Система типов IntBool + Let

1. Выпишите в форме Бэкуса-Наура грамматику термов $t \in \text{Tm}$ и типов $T \in \{\texttt{Int}, \texttt{Bool}\}$ языка IntBool+Let, поддерживающего логические значения и целые (не натуральные!) числа, условный оператор, взятие следующего числа, предыдущего числа, сложение и объявление новых имён через `let`.

   $t ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \text{zero} \mid \text{succ}\, t \mid \text{pred}\, t \mid t_1 + t_2 \mid \text{if}\, t_1\, \text{then}\, t_2\, \text{else}\, t_3 \mid x_1 \mid \cdots \mid x_n \mid \text{let}\, t_1 = t_2\, \text{in}\, t_3$

   $V = \mathbb{I} \cup \mathbb{B} \cup \{\, \text{var}\, \} \cup \{\, \bot\, \}$

2. Определите разумную денотационную семантику $[\![t]\!]$ для языка нетипизированных термов Tm.
   Что в данном контексте значит функциональность и тотальность? Докажите их.

   (a) $[\![x_{1\ldots n}]\!] = \bot$

   (b) $[\![\text{true}]\!] = T$

   (c) $[\![\text{false}]\!] = F$

   (d) $[\![\text{zero}]\!] = 0$

   (e) $[\![\text{succ}\, t]\!] = \begin{cases} [\![t]\!] + 1 & [\![t]\!] \in \mathbb{I} \\ \bot \end{cases}$

   (f) $[\![\text{pred}\, t]\!] = \begin{cases} [\![t]\!] - 1 & [\![t]\!] \in \mathbb{I} \\ \bot \end{cases}$

   (g) $[\![t_1 + t_2]\!] = \begin{cases} [\![t_1]\!] + [\![t_2]\!] & [\![t_1]\!], [\![t_2]\!] \in \mathbb{I} \\ \bot \end{cases}$

   (h) $[\![\text{if}\, t_1\, \text{then}\, t_2\, \text{else}\, t_3]\!] = \begin{cases} [\![t_2]\!] & [\![t_1]\!] = T \\ [\![t_3]\!] & [\![t_1]\!] = F \\ \bot \end{cases}$

   (i) $[\![\text{let}\, t_1 = t_2\, \text{in}\, t_3]\!] = \begin{cases} [\![[t_2/x]\, t_3]\!] & [\![x]\!] \in \text{var} \\ \bot \end{cases}$,

   где $[q/p]\, r$ — выражение r, в котором все употребления p заменены на q

   Тотальность — $\forall t \in \text{Tm}\ \exists v([\![t]\!] = v)$

   Док-во. Будем говорить, что терм t означен, если $\exists v([\![t]\!] = v)$. Очев., каждая из констант (true, false, zero) и все переменные означены. Пусть t означен. Тогда $\text{succ}\, t$ и $\text{pred}\, t$ означены. Аналогично, если t_1 и t_2 означены, то $t_1 + t_2$ означен; если t_1, t_2 и t_3 означены, то $\text{if}\, t_1\, \text{then}\, t_2\, \text{else}\, t_3$ означен. Тогда по структурной индукции любой терм t, не содержащий оператора *let*, означен.

   $\text{let}\, t_1 = t_2\, \text{in}\, t_3$ означен титтк $[t_2/t_1]\, t_3$ означен (или $t_1 \notin \{\, var\, \}$). Пусть t_2 означен, и t_3 не содержит оператора *let*. Поскольку t_1 и t_2 являются термами, любое выражение, где t_1 заменено на t_2, также будет термом. Тогда по предыдущему абзацу $[t_2/t_1]\, t_3$ означен. Тогда по структурной индукции любой терм $\text{let}\, t_1 = t_2\, \text{in}\, t_3$ означен. ■

   Функциональность — $\forall t \in \text{Tm}\ \forall v_1, v_2([\![t]\!] = v_1 \wedge [\![t]\!] = v_2 \longrightarrow v_1 = v_2)$

   Доказывается аналогично.

3. Определите small-step операционную семантику вычислений с кучей $H; t \longrightarrow H'; t'$ для языка IntBool + Let.
   Докажите сильную нормализацию.

   (a) $\dfrac{H; t \longrightarrow H'; t'}{H; \text{succ}\, t \longrightarrow H'; \text{succ}\, t'}$

   (b) $\dfrac{H; t \longrightarrow H'; t'}{H; \text{pred}\, t \longrightarrow H'; \text{pred}\, t'}$

   (c) $\dfrac{H; t_1 \longrightarrow H'; t_1'}{H; \text{if}\, t_1\, \text{then}\, t_2\, \text{else}\, t_3 \longrightarrow H'; \text{if}\, t_1'\, \text{then}\, t_2\, \text{else}\, t_3}$

   (d) $\dfrac{H; t_2 \longrightarrow H'; t_2'}{H; \text{let}\, t_1 = t_2\, \text{in}\, t_3 \longrightarrow H; \text{let}\, t_1 = t_2'\, \text{in}\, t_3}$

(e) $\dfrac{t \in \text{pos} \cup \text{neg}}{H; \text{succ}(\text{pred}\, t) \longrightarrow H; t}$

(f) $\dfrac{t \in \text{pos} \cup \text{neg}}{H; \text{pred}(\text{succ}\, t) \longrightarrow H; t}$

(g) $H; \text{zero} + t \longrightarrow H; t$

(h) $H; \text{succ}\, t_1 + t_2 \longrightarrow H; \text{succ}(t_1 + t_2)$

(i) $H; \text{pred}\, t_1 + t_2 \longrightarrow H; \text{pred}(t_1 + t_2)$

(j) $H; \text{if true then}\, t_1 \,\text{else}\, t_2 \longrightarrow H; t_1$

(k) $H; \text{if false then}\, t_1 \,\text{else}\, t_2 \longrightarrow H; t_2$

(l) $H; \text{let}\, x = t_1 \,\text{in}\, t_2 \longrightarrow H \cup \{ x = t_1 \}, t_2$

(m) $\dfrac{(x = t) \in H}{H; x \longrightarrow H; t}$

Доказать сильную нормализацию хз как.

4. Выпишите БНФ для множества значений $v \in V \subseteq \text{Tm}$, погружённого в множество термов.
Докажите, что все они находятся в нормальной форме относительно $(\longrightarrow)$.

- $v ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \text{zero} \mid \text{pos} \mid \text{neg}$
- $\text{pos} ::= \text{succ zero} \mid \text{succ pos}$
- $\text{neg} ::= \text{pred zero} \mid \text{pred neg}$

Каждая из констант (true, false, zero) находится в НФ, т. к. не существует правила, выводящего что-либо из них.

Докажем по индукции, что pos находится в НФ. succ zero находится в НФ, т. к. zero находится в НФ, и не существует правила, выводящего что-либо из $\text{succ}\, t$ или succ zero. Пусть pos находится в НФ. Тогда succ pos находится в НФ, т. к. имеет форму $\text{succ}(\text{succ}\, t_1)$, но не существует правила, выводящего что-либо из $\text{succ}\, t$ без посылки о выводимости чего-либо из t или включающего подстроку succ(succ.

Док-во для neg аналогично.

5. Докажите эквивалентность семантик $[\![t]\!]$ и $\varnothing; t \longrightarrow^* H; n$ (где n — терм в нормальной форме). Иными словами, докажите следующее:

- Для любых терма t и значения v, $[\![t]\!] = [\![v]\!]$ тогда и только тогда, когда $\varnothing; t \longrightarrow^* H; v$ для некоторой кучи H;
- Для любого терма t, $[\![t]\!] = \bot$ тогда и только тогда, когда ни для каких кучи H и значения v не верно, что $\varnothing; t \longrightarrow^* H; v$.

(a) По индукции. Если $t = v$, то тривиально. Пусть $H; t \longrightarrow^* H'; v$ и $[\![t]\!] = [\![v]\!]$. Тогда
   - $H; \text{succ}\, t \longrightarrow^* H'; \text{succ}\, v$ и $[\![\text{succ}\, t]\!] = [\![t]\!] + 1 = [\![v]\!] + 1 = [\![\text{succ}\, v]\!]$ (аналогично для $\text{pred}\, t$);
   - $H; \text{succ}(\text{pred}\, t) \longrightarrow H; t \longrightarrow^* H'; v$ и $[\![\text{succ}(\text{pred}\, t)]\!] = ([\![t]\!] - 1) + 1 = [\![t]\!] = [\![v]\!]$ (аналогично для $\text{pred}(\text{succ}\, t)$);
   - $H; \text{zero} + t \longrightarrow H; t \longrightarrow^* H'; v$ и $[\![\text{zero} + t]\!] = 0 + [\![t]\!] = [\![t]\!] = [\![v]\!]$;

   Пусть $H; \text{succ}\, t_1 + t_2 \longrightarrow^* v$ и $[\![t_1 + t_2]\!] = [\![v]\!]$. Тогда $H; \text{succ}\, t_1 + t_2 \longrightarrow H; \text{succ}(t_1 + t_2) \longrightarrow^* H'; \text{succ}(v)$ и $[\![\text{succ}\, t_1 + t_2]\!] = [\![t_1]\!] + 1 + [\![t_2]\!] = [\![v]\!] + 1 = [\![\text{succ}\, v]\!]$ (аналогично для $\text{pred}\, t_1 + t_2$).

   Пусть $H; t_1 \longrightarrow^* H'; \text{true}$, $[\![t_1]\!] = T$ и $H; t_2 \longrightarrow^* H'; v_2$. Тогда $H; \text{if}\, t_1 \,\text{then}\, t_2 \,\text{else}\, t_3 \longrightarrow H; t_2 \longrightarrow^* H'; t_2$ и $[\![\text{if}\, t_1 \,\text{then}\, t_2 \,\text{else}\, t_3]\!] = t_2$ (аналогично для $H; t_1 \longrightarrow^* H'; \text{false}$).

   Пусть $H; t_1 \longrightarrow^* H'; v_1$, $[\![t_1]\!] = [\![v_1]\!]$ и $[\![x]\!] \in \{ var \}$. Тогда $H; \text{let}\, x = t_1 \,\text{in}\, t_2 \longrightarrow^* H'; \text{let}\, x = v_1 \,\text{in}\, t_2 \longrightarrow H \cup \{ x = v_1 \}; t_2$ и $[\![\text{let}\, x = t_1 \,\text{in}\, t_2]\!] = [\![[t_1/x]\, t_2]\!]$. Докажем эквивалентность для $H \cup \{ x = v_1 \}; t_2$ и $[\![[t_1/x]\, t_2]\!]$. Пусть $(x = t) \in H$. Тогда $H; x \longrightarrow H; t$ и $[\![[t/x]\, x]\!] = t$. Далее по индукции.

(b) Обозначим как $H; t \not\longrightarrow$, если $\neg \exists H', v \in V (H; t \longrightarrow^* H' v)$.

   Если $[\![t]\!] \in \text{var}$, то $t \notin v$ и t в НФ, т.е. $\varnothing; t \not\longrightarrow$.

   Пусть $[\![\text{succ}\, t]\!] = \bot$, т. е. $[\![t]\!] \notin \mathbb{I}$. Тогда $t \notin \text{pos} \cup \text{neg}$, и $\neg \exists t' \in \text{pos} \cup \text{neg}\ (t = \text{pred}\, t')$. Тогда $\varnothing; \text{succ}\, t \not\longrightarrow$. Для остальных операторов аналогично.

6. Введите правила типизации $\Gamma \vdash t : T$ языка IntBool + Let.
Докажите preservation и progress теоремы относительно $H; t \longrightarrow H'; t'$.

$T = \mathbb{I} \mid \mathbb{B}$

- $\dfrac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$
- $[\![\text{true}]\!] : \mathbb{B}$
- $[\![\text{false}]\!] = \mathbb{B}$
- $[\![\text{zero}]\!] = \mathbb{I}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash t : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \text{succ}\, t : \mathbb{I}}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash t : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash \text{pred}\, t : \mathbb{I}}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash t_1, t_2 : \mathbb{I}}{\Gamma \vdash t_1 + t_2 : \mathbb{I}}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash t_1 : \mathbb{B} \wedge t_2, t_3 : \mathbb{T}}{\Gamma \vdash \text{if}\, t_1 \,\text{then}\, t_2 \,\text{else}\, t_3 : \mathbb{T}}$
- $\dfrac{\Gamma \vdash t_1 : T \qquad \Gamma \wedge x : T \vdash t_2 : U}{\Gamma \vdash \text{let}\, x = t_1 \,\text{in}\, t_2 : U}$

7. Докажите здравость (корректность) введённой типизации относительно $[\![\_]\!]$.

8. Всегда ли верно, что если $[\![t]\!] \in \mathbb{Z}$ или $[\![t]\!] \in \mathbb{B}$, то $\cdot \vdash t : T$ для некоторого T? (Полна ли система типов?)

   Нет. Например, $[\![\text{if true then 0 else false}]\!] \in \mathbb{Z}$; но так как $\neg\exists T(0, \text{false} \in T)$, посылка для типизации условного оператора не выполняется, и $\neg\exists T : \cdot \vdash \text{if true then 0 else false} : T$.