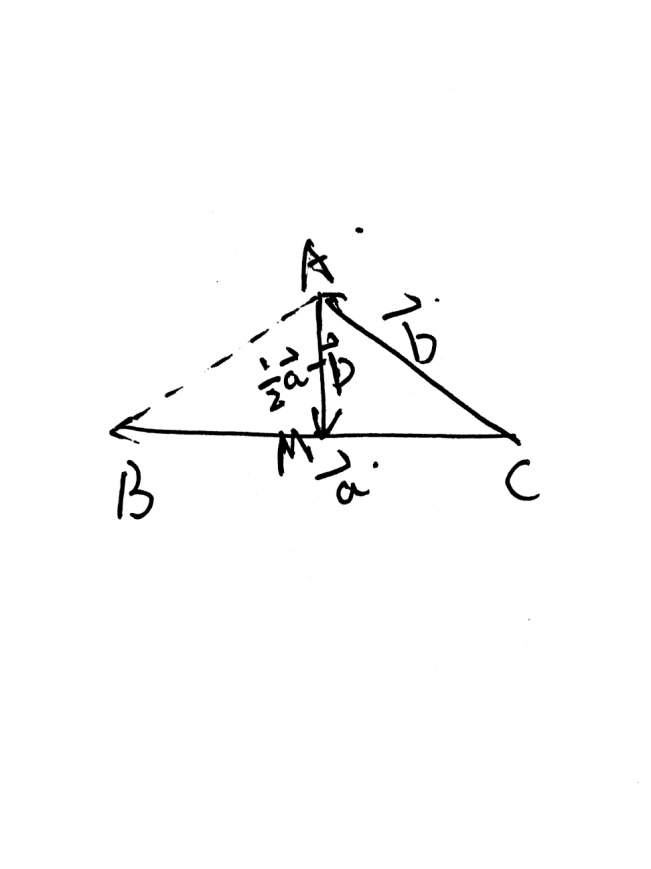
**例题1** 向量均为非零向量，, 则的夹角为

我们计算一下：

约去得到

 这也就是<<解三角形>>中说明的的变式形式，即三角形ABC是一个以a为底边的等腰三角形；则同理根据另一个式子可知三角形同样是一个以b为底边的等腰三角形，因此这是一个等边三角形，故夹角必为.

下面我们从几何上说明一下的意义：先做一个线性变换，上述垂直等效于, 而是三角形中边上的中线，这说明边上的中线和高是重合的，因此这是一个以为底的等腰三角形。

**例题2** 已知单位向量与的夹角为, 且, 向量与向量的夹角为, 则

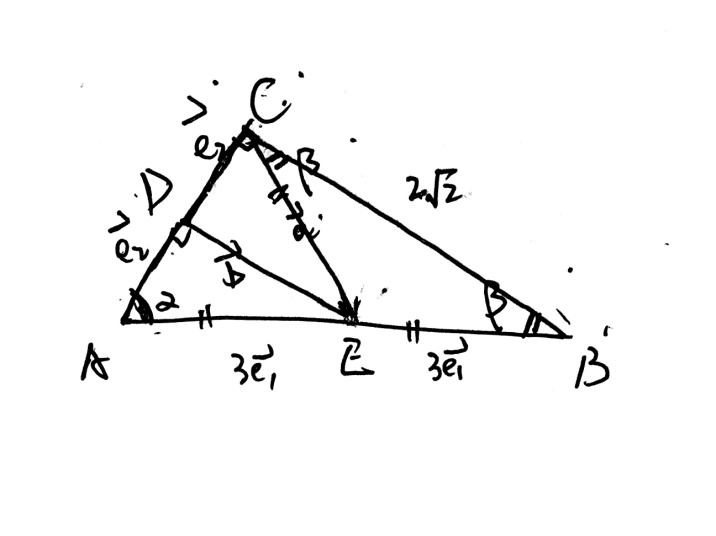
**暴力解法** 这是一个坐标轴夹角为的坐标系。鉴于都是可计算的，我们可以通过向量数量积的定义来获取:

为此我们需要计算这三个因子：

从而

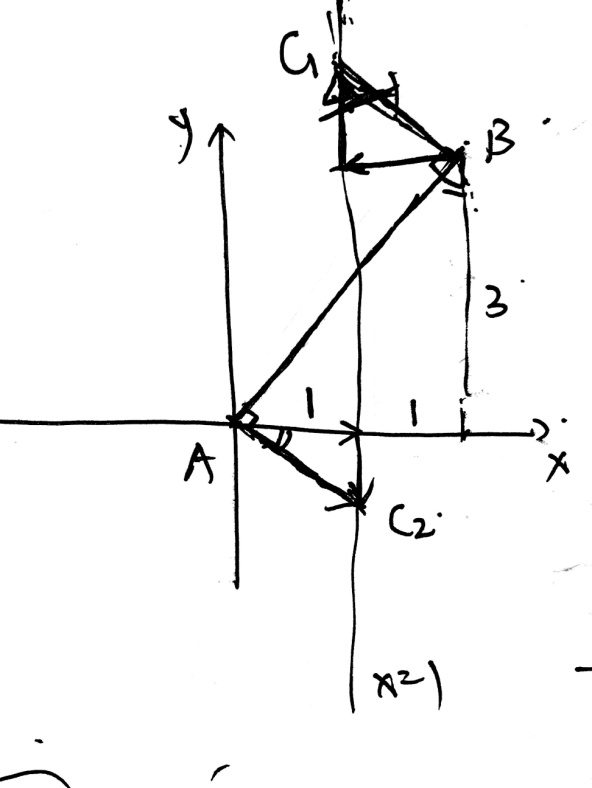
我们惊奇地发现, 这绝不是意外，下面我们将考察向量之间的几何联系。

**几何解法** 如图，作**,** 并取AC中点D, 则从而我们有

, , 为了在图中表示出夹角, 我们倍长AE到点B并联结CB, 从而角ECB即角.

我们注意到，在中，, 而恰好有, 这意味着即, 由比例线段性质知. 这样我们得到了一个大, 而E为斜边上的中线，则, 从而

**例题3** 在直角三角形ABC中，已知, 则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

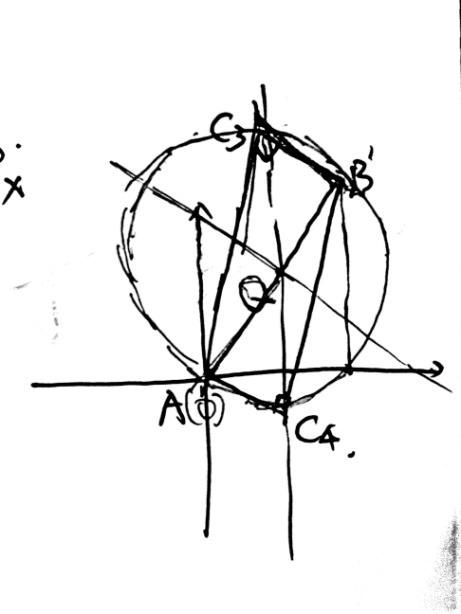
先形式化一下：我们把A放在原点，则, C点在直线x=1上运动。

这题非常有意思，解法也很丰富。但下面我们只给出最简做法。首先考虑可能形成直角的位置，若AB作为一条直角边，则A点处、B点处都可能形成直角，若以AB作为斜边，我们作出以AB为直径的圆，发现圆和直线x=1有两个交点，因此一共有四个可能的C点位置。以下讨论如何求出它们的坐标：

首先我们考虑最简单的A为直角的情况，此时根据相似三角形很容易得到

接着考虑B为直角的情况，由于A, B两点的中心对称性，我们发现上下两个小直角三角形应当是全等的，因此.

最后考虑以C为直角的情况，记Q(1,3/2)为AB中点，则此时应有

 从而

综上有

**感慨一下** 这题不仅令人想起福州地区初三压轴题的老套模式（其实就是一样的，好歹也是高中生，就用向量来出吧）。

**例题4** 若的面积为1, 则的最小值为\_\_\_\_\_\_.

**三角路线** 展开数量积

强行三角配凑，目的在于利用辅助角公式凑成完全平方：

当且仅当且, 即三角形为等边三角形是等号成立。

**Weitzenberk不等式路线** 事实上把式中的替换掉可以直接得到Weitzenberk不等式：

这应当是很容易想到的，毕竟式子中已经出现了两边的平方和（甚至还给出了面积条件）。从W不等式的角度来看，上面的三角配凑也就很好理解了：它只不过是通过极值法重新证了一次W不等式而已（参见W不等式的文档中提到的证法一）

**向量路线** 我们注意到题中给出了, 这不仅令人想到数量积关于中线的结论

来尝试利用一下：

接下来要怎么利用呢？注意到中线和高的一个简单的不等关系，可以进一步转化为：

上面连着缩小了两次，当且仅当, 也就是, 且时等号成立，可以证明这个条件和是等边三角形等价。

**函数路线** 这个路线风险比较大。考虑到项的存在，一开始就利用重要不等式换掉:

利用常量代换消去bc:

现在只需要求这个函数的最值就可以了，这是一个典型的分式型三角函数，可以用斜率法或者向量法来解决，建议用斜率法，比较直观。

由于分式中cos在y的位置，这样不太符合三角函数的几何意义，我们倒过来一下，令

作图，根据斜率范围很容易求得, 因此

从而得到最小值.

**例题5** 若非零向量和满足, 则与的夹角为\_\_\_\_.

**几何路线** 作出以为两邻边的平行四边形，则意味着平行四边形的对角线相等，因此这是一个矩形，故夹角为.

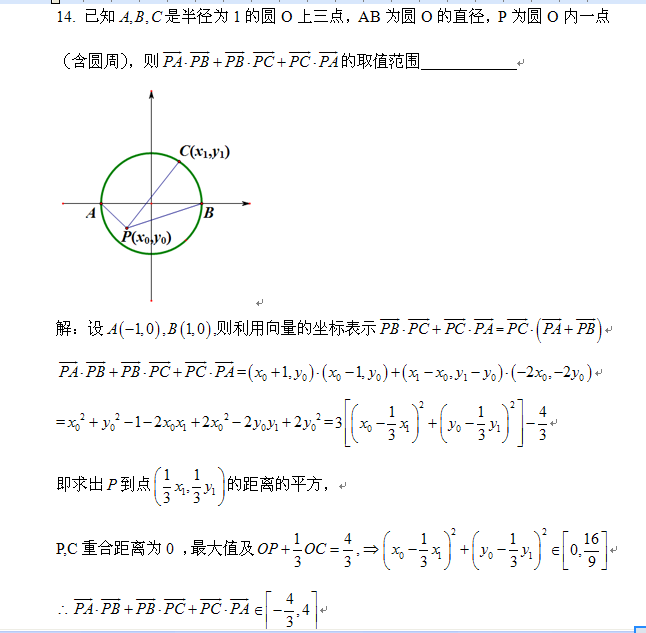
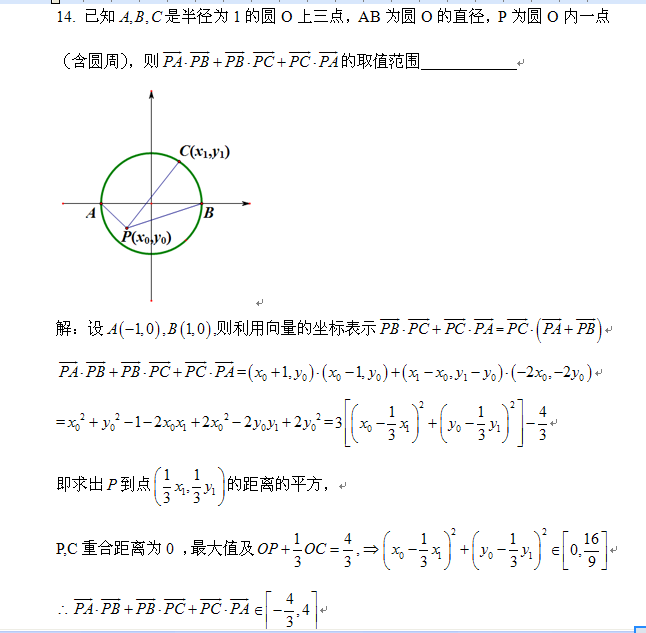
**代数路线** 平方展开

故

因此, 即夹角为.

例题6 已知

**例题1**



联想正多边形平方和定值结论的证明过程, 尝试通过圆心O进行向量代换：

记**,** 从而

注意到从而上式化为

式中表示夹角，注意到P与C的任意性，有

注意到, 故

现在只需要求出下界的最小值和上界的最大值即可。上界显然在时单增，因此最大值为4, 下界则在p=2/3取得最小值-4/3. 故所求取值范围是.