Алгебраические типы данных и соответствие Карри-Говарда

Расширим STLC типами пар, типом-синглтоном, типами размеченных объединений и пустым типом. Другими словами, рассмотрим систему STLC+ADT, заданную следующим образом:

Syntax

$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid t\ t \mid (t,\ t) \mid \pi_1\ t \mid \pi_2\ t \mid () \mid \mathtt{inl}\ t \mid \mathtt{inr}\ t \mid \mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto t;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto t\ \} \mid \mathtt{absurd}\ t$$
$$T ::= X \mid T \to T \mid T \times T \mid \top \mid T + T \mid \bot$$

$\Gamma \vdash t : T$

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}(\textsc{Var}) \qquad \frac{\Gamma,\ x : T \vdash u : U}{\Gamma \vdash \lambda x.u : T \to U}(\textsc{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash f : T \to U \qquad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash f\ t : U}(\textsc{App}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash (t_1,\ t_2) : T_1 \times T_2}(\textsc{Pair})$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : T_1 \times T_2}{\Gamma \vdash \pi_i\ p : T_i}(\textsc{Proj}_i) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash () : \top}(\textsc{Unit}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T_1}{\Gamma \vdash \mathtt{inl}\ t : T_1 + T_2}(\textsc{InL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T_2}{\Gamma \vdash \mathtt{inr}\ t : T_1 + T_2}(\textsc{InR})$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : T_1 + T_2 \qquad \Gamma,\ x : T_1 \vdash u_1 : U \qquad \Gamma,\ x : T_2 \vdash u_2 : U}{\Gamma \vdash \mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto u_1;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto u_2\ \} : U}(\textsc{Cases}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \bot}{\Gamma \vdash \mathtt{absurd}\ t : T}(\textsc{Absurd})$$

$t \to t'$

$$\frac{t \to t'}{\lambda x.t \to \lambda x.t'}(\textsc{Lam}^{\to}) \qquad \frac{f \to f'}{f\ t \to f'\ t}(\textsc{AppL}) \qquad \frac{t \to t'}{f\ t \to f\ t'}(\textsc{AppR}) \qquad \frac{}{(\lambda x.f)t \to [t/x]f}(\beta) \qquad \frac{t_1 \to t_1'}{(t_1,\ t_2) \to (t_1',\ t_2)}(\textsc{PairL})$$

$$\frac{t_2 \to t_2'}{(t_1,\ t_2) \to (t_1,\ t_2')}(\textsc{PairR}) \qquad \frac{p \to p'}{\pi_i\ p \to \pi_i\ p'}(\textsc{Proj}_i^{\to}) \qquad \frac{}{\pi_i(t_1,\ t_2) \to t_i}(\textsc{Proj}_i\text{-}\beta) \qquad \frac{t \to t'}{\mathtt{inl}\ t \to \mathtt{inl}\ t'}(\textsc{InL}^{\to})$$

$$\frac{t \to t'}{\mathtt{inr}\ t \to \mathtt{inr}\ t'}(\textsc{InR}^{\to}) \qquad \frac{t \to t'}{\mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto u_1;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto u_2\ \} \to \mathtt{case}\ t'\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto u_1;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto u_2\ \}}(\textsc{Cases}^{\to})$$

$$\frac{}{\mathtt{case}\ (\mathtt{inl}\ t)\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto u_1;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto u_2\ \} \to [t/x]u_1}(\textsc{CaseL})$$

$$\frac{}{\mathtt{case}\ (\mathtt{inr}\ t)\ \mathtt{of}\ \{\ \mathtt{inl}\ x \mapsto u_1;\ \mathtt{inr}\ x \mapsto u_2\ \} \to [t/x]u_2}(\textsc{CaseR}) \qquad \frac{t \to t'}{\mathtt{absurd}\ t \to \mathtt{absurd}\ t'}(\textsc{Absurd}^{\to})$$

(Примечание: напомним, что обозначение $\bot$ здесь — не значение "бессмысленных" или "зацикливающихся" термов, а отдельный "пустой" тип.)

Задачи

1. Постройте теоретико-множественную семантику данного исчисления. Другими словами,

   (a) По заданной оценке базовых типов (набору множеств $[A]$, $[B]$, $[C]$, ...) постройте оценку каждого типа T (соответствующее ему множество $[T]$).

   (b) Пусть $\Gamma \vdash t : T$. Постройте оценку терма t, т.е. функцию $[\![\Gamma \vdash t : T]\!] : [\Gamma] \to [T]$. (Оценка контекста строится следующим образом: $[\cdot] = \{\cdot\}$, $[\Gamma,\ x : T] = [\Gamma] \times [T]$.)

2. Постройте логическую семантику данного исчисления. Другими словами,

   (a) Постройте функцию $\varphi : \mathrm{Type}(\mathrm{Var}) \longrightarrow \mathrm{Fm}(\mathrm{Var})$, отображающую типы STLC+ADT в формулы логики высказываний[1] над одним и тем же алфавитом базовых типов (атомарных высказываний) Var.

   > i. $\varphi(X) = \mathrm{Var}$
   > ii. $\varphi(T_1 \longrightarrow T_2) = \varphi(T_1) \longrightarrow \varphi(T_2)$
   > iii. $\varphi(T_1 \times T_2) = \varphi(T_1) \wedge \varphi(T_2)$
   > iv. $\varphi(T_1 + T_2) = \varphi(T_1) \vee \varphi(T_2)$
   > v. $\varphi(\top) = \top$
   > vi. $\varphi(\bot) = \bot$

   (b) Пусть $\cdot \vdash t : T$. Докажите, что $\varphi(T)$ является тавтологией.

   > Единственное правило типизации, совместимое с нулевым контекстом — $\cdot \vdash () : \top$. Далее по индукции:
   >
   > - Пусть $x : T \vdash u : U$ и $\varphi(T) = \top \vdash \varphi(U) = \top$. Тогда если $\cdot \vdash \lambda x.u : T \longrightarrow U$, то $\varphi(T \longrightarrow U) = \top \longrightarrow \top = \top$.
   > - Пусть $\cdot \vdash f : T \longrightarrow U$, $\cdot \vdash t : T$ и $\varphi(T \longrightarrow U) = \varphi(T) = \top$. Тогда если $\cdot \vdash f\ t : U$, то $\top \longrightarrow \varphi(U) = \top$ и $\varphi(U) = \top$ по *modus ponens*.
   > - Пусть $\cdot \vdash t_1 : T_1$, $\cdot \vdash t_2 : T_2$ и $\varphi(T_1) = \varphi(T_2) = \top$. Тогда если $\cdot \vdash (t_1,\ t_2) : T_1 \times T_2$, то $\varphi(T_1 \times T_2) = \top \wedge \top = \top$.
   > - Пусть $\cdot \vdash p : T_1 \times T_2$ и $\varphi(T_1 \times T_2) = \top$. Тогда если $\cdot \vdash \pi_1 p : T_1$, то $\varphi(T_1) \wedge \varphi(T_2) = \top$ и $\varphi(T_1) = \top$ (по AND-1 в нотации Гилберта). Аналогично для T_2.
   > - Пусть $\cdot \vdash t_1 : T_1$ и $\varphi(T_1) = \top$. Тогда если $\cdot \vdash \mathtt{inl}\, t : T_1 + T_2$, то $\varphi(T_1 + T_2) = \top \vee \varphi(T_2) = \top$. Аналогично для $\mathtt{inr}$.
   > - Пусть
   >   i. $\cdot \vdash t : T_1 + T_2$
   >   ii. $x : T_1 \vdash u_1 : U$
   >   iii. $x : T_2 \vdash u_2 : U$
   >   iv. $\varphi(T_1 + T_2) = T_1 \vee T_2 = \top$
   >   v. $\varphi(T_1) = \top \vdash \varphi(U) = \top$
   >   vi. $\varphi(T_2) = \top \vdash \varphi(U) = \top$
   >
   >   Тогда если $\cdot \vdash \mathtt{case}\, t\, \mathtt{of}\, \{\, \mathtt{inl}\, x \mapsto u_1; \mathtt{inr}\, x \mapsto u_2 \,\} : U$, то либо $T_1 = \top$, и тогда $\varphi(U) = \top$ по (v), либо $T_2 = \top$, и тогда $\varphi(U) = \top$ по (vi). В противном случае (iv) ложно.
   >
   > Так как не существует правила, типизирующего t как $\bot$, правило Absurd нерелевантно.

3. Пользуясь построенной Вами логической семантикой, докажите, что следующие высказывания являются тавтологиями:

   a) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \longrightarrow C)$;

   b) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow \neg A$;

   c) $(A \longrightarrow C) \longrightarrow (B \longrightarrow C) \longrightarrow ((A \vee B) \longrightarrow C)$;

   d) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

   Утверждения вида $\Gamma \vdash t : T$ следует доказывать, построив дерево вывода.

   (Подсказка 1: в LaTeX можно использовать пакет `bussproofs`.)

   (Подсказка 2: $(A \leftrightarrow B) := (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$; $\neg A \equiv A \longrightarrow \bot$; $\bot$ — тождественно ложное утверждение.)

   (Подсказка 3: Для самопроверки и помощи компьютера можно использовать любой известный Вам язык программирования, в котором есть аналоги $A \longrightarrow B$, $A \times B$, $A + B$, $\top$ и $\bot$.)

   > Докажем, что существует типизируемый терм, соответствующий каждому из высказываний. В (a) и (d) докажем существование типизируемого терма для каждого из направлений эквивалентности. Правило Var писать не будем, имея в виду, что оно присутствует над каждым утверждением о типе переменной.[a]

[1] https://ru.wikipedia.org/wiki/[illegible]_[illegible]

(a) $\rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : A \to (B\to C) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash p : A\times B}{\Gamma \vdash \pi_1\, p : A}\textsc{Proj}_1}{\Gamma \vdash x\,(\pi_1\,p) : B \to C}\textsc{App} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash p : A\times B}{\Gamma \vdash \pi_2\,p : B}\textsc{Proj}_2}{x : A\to(B\to C),\ p:(A\times B)\vdash x\,(\pi_1\,p)\,(\pi_2\,p) : C}\textsc{App}}{x : A\to(B\to C)\vdash \lambda p.\,x\,(\pi_1\,p)\,(\pi_2\,p) : (A\times B)\to C}\textsc{Abs}}{\vdash \lambda xp.\,x\,(\pi_1\,p)\,(\pi_2\,p) : (A\to(B\to C))\to((A\times B)\to C)}\textsc{Abs}$$

$\leftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash x : (A\times B)\to C \qquad \dfrac{\Gamma\vdash y : A \qquad \Gamma\vdash z : B}{\Gamma\vdash\langle y,\ z\rangle : A\times B}\textsc{Pair}}{x : (A\times B)\to C,\ y : A,\ z : B\vdash x\,(\langle y,\ z\rangle) : C}\textsc{App}}{x : (A\times B)\to C,\ y : A\vdash \lambda z.\,x\,(\langle y,\ z\rangle) : B\to C}\textsc{Abs}}{x : (A\times B)\to C\vdash\lambda yz.\,x\,(\langle y,\ z\rangle) : A\to(B\to C)}\textsc{Abs}}{\vdash\lambda xyz.\,x\,(\langle y,\ z\rangle) : ((A\times B)\to C)\to(A\to(B\to C))}\textsc{Abs}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash y : A\to B\to\bot \qquad \Gamma\vdash z : A}{\Gamma\vdash y\,z : B\to\bot}\textsc{App} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash x : A\to B \qquad \Gamma\vdash z : A}{\Gamma\vdash x\,z : B}\textsc{App}}{x : (A\to B),\ y : (A\to B\to\bot),\ z : A\vdash y\,z\,(x\,z) : \bot}\textsc{App}}{x : (A\to B),\ y : (A\to B\to\bot)\vdash\lambda z.\,y\,z\,(x\,z) : A\to\bot}\textsc{Abs}}{x : (A\to B)\vdash\lambda yz.\,y\,z\,(x\,z) : (A\to B\to\bot)\to A\to\bot}\textsc{Abs}}{\vdash\lambda xyz.\,y\,z\,(x\,z) : (A\to B)\to(A\to B\to\bot)\to A\to\bot}\textsc{Abs}$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash i : A+B \qquad \dfrac{\Gamma\vdash x : A\to C \qquad \Gamma\vdash a : A}{\Gamma,\ a : A\vdash x\,a : C}\textsc{App} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash y : B\to C \qquad \Gamma\vdash a : B}{\Gamma,\ a : B\vdash y\,a : C}\textsc{App}}{x : A\to C,\ y : B\to C,\ i : A+B\vdash \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto y\,a\} : C}\textsc{Cases}}{x : A\to C,\ y : B\to C\vdash\lambda i.\ \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto y\,a\} : (A+B)\to C}\textsc{Abs}}{x : A\to C\vdash\lambda yi.\ \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto y\,a\} : (B\to C)\to(A+B)\to C}\textsc{Abs}}{\vdash\lambda xyi.;\ \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto y\,a\} : (A\to C)\to(B\to C)\to(A+B)\to C}\textsc{Abs}$$

(d) $\rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash x : (A+B)\to\bot \qquad \dfrac{\Gamma\vdash a : A}{\Gamma\vdash\mathtt{inl}\,a : A+B}\textsc{InL}}{\Gamma,\ a : A\vdash x\,(\mathtt{inl}\,a) : \bot}\textsc{App}}{\Gamma\vdash\lambda a.\,x\,(\mathtt{inl}\,a) : A\to\bot}\textsc{Abs} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash x : (A+B)\to\bot \qquad \dfrac{\Gamma\vdash b : B}{\Gamma\vdash\mathtt{inr}\,b : A+B}\textsc{InR}}{\Gamma,\ b : B\vdash x\,(\mathtt{inr}\,b) : \bot}\textsc{App}}{\Gamma\vdash\lambda b.\,x\,(\mathtt{inr}\,b) : B\to\bot}\textsc{Abs}}{x : (A+B)\to\bot\vdash\langle\lambda a.\,x\,(\mathtt{inl}\,a),\ \lambda b.\,x\,(\mathtt{inl}\,b)\rangle : (A\to\bot)\times(B\to\bot)}\textsc{Pair}}{\vdash\lambda x.\,\langle\lambda a.\,x\,(\mathtt{inl}\,a),\ \lambda b.\,x\,(\mathtt{inl}\,b)\rangle : ((A+B)\to\bot)\to((A\to\bot)\times(B\to\bot))}\textsc{Abs}$$

$\leftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash i : A+B \qquad (i) \qquad (ii)}{x : (A\to\bot)\times(B\to\bot),\ i : A+B\vdash\mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto\pi_1\,x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto\pi_2\,x\,a\} : \bot}\textsc{Cases}}{x : (A\to\bot)\times(B\to\bot)\vdash\lambda i.\ \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto\pi_1\,x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto\pi_2\,x\,a\} : (A+B)\to\bot}\textsc{Abs}}{\vdash\lambda xp.\ \mathtt{case}\,i\,\mathtt{of}\{\mathtt{inl}\,a\mapsto\pi_1\,x\,a;\mathtt{inr}\,a\mapsto\pi_2\,x\,a\} : ((A\to\bot)\times(B\to\bot))\to((A+B)\to\bot)}\textsc{Abs}$$

i. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash x : (A\to\bot)\times(B\to\bot)}{\Gamma\vdash\pi_1\,x : A\to\bot}\textsc{Proj}_1 \qquad \Gamma\vdash a : A}{\Gamma,\ a : A\vdash\pi_1\,x\,a : \bot}\textsc{App}$$

ii. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash x : (A\to\bot)\times(B\to\bot)}{\Gamma\vdash\pi_2\,x : B\to\bot}\textsc{Proj}_2 \qquad \Gamma\vdash a : B}{\Gamma,\ a : B\vdash\pi_2\,x\,a : \bot}\textsc{App}$$

[a]Будем использовать $\langle t_1,\ t_2\rangle$ вместо $(t_1,\ t_2)$ для отличения от скобок порядка действий.

4. Докажите, что типизация сохраняется при редукциях, т.е. что

$$\begin{cases}\Gamma \vdash t : T \\ t \longrightarrow t'\end{cases} \implies \Gamma \vdash t' : T$$

Для каждого из правил редукции покажем, что если типизация сохраняется в посылке, она сохраняется и в выводе.

- $\text{Lam}^{\rightarrow}$: Пусть $\Gamma \vdash t : T$ и $\Gamma \vdash t' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \lambda x.\, t : S \longrightarrow T$, то $\Gamma \vdash x : S$ и $\Gamma \vdash \lambda x.\, t' : S \longrightarrow T$.
- AppL: Пусть $\Gamma \vdash f : T$ и $\Gamma \vdash f' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash f\ t : U$, то $\Gamma \vdash t : V$ и $T = V \longrightarrow U$. Тогда $\Gamma \vdash f'\ t : U$.
- AppR: Пусть $\Gamma \vdash t : T$ и $\Gamma \vdash t' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash f\ t : U$, то $\Gamma \vdash f : T \longrightarrow U$. Тогда $\Gamma \vdash f\ t' : U$.
- β: Если $\Gamma \vdash (\lambda x.\ f)\ t : T$, то $\Gamma \vdash \lambda x.\ f : U \longrightarrow T$ и $\Gamma \vdash t : U$. Тогда $\Gamma,\ x : U \vdash f : T$. Тогда $\Gamma,\ t : U \vdash [t/x]f$ и $\Gamma \vdash [t/x]f : T$, т. к. $\Gamma \vdash t : U$.
- PairL: Пусть $\Gamma \vdash t_1 : T$ и $\Gamma \vdash t_1' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \langle t_1,\ t_2\rangle : U$, то $\Gamma \vdash t_2 : S$ и $U = T \times S$. Тогда $\Gamma \vdash \langle t_1',\ t_2\rangle : T \times S = U$. PairR аналогично.
- $\text{Proj}_1^{\rightarrow}$: Пусть $\Gamma \vdash p : T$ и $\Gamma \vdash p' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \pi_1\ p : U$, то $T = U \times V$. Тогда $\Gamma \vdash \pi_1\ p' : U$. $\text{Proj}_2^{\rightarrow}$ аналогично.
- Proj_1-β: Если $\Gamma \vdash \pi_1\ \langle t_1,\ t_2\rangle : T$, то $\Gamma \vdash \langle t_1,\ t_2\rangle = T \times S$. Тогда $\Gamma \vdash t_1 : T$. Proj_2-β аналогично.
- $\text{InL}^{\rightarrow}$: Пусть $\Gamma \vdash t : T$ и $\Gamma \vdash t' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \mathtt{inl}\,t : U$, то $U = T + S$ для любого S. Тогда $\Gamma \vdash \mathtt{inl}\,t' : T + S$ для любого S. $\text{InR}^{\rightarrow}$ аналогично.
- $\text{Cases}^{\rightarrow}$: Пусть $\Gamma \vdash t : T$ и $\Gamma \vdash t' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \mathtt{case}\,t\,\mathtt{of}\,\{\,\mathtt{inl}\,x \mapsto u_1;\mathtt{inr}\,x \mapsto u_2\,\} : U$, то $T = T_1 + T_2$ и $\Gamma,\ x : T_1 \vdash u_1 : U$ и $\Gamma,\ x : T_2 \vdash u_2 : U$. Тогда $\Gamma \vdash \mathtt{case}\,t'\,\mathtt{of}\,\{\,\mathtt{inl}\,x \mapsto u_1;\mathtt{inr}\,x \mapsto u_2\,\} : U$
- CaseL: Если $\Gamma \vdash \mathtt{case}(\mathtt{inl}\,t)\,\mathtt{of}\,\{\,\mathtt{inl}\,x \mapsto u_1;\mathtt{inr}\,x \mapsto u_2\,\} : U$, то $\Gamma \vdash\ : \mathtt{inl}(t) : T_1 + T_2$ и $\Gamma,\ x : T_1 \vdash u_1 : U$. Тогда $\Gamma \vdash t : T_1$ и $\Gamma,\ t : T_1 \vdash [t/x]u_1 : U$. Тогда $\Gamma \vdash [t/x]u_1 : U$, т. к. $\Gamma \vdash t : T_1$. CaseR аналогично.
- $\text{Absurd}^{\rightarrow}$: Пусть $\Gamma \vdash t : T$ и $\Gamma \vdash t' : T$. Тогда если $\Gamma \vdash \mathtt{absurd}\,t : T$, то $T = \bot$. Тогда $\Gamma \vdash \mathtt{absurd}\,t' : T$

5. Докажите слабую нормализуемость STLC+ADT, т.е. что

$$\Gamma \vdash t : T \implies \exists t^* : \begin{cases}\forall t' : t^* \not\longrightarrow t' \\ t \longrightarrow^* t^*\end{cases}$$

6. Можно ли доказать, что следующие высказывания являются тавтологиями, пользуясь построенной логической семантикой? Почему нет? (Если нельзя, докажите, что нельзя.)

a) $\bot$; b) $A \vee \neg A$; c) $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow P) \longrightarrow P$; d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

(Подсказка: докажите от противного, рассмотрев нормальную форму предполагаемых «доказательств».)

(a) Предположим, что $\exists t\ (\vdash t : \bot)$. Тогда он типизирован по одному из следующих правил:

- Absurd: $t = \mathtt{absurd}\,t'$ и $\vdash t' : \bot$. Тогда необходимо найти терм t' аналогично t.
- App: $t = f\ t'$ и $\vdash f : T \longrightarrow \bot$. Тогда f (или f' т. ч. $f' \longrightarrow^* f$) типизирован с помощью Abs, т. е. $f = \lambda x.\ u$ и $x : T \vdash u : \bot$. Тогда необходимо аналогично найти терм u.
- Proj_i и Cases аналогично.

Таким образом для типизации терма $t : \bot$ всегда необходим другой терм типа $\bot$.

(b) Предположим, что $\exists t\ (\vdash t : A + (A \longrightarrow \bot))$. Тогда верно одно из двух:

- $t = \mathtt{inl}\,t'$ и $\vdash t' : A$. Тогда $t' : A \in \varnothing$ — из-за отсутствия применений Abs или Cases контекст пуст.
- $t = \mathtt{inr}\,t'$ и $\vdash t' : A \longrightarrow \bot$. Тогда $t' = \lambda x.\ u$ и $x : T \vdash u : \bot$, что невозможно, как было показано в (a).

(c) Предположим, что $\exists t\ (\vdash t : ((P \longrightarrow Q) \longrightarrow P) \longrightarrow P)$. Тогда $t = \lambda x.\ u$ и $x : (P \longrightarrow Q) \longrightarrow P \vdash u : P$. Тогда $u = x\ v$ (т. к. x — единственная переменная в контексте) и $x : (P \longrightarrow Q) \longrightarrow P \vdash v : P \longrightarrow Q$. Тогда $v = \lambda y.\ w$

и $x : (P \to Q) \to P,\ y : P \vdash z : Q$. Однако получить выражение типа z невозможно, используя только x и y (функциональное применение x результирует в тип P, но не Q; типизация $z : Q$ без контекста аналогична типизации $t : \bot$).

(d) Предположим, что $\exists t\ (\vdash t : ((A \times B) \to \bot) \to ((A \to \bot) + (B \to \bot)))$. Тогда путь типизации:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : (A \times B) \to \bot,\ a : A \vdash\ ??? : \bot}{x : (A \times B) \to \bot \vdash\ \lambda a.\,??? : A \to \bot}\ \textsc{Abs}}{x : (A \times B) \to \bot \vdash \texttt{inl}\,(\lambda a.\,???) : (A \to \bot) + (B \to \bot)}\ \textsc{InL}}{\vdash \lambda x.\ \texttt{inl}\,(\lambda a.\,???) : ((A \times B) \to \bot) \to ((A \to \bot) + (B \to \bot))}\ \textsc{Abs}$$

Однако в контексте нет такого терма u, чтобы $u : B$, необходимого, чтобы типизировать $v : A \times B$. Поэтому невозможно насытить аргумент x для получения $\bot$ и, следовательно, типизировать ???.

7. Теорема Гливенко[2] гласит, что если в классическом исчислении высказываний выводима формула F, то в интуиционистском исчислении выводимо $\neg\neg F$. Оказывается, для STLC+ADT это тоже верно!

   Пользуясь нашей логической семантикой, докажите тавтологичность следующих высказываний:

   a) $\neg\neg(A \vee \neg A)$; b) $\neg\neg(((P \to Q) \to P) \to P)$; c) $\neg\neg(\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B))$.

   (Примечание: заметим, что доказательство утверждений с двойным отрицанием похоже на программирование в стиле передачи продолжений[3], которое часто используется в оптимизирующих компиляторах.)

(a)
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : (A + (A \to \bot)) \to \bot \qquad \dfrac{\dots}{\Gamma \vdash ??? : A + (A \to \bot)}}{x : (A + (A \to \bot)) \to \bot \vdash x\,??? : \bot}\ \textsc{App}}{\vdash \lambda x.\,x\,??? : ((A + (A \to \bot)) \to \bot) \to \bot}\ \textsc{Abs}$$

(b)
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : (((P \to Q) \to P) \to P) \to \bot \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash y : (P \to Q) \to P \qquad \dfrac{\Gamma,\ z : P \vdash ??? : Q}{\lambda z.\,??? : P \to Q}\ \textsc{Abs}}{\Gamma,\ y : (P \to Q) \to P \vdash y\,(\lambda z.\,???) : P}\ \textsc{App}}{\Gamma \vdash \lambda y.\,y\,(\lambda z.\,???) : ((P \to Q) \to P) \to P}\ \textsc{Abs}}{x : (((P \to Q) \to P) \to P) \to \bot \vdash x\,(\lambda y.\,y\,(\lambda z.\,???)) : \bot}\ \textsc{App}}{\vdash \lambda x.\,x\,(\lambda y.\,y\,(\lambda z.\,???)) : ((((P \to Q) \to P) \to P) \to \bot) \to \bot}\ \textsc{Abs}$$

нет я не понимаю

[2] https://ru.wikipedia.org/wiki/[illegible]_[illegible]
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Continuation-passing_style