**向量**

**向量及其运算**

1. 定义和基本概念

既有大小有有方向的量称为**向量**(vector)或**矢量**. 只有大小没有方向的称为**数量**或**标量**. 带有方向的线段称为**有向线段**(directed line segment). 向量可以是**任意维度**下的有向线段，这里只讨论维数的情形，高维情形在线性代数中讨论. 在不特意注明时，以下符号都可以表示**平面向量或空间向量**. 以A为起点，以B为终点的有向线段记作, 起点写在终点前面，在终点处画上箭头来表示它的方向. 有向线段的长度和线段的长度是一致的，记作. 有向线段包括起点、方向、长度三个要素，一旦这三个要素确定了，那么它的终点也就确定了.

正如使用数轴上的点来表示数一样，我们常常使用有向线段来**表示**向量，有向线段的长短表示向量的大小，箭头的指向表示向量的方向. 向量的大小（**长度**、**模**）记作. 值得注意的是，向量的要素只有方向和长度，有向线段起点的位置并不是向量的要素之一，因此两个长度相等、指向一致的有向线段表示的是同一个向量，或者称两个向量**相等**.

除使用有向线段表示外，向量还可以用带箭头的字母...表示（在印刷体为了方便一般以粗体代替）.

长度为0的向量称为**零向量**(zero vector), 记作. 长度等于一个单位的向量称为**单位向量**(unit vector).

方向相同或相反的非零向量称为**平行向量**(parallel vectors). 由于向量和起始点无关，因此所有平行向量都可以移到同一条直线上，故平行向量又称为**共线向量**(collinear vectors). 平行于同一个平面的向量称为**共面向量**(coplanar vectors). 由于可平移性的存在，空间中任意两个向量总是共面的.

2. 向量的运算

已知非零向量**,** 在二者所张成的平面内任取一点A作**,** 则向量称为与的**和**，记作, 该运算称为**向量的加法**(vector addition). 上述求向量和的方法称为向量加法的**三角形法则**(triangle law).

三角形法则等效于下面的**平行四边形法则**(parallelogram law)：以同一点为起点的两个已知向量为邻边作平行四边形, 则以为起点的对角线就是的和. 在不同的几何图形中两种法则的应用便利程度不同.

平行四边形法则中由同一顶点引出两个向量，作出的称为向量的**夹角**. 特别地时同向, 时反向. 时称两向量**垂直**或**正交**，记作.

容易验证，向量的加法满足交换律和结合律.

与向量长度相等且方向相反的向量称为的**相反向量**，记作. 由于方向反转两次仍然回到原来的方向，即

因此我们称互为相反向量. 规定零向量的相反向量仍然是零向量. 显然任一向量与其相反向量的和是零向量，即

规定减去一个向量等于加上这个向量的相反向量. 应用三角形法则可知减法的几何意义: 表示从向量的终点指向向量的终点的向量（由后指向前）.

规定实数和向量的积是一个向量，这种运算称为**向量的数乘**(multiplication of vector by scalar), 长度规定为原先向量的, 并且当时方向与的方向相同，当时方向与的方向相反. 特别地，当时有. 得到的是零向量而非实数零. 容易验证向量的数乘运算满足结合律和两类分配律.

向量的加、减、数乘运算统称为向量的**线性运算**.

注意到向量进行数乘运算后得到的新向量与原来的向量共线. 反过来，如果两个向量共线，那么必然可以找到一个实数使得. 因此有向量的**共线定理**：

在三维下推广

共线/共面定理的重要性在于，它一隅窥见了一般情况下高维线性代数**线性相关**概念. 它们是线性相关在二维/三维下的退化，一般的，对于高维向量组, 如果存在不全为零的数使得

则称向量组**线性相关**，否则称其**线性无关**. 线性相关实质上等价于用一组向量中的一部分通过线性运算表出另外的向量. 对于二维的情况，共线的两个向量是线性相关的. 对于三维的情况，共面的三个向量也是线性相关的.

3. 平面向量基本定理

如果是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量, 有且只有一对实数, 使得

这里选取的不共线的向量称为一组**基底**(base). 这里的操作类似于力的分解（其实就是），我们相当于把向量分解成了两组不共线向量的线性组合. 当两个基底时我们称为平面向量的一组**正交基**. 这时的分解方式称为**正交分解**. 特别地，建立平面直角坐标系的过程本质上就是选取了两个正交的单位向量作为基底，从而使得平面内任意一个向量表为

从而使得平面内任意一个向量与有序实数对建立一一对应关系. 这里的有序实数对就称为向量的**坐标**. 平面内的某一个点视作**由原点指向该点的向量**，则该点的坐标定义为这个向量的坐标. 显见两个特殊基底. 容易证明：对于一般情况下起点不在原点的向量，其坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标，从而将向量的起点“平移到”坐标原点.

将向量和坐标建立映射后，向量的线性运算就等于对应坐标的线性运算.

根据共线定理，若两个向量共线，系数应对应成比例

从而

即坐标交叉相乘之差为零.

本节的所有内容均可以在三维推广. 这里不再赘述.

4. 向量的积

对于两个非零向量, 定义数为两向量的**数量积**或**内积**(inner product). 规定零向量与任一向量的数量积为0. 定义中之所以把零向量单独出来是因为零向量和任意向量的夹角都是不确定的，无法确定地给出定义中的.

注意到数量积定义式中的本质上就是向量在方向上的**投影**(projection).因此向量数量积的几何意义是在方向上的投影与的长度之积.

特别地，当同向时, **, ,** 当反向时, , 当时. 容易验证，向量的数乘运算和线性运算一并具有优良性质，可以直接和通常的代数运算共用一套运算律，并可以应用其一切推论，如乘法公式等.

在坐标系中，可以证明：两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

从而

特别地，可有向量垂直的判定条件

数量积的以下性质常常用于简化计算：

如图，在中, D为BC中点，则

证明很简单，把拆成中线和底边和，用个平方差即可. 该结论称为**极化恒等式**. 该定理将从一点引出的两个矢量的数量级拆成特定线段长的差. 在右边两项有至少一项为定值时十分实用. 详细应用见文档《极化恒等式的几个应用.docx》

5. 法向量

与平面垂直的任意向量称为平面的法向量. 我们知道，直线和平面垂直的充要条件是直线和平面内的两条相交直线垂直，因此，只需从平面中找到两个相交向量，并且令未知法向量与它们分别垂直（即数量积等于零）即可解出合法的法向量的表达式。

以上是写在试卷上的标准做法，在计算中可以采取一个技巧（本质是向量的叉乘运算）来避免解方程，假设已经求出了平面内的两个相交向量和, 将坐标排列成如下矩阵：

则法向量的坐标为

特别要注意的是求时交叉的顺序是相反的。可以这样理解：抹去y这一列以后向右走，顺序是先z后x, 所以说交叉顺序表现上是相反的。

利用向量进行直线、平面的平行、垂直判定，转化为直线的方向向量和平面的法向量的平行、垂直进行；求直线、平面的夹角，转化为直线的方向向量和平面的法向量的夹角进行。这些内容十分显然，这里不再赘述。