Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ

Отчет по курсу «Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент группы Б22-534
Баранов А. Т.
Преподаватель:
Елкина Д. Ю.

Москва, осень 2024

Содержание

Задание №1 (Вариант 51)

Условие

Найти решение задачи линейного программирования геометрически.

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

а). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ в). $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 11 \\ x_1 - 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Решение

Для всех пунктов нам понадобится знать вектор градиента функции $F(x_1, x_2)$.

$$\overrightarrow{grad} F(x_1, x_2) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\} = \{3, 1\}$$

Пункт А

Приведем неравенство к более наглядному виду, чтобы удобнее было строить график:

$$\begin{cases} x_2 \leq -2x_1 + 2 \\ x_2 \leq \frac{1}{3}x_1 + 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим график с помощью библиотеки $matplotlib$ для $Python$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl

plt.rc("text", usetex=True)
plt.rc(
    "text.latex",
    preamble=r"""
\usepackage[english, russian]{babel}
\usepackage[utf8]{inputenc}
""",
)
plt.style.use("seaborn-v0_8")


def find_intersection(a1, b1, a2, b2):
    x_1 = (b2 - b1) / (a1 - a2)
    x_2 = a1 * x_1 + b1 if a1 != float("inf") else a2 * x_1 + b2
    return x_1, x_2


a1, b1 = -2, 2
a2, b2 = 1 / 3, 1
a3, b3 = float("inf"), 0
a4, b4 = 0, 0
g1, g2 = 3, 1
a = [a1, a2, a3, a4]
b = [b1, b2, b3, b4]


X = np.linspace(-20, 100, 1000)
line1 = a1 * X + b1
line2 = a2 * X + b2
line3 = a3 * X + b3
line3 = np.zeros(1000)
line4 = a4 * X + b4

fix, ax = plt.subplots()
plt.quiver(
    0,
    0,
    g1,
    g2,
    angles="xy",
    scale_units="xy",
    scale=1,
    color="black",
    label=r"$\overrightarrow{grad}\ F(x_1,x_2)$",
)


ax.plot(X, line1, label=r"$x_2 = -2x_1 + 2$")
```

```
    ax.plot(X, line2, label=r"$x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 1$")
    ax.plot(line3, X, label=r"$x_1 = 0$")
    ax.plot(X, line4, label=r"$x_2 = 0$")
    ax.fill_between(
        X, line1, -1, color="blue", alpha=0.2, label="Область $x_2 \leq
           -2x_1 + 2$"
    )
    ax.fill_between(
        X,
        line2,
        -3,
        color="red",
        alpha=0.2,
        label=r"Область $x_2 \leq \frac{1}{3}x_1 + 1$",
    )

    intersections = []
    for i in range(len(a)):
        for j in range(len(a)):
            if i < j:
                intersections += [find_intersection(a[i], b[i], a[j], b[
                   j])]

    intersections = [(x_1, x_2) for (x_1, x_2) in intersections if x_1
       >= 0 and x_2 >= 0]

    for i, (x_1, x_2) in enumerate(intersections, start=1):
        plt.plot(x_1, x_2, 'ko')
        plt.annotate(f'{i}: ({x_1:.2f}, {x_2:.2f})', xy=(x_1, x_2),
           xytext=(x_1 + 0.3, x_2 + 0.4),
                     arrowprops=dict(facecolor='black', arrowstyle='->')
                        )

    ax.set_xlim(-0.01, 3.5)
    ax.set_ylim(-0.01, 3.5)
    ax.set_xlabel(r"$\mathbf{x_1}$", fontsize=12)
    ax.set_ylabel(r"$\mathbf{x_2}$", fontsize=12)
    ax.legend(loc="upper right", fontsize=12, ncol=2)
    plt.gca().set_aspect("equal")
    plt.show()
```

Код выше выдаст следующий результат:

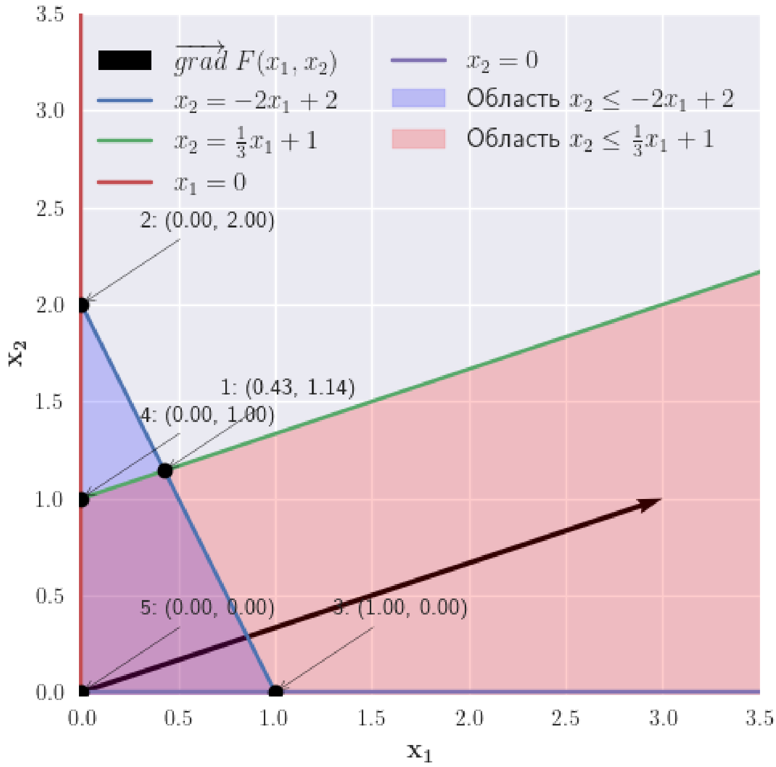

Рис. 1: График к пункту А задания 1.

В условную область попадают все точки, кроме второй. Подставим подходящие точки в функцию F и выведем ее $\max$ и min.

```
def F(x_1, x_2):
    return g1 * x_1 + g2 * x_2

for i, (x_1, x_2) in enumerate(intersections, start=1):
    if i != 2:
        print(f"Значение F вточке  {i} равно {F(x_1, x_2):.2f}")
```

Вывод:

```
Значение F в точке 1 равно 2.43
Значение F в точке 3 равно 3.00
Значение F в точке 4 равно 1.00
Значение F в точке 5 равно 0.00
```

Ответ: $\max F(x_1, x_2) = 3, \operatorname{argmax} F(x_1, x_2) = (1, 1);$
$\min F(x_1, x_2) = 0, \operatorname{argmin} F(x_1, x_2) = (1, 0)$

Пункт Б

Приведем неравенство к наглядному виду:

$$\begin{cases} x_2 \geq \dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{2}{3} \\ x_2 \geq -x_1 + 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим график с помощью библиотеки $matplotlib$ для $Python$ (используется код со страницы 2), коэффициенты прямых указаны новые:

```
a1, b1 = 1 / 3, -2 / 3
a2, b2 = -1, 10
a3, b3 = float("inf"), 0
a4, b4 = 0, 0
g1, g2 = 3, 1
```

Вывод:

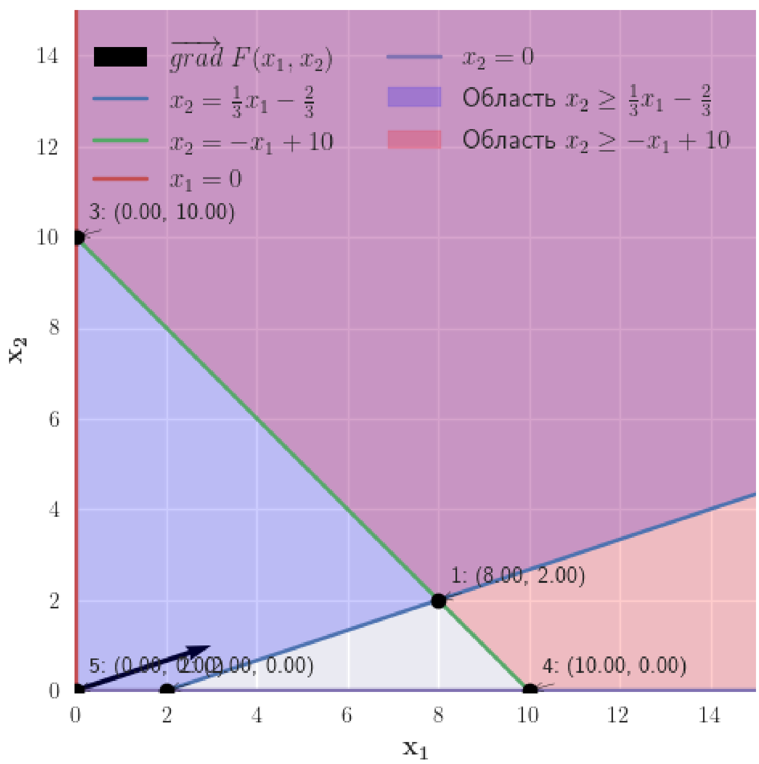

Рис. 2: График к пункту Б задания 1.

Условная область неограничена. Градиент функции направлен внутрь первой четверти. Функция F неограничена сверху. Ее максимума не существует.

Осталось найти минимум F. Подходящие точки под номерами 1 и 3. Подставим подходящие точки в функцию F и выведем ее min.

```
def F(x_1, x_2):
    return g1 * x_1 + g2 * x_2


for i, (x_1, x_2) in enumerate(intersections, start=1):
    if i == 1 or i == 3:
        print(f"Значение F вточке  {i} равно {F(x_1, x_2):.2f}")
```

Вывод:

```
Значение F в точке 1 равно 26.00
Значение F в точке 3 равно 10.00
```

Ответ: $\max F(x_1, x_2) \notin \mathbb{R}, \operatorname{argmax} F(x_1, x_2) \notin \mathbb{R}^2, \min F(x_1, x_2) = 10, \operatorname{argmin} F(x_1, x_2) = (0, 10)$

Пункт В

Приведем неравенство к более наглядному виду:

$$\begin{cases} x_2 \geq x_1 + 11 \\ x_2 \leq \dfrac{1}{4}x_1 - 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим график с помощью библиотеки $matplotlib$ для $Python$ (используется код со страницы 2), коэффициенты прямых указаны новые:

```
a1, b1 = 1, 11
a2, b2 = 1/4, -2
a3, b3 = float("inf"), 0
a4, b4 = 0, 0
g1, g2 = 3, 1
```

Вывод:

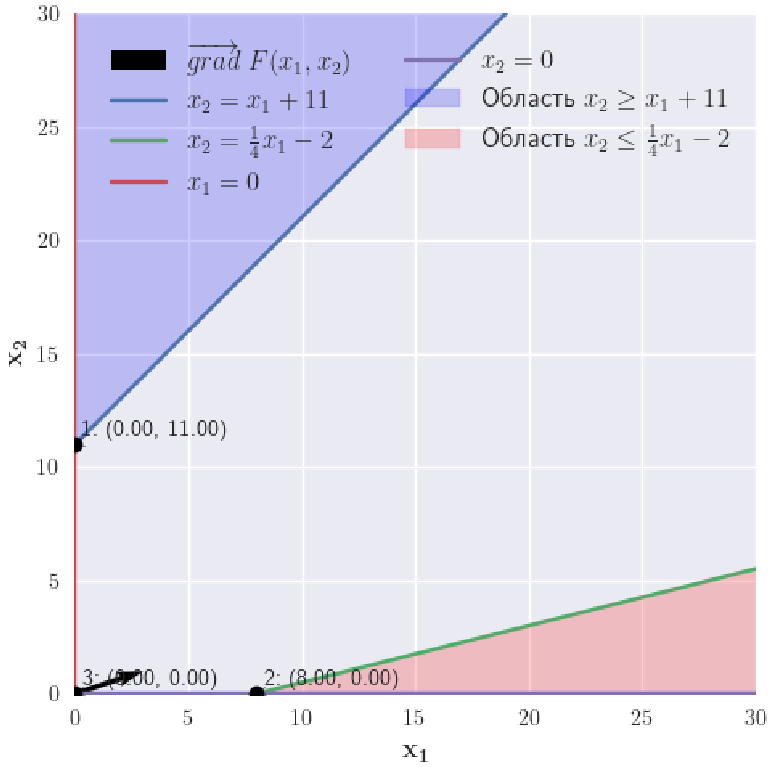

Рис. 3: График к пункту В задания 1.

Как видно, мы имеем пустую условную область: $D = \emptyset$. Значит и $F(D) = \emptyset$. Максимума и минимума не существует.

Ответ: $\nexists \max F(x_1, x_2), \nexists \operatorname{argmax} F(x_1, x_2), \nexists \min F(x_1, x_2), \nexists \operatorname{argmin} F(x_1, x_2)$