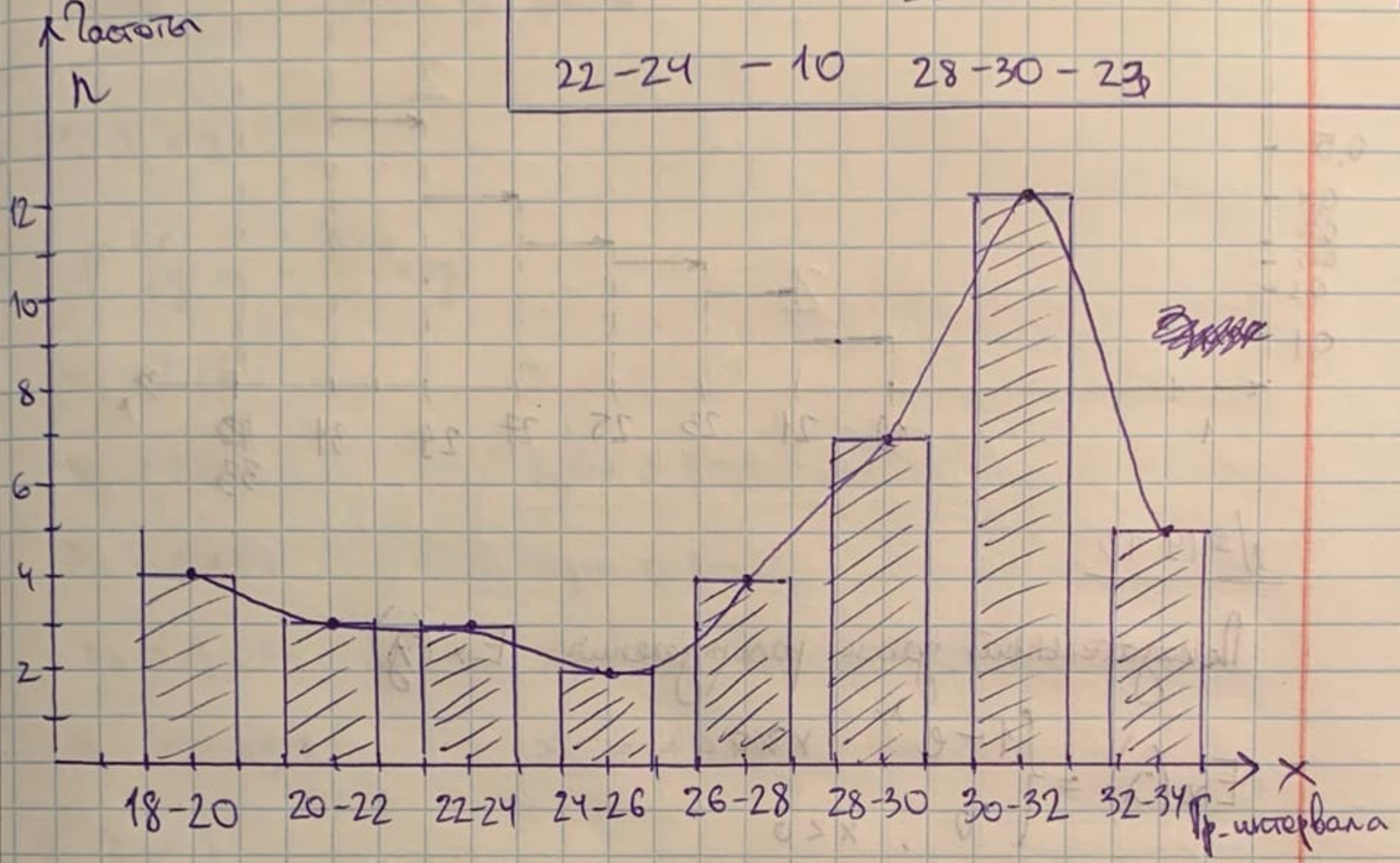
Домашняя работа:

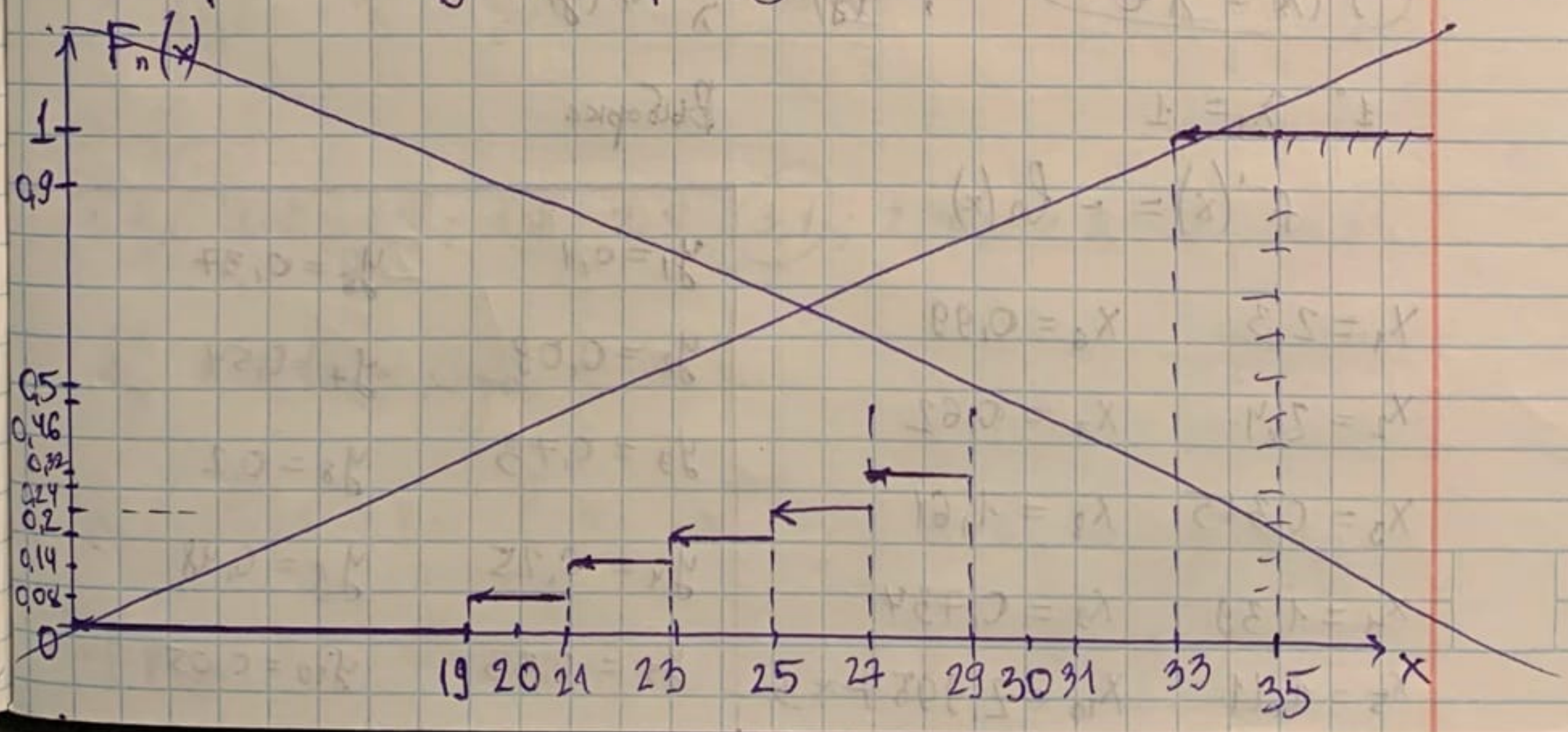
Накопл. частоты:

18–20 – 4
20–22 – 7
22–24 – 10
24–26 – 12
26–28 – 16
28–30 – 23
30–32 – 35
32–34 – 40

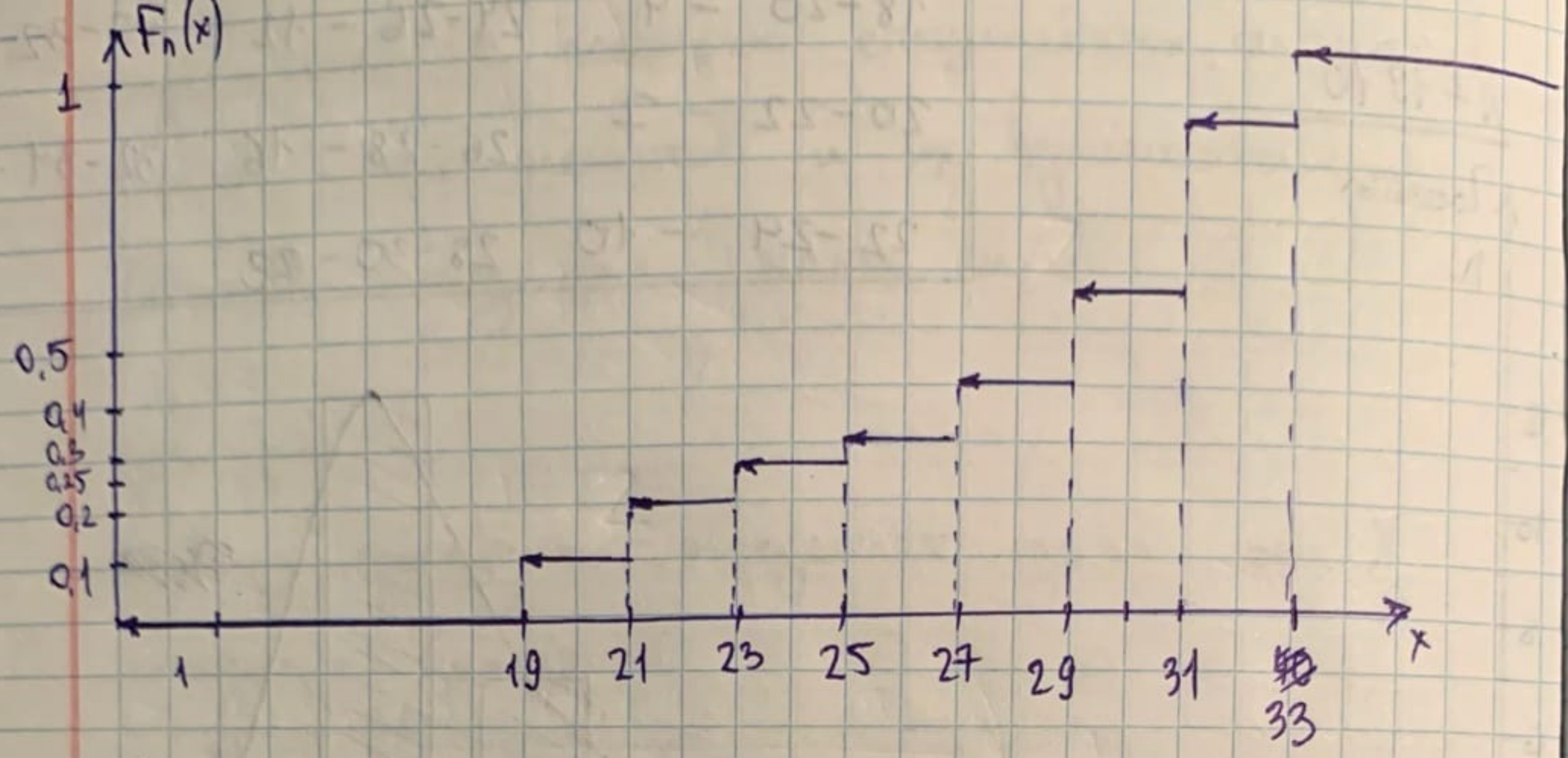
№ 19.10



Эмпирическая функция распределения: $x > 33 \longrightarrow F_n(x) = 1$



Эмпирическая функция распр.: $x > 33 \longrightarrow F_n(x) = 1$



№ 19.13

Показательный закон распределения $Ex(\lambda)$

$$Ex(\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\qquad f^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(y)$

1°. $\lambda_1 = 1$

$f^{-1}(x) = -\ln(x)$

$x_1 = 2,3$ $\qquad x_6 = 0,99$

$x_2 = 2,4$ $\qquad x_7 = 0,62$

$x_3 = 0,315$ $\qquad x_8 = 1,61$

$x_4 = 1,39$ $\qquad x_9 = 0,734$

$x_5 = 1,11$ $\qquad x_{10} = 2,9957 \approx 3$

Выборка

$y_1 = 0,1$	$y_6 = 0,37$
$y_2 = 0,09$	$y_7 = 0,54$
$y_3 = 0,73$	$y_8 = 0,2$
$y_4 = 0,25$	$y_9 = 0,48$
$y_5 = 0,33$	$y_{10} = 0,05$

~~№19.18~~

~~X и Y независимы и имеют норм. распр.~~

~~$N(10,2)$ и $N(9,1)$ соотв.~~

$2°.\ \lambda_2 = 2$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\ln(y)$$

$x_1 = 1{,}15$

$x_2 = 1{,}2$

$x_3 = 0{,}157$

$x_4 = 0{,}693$

$x_5 = 0{,}554$

$x_6 = 0{,}497$

$x_7 = 0{,}308$

$x_8 = 0{,}8$

$x_9 = 0{,}367$

$x_{10} = 1{,}498$

$3°.\ \lambda_3 = 3$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln(y)$$

№19.25

$3{,}1;\ 3{,}0;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}5;\ 3{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}8;\ 1{,}3. = X$

$d_x^* = 3{,}1$ – мода

$n = 2l+1 = 9 \Rightarrow l = 4 \quad x^{(l+1)} = 2{,}5 = h_x^*$ – медиана

Вар. ряд: $1{,}3;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}4;\ 2{,}5;\ 2{,}8;\ 3{,}0;\ 3{,}1;\ 3{,}1.$

№ 19.31

$$\tilde{d}_x = a_d + \left(\frac{n_d - n_{d-1}}{2n_d - n_{d-1} - n_{d+1}}\right)\cdot \Delta =$$

$$= 5 + \frac{4-2}{8-2-2}\cdot \cancel{3}\,2 = 5 + \frac{2}{4}\cdot 2 = \cancel{6,5}\ 6$$

мода

$a_d = 5$

$n_d = 4$ $\qquad \Delta = \cancel{4}\,2$

$n_{d-1} = 2 \qquad n_{d+1} = 2$

$$\tilde{h}_x = a_h + \left(\frac{\frac{n}{2} - (n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1})}{n_h}\right)\cdot \Delta =$$

$a_h = 5$

$n_h = 4$

$n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1} = 3$ $\qquad \Delta = 3$

$n = 11$

$$= 5 + \frac{6-3}{4}\cdot 2 = 7,25$$

иначе

$a_h = 7$

$n_h = 2$

$n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1} = 7$

$$= 7 + \frac{6-7}{2}\cdot 2 = 7 - 1 = \cancel{6,5}\ 6$$

$\tilde{h}_x =$

x_i – среднее по интервалу

$$\overline{x} = \frac{\sum x_j \cdot n_j}{\sum_{i=1} n_i} = 6{,}55$$

$$D_x^+ = \frac{\sum (x_j - \overline{x})^2 \cdot n_j}{\sum n_i} \ominus$$

$\ominus$

Д/з:

№ 19.101

$X_1, \dots, X_n$ – случайные величины с $MX_i = m$

$DX_i = \sigma^2$

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

Должно быть $MS_0^2 = \sigma^2$, т.к. оценивается дисп.

$$MS_0^2 = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(X_i - m)^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M(X_i - M(X_i))^2}_{D(X_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$

$M(S_0^2) = \sigma^2 \Rightarrow$ оценка несмещённая.

№ 19.102. ?

$X_1, \dots, X_n$ – выборка из ген. сов. с мат. ожид m.

$\tilde{m}_1 = x_1$ – оценка мат. ожидания.

$\tilde{M}_1 = X_1$

$M(\tilde{M}_1) = M(X_1) = m$? будет несмещённой ~~состоятельной~~

$D(\tilde{M}_1) = D(X_1) = \sigma^2$? и чего $\xrightarrow[n\to\infty]{\cancel{\ \ }} 0$

№19.120.

X – наблюдаемое значение биномиальной случ. величины $B(n, p)$

X – число успехов в n испытаниях, причём p – вероятность успеха

$M(B(n,p)) = np$

$D(B(n,p)) = np(1-p)$ – для ген. совокупностей.

X_i – ~~биномиальное~~ распр. Бернулли $P(X=1) = p$

$P(X=0) = 1-p$

$Y = B(n, p) = X_1 + \ldots + X_n$ – кол-во испытаний

$P(Y=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ – функция вер.

$$f_y(p,n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

$$L(n,p) = \prod_{i=1}^{m} C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-x_i)!\,x_i!} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} =$$

$$= \frac{m \cdot n!\, p^{x_1+\ldots+x_m} \cdot (1-p)^{mn - (x_1+\ldots+x_m)}}{x_1!\, x_2! \cdot \ldots \cdot x_m!\, (n-x_1)! \cdot \ldots \cdot (n-x_m)!}$$

$$\ln L(n,p) = \ln m + \ln n! + \sum x_i \ln p + (mn - \sum x_i)\ln(1-p) -$$
$$- \ln\left(x_1!\, x_2! \cdot \ldots \cdot x_m!\, (n-x_1)! \cdot \ldots \cdot (n-x_m)!\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(n,p)}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{mn - \sum x_i}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{p} = \frac{mn - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow \frac{1-p}{p} \sum x_i = mn - \sum x_i$$

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum x_i = mn - \sum x_i$$

$$\frac{\sum x_i}{p} = mn \Rightarrow \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} x_i = p \qquad p = \frac{\bar{x}}{n}$$

– оценка для p.

Докажем несмещённость и состоятельность

$p_0 = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} x_i \qquad P_0 = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} x_i$

$M(P_0) = M\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} M(x_i) =$

$= \frac{mnp}{mn} = p$ – оценка ~~состоятельна~~ несмещённая

$D(P_0) = D\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = \frac{1}{m^2n^2}\sum_{i=1}^{m} D(x_i) =$

$= \frac{\cancel{m}\cancel{n}p(1-p)}{m^2n^2} = \frac{p(1-p)}{m\cdot n} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ оценка состоят.

Оценка $p_0 = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} x_i$ является состоятельной и несмещённой.

№ 19.122.

$X = Ex\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ – найти и показать МП-оценку

$f_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \ x \geq 0$

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n}\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\ln L(\lambda) = \ln\frac{1}{\lambda^n} + \left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln e =$

$= -n\ln\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$= e^{x+y}$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\cancel{\lambda} \ \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ — оценка

$\lambda = \overline{x}$

для эксп. распр $M(Ex(\frac{1}{\lambda})) = \lambda$

$D(Ex(\frac{1}{\lambda})) = \lambda^2$

$\lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$M(\Lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda$ — оценка несм.

$D(\Lambda) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{n\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — оценка. сост

$\lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является состоятельной и несм. оценкой.

№ 19.131.

В n независимых испытаниях событие A произошло x ~~раз~~ раз. Найти оценку вероятности p появления одного события.

По факту распр. ~~Бернулли~~ биномиальное $B(n,p)$

$M(B(n,p)) = np \quad D(B(n,p)) = np(1-p)$

Выборочные значения: m – число сб. в выборке

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$D_x^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2$$ – мишит момент

$$\overline{x} = M(B(n,p)) \Rightarrow \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i = np$$

$$p = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{\overline{x}}{n}$$

$$D_x^* = D(B(n,p)) \Rightarrow \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2 = \cancel{np}\, np(1-p) -$$

– мишни

получена оценка $p = \frac{\overline{x}}{n}$.

№ 19.132

Распределение Пуассона $P(\lambda) = Y$

$$P(Y = \cancel{k}\, x_i) = \frac{\lambda^k}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$M(P(\lambda)) = \lambda$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = M(P(\lambda)) = \lambda$$

получена оценка $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$

№ 19.133

$N(m, \sigma)$ – нормальное распр.

$M[N(m,\sigma)] = m$

$D[N(m,\sigma^*)] = \sigma$ – странно что не с квадратом

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m$

– получилось всё как обычно (что логично)

$D_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \sigma$

№ 19.151

Две выборки $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ – выборочное среднее выборок

S_1^2, S_2^2 – выборочные дисперсии

$$A = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (m_1 - m_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ где } S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

показать, что A имеет распр. Стьюдента с n_1+n_2-2 ?

$$S^2 \sim \frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\chi^2(n_1+n_2-2) \Rightarrow \frac{n_1+n_2-2}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$A = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \overbrace{(m_1-m_2)}^{\text{мат. ожид.}}}{} \qquad S \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2-2}}\sqrt{\chi(n_1+n_2-2)} \neq$$

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{S^2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

то χ^2 распр.

№ 19.157

$\bar{x} = 20$ мкФ $\quad n = 16$

$\sigma = 4$ мкФ $\qquad m$ – мат. ожид

• $1 - \alpha = 0{,}9 \quad \alpha = 0{,}1$

построение доверительного интервала:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль нормального распр.

по таблице: $u_{\cancel{0{,}15}\ 0{,}95} = \cancel{0{,}13}\ 1{,}65$

$\sqrt{n} = 4$

$\cancel{20 + 0{,}13 \cdot \frac{4}{4} < m < 20 - \frac{4}{4} 0{,}13}$

$20 - 1{,}65 < m < 20 + 1{,}65$

$$18{,}35 < m < 21{,}65$$

интервал: $(18{,}35 ; 21{,}65)$

• $1-\alpha = 0.99 \quad \alpha = 0{,}01$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0{,}995} = 2{,}58$$

$$20 - 2{,}58 < m < 20 + 2{,}58$$

$$17{,}42 < m < 22{,}58$$

интервал: $(17{,}42 ; 22{,}58)$

№ 19.161

Excel

№ 19.164

Две выборки с $n_1, n_2, \bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2$.

объединенные оценки $n_1 + n_2$

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \qquad S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Если дисперсия известна: σ^2

$$V = \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n_1 + n_2}}$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n_1 + n_2}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} - m < \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$T = \dfrac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n_1+n_2}}$ — распределение стьюдента с n_1+n_2-2 степенями свободы

покрывается квантилями:

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) < \frac{\bar{X}-m}{S/\sqrt{n_1+n_2}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) < \bar{X} - m < \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) < m < \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

$$\Downarrow \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) < m < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

№19.169

$\tilde{\sigma}^2 = S_0^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - m)^2$, где m – мат. ожидание

$\chi_p^2(n)$ – квантиль распр. χ^2 с n степенями свободы

Статистика $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - m)^2$

$n\frac{S_0^2}{\sigma^2}$ имеет распр $\chi^2(n)$

Тогда: $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{nS_0^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$

$$\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} < \frac{\sigma^2}{nS_0^2} < \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$$

$$\frac{nS_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$$

№19.174

$n = 100$ $\quad \bar{x} = 10$ кОм

а) $\sigma^2 = 1$ кОм^2

Что-то тут не так!

$\Delta = 0{,}1$ кОм

$0{,}1 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}1 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}1$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}54 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}46$ $\quad \alpha = 0{,}92$ $\quad 1-\alpha = 0{,}08$ $\quad 8\%$?

При известной дисперсии:

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$ – доверительный интервал

$10 - 0,1$ $10 + 0,1$

Тогда:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0,1$$

$$0,1 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0,1 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1$$

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0,84 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,16 \quad \alpha = 0,32$$

$1-\alpha = 0,68$ – доверительная вероятность

в) $1-\alpha = 0,95$ – доверительный ~~интервал~~

n – ?

• случай неизвестной дисперсии: не решить, мало данных

• случай известной дисперсии: $\sigma^2 = 1$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0,1 \qquad \alpha = 0,05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} = 0,1 \Rightarrow n = \left(\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{0,1}\right)^2 = \left(\frac{u_{0,975}}{0,1}\right)^2 =$$

$\ominus \left(\frac{1,96}{0,1}\right)^2 = 384,16 \xrightarrow{} \approx 385$

Ответ: 385 испытаний минимум.

Разговор о распределениях:

№ 19.150

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}, \text{ где } \bar{X}_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2),\ \bar{X}_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$$

В силу комп. уст. $\bar{X}$ тоже будет нормальным.

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}\right) = \frac{1}{n_1 + n_2}(n_1 m_1 + n_2 m_2)$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}\right) = \frac{1}{(n_1 + n_2)^2}(n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}, \frac{n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2}{(n_1 + n_2)^2}\right)$$

№ 19.149

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \text{ где } S_1^2 \text{ и } S_2^2 \text{ – выборочные дисперсии}$$

$\cancel{S_1^2 \sim \chi^2(}$ $\quad S_1^2 \sim \frac{\sigma^2}{n_1 - 1} \chi^2(n_1 - 1) \quad S_2^2 \sim \frac{\sigma^2}{n_2 - 1} \chi^2(n_2 - 1)$

$$S^2 \sim \frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{n_1-1}{n_1-1}\chi^2(n_1-1)+\frac{n_2-1}{n_2-1}\chi^2(n_2-1)\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\chi^2(n_1+n_2-2)$$

Д/з на 31.10.

№ 19.279.

Доказать основное тождество дисперсионного анализа

l – кол-во факторов

$n_1,\dots,n_k$ – размеры выборок $n=n_1+\dots+n_l$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\overline{x})^2}_{S_{общ.}}=\underbrace{\sum_{k=1}^{l}n_k(\overline{x}_k-\overline{x})^2}_{S_{факт.}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\overline{x}_k)^2}_{S_{ост.}}$$

Докажем:

$$x_{ik}-\overline{x}=(\overline{x}_k-\overline{x})+(x_{ik}-\overline{x}_k)$$

$$(x_{ik}-\overline{x})^2=(\overline{x}_k-\overline{x})^2+2(\overline{x}_k-\overline{x})(x_{ik}-\overline{x}_k)+$$
$$+(x_{ik}-\overline{x}_k)$$

просуммируем по l и n_k

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\bar{x})^2=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}\underbrace{(\bar{x}_k-\bar{x})^2}_{\text{независ. от } i}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}\underbrace{(\bar{x}_k-\bar{x})(x_{ik}-\bar{x}_k)}_{=0}+\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2$$

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\bar{x})^2=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(\bar{x}_k-\bar{x})^2+\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2$$

☑

$$(\bar{x}_k-\bar{x})(x_{ik}-\bar{x}_k)=\bar{x}_k x_{ik}-\bar{x}_k^2-\bar{x}x_{ik}+\bar{x}\bar{x}_k$$

№ 19.280.

Оценка $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$ оценка для ~~x~~ m

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}X_{ik}$$

$$M[\bar{X}]=\frac{1}{n}M\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}X_{ik}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}M(X_{ik})=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}m=\frac{m}{n}\underbrace{(n_1+n_2+\ldots+n_l)}_{n}=m \text{ — оценка несм.}$$

$$D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\longrightarrow 0 \text{ — оценка состоятельная}$$

Оценка $\tilde{S}^2 = \frac{Q_2}{n-l}$ оценка для σ^2

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{l}\sum_{l=1}^{n_k}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}\sum_{l=1}^{n_k}(X_{ik}-\bar{X}_k)^2$$

$$\cancel{M(\tilde{S}^2) = \frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}\sum_{l=1}^{n_k}M(X_{ik}-\bar{X}_k)^2} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}\sum_{l=1}^{n_k}M(X_{ik}^2-2X_{ik}\bar{X}_k+\bar{X}_k^2)}$$

$$M(\tilde{S}^2) = \frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}M\left(\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik}-\bar{X}_k)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}M\left((n_k-1)S_k^{*2}\right) = \frac{1}{n-l}\sum_{k=1}^{l}(n_k-1)\overset{\text{по док. ранее}}{\overset{\sigma^2}{\overset{\shortparallel}{M(S_k^{*2})}}} =$$

$$\boxed{\text{Выбор. дисп.}\quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

$$= \frac{n-l}{n-l}\sigma^2 = \sigma^2$$ — оценка несм.

$$D(\tilde{S}^2) = \frac{1}{(n-l)^2}D\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ik}-\bar{X}_k)^2\right) =$$

$$\ominus \frac{1}{(n-\ell)^2}\sum_{k=1}^{\ell} D\left((n_k-1)S^{*2}_k\right) = \frac{1}{(n-\ell)^2}\sum_{k=1}^{\ell}(n_k-1)^2 \underbrace{D(S^{*2}_k)}_{\text{сход. вел.}} =$$

$$= \frac{1}{(n-\ell)^2}\sum_{k=1}^{\ell}(n_k^2-2n_k+1)\,D(S^{*2}_k) = \frac{\sum_{k=1}^{\ell} n_k^2 - 2n + \ell}{(n-\ell)^2}\sum_{k=1}^{\ell} D(S^{*2}_k)$$

Д/з:

№ 19.32 б.

Доказать тождество $Q_y = Q_R + Q_e$

$$Q_y = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$Q_R = \sum (\tilde{y}_i - \bar{y})^2$$

$$Q_e = \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \tilde{y}_i) + (\tilde{y}_i - \bar{y})$$

$$\underbrace{(y_i-\bar{y})^2}_{Q_{y_i}} = \underbrace{(y_i-\tilde{y}_i)^2}_{Q_{e_i}} + \underbrace{(\tilde{y}_i-\bar{y})^2}_{Q_{R_i}} + 2(y_i-\tilde{y}_i)(\tilde{y}_i-\bar{y})$$

$$Q_y = Q_e + Q_R + 2\sum (y_i-\tilde{y}_i)(\tilde{y}_i-\bar{y}) \overset{?}{=} 0$$

потому что независ. сл. вел. ?

$$\sum (y_i-\tilde{y}_i)(\tilde{y}_i-\bar{y}) = \sum (y_i\tilde{y}_i - y_i\bar{y} - \tilde{y}_i^2 + \tilde{y}_i\bar{y})$$

№ 19.327.

Доказать $Q_R = \frac{Q_{xy}^2}{Q_x}$

$Q_R = \sum(\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = \sum(kx_i + b - \bar{y})^2 =$

$= \sum(kx_i + \cancel{\bar{y}} - k\bar{x} - \cancel{\bar{y}})^2 =$

$= \sum(kx_i - k\bar{x})^2 = k^2 \sum(x_i - \bar{x})^2 = k^2 \cdot Q_x =$

$= \frac{Q_{xy}^2}{Q_x^2} \cdot Q_x = \frac{Q_{xy}^2}{Q_x}$