**图论**

1. 定义和基本概念

设为两个集合，由两个集合中各取一个元素构成的无序二元组，所有这样无序组的集合

称为的**无序积**，记作. 无序积与两个集合的笛卡尔积十分相似，区别在于前者不存在顺序的概念，但笛卡尔积中第一元素只能取自左操作数，第二元素只能取自右操作数.

无序积中的无序对通常简单记为. 对于无序对始终有. 因而无序积操作满足交换律.

有序二元组称为一个**图**. 其中非空有穷集称为图的**顶点集**，记作其中元素称为顶点(vertex)或结点. 集合称为图的**边集**，记作. 对于无向图，规定为无序积的有穷多重子集，其中的元素称为**无向边**或**边**. 对于有向图，规定为笛卡尔积的有穷多重子集，其中的元素称为**有向边**或**边**. 图G的顶点数和边数使用集合的一般符号，记为.

在上面的定义中我们规定顶点集为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果，因而另外规定顶点集为空集的图称为空图，记作.

对于无向图或有向图中的某一条边, 称其连接的两个顶点为的**端点**，并且称边与顶点**关联**. 在有向图中称为的**始点**，称为的**终点**，并且称是的**先驱**，是的**后继**. 若, 则称与二者的**关联次数**分别为1, 若,称与的关联次数为2, 并且称为**环**. 另外，如果和不关联，则记关联次数为0.如果两个顶点之间有一条边连接，则称这两个顶点**相邻**.

没有边关联的点称为**孤立点**.

与某一个顶点直接相连的顶点集合称为的**邻域**，邻域并上顶点自身以后称为的**闭邻域**. 对于有向图，邻域中的前驱构成的集合称为**前驱元集**, 其后继构成构成的集合称为后继元集.

在无向图中，如果关联一对顶点的无向边多于1条，则称这些边为平行边；在有向图中则还需要边的指向相同. 平行边的条数称为**重数**. 含有平行边的图称为多重图. 既不含有平行边又不含有环的图称为**简单图**.

顶点数称为图的**阶**, 个顶点的图称为**阶图**. 一条边也没有的图称为**零图**（注意零图概念针对的是边而非顶点）. 阶零图记作. 一阶零图称为**平凡图**，实质上就只有一个孤立顶点.

将有向图的各条边改成无向边后得到的无向图称为这个有向图的**基图**. 显然一个有向图中包含了其基图的“全部信息”.

若阶无向简单图中的每一个顶点都和其余的个顶点相邻，则称为**阶无向完全图**, 若阶有向简单图中的每一个顶点都是另一个顶点的后继（则显然也是前驱），则称为**阶有向完全图**. 若阶有向简单图的基图是阶无向完全图, 则称为**阶竞赛图**. 显然阶无向完全图和竞赛图的边数为, 阶有向完全图的边数为.

通常用小圆圈或实心点表示顶点，用顶点之间的连线表示无向边，用带箭头的连线表示有向边. 如果给每一个顶点和每一条边指定一个符号（一般是字母或数字，当然字母还可以带下标），则称这样的图为**标定图**，否则称为**非标定图**.

2. 顶点度

某一顶点作为边的端点的次数称为的**度数**(degree)或**度**或. 对于有向图, 作为边的始点的次数称为的**出度**，记作或, 作为边的终点的次数称为的**入度**，记作或. 显然对于有向图来说有. 注意出度和入度与后继元、前驱元的个数不相等，当连接两个元素的边有多条时出入度可以被重复计算，但前驱后继元个数则不能.

顶点上的环以作两次端点，因此一个环为其顶点贡献2度.

图中所有顶点度数的最大值/最小值称为图的**最大度**/**最小度**. 类似地可定义**最大（小）出（入）度**.

度数为1的顶点称为悬挂顶点，与它关联的边称为悬挂边. 度数为偶数（奇数）的顶点称为**偶度（奇度）顶点**.

对于图的总度数和边数的关系有以下**握手定理**(Euler,1736)：在任何图中，所有顶点的度数之和等于边数的两倍. 在有向图中，所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和并等于边数. 这是很容易证明的：因为图的每一条边（包括环）都包含两个端点，在计算度数和时每条边都提供2度，对于有向图则是1个出度和1个入度. 从而握手定理成立.

由握手定理结合奇偶分析可知：任何图所有顶点的度数之和都是偶数. 另一方面注意到偶度顶点（无论有奇数个还是偶数个）的度数之和总是偶数，因而**奇度顶点的个数一定是偶数**.

把图所有顶点的度数列成一个有穷数列，称为图的**度数列**，对于顶点标定的无向图，其度数列是唯一的（否则可以交换元素）. 对于有向图可以定义**出度列**和**入度列**.

对于给定的非负整数数列，如果存在某个无向图，其度数列和该数列一致，则称这个数列是**可图化的**. 特别地，如果所构造出的图是简单图，则称这个数列是**可简单图化的**. 对于数列的可图化性我们有以下判定法则：

某个有穷非负整数列是可图化的，当且仅当其所有元素之和为偶数.

**Prov.** 必要性根据握手定理显然（即可图化的数列，度数之和为偶数）.

至于如何从一个元素之和为偶数的数列中构造出一个合法的图. 对于偶数项来说，只需要构造(所需度数/2)个环即可，对于奇数项，由于奇数项之和为偶数，因此奇数项有偶数个，对于每一个奇数项我们先构造[(所需度数-1)/2]个环，然后再让奇数项之间两两配对连线，即可满足条件. 因此这样的构造是存在的.

对于两个图，若存在两个顶点集之间的双射使得任意两个顶点在映射后的边仍然存在，即当且仅当，则称这两个图同构，记作. 图同构关系构成全体图集合上的等价关系，具有自反性、对称性和传递性. 在这个等价关系的每个等价类中的图在同构意义下都可以看成同一个图. 至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分条件.

若某个阶无向简单图的每一个顶点度数均为, 则称为**-正则图**. 特别地, 阶零图是0-正则图，阶无向完全图是(n-1)-正则图，由握手定理知阶-正则图中边数. 当k为奇数时, n必为偶数.

3. 图的生成和修改

如果的顶点集和边集分别是另一个图顶点集和边集的子集，则称是的**子图**, 是的母图，记作. 若均为真子集则称为**真子图**. 若子图的顶点集相等则称是的**生成子图**.

对于某个图, 取其顶点集的某个子集, 以中两个端点都中的边构成边集, 称这样构造出的图为的导出的子图，记作, 类似地，取边集的子集并取其所关联的所有顶点构成顶点集, 这样构造出的图为的导出的子图，记作.