сверху) определяется условиями технической реализации. Предполагается, что практические значения переменных  $x_1$  и  $x_2$  таковы, что значения  $h > c$  невозможны. Таким образом, выходы нейронов 1 и 2 могут быть представлены выражениями:

$$v_1 = \begin{cases} x_1 - x_2, & x_1 > x_2 \\ 0, & x_1 < x_2 \end{cases},$$

$$v_2 = \begin{cases} 0, & x_1 > x_2 \\ x_2 - x_1, & x_1 < x_2 \end{cases}.$$

Заметим, что значения  $x_1$  и  $x_2$  предполагается несовпадающими.

Нейрон 3 в любой из ситуаций  $x_1 > x_2$  и  $x_1 < x_2$  формирует выходе  $z = \max(x_1, x_2)$ .

Для указания того, по какому из входов пришел максимальный сигнал, служат нейроны 4 и 5. Они имеют пороговую активационную характеристику, представленную на рис.17.

Если требуется построить MAXNET на несколько входов, используется несколько компараторов, соединенных в иерархическую сеть, и выходные нейроны, играющие роль логических элементов.

На рис. 18 представлена архитектура MAXNET на 8 входов. Выходные нейроны, формирующие сигналы  $y_1, y_2, \dots, y_8$ , имеют единичные синаптические коэффициенты, нулевые смещения и пороговую активационную характеристику, представленную на рис. 19. На рис. 18 темными кружочками представлены нейроны, имеющие пороговые активационные характеристики и выполняющие логические функции.

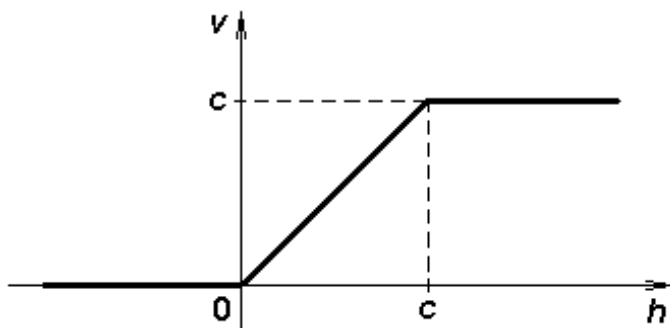


Рис. 16. Активационная характеристика нейронов 1 и 2

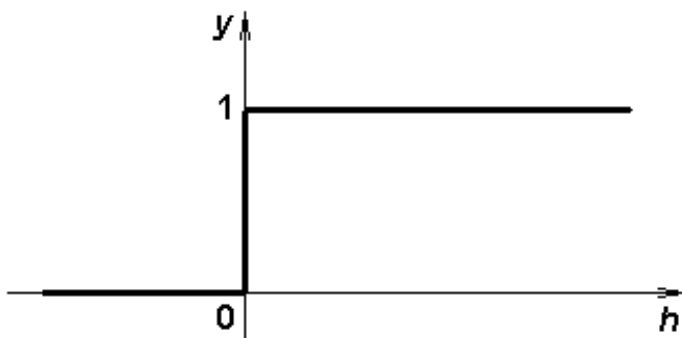


Рис. 17. Активационная характеристика нейронов 4 и 5

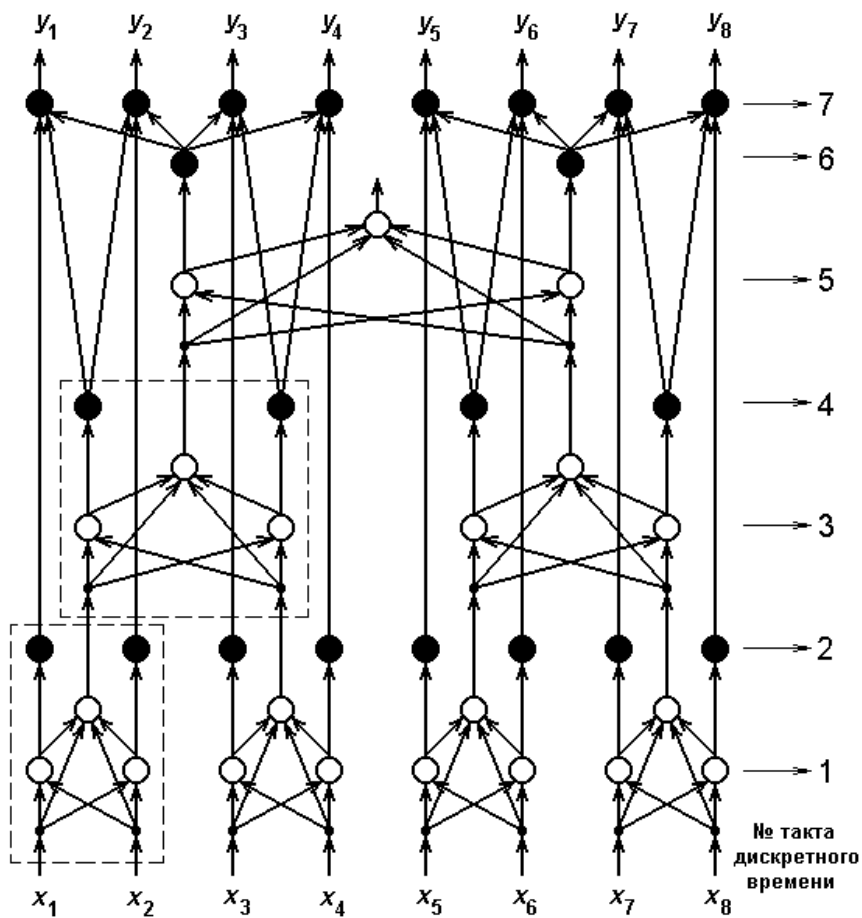


Рис. 18. Схема сети MAXNET на восемь входов

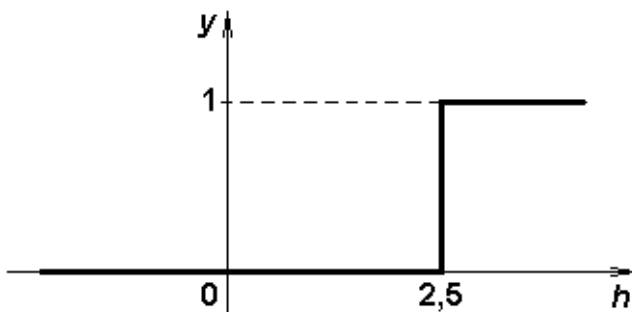


Рис. 19. Пороговая активационная характеристика выходных нейронов сети MAXNET

Число слоев сети MAXNET прямого распространения растет пропорционально  $\log_2 K$ , где  $K$  — число входов. Соответственно растет и время поиска максимума, так как каждый слой обрабатывает данные за один временной такт.

## 10. Математическая модель рекуррентной сети MAXNET

Предполагается, что входные сигналы рекуррентной сети MAXNET положительны и не совпадают друг с другом. Обозначим их  $x_1, x_2, \dots, x_K$ . Рассматриваемая нейронная сеть содержит  $K$  нейронов, каждый из которых имеет линейную активационную характеристику с ограничениями (рис. 16). Сеть содержит полные связи и функционирует во времени в синхронном режиме, когда на каждом временном такте срабатывают все нейроны. Рассмотрим математическую модель  $i$ -го нейрона. Его смещение равно нулю, а синаптические коэффициенты определяются выражением:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -\varepsilon, & i \neq j, \varepsilon \leq \frac{1}{K}. \end{cases}$$

Выход  $y_i$   $i$ -го нейрона на такте  $(t+1)$  дискретного времени рассчитывается по следующей итерационной формуле:



$$y_i(t+1) = f(y_i(t) - \varepsilon \sum_{j \neq i} y_j(t)), \quad (10.1)$$

где  $f(h)$  – активационная характеристика нейрона.

В качестве начальных условий для эволюции рассматриваемой динамической системы рассматриваются

$$y_i(0) = x_i, \quad i = \overline{1, K}.$$

Заметим, что выражение

$$[\varepsilon \sum_{j \neq i} y_j(t)] \leq \varepsilon(K-1)y_{\max}(t) \leq y_{\max}(t).$$

Отсюда следует, что для нейрона, на котором достигается максимальное значение среди всех выходов  $y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, K}$ , аргумент функции  $f$  в выражении (10.1) всегда положителен и, следовательно, на следующем такте выход этого нейрона не может иметь нулевого значения. Все другие нейроны имеют более мощную отрицательную обратную связь со стороны нейрона - “победителя” с максимальным входным сигналом. Со временем выходные сигналы этих нейронов обнуляются, так как их потенциалы становятся отрицательными. Отличным от нуля остается только выходной сигнал нейрона - “победителя”. Описанная выше схема называется схемой с латеральным (боковым) торможением, в которой реализуется принцип “победитель берет все” (“winner takes all” – WTA).

В данной нейросетевой схеме расчета максимума время вычисления заранее не может быть предсказано, так как существенно зависит от входных данных. На длительность переходного процесса влияет выбор значения параметра  $\varepsilon$ : чем больше значение  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \leq 1/K$ ), тем быстрее он завершается.