

# РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ. ПЕРСЕПТРОН РОЗЕНБЛАТТА

## 1. Постановка задачи распознавания образов

Любой живой организм в каждый момент времени распознаёт в окружающей среде объекты, события или ситуации, используя для этого сигналы от своих органов чувств. Способность к распознаванию является фундаментальным свойством живых организмов, необходимым для их выживания. Подобные задачи постоянно возникают в научной и практической деятельности человека: в технике, медицине, природоведении, физике и других областях. По совокупности признаков, характеризующих объект (событие, ситуацию), следует отнести его к одному из классов (типов). Эта задача решается в медицинской диагностике, при распознавании объектов на телевизионном (ультразвуковом, радиационном) изображении, в системах технического контроля произведённой продукции, в информационно-поисковых системах и других приложениях. В научной литературе все перечисленные задачи относятся к общей проблеме *распознавания образов (pattern recognition)*.

Для решения каждой конкретной задачи распознавания образов необходимо преодолеть два этапа:

- выделение набора признаков, содержащих описание объекта,
- классификация объектов по их описанию.

Первичные измерения (например, яркости пикселей изображения) часто представляют собой информационно избыточную и неэффективно организованную систему признаков. Прямое использование первичных измерений в системе распознавания образов может приводить к её чрезмерному усложнению. В подобных ситуациях необходима предварительная обработка первичных измерений, которая при сохранении информационной полноты описания объекта обеспечивает минимальную (или ограниченную) избыточность этого описания и простоту решения последующей задачи классификации.

Допустим, что каждый объект характеризуется набором  $M$  признаков  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ . Тогда его можно представить точкой в  $M$ -мерном пространстве признаков. Примем для областей, соответствующих классам  $1, 2, \dots, N$ , обозначения  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ .

При решении инженерно-технических задач предполагается, что классы  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  обладают определёнными свойствами:

- каждый класс представлен одним или конечным числом компактных множеств точек, которые могут не быть связными (класс I на рис. 1),
- классы расположены в пространстве признаков на расстоянии не менее  $\varepsilon$  (под расстоянием между двумя классами будем понимать минимальное расстояние между двумя точками среди всех пар точек, принадлежащих рассматриваемым классам).

Последнее из указанных выше свойств называют *усиленным свойством разделимости классов*. Оно обеспечивает практическую возможность разделения классов за конечное время благодаря бесконечному числу способов построения разделяющих поверхностей в "коридорах", окружающих классы.

При решении задачи распознавания образов в плохо исследованной предметной области, когда заранее невозможно определить все классы, целесообразно дополнительно к известным классам ввести класс "всё остальное", или "объект не принадлежит ни одному из известных классов".

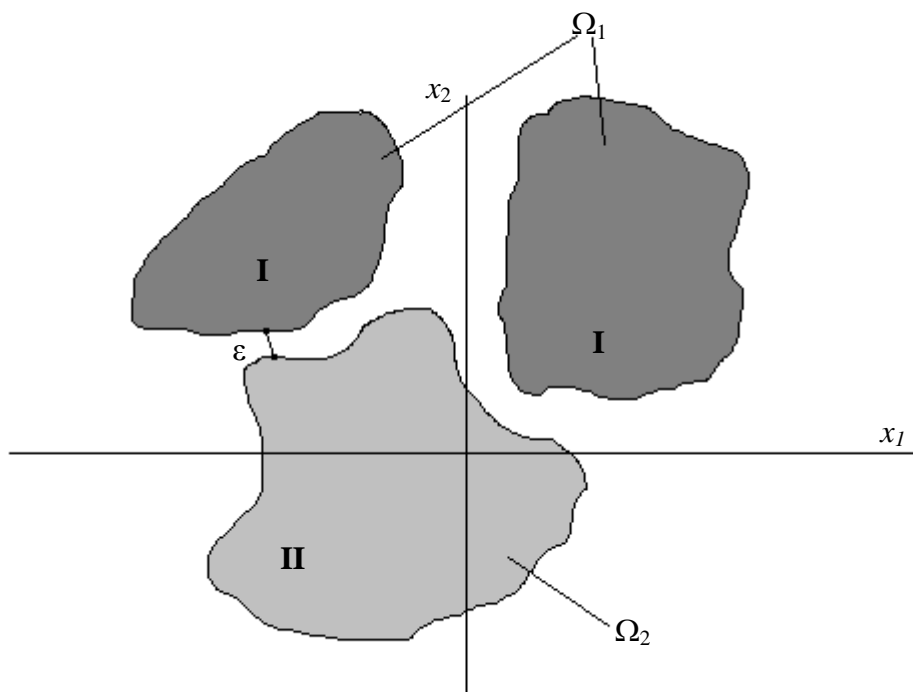


Рис. 1. Два класса  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в двумерном пространстве признаков

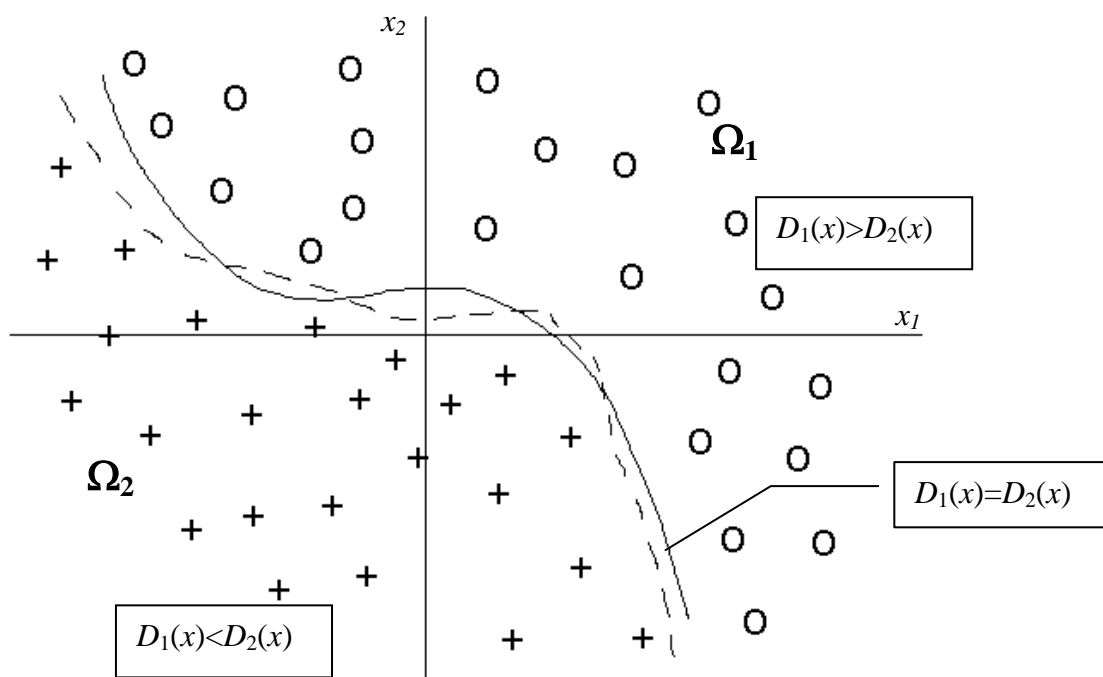


Рис. 2. Иллюстрация к понятию дискриминантной функции классов

Математически задача распознавания образов может быть сформулирована как построение такой разделяющей функции в пространстве признаков, которая позволяет однозначно установить класс, которому принадлежит объект (точка в пространстве признаков). Один из принципов построения решающего правила основан на понятии *дискриминантной функции* [1]. Обозначим  $D_i(x)$  дискриминантную функцию  $i$ -ого класса,  $i = \overline{1, N}$ . Дискриминантные функции  $D_i(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , обладают следующим

принципиальным свойством: если объект принадлежит  $k$ -ому классу ( $x \in \Omega_k$ ), то  $\max_i D_i(x) = D_k(x)$ .

Если определены дискриминантные функции классов  $k$  и  $m$ , то естественно полагать, что разделяющая эти классы поверхность проходит через точки, в которых

$$D_k(x) = D_m(x). \quad (1)$$

Таким образом, уравнение

$$D_k(x) - D_m(x) = 0 \quad (2)$$

определяет разделяющую поверхность между классами  $\Omega_k$  и  $\Omega_m$ . На рис. 2 представлена иллюстрация свойства дискриминантных функций на примере двух классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в двумерном пространстве признаков.

Отмеченное ранее усиленное свойство разделимости классов может быть следующим образом проинтерпретировано с точки зрения свойств дискриминантных функций: считаются недопустимыми (не существуют или не подлежат распознаванию) объекты, для которых вектор признаков  $x$  принадлежит области, заданной неравенством

$$|D_k(x) - D_m(x)| < \theta', \quad (3)$$

где  $k, m = \overline{1, N}$ ,  $k \neq m$ ,  $\theta' > 0$ . Благодаря этому свойству допускается умеренная деформация разделяющей поверхности между классами, определяемой уравнением (2). На рис. 2 пунктиром показана её возможная деформация, при которой не теряется разделимость классов.

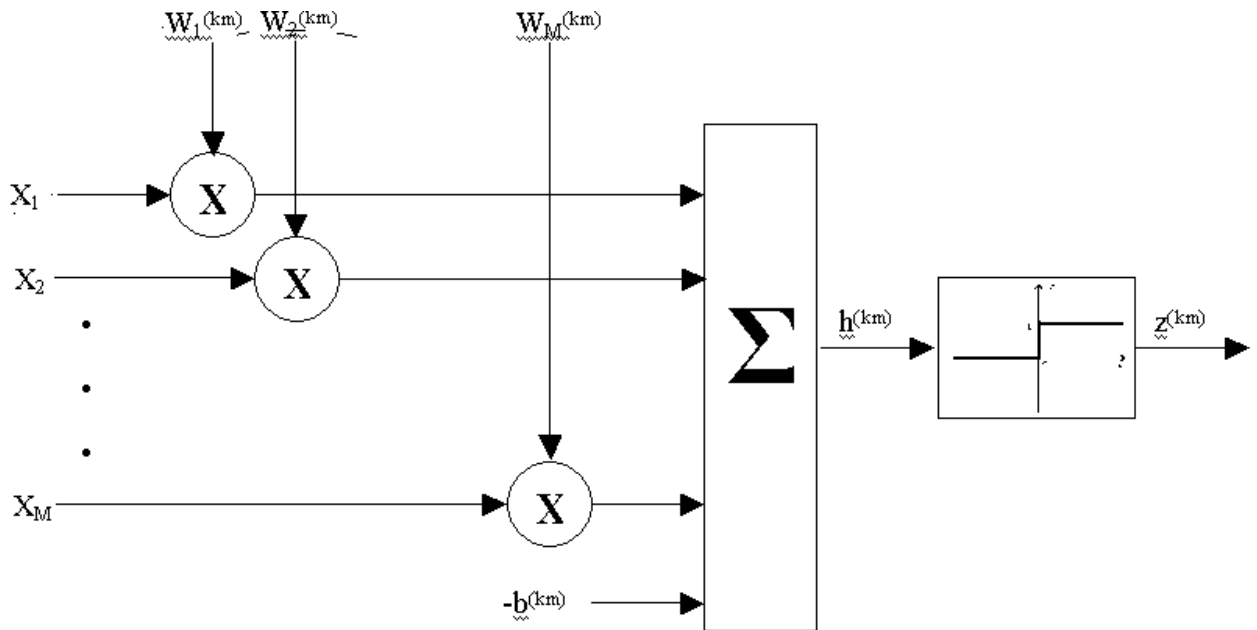


Рис. 3. Схема линейного классификатора

## 2. Линейная дискриминантная функция

Частным случаем дискриминантной функции является линейная функция:

$$D_i(x) = \sum_{j=1}^M w_{ij} x_j - b_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

В этом случае разность  $D_k(x) - D_m(x)$  определяется выражением

$$D_k(x) - D_m(x) = \sum_{j=1}^M (w_{kj} - w_{mj}) x_j - (b_k - b_m) = \sum_{j=1}^M w_j^{(km)} x_j - b^{(km)}, \quad (5)$$

где  $w_j^{(km)} = w_{kj} - w_{mj}$ ,  $b^{(km)} = b_k - b_m$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $k, m = \overline{1, N}$ ,  $k \neq m$ . Полученный результат означает, что в случае

$$h^{(km)} = \sum_{j=1}^M w_j^{(km)} x_j - b^{(km)} > 0 \quad (6)$$

объект, характеризующийся вектором признаков  $x$ , принадлежит классу  $\Omega_k$ , а в противном случае – классу  $\Omega_m$ . На рис. 3 приведена схема обработки входного вектора  $x$ . Пороговый элемент служит для индикации класса принадлежности вектора  $x$ :

$$z^{(km)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_k, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega_m. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, если существуют линейные дискриминантные функции классов  $\Omega_k$  и  $\Omega_m$ , то эти классы линейно разделимы, то есть граница между ними лежит в гиперплоскости

$$\sum_{j=1}^M w_j^{(km)} x_j - b^{(km)} = 0. \quad (8)$$

Такой классификатор, который называют линейным, реализуется, как это видно из схемы рис. 3, на одном техническом нейроне с бинарной активационной характеристикой. Этот классификатор называют *элементарным перцептроном* [2, 4].

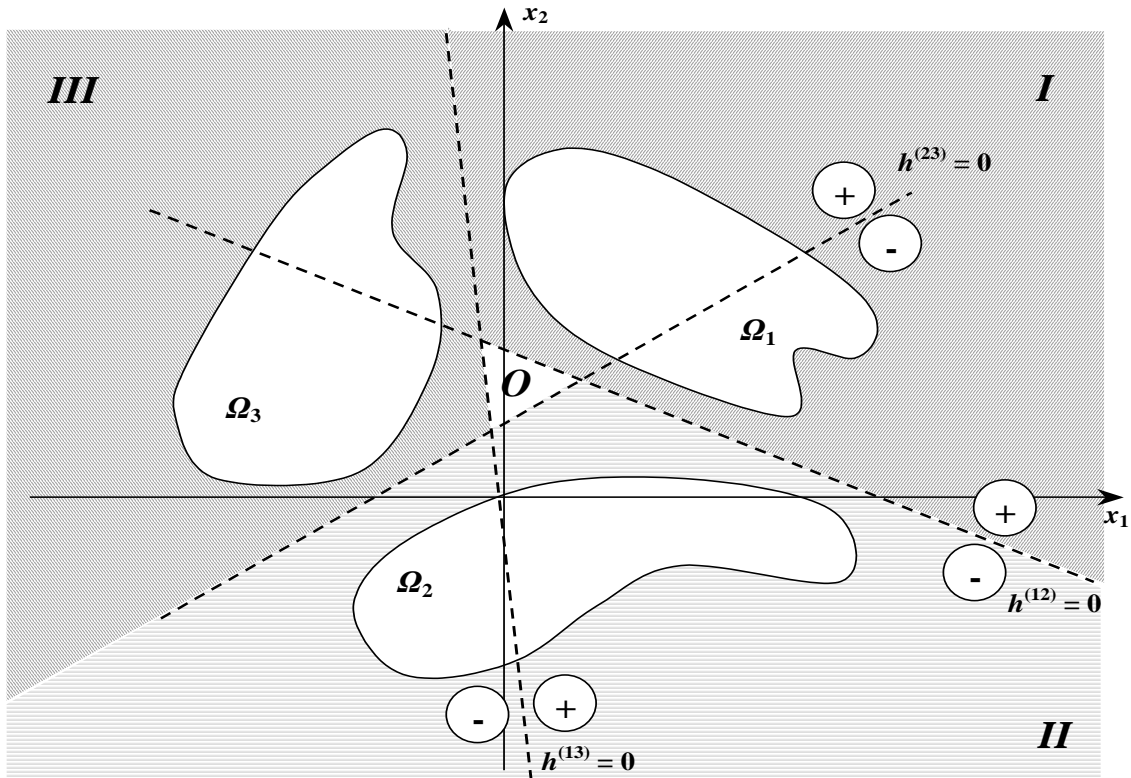


Рис. 4. Классификация в случае трех попарно линейно разделимых классов

Рассмотрим случай, когда каждый класс отделяется от любого другого гиперплоскостью (рис. 4). В приведённом на рис. 4 примере число признаков  $M = 2$ , число классов  $N = 3$ , а разделяющие каждую пару классов прямые с уравнениями

$$h^{(12)}(x) = 0, \quad h^{(13)}(x) = 0, \quad h^{(23)}(x) = 0$$

проходят в пространстве признаков таким образом, что ни одна из них не отделяет один класс от двух других. Знаками '+' и '-' около каждой разделяющей классы прямой указаны полуплоскости, в которых значения линейных функций  $h^{(km)}(x)$  больше и меньше нуля соответственно. В рассматриваемом примере класс  $\Omega_1$  принадлежит области, в которой  $(h^{(12)}(x) > 0) \cap (h^{(13)}(x) > 0)$ . Если использовать бинарные индикаторные переменные  $z^{(km)}$ ,

определённые формулой (7), то  $x \in \Omega_1$ , если  $(z^{(12)} = 1) \cap (z^{(13)} = 1)$ . Этот вывод использован в нейросетевой реализации классификатора, представленной на рис. 5. Выход классификатора  $z_1$  равен 1 только в том случае, когда  $x \in \Omega_1$ . Аналогичным образом построены выходные нейроны, которые служат для индикации принадлежности входного вектора  $x$  классам  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Переменная  $z_2 = 1$  только тогда, когда выполнено условие  $(z^{(12)} = 0) \cap (z^{(23)} = 0)$ , а переменная  $z_3 = 1$  при условии  $(z^{(13)} = 0) \cap (z^{(23)} = 1)$ . Эти условия выполнены, когда вектор признаков  $x$  принадлежит классам  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  соответственно. На рис. 5 указаны значения синаптических коэффициентов и смещений выходных нейронов.

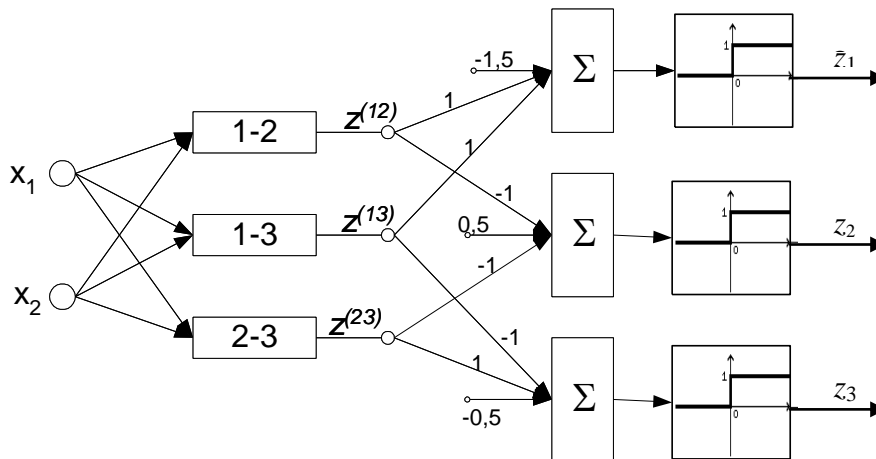


Рис. 5. Двухслойный нейросетевой классификатор

Представленный на рис. 5 классификатор является двухслойным. В приведённой ниже Таблице 1 указаны выходы классификатора для различных вариантов расположения вектора  $x$  в пространстве признаков. Особый случай рассмотрен в четвёртой строке таблицы:  $x \in \Omega_0$ , где под  $\Omega_0$  понимается область, отмеченная на рис. 4 символом 'O'. Согласно условиям задачи вектор признаков объекта не может принадлежать этой области, но если в силу определённых обстоятельств (сбой, тестирование классификатора и пр.) на вход классификатора поступил вектор  $x \in \Omega_0$ , то все входные нейроны будут пассивны.

Таблица 1

№ п/п	$X$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
1	$x \in \Omega_1$	1	0	0
2	$x \in \Omega_2$	0	1	0
3	$x \in \Omega_3$	0	0	1
4	$x \in \Omega_0$	0	0	0

Первый слой в построенном двухслойном классификаторе осуществляет переход от первичных признаков  $x_1, x_2$  к трём бинарным признакам  $z^{(12)}, z^{(13)}, z^{(23)}$ , в пространстве которых классификация объектов возможна с использованием элементарных выходных персептронов.

Реальные задачи распознавания образов отличаются от приведённого примера высокой размерностью вектора признаков и отсутствием простой графической визуализации классов. Каждый класс задан не очертаниями его границ, а набором принадлежащих ему объектов. В этих условиях нейросетевой классификатор заданной архитектуры должен предварительно обучаться, чтобы решать поставленную задачу с требуемой точностью.

### 3. Персептрон Розенблатта

Термин "персептрон" был впервые предложен американским исследователем Франком Розенблаттом в 1957 году, когда он опубликовал работу по применению нейронных моделей для распознавания геометрических фигур. Эта работа явилась развитием основополагающих идей, изложенных МакКаллоком и Питтсом в 1943 году в статье [11], которая заложила теоретическую базу нейроинформатики.

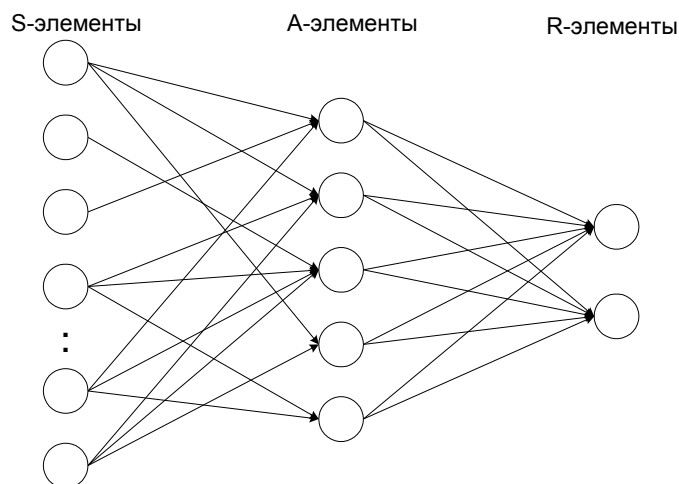


Рис. 6. Структурная схема персептрона Розенблатта

Персептрон Розенблатта был ориентирован на создание системы оптического распознавания образов. Он содержал три слоя нейронов (рис. 6). Первый слой состоял из чувствительных *S*-элементов (Sensitive), воспринимающих яркостные сигналы от изображения. Выходы *S*-элементов случайным образом связаны с элементами (нейронами) второго слоя, которые Розенблатт назвал ассоциирующими, или *A*-элементами. Коэффициенты передачи сигнала от *S*-слоя к *A*-слою полагались фиксированными и не подлежали обучению. С помощью нейронов *A*-слоя осуществлялся переход от первичных измеряемых признаков объекта к некоторым обобщенным признакам, которые непосредственно использовались для решения задачи классификации на выходном *R*-слое. Выходные нейроны, или *R*-элементы (Reaction), подвергались обучению на данных обучающей выборки с использованием специально разработанных правил. Связи между *A*-элементами и *R*-элементами предполагались полными (выход каждого *A*-элемента поступает на вход всех *R*-элементов).

В книге "Принципы нейродинамики" [4] Розенблатт представил результаты как теоретических исследований, так и практического моделирования нейронных сетей, рассматривая их как основу для построения интеллектуального компьютера.

Персептрон Розенблатта обладал определенными функциональными ограничениями, которые были следствием случайной организации и фиксирования (без адаптации) связей между нейронами *S*-слоя и *A*-слоя. Марвин Минский и Сеймур Пейперт, которые провели в Массачусетском технологическом институте детальный математический анализ абстрактной модели персептрона Розенблатта, выступили с критикой этой модели [5] и привели примеры, когда персептрон Розенблатта принципиально не может решить задачу классификации. К сожалению, эта критика существенно затормозила исследования в области нейронных сетей примерно на 15 лет, когда были переосмыслены идеи Розенблатта и изучены универсальные возможности нейронных сетей по обработке данных.

#### 4. Постановка задачи обучения элементарного персептрона

Как показано в п. 2, элементарный персептрон функционирует в соответствии со следующей математической моделью:

$$\begin{aligned} z &= f(h), \\ h &= \sum_{j=1}^M w_j x_j - b, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $z$  – выход персептрона;  $h$  – потенциал нейрона;  $f(h)$  – бинарная пороговая активационная характеристика;  $x_j$ ,  $j = \overline{1, N}$  – входные признаки объекта;  $w_j$ ,  $j = \overline{1, N}$  – синаптические коэффициенты,  $-b$  – смещение нейрона. Если ввести векторы

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (1, x_1, x_2, \dots, x_M), \\ \tilde{w} &= (-b, w_1, w_2, \dots, w_M) \end{aligned}$$

размерности  $M+1$ , то математическая модель (9) может быть записана в следующей краткой форме:

$$\begin{aligned} z &= f(h), \\ h &= \tilde{x} \tilde{w}^T. \end{aligned} \quad (10)$$

В связи с пороговым характером функции активации нейрона  $f(h)$  для расчёта реакции  $z$  важен только знак потенциала  $h$ , но не его фактическое значение. Отсюда следует, что любое масштабирование (умножение на положительный коэффициент) векторов  $\tilde{x}$  и  $\tilde{w}$  не изменяет реакции  $z$ . В частности, это означает, что можно всегда приводить векторы  $\tilde{x}$  и  $\tilde{w}$  к единичной норме. Эта особенность будет далее использована при доказательстве теоремы Розенблатта.

Входной вектор признаков  $x$  может принадлежать одному из двух классов  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ , которые предполагаются линейно разделимыми. На персептрон возлагается задача вырабатывать реакцию  $z = 1$ , если  $x \in \Omega_1$ , и  $z = 0$ , если  $x \in \Omega_2$ . Решение этой задачи достигается обучением персептрона, то есть настройкой вектора  $\tilde{w}$  по данным обучающей выборки. Состав данных обучающей выборки представлен в Таблице 2, в которой желаемый выход  $\sigma^{(p)}$  элементарного персептрона в  $p$ -м примере может принимать значения 0 или 1.

**Таблица 2**

№ примера	Входные признаки объекта				Желаемый выход $\sigma$
	$x_1$	$x_2$	...	$x_M$	
1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	...	$x_M^{(1)}$	$\sigma^{(1)}$
2	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	...	$x_M^{(2)}$	$\sigma^{(2)}$
...	...	...	...	...	...
$P$	$x_1^{(P)}$	$x_2^{(P)}$	...	$x_M^{(P)}$	$\sigma^{(P)}$

Все известные правила обучения элементарного персептрона можно рассматривать как модификации *правила Хебба* (D. Hebb). В 1949 году Дональд Хебб опубликовал книгу "Организация поведения", в которой, подводя итог прежним нейробиологическим экспериментам, сформулировал правило обучения живого нейрона. Это правило явилось формальным представлением ассоциативного механизма научения живых организмов [12]. Фактически он предложил модель научения, которая обобщила результаты нейрофизиологических опытов Павлова и Скиннера. Хебб приводит следующий пример. Если собаке дают пищу, то она её воспринимает по зрительным и обонятельным каналам, которые через нейроны коры головного мозга дают реакцию слюноотделения. На рис. 7а выделены активные нейроны, воспринимающие зрительный и обонятельный сигналы. Нейрон, воспринимающий звуковой сигнал, не принимает участия в формировании реакции слюноотделения, так как в начале эксперимента синаптическая связь со слуховым

нейроном у нейрона, вызывающего слюноотделение, мала. Поэтому, если возбудить только слуховой нейрон, то реакция слюноотделения не возникнет (рис. 7б). В процессе обучения обонятельное и зрительное возбуждения сопровождаются звуковым сигналом. При этом в результате серии биохимических изменений увеличивается синаптическая связь с выходным сигналом у всех нейронов, которые в данный момент активны, в том числе и у слухового нейрона. После серии "уроков" связь нейрона слюноотделения со слуховым нейроном становится настолько сильной, что возбуждение только слухового нейрона (звуковой сигнал в отсутствие пищи) приводит к реакции слюноотделения (рис. 7в, г).

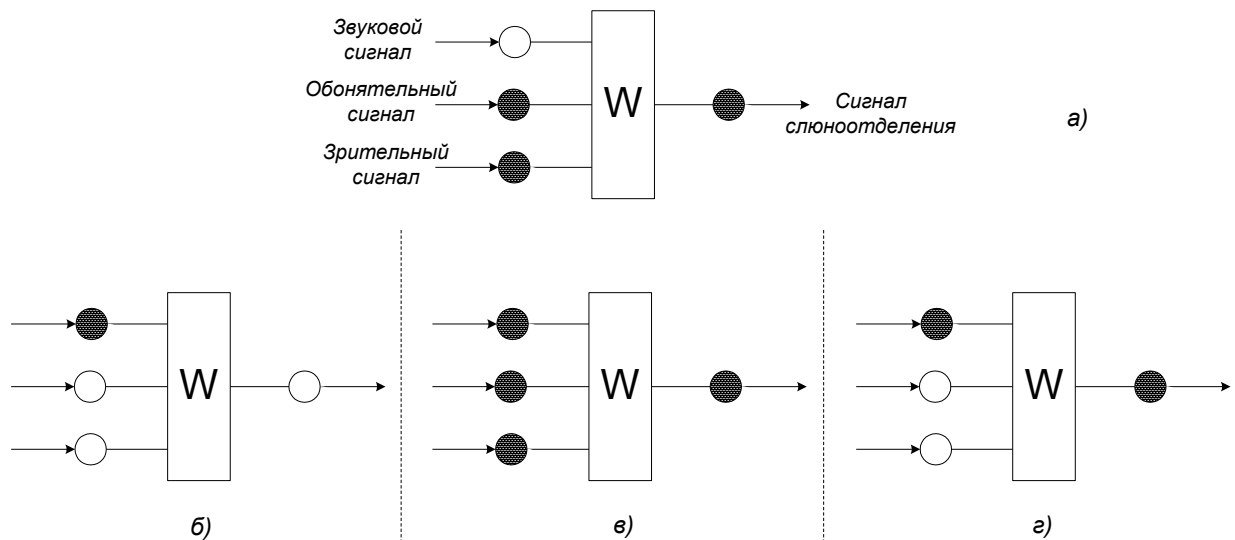


Рис. 7. Иллюстрация к опыту Павлова

На рис. 8 представлены два нейрона, отмеченных номерами  $i$  и  $j$  и связанных синаптическим коэффициентом  $w_{ij}$ . Согласно правилу Хебба, которое получило название "хеббова правила ассоциации", коррекция  $\Delta w_{ij}$  синаптического коэффициента  $w_{ij}$  производится только в том случае, если

- активен пресинаптический нейрон  $j$ ,
- требуется обеспечить активное состояние постсинаптического нейрона  $i$ ,
- фактическое состояние постсинаптического нейрона не является активным.

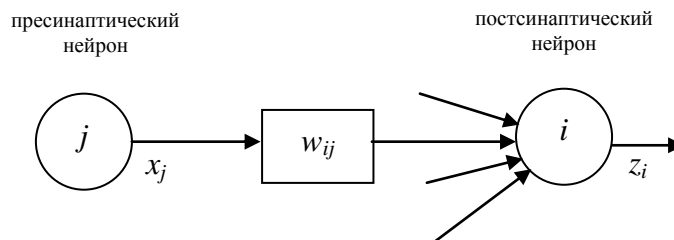


Рис. 8. Синаптическая связь двух нейронов

Таким образом, правило Хебба направлено на усиление слабой синаптической связи, которая не обеспечивает требуемой реакции на активное состояние пресинаптического нейрона. Введём следующие обозначения:

- $x_j$  –  $j$ -й вход  $i$ -го нейрона,
- $z_i$  – выход  $i$ -го нейрона,
- $\sigma_i$  – желаемый выход  $i$ -го нейрона,
- $w_{ij}$  – синаптический коэффициент  $i$ -го нейрона по  $j$ -му входу.



Если нейрон  $i$  является бинарным, то есть  $z_i, \sigma_i \in \{0, 1\}$ , то указанные выше условия обучения синаптической связи  $w_{ij}$  могут быть формально представлены следующей формулой коррекции синаптического коэффициента  $w_{ij}$ :

$$\Delta w_{ij} = \varepsilon(1 - z_i \sigma_i) \sigma_i x_j, \varepsilon > 0. \quad (11)$$

Таким образом, правило Хебба не предусматривает коррекцию синаптического коэффициента  $w_{ij}$  в случае, если нейрон  $i$  активен и его реакция соответствует требуемой, то есть  $(1 - z_i \sigma_i) = 0$ . Если же нейрон  $i$  не возбуждён в ситуации, когда он должен быть активен  $((1 - z_i \sigma_i) \sigma_i = 1)$ , то синаптический коэффициент корректируется на величину, пропорциональную входному сигналу  $x_j$ .

## 5. Правило обучения Уидроу-Хоффа

Преобразуем правило Хебба в формуле (11), раскрыв в правой части круглые скобки:

$$\Delta w_{ij} = \varepsilon(\sigma_i x_j - z_i x_j) = \varepsilon x_j (\sigma_i - z_i) = \varepsilon x_j \delta_i, \varepsilon > 0, \quad (12)$$

где  $\delta_i = \sigma_i - z_i$ . Полученное выражение для  $\Delta w_{ij}$  справедливо только при  $\sigma_i = 1$ , что соответствует условиям Хебба обучения синаптической связи  $w_{ij}$ .

Уидроу и Хофф (Widrow, Hoff) предложили расширенное толкование правила обучения (12):

$$\Delta w_{ij} = \begin{cases} \varepsilon x_j, & \text{при } \delta_i = 1 \ (\sigma_i = 1, z_i = 0), \\ -\varepsilon x_j, & \text{при } \delta_i = -1 \ (\sigma_i = 0, z_i = 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, в новой схеме обучения  $w_{ij}$  предусматривается не только усиление слабой связи при  $\sigma_i = 1, z_i = 0$ , но и ослабление чрезмерно сильной связи при  $\sigma_i = 0, z_i = 1$ . Правило обучения (13) получило название *адаптивного  $\delta$ -правила Уидроу-Хоффа*.

Положительный коэффициент  $\varepsilon$  управляет скоростью процесса обучения синаптического коэффициента  $w_{ij}$ .

Уидроу назвал нейроны, использующие алгоритм обучения (13), ADALINEs (adaptive linear neurons), а структуру, построенную на таких элементах – MADALINE (many ADALINEs).

Следует обратить внимание на существенную особенность  $\delta$ -правила в форме (12) или (13). Если нейронная сеть построена на бинарных нейронах, то  $x_j$  может принимать значение 0, при котором синаптическая связь  $w_{ij}$  принципиально не корректируется. Это означает, что часть примеров обучающей выборки оказывается бесполезной с точки зрения адаптации синаптического коэффициента  $w_{ij}$ . Ситуация меняется, если использовать биполярные нейроны с возможными выходными значениями +1 и -1. В этом случае эффективно используются все примеры обучающей выборки и процесс обучения ускоряется.

Переход от бинарных к биполярным нейронам приводит к необходимости ещё одной модификации  $\delta$ -правила:

$$\Delta w_{ij} = \varepsilon x_j \delta_i = \begin{cases} 2\varepsilon x_j, & \text{при } \delta_i = 2 \ (\sigma_i = 1, z_i = -1), \\ -2\varepsilon x_j, & \text{при } \delta_i = -2 \ (\sigma_i = -1, z_i = 1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Если в формуле (14) положить  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , то для коррекции синаптического коэффициента получается следующее выражение:

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{2} x_j \delta_i = \begin{cases} x_j, & \text{при } \delta_i = 2 \ (\sigma_i = 1, z_i = -1), \\ -x_j, & \text{при } \delta_i = -2 \ (\sigma_i = -1, z_i = 1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

В дальнейшем будут исследоваться возможности обучения элементарного персептрона с использованием  $\delta$ -правила в форме (15).

## 6. Обучение элементарного персептрона. Теорема Розенблатта

Воспользуемся изложенными в п. 5 аргументами в пользу биполярного персептрона и перейдём к его математическому описанию в следующей форме:

$$\begin{aligned} h &= \tilde{x} \tilde{w}^T, \\ z &= f(h) = \begin{cases} +1, & \text{если } h > 0, \\ -1, & \text{если } h \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

В математической модели (16) пересмотрена активационная характеристика нейрона по сравнению с моделью (10). Элементарный персептрон обучается в режиме подстройки своих синаптических коэффициентов после каждого примера обучающей выборки (стохастический режим обучения). Обозначим  $\tau$  время обучения,  $\tau = 1, 2, \dots$ . Предъявление одного примера и соответствующую подстройку синаптических коэффициентов нейрона будем называть одним тактом обучения. На некоторых тактах дискретного времени  $\tau$  синаптические коэффициенты не претерпевают изменений, если предъявленные примеры обучающей выборки правильно распознаются персептроном.

Допустим, что на такте  $\tau$  обучения элементарного персептрона получены значения синаптических коэффициентов  $\tilde{w}(\tau) = (\tilde{w}_0(\tau), \tilde{w}_1(\tau), \dots, \tilde{w}_M(\tau))$ . Как было показано в п. 4, реакция персептрона на входной вектор  $\tilde{x}$  инвариантна к его длине, поэтому будем считать, что  $\|\tilde{x}\| = 1$ . Пусть на следующем такте  $(\tau+1)$  обучения персептрона на его вход подаётся вектор  $x^{(p)}$  ( $p$ -й пример обучающей выборки). В соответствии с правилом Уидроу-Хоффа в форме (15)

$$\tilde{w}_j(\tau+1) = \tilde{w}_j(\tau) + \Delta \tilde{w}_j = \begin{cases} \tilde{w}_j(\tau) + \tilde{x}_j^{(p)}, & \text{если } \sigma^{(p)} - z^{(p)} > 0, \\ \tilde{w}_j(\tau) - \tilde{x}_j^{(p)}, & \text{если } \sigma^{(p)} - z^{(p)} < 0, \\ \tilde{w}_j(\tau) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

где  $j = \overline{0, M}$ .

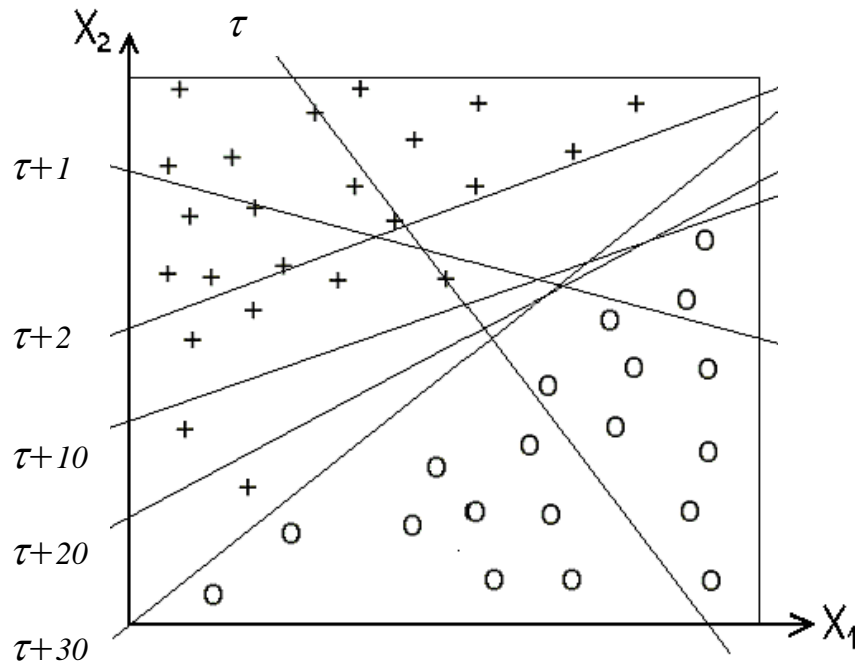


Рис. 9. Иллюстрация к процедуре обучения элементарного персептрона по правилу Уидроу-Хоффа

На рис. 9 представлены примеры обучающей выборки в пространстве признаков  $(X_1, X_2)$  при  $M = 2$  для двух линейно разделимых классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Обучающие примеры класса  $\Omega_1$  отмечены символом '+', а класса  $\Omega_2$  – 'o'. В момент  $\tau$  времени обучения персептрон реализует прямую с уравнением  $h(\tau) = \tilde{x}\tilde{w}^T(\tau) = 0$ , которая не обеспечивает разделения классов. Рис. 9 иллюстрирует процесс настройки разделяющей прямой по мере обучения персептрона в соответствии с правилом (17): через 30 тактов обучения обеспечивается правильное разделение классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Существенными являются следующие вопросы:

- наблюдается ли сходимость синаптических коэффициентов  $\tilde{w}_j(\tau)$ ,  $j = \overline{0, M}$ , к значениям, обеспечивающим разделение классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ,
- каковы условия, при которых достигается требуемая сходимость,
- сколько требуется тактов обучения для достижения искомых значений синаптических коэффициентов  $\tilde{w}_j$ ,  $j = \overline{0, M}$ .

Ответы на поставленные вопросы содержатся в теореме, которая впервые была сформулирована и доказана Розенблаттом.

#### *Теорема Розенблатта*

Рассматривается элементарный биполярный персептрон с  $M$  входами, предназначенный для разделения объектов на два класса  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  по данным обучающей выборки  $(x^{(p)}, \sigma^{(p)})$ ,  $p = \overline{1, P}$ ,  $\|\tilde{x}^{(p)}\| = 1$ .

Персептрон вырабатывает реакцию  $z^{(p)} \in \{-1, +1\}$  на вектор признаков  $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_M^{(p)})$ ,  $p = \overline{1, P}$ , в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} h^{(p)} &= \tilde{x}^{(p)} \tilde{w}^T, \\ z^{(p)} &= \text{sign}(h^{(p)}), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\tilde{x}^{(p)}$  – расширенный вектор размерности  $(M+1)$ , полученный нормировкой вектора  $(1, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_M^{(p)})$ ,  $\tilde{w}$  – расширенный вектор синаптических коэффициентов  $(w_0, w_1, w_2, \dots, w_M)$ .

Предполагается, что

- 1) обученный персептрон должен обеспечивать выходное значение  $z^{(p)} = 1$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_1$ , и значение  $z^{(p)} = -1$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_2$ ;
- 2) поставленная перед персептроном функциональная задача принципиально разрешима, то есть существует такой вектор  $\tilde{w}^*$ ,  $\|\tilde{w}^*\| = 1$ , что  $\forall p = \overline{1, P} \quad \tilde{x}^{(p)} \tilde{w}^{*T} > 0$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_1$ , и  $\tilde{x}^{(p)} \tilde{w}^{*T} < 0$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_2$ ;
- 3) выполняется усиленное условие разделимости классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то есть  $\exists \theta > 0$  такое, что  $\forall p = \overline{1, P} \quad \tilde{x}^{(p)} \tilde{w}^{*T} > \theta$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_1$ , и  $\tilde{x}^{(p)} \tilde{w}^{*T} < -\theta$ , если  $x^{(p)} \in \Omega_2$ .

При сформулированных условиях процедура Уидроу-Хоффа (17) обучения элементарного персептрона за конечное число шагов  $\tau^* \leq \frac{1}{\theta^2}$  приводит к такому значению вектора  $\tilde{w}$ , которое обеспечивает решение поставленной задачи разделения классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

#### *Комментарии к условиям теоремы Розенблатта*

Условия нормировки расширенных векторов входных признаков  $\|\tilde{x}^{(p)}\| = 1$ ,  $p = \overline{1, P}$ , и синаптических коэффициентов  $\|\tilde{w}^*\| = 1$  не являются ограничениями, так как реакция элементарного персептрона в соответствии с уравнениями (18) определяется не значением потенциала  $h^{(p)}$ , а его знаком.

Рассмотрим содержание параметра  $\theta$ , используемого в определении условия усиленной разделимости классов. На рис. 10 в расширенном пространстве признаков размерности  $M+1=2$  представлены примеры двух классов, отмеченные символами 'o' и '\*'. В связи с нормировкой векторов  $\tilde{x}^{(p)}$ ,  $p=\overline{1, P}$ , все примеры обоих классов лежат на окружности единичного радиуса.

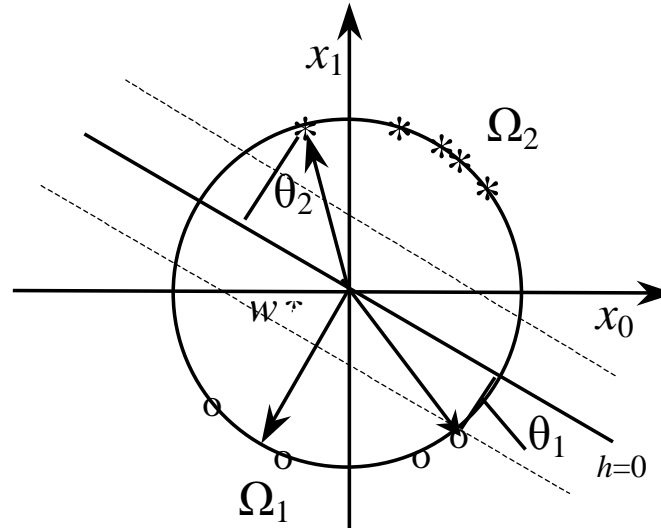


Рис. 10. Иллюстрация к условию усиленной разделимости классов в теореме Розенблатта

Прямая  $h = \tilde{x} \tilde{w}^{*T} = 0$ , обеспечивающая разделение классов, характеризуется вектором  $\tilde{w}^*$ , показанным на рисунке. Скалярное произведение вектора  $\tilde{w}^*$  и произвольного расширенного вектора входных признаков  $\tilde{x}^{(p)}$  представляет собой проекцию, которая на примерах первого класса принимает *минимальное* значение  $\theta_1$ , а на примерах второго класса -  $\theta_2$ . *Минимальное* из этих двух значений и представляет собой параметр  $\theta$  в теореме Розенблатта. Как видно из рисунка, значение  $2\theta$  соответствует *гарантированной* ширине "коридора" (показан пунктирными линиями) между классами в расширенном пространстве признаков при условии расположения разделяющей прямой в заданной позиции.

Уточним, что понимается под числом тактов  $\tau^*$  обучения персептрона. Согласно правилу Уидроу-Хоффа на тех тактах обучения, на которых персептрон правильно реагирует на входной вектор  $x^{(p)}$ , то есть  $z^{(p)} = \sigma^{(p)}$ , вектор синаптических коэффициентов  $\tilde{w}$  не изменяется. Будем нумеровать только те такты обучения, на которых производится коррекция вектора  $\tilde{w}$ . Само значение вектора синаптических коэффициентов  $\tilde{w}$  после коррекции на такте  $\tau$  будем обозначать  $\tilde{w}(\tau)$ , а расширенный входной вектор и желаемый выход персептрона –  $\tilde{x}(\tau)$  и  $\sigma^{(\tau)}$  соответственно. Этот способ нумерации тактов удобен потому, что один и тот же пример может использоваться в процессе обучения неоднократно на разных тактах. Теорема Розенблатта устанавливает *ограничение сверху* на число коррекций вектора синаптических коэффициентов в процессе обучения, необходимое для правильной обработки персептроном всех обучающих примеров.

## 7. Доказательство теоремы Розенблатта

Представим в таблице все возможные ситуации коррекции расширенного вектора синаптических коэффициентов на такте  $\tau$  обучения персептрона:

$$\Delta \tilde{w}(\tau) = \tilde{w}(\tau) - \tilde{w}(\tau - 1). \quad (19)$$

Таблица 3.

№ п/п	Желаемый выход $\sigma^{(\tau)}$ (класс принадлежности $x^{(\tau)}$ )	Фактический выход $z^{(\tau)}$ (знак потенциала $h^{(\tau)} = \tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1)$ )	Коррекция $\Delta \tilde{w}(\tau)$
1	1 ( $\Omega_1$ )	$1 (\tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) > 0)$	0
2	-1 ( $\Omega_2$ )	$-1 (\tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0)$	0
3	1 ( $\Omega_1$ )	$-1 (\tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0)$	$r^{(\tau)} = \tilde{x}^{(\tau)}$
4	-1 ( $\Omega_2$ )	$1 (\tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) > 0)$	$r^{(\tau)} = -\tilde{x}^{(\tau)}$

Дискретное время обучения  $\tau$  принимает значения 1, 2, .... На такте  $\tau$  обучения на персептрон поступает вектор  $\tilde{x}^{(\tau)}$ , а синаптические коэффициенты имеют значения, достигнутые на предыдущем такте обучения, то есть  $\tilde{w}(\tau - 1)$ . Тогда потенциал рассчитывается по формуле

$$h^{(\tau)} = \tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1), \quad (20)$$

а коррекция  $\Delta \tilde{w}(\tau)$  в соответствии с правилом Уидроу-Хоффа (если она необходима) равна  $\pm \tilde{x}^{(\tau)}$ . Записанные выше выражения отражены в Таблице 3.

Введём вектор

$$r = \begin{cases} \tilde{x}, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ -\tilde{x}, & \text{если } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда в ситуациях, когда коррекция вектора синаптических коэффициентов необходима (строки 3 и 4 в Таблице 3), выполняется равенство

$$\Delta \tilde{w}(\tau) = r^{(\tau)}.$$

Переменную  $r^{(\tau)}$  удобно использовать и для записи условия, при котором производится коррекция. В Таблице 3 отмечено, что в случае  $x^{(\tau)} \in \Omega_1$  должно выполняться неравенство  $\tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0$ , а в случае  $x^{(\tau)} \in \Omega_2 - \tilde{x}^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) > 0$ . С использованием переменной  $r^{(\tau)}$  для обоих случаев справедливо общее условие  $r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0$ . Аналогичные рассуждения приводят к условию  $r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) > 0$ , когда коррекция синаптических коэффициентов не выполняется. Таким образом, можно записать правило Уидроу-Хоффа в следующей форме:

$$\Delta \tilde{w}(\tau) = \begin{cases} r^{(\tau)}, & \text{если } r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0, \\ 0, & \text{если } r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Нестрогое неравенство в выражении (21) устраняет неопределённость при равенстве потенциала нулю.

Как было отмечено в п. 6, целесообразно считать только те такты обучения, на которых коррекция синаптических коэффициентов осуществлялась, то есть в случае  $r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau - 1) < 0$ .

Запишем условие усиленной разделимости классов, используя вместо  $\tilde{x}$  переменную  $r$ :

$$r^{(\tau)} \tilde{w}^{*T} \geq \theta. \quad (22)$$

Это условие справедливо для всех примеров обучающей выборки, независимо от их принадлежности классу  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ .

Рассмотрим кратко идею доказательства теоремы. Обозначим  $\varphi(\tau)$  угол между текущим вектором  $\tilde{w}(\tau)$  и желаемым  $\tilde{w}^*$ , обеспечивающим разделение классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Угол  $\varphi(\tau)$  меняется в процессе обучения. Если процесс обучения сходится к желаемому результату, то  $|\cos \varphi(\tau)|$  должен стремиться и достигать значения 1 по мере настройки синаптических коэффициентов  $\tilde{w}(\tau)$ . Оценим  $|\cos \varphi(\tau)|$  снизу на каждом такте  $\tau$ . Если в некоторый момент времени обучения оценка нижней границы для  $|\cos \varphi(\tau)|$  становится больше 1, то это означает, что последний шаг настройки, приведший к нижней оценке  $|\cos \varphi(\tau)| > 1$ , был ложным. Иначе говоря, на этом шаге не могло быть реализовано условие  $r^{(\tau)} \tilde{w}^T(\tau) < 0$ , обязательное для проведения коррекции. Это, в свою очередь, означает завершение обучения и решение задачи разделения классов.

Запишем выражение для  $\cos \varphi(\tau)$ :

$$\cos \varphi(\tau) = \frac{\tilde{w}(\tau) \tilde{w}^{*T}}{\|\tilde{w}(\tau)\|}, \quad (23)$$

где учтено, что  $\|\tilde{w}^*\| = 1$  по условию теоремы Розенблатта. Оценим снизу числитель выражения (23)  $a(\tau) = \tilde{w}(\tau) \tilde{w}^{*T}$ . Положим, что вектор синаптических коэффициентов инициализирован случайными числами и отмасштабирован так, что  $\|\tilde{w}(0)\| < \theta$ , где  $\theta$  определено условием усиленной линейной разделимости классов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ,  $\theta > 0$ . Тогда

$$a(0) = \tilde{w}(0) \tilde{w}^{*T} \geq -\|\tilde{w}(0)\| \|\tilde{w}^*\| > -\theta. \quad (24)$$

На первом такте процедуры обучения, на котором  $r^{(1)} \tilde{w}^T(0) < 0$ , вычисляется новое значение вектора синаптических коэффициентов:

$$\tilde{w}(1) = \tilde{w}(0) + r^{(1)}.$$

Оценим значение  $a(1)$ :

$$a(1) = \tilde{w}(1) \tilde{w}^{*T} = (\tilde{w}(0) + r^{(1)}) \tilde{w}^{*T} = \tilde{w}(0) \tilde{w}^{*T} + r^{(1)} \tilde{w}^{*T}.$$

Первое из слагаемых больше  $(-\theta)$  согласно неравенству (24), а второе в соответствии с (22) превышает значение  $\theta$ . Таким образом, можно сделать вывод, что

$$a(1) \geq 0. \quad (25)$$

Аналогичным образом устанавливается нижняя граница для  $a(2)$ :

$$a(2) = \tilde{w}(2) \tilde{w}^{*T} \geq \theta.$$

Для произвольного значения  $\tau$  получим неравенство:

$$a(\tau) = \tilde{w}(\tau) \tilde{w}^{*T} \geq (\tau - 1)\theta. \quad (26)$$

Теперь обратимся к знаменателю  $b(\tau) = \|\tilde{w}(\tau)\|$  в выражении (23) для  $\cos \varphi(\tau)$ . При  $\tau = 0$  выполняется неравенство:

$$b(0) = \|\tilde{w}(0)\| \leq \theta.$$

При  $\tau = 1$  с использованием условия (21) на произвольном такте обучения получим следующее неравенство:

$$b^2(1) = \|\tilde{w}(1)\|^2 = \|\tilde{w}(0) + r^{(1)}\|^2 = \|\tilde{w}(0)\|^2 + \|r^{(1)}\|^2 + 2r^{(1)} \tilde{w}^T(0) < 1 + \theta^2.$$

В приведённом неравенстве использованы указанные ранее свойства  $\|\tilde{w}(0)\| < \theta$ ,  $\|r^{(1)}\| = \|\tilde{x}^{(1)}\| = 1$  и  $r^{(1)} \tilde{w}^T(0) < 0$ . Для произвольного значения  $\tau$  аналогичным способом получаем неравенство:

$$b^2(\tau) = \|\tilde{w}(\tau)\|^2 < \tau + \theta^2. \quad (27)$$

Используем выражения (26), (27) для построения оценки снизу для  $\cos \varphi(\tau)$ :

$$\cos \varphi(\tau) = \frac{a(\tau)}{b(\tau)} > \frac{(\tau-1)\theta}{\sqrt{\tau+\theta^2}}. \quad (28)$$

Заметим, что значение  $\theta > 0$  не может превосходить 1, так как в формулировке теоремы Розенблатта оценивает снизу скалярное произведение двух нормированных векторов. Отсюда следует, что  $\theta^2 < 1$ , и неравенство (28) может быть усилено:

$$\frac{(\tau-1)\theta}{\sqrt{\tau+1}} < \cos \varphi(\tau) \leq 1. \quad (29)$$

Поскольку продолжительность обучения  $\tau \gg 1$ , на основании (29) можно приближённо записать:

$$\sqrt{\tau}\theta < 1.$$

Отсюда следует, что максимальное время обучения  $\tau^*$  не может превосходить значения  $\frac{1}{\theta^2}$ :  $\tau^* < \frac{1}{\theta^2}$ , что и доказывает теорему Розенблатта.

## 8. Многослойный нейросетевой классификатор для распознавания линейно неразделимых классов

В п. 2 были рассмотрены две постановки задачи классификации данных с применением перцептронов с "жесткими" активационными характеристиками. Первая задача состояла в отнесении объекта к одному из двух линейно разделимых классов. Эта задача решается настройкой синаптических коэффициентов элементарного перцептрона. Во второй постановке задачи предполагается, что имеются  $K$  классов и они попарно линейно разделимы. В таком случае задача распознавания решается на двухслойной нейронной сети, в которой нейроны первого слоя обеспечивают разделение в пространстве признаков выборочных примеров каждой пары из имеющихся  $K$  классов, а на втором слое реализуется логическое правило принятия решения о принадлежности входного вектора классу.

Рассмотрим теперь более сложную задачу, когда классы являются линейно неразделимыми в пространстве признаков. На рис. 11 приведен пример таких классов в пространстве двух признаков ( $X_1, X_2$ ). В дальнейших рассуждениях будем опираться на тот факт, что элементарный перцептрон, построенный на биполярном нейроне, реализует гиперплоскость  $h = xw^T - b = 0$ . Эта гиперплоскость делит пространство признаков на две области, в одной из которых  $h > 0$ , а в другой  $h < 0$ . Таким образом, каждый раз, когда проводится гиперплоскость в пространстве признаков, имеется в виду, что в схему классификатора вводится дополнительный нейрон – биполярный элементарный перцептрон.

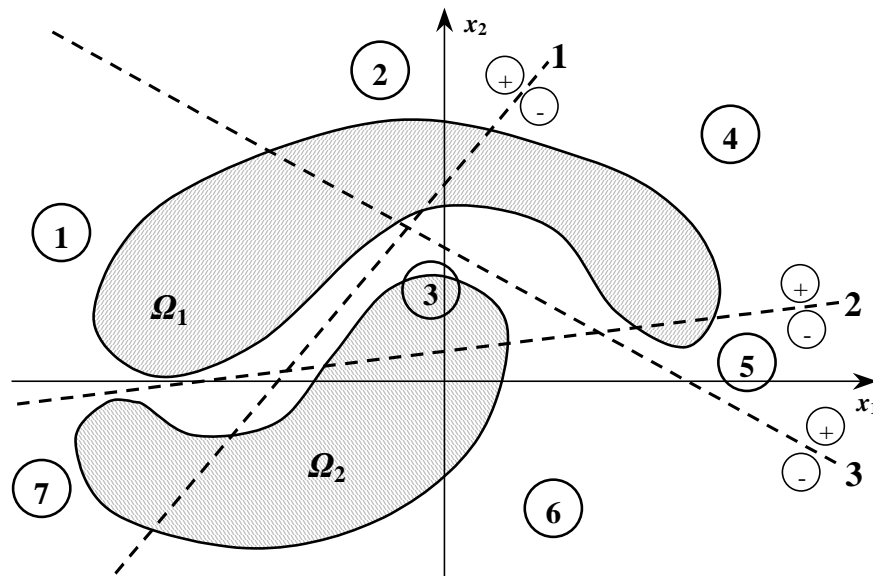


Рис. 11. Пример линейно неразделимых классов в пространстве признаков ( $X_1, X_2$ )

Проведем гиперплоскости (в пространстве двух признаков - прямые) так, чтобы в каждый из выпуклых многогранников, полученных при таком разбиении пространства признаков, попадали только примеры одного класса. Один из вариантов такого разбиения показан на рис. 11. В этом варианте проведены 3 прямые и образованы 7 выпуклых многогранников. Каждая прямая отмечена на рис. 11 своим номером и указанием на области, в которых  $h > 0$  (+) и  $h < 0$  (-). В области, отмеченной знаком '+', соответствующий нейрон имеет выход +1, а в противоположной – (-1). Тогда каждому многограннику может быть сопоставлен код, который представляет собой строку из +1 и -1, построенную по выходам трех нейронов. Коды многогранников строятся в соответствии с нумерацией гиперплоскостей (на рисунке - прямых) и указания



"положительной" или "отрицательной" области пространства признаков. В результате получается следующая таблица:

Номер многогранника	Код многогранника		
1	1	1	-1
2	1	1	1
3	-1	1	-1
4	-1	1	1
5	-1	-1	1
6	-1	-1	-1
7	1	-1	-1

Строка биполярных признаков, построенная описанным выше способом, называется *внутренним кодом* многогранника. В рассмотренном на рис. 11 примере вектор  $(x_1, x_2)$  принадлежит первому классу  $\Omega_1$ , если он принадлежит одному из многогранников 1, 2, 4, 5, и классу  $\Omega_2$  - для многогранников 3, 6 и 7. Существенно, что ни в одном из многогранников не содержатся векторы признаков разных классов. Такое разбиение пространства признаков назовем *представительным* с точки зрения решаемой задачи.

В общем случае, когда в пространстве признаков размерности  $M$  проведены  $N$  гиперплоскостей (введены  $N$  нейронов), внутреннее представление каждого выпуклого многогранника имеет длину  $N$  биполярного кода. Допустим, что найдено представительное разбиение пространства признаков, то есть в каждом многограннике располагаются примеры только одного класса. Будем считать, что рассматриваемые  $N$  нейронов образуют первый слой многослойного нейросетевого классификатора. Таким образом, по состоянию нейронов первого слоя можно однозначно судить о принадлежности входного вектора определенному классу. Отсюда следует вывод, что вектор выходов нейронов первого слоя содержит достаточную информацию для решения задачи распознавания и потому может рассматриваться в качестве нового вектора признаков для классификации данных. Это означает, что первый слой нейронов фактически является преобразователем, обеспечивающим переход от  $M$  первичных действительных признаков классифицируемого объекта к  $N$  биполярным признакам. Теперь задача состоит в построении классификатора по  $N$  биполярным признакам. Если число классов равно 2, то возможно, что для ее решения достаточно элементарного персептрона, если в новом пространстве признаков классы являются линейно разделимыми. В противном случае нужно построить новый слой нейронов, который даст новое внутреннее представление, то есть новый вектор биполярных признаков для последующей задачи классификации. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет построен такой вектор признаков, что классифицируемые объекты окажутся в соответствующем пространстве линейно разделимыми.

Описанная выше идея была предложена и экспериментально исследована Мезардом и Надалом (Mezard M., Nadal J.P., 1989). Реализация этой идеи дает алгоритм роста нейронной сети прямого распространения по числу слоев и числу нейронов в слоях. Алгоритм получил название "черепичного" ("tiling algorithm"). Перед описанием алгоритма Мезарда и Надала обратим внимание на существенное обстоятельство: для того, чтобы разбиение пространства признаков было достаточным для распознавания (представительным), необходимо, чтобы любой паре векторов входных признаков (примеров обучающей выборки), принадлежащих разным классам, не соответствовал один и тот же код (состояние нейронов слоя).

Алгоритм начинается с обучения единственного нейрона (например, с помощью адаптивного  $\delta$ -правила Уидроу-Хоффа). Если в результате обучения оказалось, что все

примеры первого класса имеют код +1 (желаемый выход нейрона для примеров первого класса), а второго – (-1), то классы линейно разделимы и поставленная задача классификации решена. В противном случае хотя бы одна из областей  $Q_1$  и  $Q_2$  пространства признаков, полученных с помощью разделяющей гиперплоскости первого нейрона, содержит примеры обоих классов. Следовательно, нужно осуществить дробление этих областей. В общем случае на первом этапе следует ввести два дополнительных нейрона для деления рассматриваемых областей. Допустим, область  $Q_1$  содержит примеры как первого, так и второго класса. Тогда введем первый из двух дополнительных нейронов, который обучается только на примерах, принадлежащих области  $Q_1$ . Задача этого нейрона состоит в разделении  $Q_1$  на две подобласти так, чтобы каждая включала только примеры одного класса. Обозначим эти подобласти, полученные после завершения процедуры обучения,  $Q_{11}$  и  $Q_{12}$ . Вполне возможно, что  $Q_{11}$  и  $Q_{12}$  не обеспечивают желаемого разделения примеров двух классов в области  $Q_1$ . Тогда рост числа нейронов первого слоя будет продолжен на следующих этапах роста нейронной сети. Если  $Q_2$  содержит примеры обоих классов, то вводим второй из двух дополнительных нейронов, обучающийся на примерах, принадлежащих только области  $Q_2$ . В результате обучения будут сформированы подобласти  $Q_{21}$  и  $Q_{22}$ . Таким образом, пространство признаков покрывается областями  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  и  $Q_{22}$ , внутреннее представление которых содержит 2 биполярных разряда. Возможны две ситуации: а) хотя бы одна из указанных четырех подобластей содержит примеры обоих классов, б) достигнуто представительное разбиение пространства признаков, при котором каждая из подобластей содержит примеры только одного класса. В случае а) необходимо продолжить разбиение подобластей  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  и  $Q_{22}$  с помощью введения дополнительных нейронов первого слоя (максимально по одному на каждую подобласть). В случае б), когда полученное разбиение пространства признаков на  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{21}$  и  $Q_{22}$  является представительным, рост числа нейронов первого слоя прекращается и создается второй слой. Задачей второго слоя является классификация объектов по признакам, вырабатываемым нейронами первого слоя (3 нейрона – 3 признака). Процесс роста числа нейронов второго слоя осуществляется по тем же правилам, которые были рассмотрены для первого слоя. На завершающем этапе "черепичного" алгоритма обучается единственный нейрон выходного слоя многослойной сети, который разделяет классы в пространстве признаков, вырабатываемых предыдущим слоем.

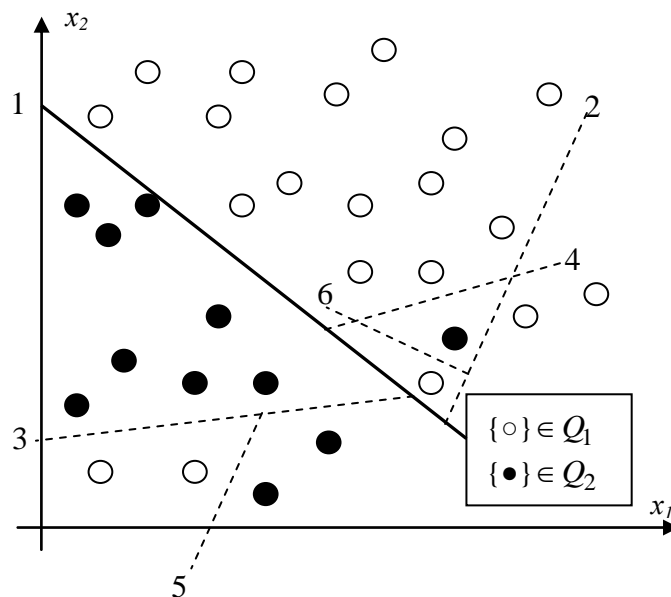


Рис 12. Пример формирования первого слоя нейронов в "черепичном" алгоритме

На рис. 12 приведен пример последовательного ввода нейронов в первый слой многослойного классификатора в соответствии с алгоритмом Мезарда и Надала. Разделяющие прямые, показанные на рисунке пунктиром, перенумерованы соответственно порядку ввода нейронов, которые их формируют. После ввода в первый слой шести нейронов пространство признаков разделяется на многогранники, каждый из которых содержит примеры только одного класса.

Сходимость "черепичного" алгоритма объясняется тем, что в процессе обучения каждого вновь введенного нейрона контролируется число неправильно обработанных примеров и обеспечивается их уменьшение по крайней мере на 1. Алгоритм характеризуется логической простотой и интерпретируемостью роста нейронной сети, а также элементарным способом последовательного обучения вновь вводимых нейронов.

Мезард и Надал тестировали "черепичный" алгоритм на воспроизведении булевой функции 8-и аргументов, что эквивалентно распознаванию векторов признаков размерности  $M=8$  при числе классов  $N=2$ . По совокупности различных булевых функций были найдены сетевые многослойные структуры, которые содержали в среднем около 7 слоев и 55 нейронов. В то же время известно, что любая булева функция может быть реализована на двухслойной сети. Таким образом, структура сети в алгоритме Мезарда и Надала оказалась переусложненной, хотя по числу нейронов она, как правило, имела существенное преимущество.

## Список литературы

1. Дж. Ту, Р. Гонсалес. Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978.
2. В.И. Васильев. Распознающие системы. Киев: Наукова думка, 1969.
3. R. Beale, T. Jackson. Neural Computing: An Introduction. University of York. Philadelphia, 1992.
4. Ф. Розенблатт. Принципы нейродинамики. Персептроны и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965.
5. М.Л. Минский, С. Пейперт. Персептроны. М.: Мир, 1971.
6. К. Фу. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М.: Наука, 1971.
7. B. Müller, J. Reinhardt. Neural Networks. Springer-Verlag, 1990.
8. В.А. Головки. Нейронные сети: обучение, организация и применение. М.: ИПРЖР, 2001.
9. А.А. Ежов, С.А. Шумский. Нейрокомпьютинг и его приложения в экономике и бизнесе. М.: МИФИ, 1998.
10. В.С. Медведев, В.Г. Потёмкин. Нейронные сети. Matlab 6. М.:Диалог-МИФИ, 2002.
11. W.S. McCulloch, W. Pitts. A logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. Bull. Math. Biophys., 5, 115 (1943). Русский перевод в журнале «Нейрокомпьютер», № 3/4, 1992.
12. С. Роуз. Устройство памяти. М.: Мир, 1995.
13. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.
14. Аксенов С.В. Новосельцев В.Б. Организация и использование нейронных сетей. Методы и технологии. Томск: Издательство НТЛ, 2006. 128 с.