**力和平衡**

1. 力的概念

力是物体和物体之间的相互作用，其作用是使物体的**形状**或**运动状态**发生改变，力的三要素是大小、方向和作用点（当我们说A的要素是x时，这意味着：x代表了A的某些性质，x发生变化意味着A也会发生了变化），因而力是**矢量**。

力的作用点实际上是一块面积，当这作用面积较大时，形成**分布力**；当作用面积很小时，可近似看成作用在一个点上，称**集中力**. 中学阶段一般都研究集中力，即使有分布力也视作集中力处理.

我们常常使用**力的图示**来精确表示力的三要素，一般先规定一个单位长度，并画出一定长度的有向线段来表示力的大小和方向，**箭头或箭尾**所在点则表示力的作用点。但大多数时候都使用力的示意图，在示意图中对长度没有严格要求（但如果有多个力存在的话，一般还是要将各个力的相对大小大致表示一下，以便于受力分析时不致于引起误解），只需要表示出方向和作用点即可。

2. 四种基本相互作用

我们已经知道：一切作用力都可以归结成是四种最基本的相互作用：引力、电磁力、强相互作用和弱相互作用。在三种常见的力（重力、弹力、摩擦力）中，**重力是地球对物体引力的一个分力**（另外一个分量被用作驱动物体随地球绕地轴自转），弹力和摩擦力的微观本质都是**电磁力**。强相互作用和弱相互作用在宏观上很少有体现，它们是构成原子核的基本粒子中的相互作用。

3. 力的合成和分解

如果一个力的作用效果和几个力共同作用的效果是相同的，那么我们就称这个力是几个力的**合力**，而这几个力是这个力的**分力**，已知各个分力求合力的过程称为**力的合成**，而已知一个力求其等效分力的过程称为**力的分解**。很显然，力的分解是力的合成的逆运算。力是矢量，其合成和分解则规则完全服从一般矢量加法的平行四边形定则/三角形定则。

概念上看事情十分简单，但需要注意到，力的合成过程是确定的，但力的分解方式却并不唯一，一般情况下需要按照力的**实际作用效果进**行分解。

合力公式 矢量运算的性质

对于夹角为的两力的合力有（为合力与之间的夹角）

①结合余弦函数在上的单调性可知, 当大小一定时，合力大小随二力夹角的增大而减小.

若，方向与二力相同.

若，方向与较大的力相同.

综上有合力大小的取值范围

②当和二力夹角一定时

请注意以上性质适用于一切可叠加的物理量的矢量运算. 如电场强度、磁感应强度等.

正交分解法

①取共点力的作用点为原点，建立平面直角坐标系，原则上使坐标轴与尽可能多的力重合.

②将与坐标轴不重合的力分解成在轴方向上的力和在轴方向上的两个力

③求两坐标轴上各力投影的合力

④若物体不平衡，要求共点力合力，则（为合力与之间的夹角）

若物体平衡，即，可得平衡方程

4. 平衡条件

牛顿第一定律告诉我们：物体在不受外力作用时，将保持静止状态或匀速直线运动状态（统称为平衡状态）。这实际上给出了物体平衡的充要条件：不受外力，或所受外力的合力为零，即

考虑两个特殊情况：二力平衡，则两力必定大小相等、方向相反、作用在同一条直线上。三力平衡，则其中两个力的合力必然和另外一个力构成二力平衡条件，因此第三个力必然要通过前两个力的交点，这告诉我们：三力平衡必定**共面且共点**。

从几何角度来看，矢量和为零意味着如果我们把所有力的矢量首尾相接，则其必定构成一个封闭的多边形，因此我们也可以说：

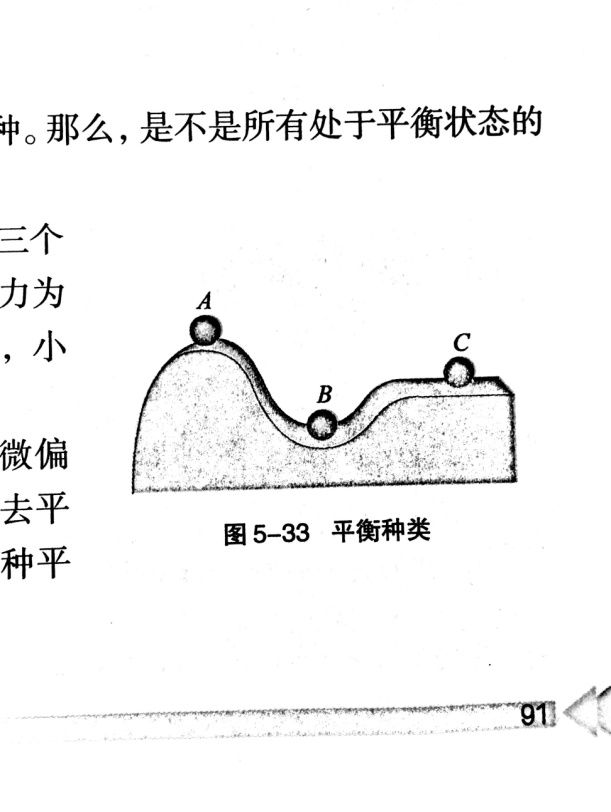
对于三力平衡的特殊情况，则三个力构成一个封闭三角形，这样我们往往就可以把力学问题转化为三角学的问题分析求解。（后面我们会看到一些例子）

加减平衡力系公理

在作用于刚体的任意力系上加上或减去任何平衡力系，并不改变原力系对于刚体的作用效应.

依次我们可以导出刚体上力的**可传性**：作用在刚体上的力，可沿其作用线移至任意点而不改变它对刚体的作用效应. （因此，对刚体而言，力的三要素可以写成：力的大小、力的方向、力的作用线）

5. 平衡种类和稳度

 我们把平衡分为三类：稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡。稳定平衡是物体受到轻微扰动导致平衡状态被破坏时，物体能够自动回到平衡位置（扰动自减弱）的一类平衡状态；而不稳定平衡则相反，平衡状态被破坏时物体不能自动回到平衡位置（扰动自加强）；随遇平衡则在扰动消失以后并不回到原来位置，但继续保持平衡状态。这三类平衡的概念可以用右图中的三个小球来展示。

稳度和物体重心的高低和支持面的大小有关。当物体的重力作用线超出了支持面的范围时，物体就会倾倒（严格证明需要利用力矩概念，这里暂时不作严格化处理）。

**牛顿运动定律**

1. 牛顿第一定律（惯性定律）

一切物体总保持匀速直线运动状态或静止状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态.

2. 牛顿第二定律

物体加速度的大小跟它所受到的作用力成正比，跟它的质量成反比，加速度的方向跟作用力的方向相同. 即（式中各量取国际单位制）

牛顿自己在《自然哲学的数学原理》中对这一定律的表述是：“运动的改变与外加的引起运动的力成比例，并且发生在沿着那个力被施加的直线上.”这里的“运动”指物体的质量和速度之积，即物体的**动量**，因此其原始公式实际上写作

上式即牛顿第二定律的微分形式，是牛顿第二定律更普适的形式，适用于分析变质量体运动，当物体质量恒定（应确保运动速度）时，公式退化为.

我们定义力和力的作用时间的积为力的冲量, 考虑一从，上式两端积分得**动量定理**

即物体在运动过程中所受到的合外力的冲量，等于该物体动量变化. 冲量和动量都是矢量。动量定理是一个矢量式. 习惯上动量使用的是, 而冲量使用的是. 上述推导告诉我们：日常尺度[[1]](#footnote-1)下的牛顿第二定律和动量定理是等价的，但事实上动量定理是更基本的自然定律，即使在相对论情形下也是适用的，在这类情况中，物体的质量将随着速度发生改变.

从单一质点的动量定理可以推广得到质点系的动量定理：设有一质点系经历某一过程，该过程作用于质点系的**所有外力**提供的冲量为, 则**.**

3. 牛顿第三定律

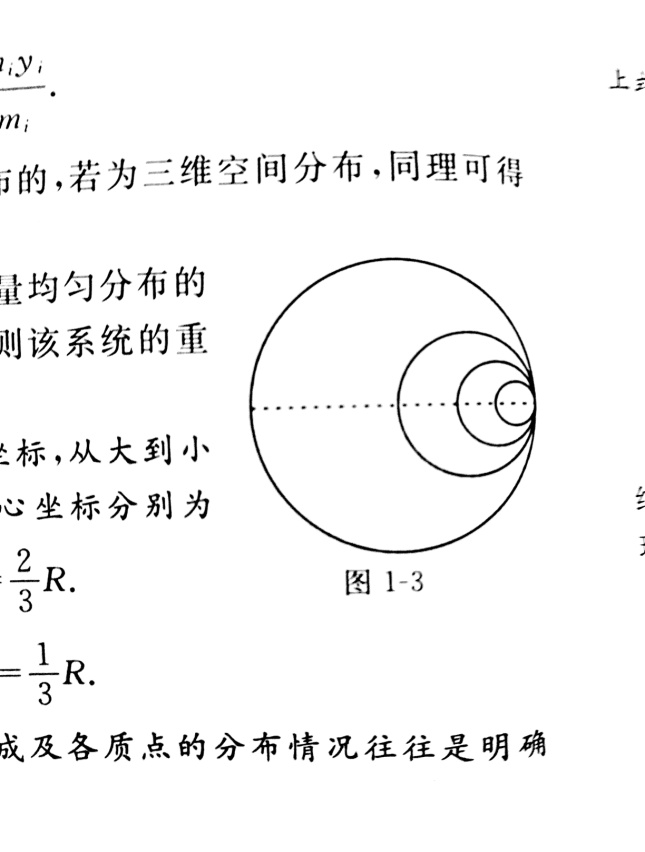
两个物体之间的作用力和反作用力总是大小相等，方向相反，作用在同一条直线上.写成矢量表达式为

**重力**

重力是地球对物体万有引力的一个分力，另一个分力被用于驱动物体随地球高速自转.由于自转所产生的加速度远小于重力加速度，因此重力几乎可以视为地球对物体的引力.

在地球表面附近. 式中 值与物体所处地理位置有关，随纬度升高而增大，随海拔上升而减小. 重力的方向总是竖直向下. 等效作用于物体的重心上.（实际上一个物体的各个部分都要受到重力作用，重心即是物体各部分所受重力合力的作用点）.

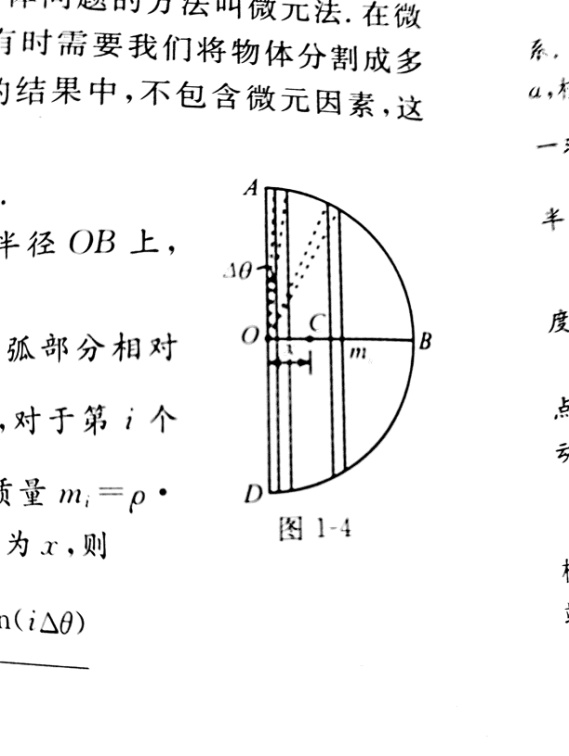
确定物体的中心，本质上就是要把一个实际上的分布力等效为集中力. 物体的重心与物体的形状及质量分布有关. 对于形状规则且质量分布均匀的物体，其重心在几何中心上. 如果物体形状不规则或质量分布不均匀，可以令质量对坐标进行加权平均得到重心坐标，即：

**E.G.1** 如图，无穷多个由相同材料制成的质量均匀分布的圆环，半径依次为R, R/2, R/4, R/8...相切于一公共点，求该系统的重心与半径为R的最大圆的圆心的距离.

基于对称性，重心位置显然各个圆心连线所成的直线上，在以右切点为坐标原点，水品向左为x轴建立坐标，则

故系统中心距离半径为R的最大圆圆心为1/3R

这种方法适用于系统的质点构成、且质点分布情况是明确的情况下. 对于复杂曲线的处理需要用到微积分手段（微元法），难于处理. 下介绍一例.

**E.G.2** 求质量分布均匀、半径为R的半圆薄板的重心位置

基于对称性，重心位置显然在水平方向的半径上. 将半圆盘分割成n条与直径AD平行的细长条，每条圆弧相对圆心O的角度, 设薄圆盘单位面积的质量为, 第个微元的弦长为, 水平方向的宽度为, 面积表为

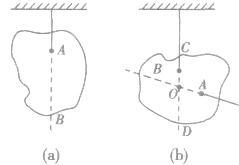
从而重心坐标

注意到

从而

注意到, 令时, 对正弦函数可作线性近似，从而有

以下介绍几种绕过繁琐的坐标运算确定物体重心的方法.

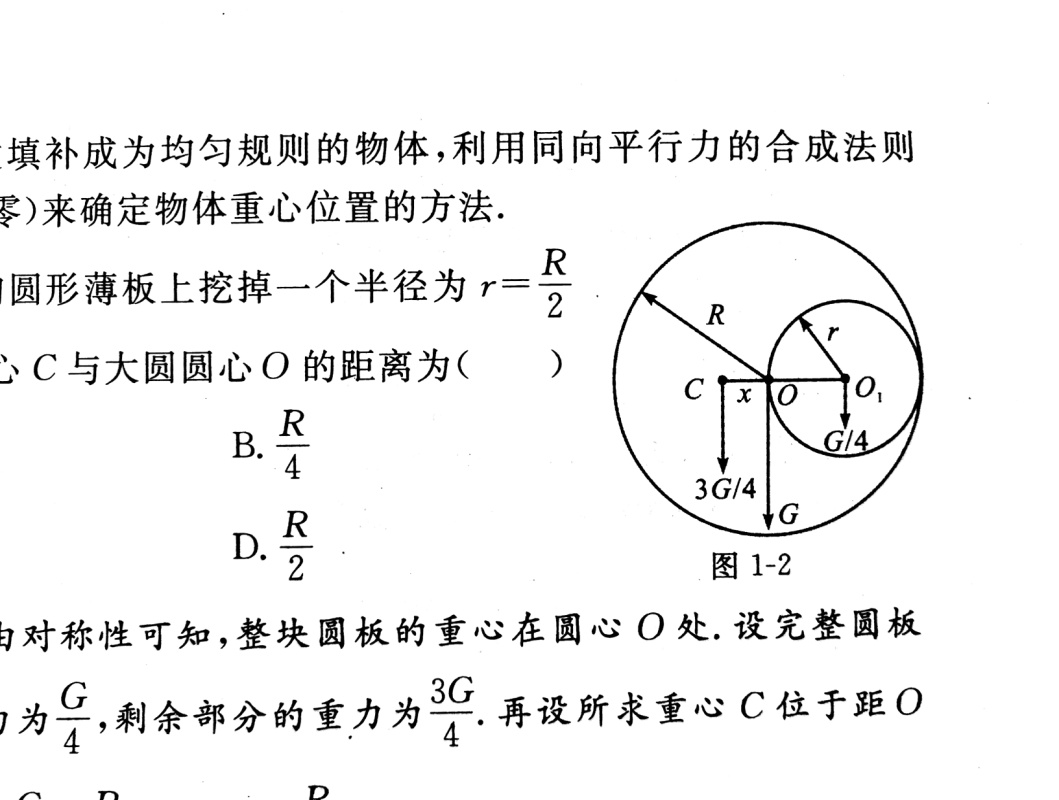
悬挂法

分两次以不同的点为连接点，将物体悬挂起来，每次悬挂时，绳的延长线方向指明了重力作用线的方向，则重心必然在这条线上，取两次直线相交的点即为所求的重心.

悬挂法是一种实验方法. 适用于薄形物体的重心. 对于厚实物体，其重心在内部，使用悬挂法难以准确定位.

填补法

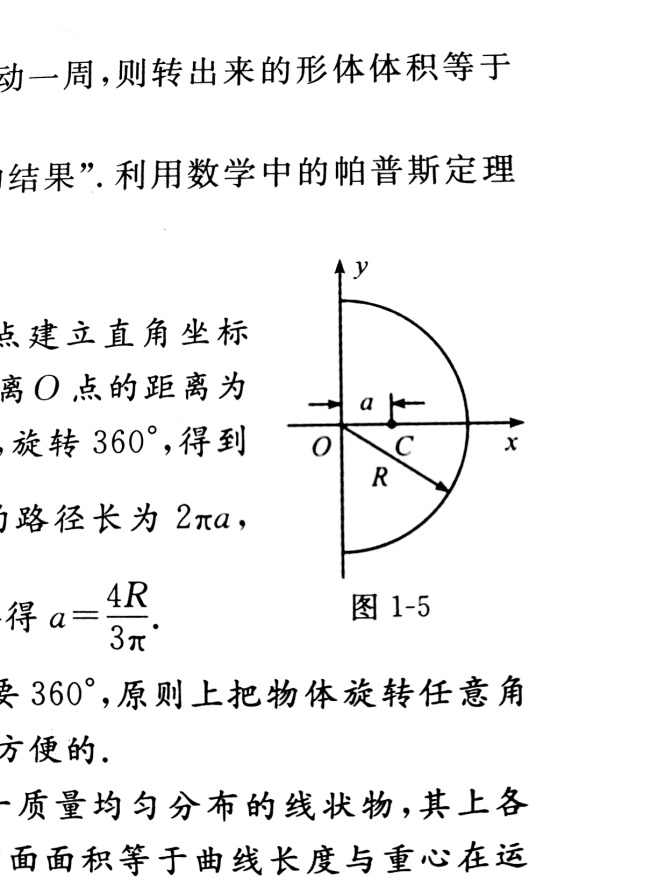
填补法的核心思想在于等效替代. 将不规则的物体填补成规则形状物体，利用力矩平衡原理来间接计算出重心.

**E.G.3** 如图，一个均匀圆形薄板上挖掉一个半径r=R/2的内切圆板，求剩余带孔薄板的重心C与大圆圆心O的距离.

**Sov.** 若将小圆板补回，则整块板的重心位于圆心O处，设整板重力G, 小圆板重力G/4, 剩余部分重力3G/4, 则G对O之矩（为零）即为两部分的合力矩，因此有

从而.

帕普斯定理

 帕普斯(Pappus)定理表明：若一平面闭合曲线绕同一平面内曲线外的轴转动一周，则所形成的几何体体积等于闭合曲线面积乘以其重心所经过的圆周.

**E.G.2** 求质量分布均匀、半径为R的半圆薄板的重心位置

建立坐标系. 由对称性知中心位于x轴上，设中心离O点距离为a, 以直径为轴旋转一周得到一个球体，由帕普斯定理有

从而

更多求重心相关的问题和技巧见于题库《重心的求解.docx》

**弹力**

1. 形变

我们知道，力的作用效果之一是使物体的形状发生改变，简称形变。根据撤使物体产生形变的外力以后物体能否恢复原来的形状，可以将形变分为**弹性形变**和**范性形变**两类，可以发生弹性形变的物体称为弹性体（但当所施加的外力大于弹性体的**弹性限度**时，弹性体也不能够恢复原来的形状，这时弹性体同样会发生范性形变，因此弹性体可以发生两类形变，但非弹性体只能发生范性形变）

2. 弹力

发生弹性形变的物体，由于要恢复原状，对与它接触的物体会产生力的作用，这种力叫做**弹力**. 这时物体内部各部分之间也有力的作用，这种力也是弹力.

特别地，物体由于受到拉力作用在内部任一截面两侧存在的相互牵引力称为**张力**。在绳索问题中，张力和弹力可以视为同义词.

由此可见，弹力的产生必须有两个条件：第一是物体之间必须相互接触，进一步地，接触处必须有相互挤压或拉伸. 倘若没有相互作用导致的弹性形变，即使接触也不会有弹力存在.

形变不明显物体弹力有无的判断方法

①假设法：假设将与某物体接触的另一物体撤去，看该物体还能否保持原来状态，若能则无弹力，若不能则存在弹力.

②状态法：因为物体的受力必须与物体的运动状态相吻合，所以可以依据物体的运动状态，由相应的规律判断物体间的弹力（如二力平衡条件、三力交汇定理等）.此法可以直接判定出弹力的方向.

③替换法：将硬的、形变不明显的施力物体用软的、易产生明显形变的物体来替换，如将侧壁、斜面用海绵来替换、将硬杆用轻弹簧来替换.

三要素

弹力的大小和发生弹性形变物体的材质、弹性形变的程度有关. 特别地，对于弹簧有**胡克定律**：弹簧发生弹性形变时，弹力的大小跟弹簧伸长（或缩短）的长度成正比，即

式中的称为弹簧的**劲度系数**，单位N/m.

弹力的方向与作用在物体上使物体发生形变的外力方向相反，作用在迫使物体发生形变的那个物体上. 具体而言：绳的拉力方向沿绳且指向绳收缩的方向，压力或支持力的方向则垂直于接触面.

**摩擦力**

当表面粗糙的物体之间产生相对运动或者有相对运动趋势时，在**接触面上**就会产生阻碍相对运动或相对运动趋势的**切向**力，这种力就称为**摩擦力**。根据定义我们看到，摩擦力分为两类：一类是阻碍（已经真正发生了的）相对运动的，称为**滑动摩擦力**，一类则是阻碍运动趋势的，称为**静摩擦力**。

当外界给物体施加的主动力逐渐增大时，在一定范围内静摩擦力随着主动力的增大而增大，物体仍然保持静止，而当主动力超过一定值以后，静摩擦力就无法再随之增大，物体也就运动起来，这个值是静摩擦力的上限，因此称为**最大静摩擦力**. 因此，静摩擦力的大小随主动力的情况而改变，但介于0和最大静摩擦力之间，即

实验表明，最大静摩擦力的大小与两物体间的正压力（即法向约束力）成正比，即

这称为**静摩擦定律**（库伦摩擦定律），式中的是静摩擦因数，与物体表面情况有关。静摩擦定律告诉我们，两物体间的最大静摩擦力和**面积无关**。

当物体运动起来以后，就受到滑动摩擦力的作用。同样地，滑动摩擦力的大小也和正压力成正比，但其中的系数则是动摩擦因数。动摩擦因数通常小于静摩擦因数，因此滑动摩擦力一般小于静摩擦力。

实际上，动摩擦因数还和接触面的相对运动速度大小有关，不同的材料的变化规律不同，但多数情况下动摩擦因数随滑动速度的而增大而减小。当滑动速度不大时，可以近似认为是一个常数。因此，上述的静摩擦定律和动摩擦定律实际上都只是工程中的宏观**近似**理论。

1. 摩擦角和自锁

根据摩擦力的存在条件可知，当两物体之间存在切向摩擦时必然有法向的弹力存在，我们把物体所受的摩擦力和弹力的合力称为支持面的全约束力（全反力）, 其作用线和法线成一夹角, 则显然有

这里的摩擦力可以是静摩擦或滑动摩擦。当表示静摩擦力时，由于可以在一定的范围内变化，随着的增大，则全反力和法线的夹角也在增大，当静摩擦达到最大时，夹角也取得最大值，定义为摩擦角, 则我们有

上式表明：摩擦角的正切等于静摩擦因数。

当物块的滑动趋势改变时，全反力的作用线方向也随之改变，临界状态下的全反力作用线画出一个以接触点A为顶点的圆锥面，这个圆锥称为**摩擦锥**。若物块与支持面沿任何方向的静摩擦因数都相同（即摩擦角都相等），则摩擦锥是一个顶角为的圆锥. 显然，全反力的作用线**落在摩擦锥内**（全反力与法线的夹角小于摩擦角）是物块保持平衡的充要条件，即

因此，只要满足角度条件，无论全反力有多大，物块都将保持平衡状态，这种现象称为**自锁**现象；而只要不满足角度条件，无论全反力有多小，物块的平衡都将被破坏。

**万有引力**

1. 开普勒定律

开普勒通过研究第谷对于行星轨道的观测数据，提出了他的关于太阳系行星运动的三大定律（称为开普勒三定律）：

K1 所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，且太阳位于椭圆的一个焦点上；

K2 太阳与任何一个行星的连线（称为矢径）在相等的时间内扫过的面积相等；

K3 行星绕太阳运动轨道的半长轴的立方与其公转周期的平方成正比，即

开普勒定律实际上不仅仅适用于太阳系，而是适用于任何在单一天体引力作用下绕其运动的物体的运动规律（这一普适性由引力定律的普适性保证，下一节我们将会看到引力定律和开普勒定律实际上是等效的）

2. 万有引力定律

牛顿利用开普勒三定律推导得到万有引力定律：

两物体之间引力的方向沿两物体的连线并指向另一个物体，引力的大小与这两个物体质量之积成正比，和这两个物体之间距离的平方成反比，即

式中为万有引力常量，近似值为.

注意到这里的“两物体之间的距离”是指将两物体都视为质点时，质点之间的距离。积分手段向我们保证，可以把质量分布均匀球等效为质量集中在其球心的质点，无论它和另一个物体之间的距离如何，这都是没有问题的（但另一个物体或质点不能在均匀球的内部）。一个常用的实践是，在计算地球和地表物体之间的引力时，可以将地球质量等效于集中在球心进行计算。

万有引力定律的推导

下面展示一下把行星运行轨道近似视为圆时，从开普勒定律推导出万有引力定律的方法（强调一下：牛顿的推导是基于椭圆轨道利用原始的微积分手段进行的，比这个简化过程要复杂）：

根据向心力公式

我们试图从其中消去而保留以接近引力定律的表达式, 注意到K3提到了周期, 于是我们利用关系从上式中消去:

试图凑出从而得到常数：

根据牛顿第三定律，行星与太阳之间的引力性质相同，因此这个引力也应当和太阳的质量成正比，将其中的常数写成即得到万有引力定律。

在天文观测中的应用

对照正式的引力表达式和上式

因此K3中的常数事实上是

（当然该式也可以通过万有引力定律和向心力的表达式直接给出，这里不赘述）显然，K3中的常数和**中心天体的质量**成正比。利用该表达式我们可以通过天文观测数据中得到的**公转半径**和**周期**计算中心天体的质量：

注意到式中的半径以立方形式出现，我们试图将分子以一个假想的，以公转半径为半径的球的体积表达则得到：

进一步地，如果该卫星是一个**近地卫星**，则体积可以近似视为中心天体的体积，这样一来我们可以把体积移到等式的左边从而得到

这表明我们只需要知道**近地卫星的公转周期**就可以计算出中心天体的密度。

3. 重力

对于在地球上，随地球自转的物体而言，地球对其的万有引力产生两个分力：第一是指向地轴的向心力，其效果是使物体得以随地球快速自转；另一个就是物体的重力，其效果是使物体以重力加速度下落.

下面利用万有引力定律计算地球表面附近物体的合加速度，以表示物体质量, 表示地球质量，根据牛顿第二定律

两边消去（这也正是在同一地点所有物体的重力加速度都一样的原因，本质在于万有引力的大小和两物体的质量之积成正比，因此当其中一个物体的质量固定下来时，牛顿第二定律确保了另一个物体的加速度和它自身的质量无关）：

下面我们计算一下赤道表面物体的向心加速度，并且将其和合加速度作比较（地球上其他纬度的向心加速度则要比赤道表面的更小，因为角速度不变而半径减小）：

同合加速度相比要小了五个数量级，因此我们完全**可以将合加速度视为重力加速度**.

4. 月—地检验和平方反比性质

牛顿当时没有引力常数的具体数值（第一个比较精确的数值在一个世纪后由卡文迪许给出，在下一节介绍），因此不能够通过上一节所说的重力加速度的计算来检验引力定律。于是牛顿利用我们的卫星进行了“月—地”检验，原理如下：

在上一节中我们得到

由于式中的都是常数，因此我们有

即加速度和物体之间的距离的平方成反比，由于月球轨道的半径是地球半径的60倍，因此月球绕地球公转的向心加速度

这一数据和观测值是相等的：

在上一节中我们从重力加速度的计算中体会到，当中心天体确定下来时，物体的加速度和自身质量无关，从月—地检验中，我们则意识到物体的加速度仅和距离（公转半径）有关，并且服从平方反比规则。

5. 人造天体的三个宇宙速度

第一宇宙速度（又称为环绕速度）是卫星做近地运动所需的最小速度，由简单的关系即可给出：

第二宇宙速度是卫星脱离地球的引力范围，成为绕太阳运动的人造行星所需的最小速度。所谓“脱离地球的引力范围”可以认为是无穷远，即对地球的引力势能为0, 则由动能定理

从而

通过完全类似的方法可以计算出卫星脱离太阳的引力范围，飞出太阳系所需的最小速度，称为第三宇宙速度，其近似值为

1. 即中等大小、物体运动速度远小于光速的情况下。 [↑](#footnote-ref-1)