**集合论**

**集合基本概念**

1. 集合和元素

由一些具有某些共同特征的对象[[1]](#footnote-1)所构成的整体称为**集合**，简称**集**，集合中的每一个对象称为这个集合的**元素**，简称**元**。

如果对象*a*是集合*A*中的元素，则称元素*a***属于**集合*A*, 记作否则称元素*a*不属于集合*A*, 记作. 集合*A*中元素的个数通常用或来表示。

当我们讨论集合时，常常规定集合具备以下的三条性质：**确定性**、**互异性**和**无序性**。所谓确定性是指：对于某个元素, 和二者必居其一，这表明集合实际上是一个**隶属函数**，该函数定义为一切元素的集合到的映射，也就规定了集合中有哪些元素. 在模糊数学体系中隶属函数的值域被扩展到整个区间上，这时集合与元素之间有一个**隶属度**，不再具备明晰数学下的确定性. 互异性提示我们在**用列举法**写下一个集合时，不应该有两个或多个的元素是相同的，这一特征常常成为命题的关键之所在. 无序性则告诉我们用列举法写下一个集合时，其中元素的顺序是随意的，这是从集合的隶属函数本质来看是显然的。

2. 集合的分类方案

根据集合中元素的个数，可以将集合分为**空集**、**有限集**和**无限集**。空集通常记为.

根据集合中元素的类型，可以将集合分为**数集**、**点集**等等，以集合为的元素的集合通常被称为**族**或**类**.

对于一些常用的数集有特殊的符号表示：整数集, 有理数集, 实数集, 复数集, （注意到以上四个数集都是**数环**, 其中后三者是**数域**）还有一个不太常用的并且也不是数环的自然数集. 当我们需要取上述某个实数集的子集的正数部分时，只需要在集合符号右上角加上一个正号+, 例如和，这二者都表示正整数集，可以无差别地通用. 如果需要排除其中的元素0, 则只需要在右上角加一个星号\*, 例如, 同样也是表示正整数集，和上面的和是等效的, 则表示排除0的实数集.

3. 集合的表示方式

集合可以用**自然语言**、**列举法**和**描述法**这三种方法来表示。

自然语言法即用**形式化的**自然语言（本质上是用自然语言来表示的数学语言）来描述集合的，需要注意的是由于形式化的自然语言和日常语言的相似性，因此要着重注意不要用错，并且必须保证集合的**确定性**。例如“不大于8的素数所构成的集合”就是一个很优秀的形式化描述，它等价于列举法的和描述法的, 式中表示的因子个数。显然描述法也可以写成是, 因此事实上高中课本上所谓的自然语言法就是一种特殊的描述法。

列举法则要求列举出所有的元素并且用大括号括起它们，元素之间由逗号分隔。列举法常常用在元素个数不多或元素之间没有明显的共同特征的情况。

描述法则基于以下的所谓**概括原则**：任给一个性质, 那么存在一个集合, 它的元素恰好是具有性质的所有对象，即

其中表示具有性质, 形式逻辑中也常常采用这种简练的表达方法。

4. 区间和邻域

区间

数轴上连续的一段数称为一个**区间**，记为, 对于区间我们定义以下的简记符号（一般规定其中应有）：

其中两边都是小括号的区间称为**开区间**，两边都是中括号的区间称为**闭区间**，而和称为**半开（半闭）区间**，分别是左半开和右半开。作为临界状态的两数称为区间的**端点**.

以上的区间称为有限区间, 在数轴上表现为两点之间的一段线段（根据开闭情况的不同可能要挖去一个或两个端点），定义线段长为区间的**长度**. 除此之外，我们还可以通过引入和符号来表示无限区间：

显然，在无限区间中，无穷一边的括号只能是开的（因为无穷并不是一个数，只是一个趋势，并不能实际取到）. 另外，实数集可以表示为.

邻域

以点为中心的任何**开区间**称为点的邻域，记作, 我们取一个, 定义

称为的**邻域**. 其中称为邻域的半径. 上式中的第二个等号提示我们，邻域同样也可以用描述法通过绝对值符号表达. 很多时候我们需要把邻域的中心去掉（例如求函数在某一点处的极限的时候），称为的**去心** , 即我们定义

其中左半部分称为**左邻域**, 右半部分称为**右邻域.**

**集合的关系**

对于两个集合, 如果集合中的元素都是集合的元素，则称是的子集，或称包含, 包含于, 记作或. 包含的符号化表示为

如果两个集合的元素完全相同，我们称两个集合**相等**, 记作, 集合相等等价于两个集合互为对方的子集, 即且. 当两个集合为无限集或元素个数非常多，以至于无法直接列举出所有元素时，常常利用“互为子集”的关系来证明集合相等. 这类似于利用实数中的和来迫使, 从而能够“从不等关系中推导出等量关系”[[2]](#footnote-2)

如果并且在中至少存在一个元素不属于, 即对于都有, 并且使得, 则称集合是集合的真子集，或称真包含, 真包含于, 记作.

值得注意的是空集和一般集合之间的子集关系，根据子集的定义容易得到：空集是任何集合的子集（包括空集），这是因为空集没有元素，因此对于命题“都有”，不存在，条件为假，根本不需要对结论进行判定（形式逻辑告诉我们：只要条件为假，则无论结论是真还是假，命题都为真）；另外，空集是任何非空集合的真子集，这是因为在子集的基础上，使得, 而空集由于没有元素，无法给定一个“存在”元素，因而不能真包含自身.

根据空集是一切集合的子集可知空集是唯一的，若不然，假设有两类空集, 则二者互为子集，因而二者只能相等. 故空集是唯一的.

**集合的运算及运算律**

1. 集合的基本运算

对于两个已知集合, 我们规定以下集合的运算法则：

所有既属于集合又属于集合的元素所构成的集合称为集合和集合的交集，记作. 即. 如果两个集合的交集为空，则称这两个集合是**不交**的.

所有属于集合或属于集合的元素所构成的集合称为集合和集合的并集，记作, 即.

n个集合的交、并可以简记为

所有属于集合但不属于集合的元素所构成的集合称为集合关于集合的**差集**或**相对补集**，记作或（注意这是反斜杠，以区别于除法使用的正斜杠）, 即. 许多情况下这里的是的子集，但并不是必须如此.

和的对称差集定义为

根据Venn图容易看出这两类定义是等价的.

如果一个集合含有我们研究的所有元素，则这个集合称为**全集**，通常记作, 则所有属于集合但不属于集合的元素所构成的集合称为集合相对于全集的**（绝对）补集**，记作. 如果上述的集合根据上下文是显然的，则也可以简单记作或. 所谓的“含有我们研究的所有元素”实际上也是不必要的，这句话的目的在于强制要求从而使得对于一切集合补集运算都具备合法性.

根据集合的确定性我们有

即某个元素或者是集合A的元素，或者是集合A的补集的元素，二者必居其一.

集合的元素的元素构成的集合称为的广义并，记作. 特别地有. 类似地，非空集合的所有元素的公共元素构成的集合称为的广义交，记作. 空集没有元素，不能进行广义交运算.

集合X的所有子集所构成的族称为的**幂集**，通常记作或.

在上述运算中，广义并、广义交、幂集和绝对补运算是一类运算（一元操作符），并、交、相对补、对称差运算是二类运算（二元操作符）. 一类运算的优先级高于二类运算.

2. 运算律

可以证明集合间的运算满足以下运算律（表示任意集合, 表示全集）：

幂等律

结合律

交换律

分配律

Prov. 分配律有必要证一下（作为同济高数的一道证明题存在着），以第一个式子为例：

同一律

零律

排中律

矛盾律

吸收律

其他的运算律同样可以根据集合相等的定义，按照类似的方法进行验证.

德摩根公式

以第一个式子为例：

容斥原理

一般地

注意到容斥原理的左端是数个集合的并，而右端都是集合的交，因此容斥原理可以被认为是表达集合交、并两种运算关系的一个重要结论.

4. 集合的子集个数

计算一个n元素集合的子集个数本质上是求组合数：

另一种求子集个数的思路是考虑每一个元素的归属，对于任意一个子集而言，某一个元素x可以在这个子集中，也可以不在这个子集中，因此每一个元素有2种选择，n个元素则共有种选择，因此某一集合的子集个数为.

这种证明思路符号化以后就成为了集合X的子集A的**特征函数**：

实质就是集合X到{0,1}的映射，这一映射**产生**子集A.

稍微推广一下，一个n元素集合共有个子集，个非空子集，个真子集，个非空真子集.

这往往在计算集合含有某些确定元素情况下的子集个数非常有用，请看这两道例题

**例题1** 已知集合, 则满足条件的集合的个数为？

容易得到, 则问题转化为求的子集个数，个.

**例题2**  已知集合, 对它的任一非空子集A, 可以将A中的每一个元素k, 都乘以(-1)k再求和（例如，A={2,3,8}, 则可求得和为），对S的所有非空子集，求这些和的总和。

**二元关系**

1. 有序对 笛卡尔积

由两个元素按照一定顺序排列成的二元组称为一个**有序对**或**序偶**，记作. 称为它的第一元素, 称为它的第二元素. 有序对定义中关键在于顺序，如果两个元素不相等，则交换后所得到的是不同的有序对. 两个有序对相等的充要条件是两个元素按顺序依相等.

对于两个集合, 定义如下的**直积**或称**笛卡尔积**：

表示一个平面，通常记作**.** 两个闭区间的笛卡尔积表示平面上的一个矩形区域.

显见，若而, 则

笛卡尔积运算具有以下性质：

1. 空集作为乘法零元

2. 一般情况下，笛卡尔积运算不满足交换律，即. 当且仅当中存在一个空集或时等号成立.

3. 不满足结合律.

4. 对并和交满足分配律

5. 若且, 则.

2. 二元关系

1. 基本概念和运算

如果一个集合的元素都是有序对，或者集合是空集，则称该集合是一个**二元关系**，简称**关系**，记作. 对于二元关系, 如果则可以记作. 中所有有序对的第一元素构成的集合称为的**定义域**，记作, 所有有序对的第二元素构成的集合称为的**值域**，记作. 定义域和值域的并称为的域，记作, 即.

的**逆关系**或**逆**, 即将原关系中所有第一元素和第二元素交换.

对于两个二元关系,定义对的**右复合**

如果把二元关系看成一种作用，则右复合表示作用F, G自左向右先后发生. 有些教材采用同样的符号但规定为**左复合**，在这种定义下复合的顺序是自右向左.

定义在上的**限制**

将定义域锁定在了的子集中（注意定义域不一定和相等，这是因为原有的关系的第一元素可能并没有包含中的所有元素）. 是的一个子关系.

在下的**像**

这是的一个子集.

2. 运算性质

容易证明以上关于关系的运算满足以下性质

关系的复合满足结合律

设为A上的关系，则

右复合对集合的并运算满足分配律

而对交运算呈现收缩关系

限制运算对集合的交并运算满足分配律

设为集合, 的任何子集所定义的二元关系称为**从到的二元关系**. 特别地，当时则称为**上的二元关系**. 显然，若, 则, 从而集合上的二元关系个数为.

特别地，空集称为上的**空关系**. 笛卡尔积本身称为称为上的**全域关系**. 此外还可以定义恒等关系、小于等于关系、整除关系、包含关系等.

给出一个关系的方法有3种：集合表达式、关系矩阵和关系图. 例如恒等关系定义为

设, 是上的关系. 令

则矩阵定义为的**关系矩阵**.

类似地, 的**关系图**记作, 其顶点即集合的元素，如果, 则有一条从到的有向边.

对于上的关系, 递归地定义

由这一定义可知, 上的任何关系的零次幂都相等并等于恒等关系, 任何关系的一次幂都等于关系自身. 对于, 如果是用集合表达式给出的，则可以通过n-1次右复合直接计算出, 如果是用关系矩阵给出的，则只需要计算矩阵的幂, 但这里在执行矩阵乘法时使用的加是**逻辑与**运算. 如果是用关系图给出的，显见的的图顶点集不发生改变，考察图的每一个顶点, 如果在中从出发严格经过n步长的路径到达顶点, 则在中加一条从到的边，把所有这样的边都找到以后就得到图.

我们知道的子集个数是有限的，因此总会有两个不同的幂相等. 进一步地，事实上当足够大时, 必然与某个相等.

可以证明关系的幂运算满足如下性质：

1. 这里所谓的“有一些共同特征”其实并没有给定什么限制，我们事实上完全可以随意令几个对象归于同一个集合然后说它们的共同特征是“我看起来很爽”，因此这不是构成集合的限制条件。（事实上明晰数学中的集合只有一个要求：即确定性）但是在实际应用中显然只有元素具有共同特征的集合操作起来更具有普遍意义，共同特征也是后面所说的以**描述法**表示集合的基础。 [↑](#footnote-ref-1)
2. 当我们对于某些对象的性质掌握的是不等式更多而等式有限时，这种策略就显得十分重要. 例如数论中整除性所引起的大小关系就是数论证明中的一个重要工具. [↑](#footnote-ref-2)